ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME QUARANTESIMOTERZO

1907-908

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1908

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1907.

NB. — *La prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica e incaricato di Analisi superiore, Direttore del R. Politecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, Membro del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione, ecc., Uffiz. ✠, Comm. ✠. — *Torino, Corso Oporto, 30.*
Rieletto alla carica il 17 marzo 1907 — 19 aprile 1907.

VICE-PRESIDENTE

Boselli (Paolo), Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell'Accademia Dafnica di Acireale, Presidente Onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Membro del Consiglio e della Giunta degli archivi, Presidente del Comitato Centrale della Società " Dante Alighieri ", Presidente del Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico di Torino, Presidente del Consiglio Superiore della Marina Mercantile, Consigliere e Tesoriere generale degli Ordini dei Ss. Maurizio e Lazzaro e della Corona d'Italia, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Cord. ✠ e ✠, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Piazza Maria Teresa, 3.*
Rieletto alla carica il 17 marzo 1907 — 19 aprile 1907.

Tesoriere

Parona (Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore del Museo di Geologia e di Paleontologia della R. Università di Torino, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, e Corrispondente dell'I. R. Istituto Geologico di Vienna, Membro del R. Comitato Geologico, ecc., Cav. ✠. — *Torino, Museo Geologico della R. Università, Palazzo Carignano.*
Eletto alla carica 9 giugno 1907 — 30 giugno 1907.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✱, Comm. ✠. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*
Eletto alla carica il 15 dicembre 1907.

Segretario

Camerano (Lorenzo), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio e della Giunta Superiore della Pubblica Istruzione, Rettore della R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro della Società Zoologica di Francia, Socio corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale, Socio straniero della Società Zoologica di Londra, Socio onorario della Società scientifica del Messico, ✱, Comm. ✠. — *Torino, Museo Zoologico della R. Università, Palazzo Carignano.*
Rieletto alla carica il 14 aprile 1907 — 25 aprile 1907.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ✠, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*

29 Gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*

29 Dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), *predetto.*

5 Dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Mosso (Angelo), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), della R. Accademia di Medicina di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, L. L. D. dell'Università di Worcester, Socio onorario della R. Accademia medica Gioenia di Scienze naturali di Catania, della R. Accademia medica di Roma, dell'Accademia di Genova, Socio dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, Membro onorario della Società imperiale dei medici di Vienna, della Società Reale delle Scienze mediche di Bruxelles, della Società fisico-medica di Erlangen, Socio straordinario della R. Accademia di Scienze di Svezia, Socio corrispondente della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente della Società di Biologia di Parigi, ecc., Socio onorario della *Boston Society of Natural History*, Corrispondente straniero dell'Accademia R. di Medicina del Belgio, Membro onorario dell'Accademia Imperiale di Medicina di Pietroburgo, Socio corrispondente dell'Accademia Reale di Medicina del Belgio, Socio straniero dell'Accademia medica di Parigi, Membro onorario della Società dei Naturalisti della Svizzera, ✠, Comm. ✠. — *Torino, Via Madama Cristina, 34.*

11 Dicembre 1881 - 25 dicembre 1881. — Pensionato 17 agosto 1894.

Spezia (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo mineralogico della R. Università di Torino, ✠. — *Torino, Via Accademia Albertina, 21.*
15 Giugno 1884 - 6 luglio 1884. — Pensionato 5 settembre 1895.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*
10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (dei XL), Membro onorario della Società Filosofica di Cambridge, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio e di quella di Danimarca, Corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ✠. — *Torino, Corso Vittorio Eman., 85.*
10 Gennaio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della " *Sociedad Cientifica* „ del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo, della Società matematica di Kasan, della Società filosofica di Ginevra, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ✠. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*
25 Gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, dell'Accademia Dafnica di Acireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Uff. ✠. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*
3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, ✠, Comm. ✠. — *Torino, Corso Valentino, 40.*
3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Cittadino Onorario di Crespellano (Bologna), Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Socio della *Deutsche Gesellschaft b. Geschichte d. Medizin und Naturwissenschaften*, Membro della Società Chimica di Berlino, della *Berl. Gesellsch. f. Gesch. d. Naturwiss.*, ecc., Uff. ✠, ✠. — *Torino, Corso Valentino, 11.*
12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale nel R. Politecnico in Torino, Uff. ✠ e ✿. — *Torino, Corso Valentino, 7.*
31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Fileti (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di Chimica generale, ✿. — *Torino, Via Bidone, 36.*
31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 10 marzo 1904.

Parona (Carlo Fabrizio), *predetto.*
15 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina e Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina e della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di Scienze naturali di Mosca, della *Royal Botanical Society* di Edinburgh, della Società Veneto-Trentina, ecc., ✿. — *Torino, Orto Botanico della R. Università al Valentino.*
10 Marzo 1901 - 16 marzo 1901.

Morera (Giacinto), Ingegnere, Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Meccanica razionale, incaricato di Meccanica superiore e Preside della Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Professore onorario della R. Università di Genova, ✿. — *Torino, Via della Rocca, 22.*
9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Politecnico di Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli. Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✿. — *Torino, Via Amedeo Avogadro, 9.*
9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902.

Somigliana (nob. Carlo), Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Fisica matematica nella R. Università di Torino, rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del R. Politecnico di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. — *Corso Vinzaglio, 10.*
5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Fusari (Romeo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore ordinario di Anatomia umana, descrittiva e topografica e Direttore dell' Istituto anatomico della R. Università di Torino, Socio dell'Accademia di Medicina di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, fondatore della Società medico-chirurgica di Pavia, onorario dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara, ✿. — *Via Baretti, 15.*
5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Reale di Napoli, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Corrispondente dell'Istituto di Francia, dell'Accademia delle Scienze di Berlino, di Vienna e di Pietroburgo, Associato dell'Accademia Reale delle Scienze del Belgio, Socio straniero della R. Accademia delle Scienze di Baviera, della Società Reale di Londra, della Società Reale di Edimburgo e della Società letteraria e filosofica di Manchester, Socio onorario della Società chimica tedesca, di Londra e Americana, Comm. ✠, Gr. Cr. ✠, ✠. — *Roma, Istituto chimico, Via Panisperna, 89 B.*
3 Luglio 1864 - 11 luglio 1864.

Schiaparelli (Giovanni), Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell' Accademia Reale di Napoli e dell' Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroburgo, di Stoccolma, di Upsala, di Cracovia, della Società de' Naturalisti di Mosca, della Società Reale e della Società astronomica di Londra, delle Società filosofiche di Filadelfia e di Manchester, e di altre Società scientifiche nazionali e straniere, Gr. Cord. ✠, Comm. ✠, ✠. — *Milano, Via Fate Bene Fratelli, 7.*
16 Gennaio 1870 - 30 gennaio 1870.

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania e Dottore onorario in scienze della Università di Cambridge, Professore di Fisica matematica e incaricato di Meccanica celeste e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Roma, Presidente della Società italiana di Fisica, Presidente della Società italiana per il progresso delle Scienze, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Gottinga, Membro onorario della Società Matematica di Londra e Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux, ✠, ✠. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 Febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Fergola (Emanuele), Senatore del Regno, Professore di Astronomia nell' R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei e dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto, Comm. ✱, Gr. Uffiz. ✠. — *Napoli, Regio Osservatorio di Capodimonte.*
12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ✱, ✠. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi Superiore nella R. Università di Pisa, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente della R. Società delle Scienze di Gottinga, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro straniero della *London mathematical Society*, Dottore onorario dell'Università di Christiania, Membro del Consiglio Superiore e della Giunta di Pubblica Istruzione, Uff. ✱, Cav. ✠, ✠.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Asso-*

ciation di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società freniatrica italiana e dell'Associazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia. Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Università di Dublino, Socio corrispondente della Società medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna, Cav. ♁, ⚭, Comm. ✠.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Lorenzoni (Giuseppe), Dottore negli Studi d'Ingegnere civile ed Architetto, Professore di Astronomia della R. Università e Direttore dell'Osservatorio astronomico di Padova, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio effettivo del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze ed Arti di Modena, Membro della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, ✠, Comm. ♁. — *Padova, Osservatorio astronomico.*
5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 Gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Darboux (Giovanni Gastone), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Poincaré (Giulio Enrico), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Helmert (Federico Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia. Potsdam. — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Hoff (Giacomo Enrico van 't), Professore nella Università di Berlino. — 5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Tardy (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova (Firenze). — 16 Luglio 1864.

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 Dicembre 1880.

Bertini (Eugenio), Professore nella Regia Università di Pisa. — 9 Marzo 1890.

Noether (Massimiliano), Professore nell' Università di Erlangen. — 3 Dicembre 1893.

Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto (Parigi). — 12 Gennaio 1896.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore a Stoccolma. — 12 Gennaio 1896.

Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 10 Gennaio 1897.

Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 Aprile 1898.

Veronese (Giuseppe), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — 17 Aprile 1898.

Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 Giugno 1903.

Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 Giugno 1903.

Mayer (Adolfo), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e scienza dell'ingegnere civile e militare.

Zeuner (Gustavo), Professore nel Politecnico di Dresda. — 3 Dicembre 1893.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Cambridge. — 27 Maggio 1894.

Celoria (Giovanni), Astronomo all'Osservatorio di Milano. — 12 Gennaio 1896.

Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 Giugno 1903.

Newcomb (Simone), Professore di Matematica e di Astronomia nell'Università di Baltimora. — 5 Marzo 1905.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Senatore del Regno, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Kohlrausch (Federico), Presidente dell'Istituto Fisico-Tecnico in Marburg (Bezirk Cassel). — 2 Gennaio 1881.

Roiti (Antonio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 12 Marzo 1882.

Righi (Augusto), Senatore del Regno, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Bologna. — 14 Dicembre 1884.

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 Maggio 1892.

Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 Febbraio 1895.

Thomson (Giuseppe Giovanni), Professore nell'Università di Cambridge. — 12 Gennaio 1896.

Mascart (Eleuterio), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto (Parigi). — 10 Gennaio 1897.

Pacinotti (Antonio), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Pisa. — 17 Aprile 1898.

Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 Giugno 1903.

Lorentz (Enrico), Professore nell'Università di Leiden. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore di Chimica applicata nella R. Università di Roma. — 2 Gennaio 1881.

Körner (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 Gennaio 1881.

Baeyer (Adolfo von), Professore nell'Università di Monaco (Baviera). — 25 Gennaio 1885.

Thomsen (Giuseppe), Professore nell'Università di Copenhagen. — 25 Gennaio 1885.

Lieben (Adolfo), Professore nell'Università di Vienna. — 15 Maggio 1892.

Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 Gennaio 1897.

Ramsay (Guglielmo), Professore nell'Università di Londra. — 24 Gennaio 1897.

Schiff (Ugo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 28 Gennaio 1900.

Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 Giugno 1903.

Ciamician (Giacomo), Professore nell'Università di Bologna. — 14 Giugno 1903.

Ostwald (Guglielmo), Professore di Chimica nell'Università di Lipsia. — 5 Marzo 1905.

Arrhenius (Ivante Augusto), Direttore e Professore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — 5 Marzo 1905.

Nernst (Walter), Professore di Chimica fisica nell'Università di Gottinga. — 5 Marzo 1905.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Strüver (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.

Rosenbusch (Enrico), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.

Zirkel (Ferdinando), Professore nell'Università di Lipsia. — 16 Gennaio 1881.

Capellini (Giovanni), Professore nella R. Univ. di Bologna. — 12 Marzo 1882.

Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 Febbraio 1885.

Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica (Londra). — 3 Dicembre 1893.

Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.

Taramelli (Torquato), Professore nella R. Univ. di Pavia. — 28 Gennaio 1900.

Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga. — 28 Gennaio 1900.

Bassani (Francesco), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 14 Giugno 1903.

Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — 14 Giugno 1903.

Levy (Michele), dell'Istituto di Francia, Professore di Mineralogia all'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.

Goldschmidt (Viktor), Professore di Mineralogia nell'Università di Heidelberga. — 5 Marzo 1905.

Suess (Francesco Edoardo), Professore di Geologia nell'Imperiale Università di Vienna. — 5 Marzo 1905.

Haug (Emilio), Prof. di Geologia nell'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Ardissone (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola superiore di Agricoltura in Milano. — 16 Gennaio 1881.

Saccardo (Andrea), Professore di Botanica nella R. Università di Padova. — 8 Febbraio 1885.

Hooker (Giuseppe **Dalton**), Direttore del Giardino Reale di Kew (Londra). — 8 Febbraio 1885.

Pirotta (Romualdo), Professore nella R. Univ. di Roma. — 15 Maggio 1892.

Strasburger (Edoardo), Professore nell'Univ. di Bonn. — 3 Dicembre 1893.

Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.

Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — 13 Febbraio 1898.

Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — 13 Febbraio 1898.

Wiesner (Giulio), Professore nella I. R. Univ. di Vienna. — 14 Giugno 1903.

Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — 14 Giugno 1903.

Belli (Saverio), Professore nella R. Università di Cagliari. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Sclater (Filippo **Lutley**), Segretario della Società Zoologica di Londra. — 25 Gennaio 1885.

Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di Parigi. — 1° Dicembre 1889.

Foster (Michele), Professore nell'Università di Cambridge. — 1° Dicembre 1889.

Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Univ. di Berlino. — 1° Dicembre 1889.

Guenther (Alberto), Londra. — 3 Dicembre 1893.

Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 Febbraio 1898.

Minot (Carlo Sedgwick), Professore nell' " Harvard Medical School „ di Boston Mass. (S. U. A.). — 28 Gennaio 1900.

Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia Naturale di Londra. — 28 Gennaio 1900.

Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.

Weismann (Augusto). Professore di Zoologia nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden). — 5 Marzo 1905.

Lankester (Edwin Ray). Direttore del *British Museum of Natural History*. — 5 Marzo 1905.

Engelmann (Teodoro Guglielmo). Professore di Fisiologia nell'Università di Berlino. — 5 Marzo 1905.

Dastre (A.). Profess. di Fisiologia nell'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ❋ e Gr. Cord. ♕, Cav. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta, decorato di Ordini stranieri. — *Torino, Via Ospedale, 19.*

Eletto alla carica il 17 marzo 1907 - 19 aprile 1907.

Segretario.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Socio ordinario della Società Archeologica italiana e della Pontificia Accademia romana di Archeologia, ♕. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*

Eletto alla carica il 17 marzo 1907 - 19 aprile 1907.

ACCADEMICI RESIDENTI

Rossi (Francesco), Dottore in Filosofia, Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei in Roma, ♕. — *Torino, Via Gioberti, 30.*

10 Dicembre 1876 - 28 dicembre 1876. — Pensionato 1° agosto 1884.

Manno (Barone D. Antonio), *predetto.*

17 Giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uff. ❋, Comm. ♕. — *Torino, Piazza Statuto, 15.*

7 Dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società Romana di Storia patria, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, dell'Ateneo di Brescia, della R. Accad. dei Lincei, ecc., Comm. ✠ e ♕. — *Torino, Via Bricherasio, 11.*

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 20 maggio 1897.

Boselli (Paolo), *predetto.*

15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore emerito nella R. Università di Torino, Prof. di Storia moderna nel R. Istituto di Studi Superiori in Firenze, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e della R. Deputazione Storica toscana, Comm. ♕. — *Firenze, Via Lorenzo il Magnifico, 8.*

15 Febbraio 1891 - 15 marzo 1891. — Pensionato 4 marzo 1900.

Brusa (Emilio), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Professore di Diritto e Procedura Penale nella R. Università di Torino, già professore di diritto internazionale nella R. Università di Modena e di diritto e procedura penale e di diritto naturale nella Università di Amsterdam, Membro della Commissione per la Statistica giudiziaria e già membro delle Commissioni per la formazione e per la revisione del Codice penale italiano e delle Commissioni e Sottocommissioni per la riforma del Codice di procedura penale, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), membro effettivo e già presidente dell'Istituto di Diritto internazionale, Socio onorario della Società dei Giuristi Svizzeri e Corrispondente della R. Accademia di Giurisprudenza e Legislazione di Madrid, di quella di Barcellona, della Società Generale delle Prigioni di Francia, di quella di Spagna, della R. Accademia Peloritana, della R. Accademia di Scienze Morali e Politiche di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia Ungherese di Scienze e di altre, Delegato governativo ai Congressi penitenziari internazionali dal 1878 (Stoccolma) in poi e presidente della 4ª Sezione dei Congressi medesimi di Bruxelles (1900) e di Budapest (1905), Gr. Uff. ♕ e Comm. dell'Ordine di S. Stanislao di Russia, *Officier d'Académie* della Repubblica Francese, Uff. ✠. — *Torino, Corso Vinzaglio, 22.*

13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 18 aprile 1901.

Allievo (Giuseppe), Dottore aggregato in Filosofia, Professore di Pedagogia e Antropologia nella R. Università di Torino, Socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Palermo, dell'Accademia di S. Anselmo di Aosta, dell'Accademia Dafnica di Acireale, della Regia Imperiale Accademia degli Agiati di Rovereto, dell'Arcadia, dell'Accademia degli Zelanti di Acireale e dell'Accademia cattolica panormitana, Gr. Uff. ✠, Comm. ♕. — *Torino, Piazza Statuto, 18.*

13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 29 giugno 1901.

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Senatore del Regno, Bibliotecario di S. M. il Re d'Italia, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e Lombardia, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro dell'Istituto Storico Italiano, Accademico corrispondente della Crusca, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, e della S[illegible], Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, ecc. ecc., Gr. Cord. ♕. Gr. Uffiz. ✱ e Cav. e Cons. ♕, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Spagna, ecc. — *Torino, Via della Zecca, 7.*

4 Giugno 1857 - 12 giugno 1857. — Pensionato 10 dicembre 1905.

Renier (Rodolfo). Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore di Storia comparata delle Letterature neo-latine nella R. Università di Torino, Socio attivo della R. Commissione dei testi di lingua; Socio non residente dell'I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Deputazione Veneta di Storia patria, di quella per le Marche, di quella per l'Umbria, di quella per l'Emilia e di quella per le Antiche Provincie e la Lombardia, della Società storica abruzzese e della Commissione di Storia patria e di Arti belle della Mirandola, della R. Accademia Virgiliana di Mantova, dell'Accademia di Verona, della R. Accademia di Padova, dell'Ateneo Veneto e di quello di Brescia; Membro della Società storica lombarda e della Società Dantesca italiana; Socio onorario dell'Accademia Etrusca di Cortona, della R. Accademia di scienze e lettere di Palermo, dell'Accademia Cosentina e dell'Accademia Dafnica di Acireale, Uffiz. ✱. Comm. ♕. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 90.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 30 ottobre 1906.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore di Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, ✱, ♕. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 16 giugno 1907.

Chironi (Dott. Giampietro), Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Dottore aggregato della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Membro del Consiglio superiore dell'Istruzione pubblica, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, dell'Accademia Americana di Scienze sociali e politiche, ✱. Comm. ♕. — *Torino, Via Bonafous, 7.*

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

Savio (Sacerdote Fedele), Professore di Storia ecclesiastica nella Pontificia Università Gregoriana, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio della Società Storica Lombarda. — *Roma, Via del Seminario, 20.*

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

De Sanctis (Gaetano), *predetto.*
21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

Ruffini (Francesco), Dottore in Leggi, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Professore di Storia del diritto italiano, ✠, Comm. ♔. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*
21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

Stampini (Ettore), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore ordinario di Letteratura latina e Preside della Facoltà di Filosofia e Lettere nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia Peloritana e dell'Ateneo di Brescia, Membro del Consiglio e della Giunta Superiore di Pubblica Istruzione, Decorato della Medaglia del Merito Civile di 1ª Classe della Repubblica di S. Marino, ✠, Comm. ♔. — *Piazza Vittorio Emanuele I, 10.*
20 Maggio 1906 - 9 giugno 1906.

D'Ercole (Pasquale), Dottore in Filosofia, Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di Torino, Membro della Società Filosofica di Berlino, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze morali e politiche di Napoli, Uff. ✠, Comm. ♔. — *Corso Siccardi, 26.*
17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Brondi (Vittorio), Dottore in Legge, Professore di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore di assistenza e beneficenza pubblica, ✠, Uff. ♔. — *Torino, Via Montebello, 21.*
17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Sforza (Nob. Giovanni), Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia patria di Modena, per la Sotto-Sezione di Massa e Carrara, Socio effettivo di quelle delle antiche Provincie e della Lombardia, della Toscana, e di Parma, Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e della Società Ligure di Storia patria, Socio ordinario non residente della R. Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti, Socio onorario della R. Accademia di Belle Arti di Carrara, Membro d'onore dell'*Académie Chablesienne* di Thonon-les-Bains, Membro aggregato dell'*Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Savoie,* Socio della R. Commissione per i testi di lingua, Membro della Commissione Araldica Piemontese, della Società di Storia patria di Vignola, della Commissione municipale di Storia patria e belle arti della Mirandola, della Commissione senese di Storia patria e della Società storica di Carpi, Corrispondente della Commissione Araldica Toscana, della Società Georgica di Treia e della Colombaria di Firenze, ecc., ecc., Presidente onorario della R. Accademia dei Rinnovati di Massa, ecc., Direttore del R. Archivio di Stato di Torino, ✠ e Uff. ♔. — *Via Giusti, 4.*
17 Febbraio 1907 - 19 aprile 1907,

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Canonico (Tancredi), Presidente del Senato, Professore emerito, Primo Presidente della Corte di Cassazione a riposo, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accad. delle Scienze del Belgio, di quella di Palermo, della Società Generale delle Carceri di Parigi, Presidente dell'Ordine dei Ss. Maurizio e Lazzaro, della Corona d'Italia e Consigliere dell'Ordine del merito civile di Savoia, Gran Croce ✠ e ✠, Cav. ✠, Comm. dell'Ord. di Carlo III di Spagna, Gr. Uffiz. dell'Ord. di Sant'Olaf di Norvegia, Gr. Cord. dell'O. di S. Stanislao di Russia. — *Firenze, Via Lamarmora, 12 bis.*
29 Giugno 1873 - 19 luglio 1873.

Villari (Pasquale), Senatore del Regno, Presidente dell'Istituto Storico di Roma, Professore di Storia moderna e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, della Pontaniana di Napoli, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio straordinario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Baviera, Socio straniero dell'Accademia di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche), Dott. on. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott. on. in Filosofia dell'Università di Budapest, Professore emerito della R. Univers. di Pisa, Gr. Uffiz. ✠ e Gr. Cord. ✠, Cav. ✠, Cav. del Merito di Prussia, ecc.
16 Marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen, Dottore *ad honorem* dell'Università di Oxford e di Cracovia, Uff. ✠, Comm. ✠, Cav. ✠. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*
20 Marzo 1892 - 26 marzo 1892.

D'Ancona (Alessandro), Senatore del Regno, già Professore di Letteratura italiana nella R. Università e già Direttore della Scuola normale superiore in Pisa, Membro della Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente

dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles Lettres), della R. Accademia di Copenhagen, dell'Accademia della Crusca, del R. Istit. Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, della R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti di Napoli e della R. Accademia di Lucca, Cav. della Legione d'Onore, Cav. ✠, Gr. Uff. ✠, Comm. ✠. — *Pisa, Lungarno Mediceo, Palazzo Mediceo.*
20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia di Napoli, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc., Comm. ✠ e ✠. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Professore ordinario di lingue e letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Società Reale di Napoli, della R. Accademia della Crusca, della R. Accademia di Padova, dell'Accademia R. Lucchese e della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg, Uff. ✠, ✠. — *Firenze, Piazza d'Azeglio, 13.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Kerbaker (Michele), Dottore in lettere, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e incaricato di Sanscrito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della Società Reale di Napoli, della R. Accademia Pontaniana, Membro della Società Asiatica italiana di Firenze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Comm. ✠ e ✠. — *Napoli, Vomero, Via Scarlatti, 60.*
26 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI STRANIERI

Meyer (Paolo), Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes* (Parigi). — 4 Febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.

Tobler (Adolfo), Professore nell'Università di Berlino. — 3 Maggio 1891 - 26 maggio 1891.

Maspero (Gastone), Professore nel Collegio di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893 - 16 marzo 1893.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 Gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

Bréal (Michele Giulio Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) (Parigi). — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Bonatelli (Francesco), Professore nella R. Università di Padova. — 15 Febbraio 1882.

Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 Marzo 1896.

Tocco (Felice), Professòre nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento di Firenze. — 15 Marzo 1896.

Chiappelli (Alessandro), Prof. nella R. Università di Napoli. — 15 Marzo 1896.

Masci (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli. — 14 Giugno 1903.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Rodriguez de Berlanga (Manuel) (Malaga). — 17 Giugno 1883.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 Marzo 1886.

Gabba (Carlo Francesco), Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 Marzo 1889.

Buonamici (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 Marzo 1890.

Dareste (Rodolfo), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893.

Bonfante (Pietro), Professore nella R. Università di Pavia.

Toniolo (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Pisa. — 10 Giugno 1906.

Brandileone (Francesco), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Fadda (Carlo), Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.

Filomuso-Guelfi (Francesco), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.

Polacco (Vittorio), Prof. nella R. Università di Padova. — Id. id.

Stoppato (Alessandro), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Simoncelli (Vincenzo), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Scienze storiche.

Birch (Walter de Gray), del Museo Britannico di Londra. — 14 Marzo 1886.

Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 Febbraio 1893.

Duchesne (Luigi), Dirett. della Scuola Francese in Roma. — 28 Aprile 1895.

Bryce (Giacomo), Londra. — 15 Marzo 1896.

Patetta (Federico), Prof. nella R. Università di Modena. — 15 Marzo 1896.

Gloria (Andrea), Professore nella R. Università di Padova.

Sezione di Archeologia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano). — 14 Marzo 1886.

Poggi (Vittorio). Bibliotecario e Archivista civico a Savona. — 2 Gennaio 1887.

Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquari di Londra (Firenze). — 3 Marzo 1889.

Mowat (Roberto). Membro della Società degli Antiquari di Francia (Parigi). — 16 Marzo 1890.

Barnabei (Felice), Roma. — 28 Aprile 1895.

Gatti (Giuseppe), Roma. — 15 Marzo 1896.

Sezione di Geografia ed Etnografia.

Pigorini (Luigi). Professore nella R. Università di Roma. — 17 Giugno 1883.

Dalla Vedova (Giuseppe), Professore nella R. Università di Roma. — 28 Aprile 1895.

Porena (Filippo). Professore nella R. Università di Napoli. — 21 Giugno 1903.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Sourindro Mohun Tagore (Calcutta). — 18 Gennaio 1880.

Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° Febbraio 1885.

Guidi (Ignazio), Professore nella R. Università di Roma. — 3 Marzo 1889.

Amelineau (Emilio), Professore nella *École des Hautes Études* di Parigi. — 28 Aprile 1895.

Foerster (Wendelin), Professore nell' Università di Bonn, Comm. ✠. — 28 Aprile 1895.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 Marzo 1890.

Novati (Francesco). Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 21 Giugno 1903.

Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Pavia. — id. id.

Boffito (Giuseppe). Professore nel Collegio delle Querce in Firenze. — id. id.

D'Ovidio (Francesco). Senatore del Regno. Professore nella R. Università di Napoli. — id. id.

Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Civica di Verona. — id. id.

Cian (Vittorio), Professore nella R. Università di Pisa. — id. id.

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 18 Novembre 1906
al 31 Dicembre 1907.

ELEZIONI

SOCI

Somigliana (Carlo), Eletto a rappresentare l'Accademia nel Consiglio d'Amministrazione del R. Politecnico di Torino (Adunanza a Classi Unite dei 21 ottobre 1906).

Stampini (Ettore), Eletto membro della Commissione per il premio Vallauri di Letteratura latina (Adunanza della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche del 25 novembre 1906).

Rossi (Francesco), Rieletto delegato della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nel Consiglio di Amministrazione dell'Accademia (Adunanza del 9 dicembre 1906).

Manno (Antonio) . .
Cipolla (Carlo) . . .
De Sanctis (Gaetano)
Eletti per comporre la Commissione del premio Gautieri per la Storia (1904-1906). (Adunanza della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche del 20 gennaio 1907).

Naccari (Andrea) . .
Morera (Giacinto) . .
Eletti delegati della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali al Consiglio di Amministrazione dell'Accademia. (Adunanza del 10 marzo 1907).

D'Ercole (Pasquale), Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di Torino, eletto Socio nazionale residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 17 febbraio 1907 e approvata l'elezione con R. Decreto 19 aprile 1907.

Brondi (Vittorio), Professore di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, id. id. id.

Sforza (Giovanni), Direttore del R. Archivio di Stato in Torino, id. id. id.

D'Ovidio (Enrico), Rieletto alla carica triennale di Presidente dell'Accademia nell'adunanza delle Classi Unite del 17 marzo 1907, id. id. id.

Boselli (Paolo), Rieletto alla carica triennale di Vice Presidente dell'Accademia, id. id. id.

Manno (Antonio), Eletto alla carica triennale di Direttore della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, id. id. id.

De Sanctis (Gaetano), Eletto alla carica triennale di Segretario, id. id. id.

Carle (Giuseppe), Rieletto delegato della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche al Consiglio di Amministrazione dell'Accademia (Adunanza del 7 aprile 1907).

Camerano (Lorenzo), Rieletto alla carica triennale di Segretario della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 14 aprile 1907 ed approvata l'elezione con R. Decreto 25 aprile 1907.

Naccari (Andrea), Eletto alla carica biennale di Direttore della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 15 dicembre 1907.

MORTI

24 Ottobre 1904.

Locard (Arnould), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata).

18 Ottobre 1906.

Ritter (Guglielmo), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematica applicata, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare).

29 Dicembre 1906.

Favero (Gio. Battista), id. id.

21 Gennaio 1907.

Ascoli (Graziadio), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

2 Febbraio 1907.

Mendelejeff (Demetrio), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

20 Febbraio 1907.

Moissan (Enrico), id. id. id.

18 Marzo 1907.

Berthelot (Marcellino), Socio straniero della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

4 Maggio 1907.

Brizio (Edoardo), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Archeologia).

31 Maggio 1907.

Siacci (Francesco), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

24 Giugno 1907.

Klein (Carlo), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia).

1° Luglio 1907.

Nigra (Conte Costantino), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

18 Dicembre 1907.

Kelvin (Guglielmo Thomson, Lord), Socio straniero della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

PUBBLICAZIONI PERIODICHE RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1907.

NB. Le pubblicazioni segnate con * si hanno in cambio: quelle notate con ** si comprano: e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

* **Aberdeen**. Aberdeen University. Studies. N. 14, Researches in Organic Chemistry; N. 15, Meminisse Juvat; N. 16, The Blackalts of that Ilk and Barra; N. 17, Records of the Scots Colleges; N. 24, Records of the Sheriff Court of Aberdeenshire; N. 18, Roll of the Graduates of the University of Aberdeen 1860-1900; N. 19, Studies in the History and Development, etc.; N. 20, Studies in the History and Arts of the Eastern Provinces of the Roman Empire; N. 21, Studies in Pathology; N. 22, Proceedings of the Aberdeen University Anatomical and Anthropological Society; N. 23, Handbook to University of Aberdeen Quatercentenary. September, 1906. City and University; 8°.

* **Acireale**. R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti. Rendiconti e Memorie. serie 3ª, vol. V, (1905-1906). — Rendiconti, serie 3ª, vol. I-IV, (1901-1904).

Adelaide. Royal Society of South Australia. Transactions and Proceedings and Report, vol. XXX. — Index to the Transactions, Proceedings, and Reports, vol. I to XXIV, (1877-1900).

* **Aix**. Facultés de Droit et des Lettres. Annales, T. II, N. 2. (1906). Droit.

* **Albuquerque**. University of New Mexico. Bulletin, Catalogue, 1906-1907. — Bulletin, vol. I. Contributions from the University Geological survey and the Hadley Climatological Laboratory, 1899. — Bulletin of the Hadley Laboratory, vol. II, p. 1-2. — Bulletin Hadley Climatological Laboratory, vol. III, 1-11. — Bulletin. Educational Series, vol. I, art. 1-2.

* **Amsterdam**. Société mathématique. Nieuw Archief voor Wiskunde. Tweede Reecks, Del. VIII, 1. Stuk. 8°.

* **Angers**. Société d'Études scientifiques: Bulletin. N. S., XXXV an., 1905; 8°.

* **Austin**. Texas Academy of Science. Transactions, vol. VII.

* **Baltimore**. Johns Hopkins University. American Journal of Mathematics, vol. XXVIII, 2-4, 4°. — American Chemical Journal, vol. XXXV, 5-6;

XXXVI, 1-6; XXXVII, 1. — General Index (vol. 11-20) to the American Chemical Journal, 1889-1898. — American Journal of Philology. XXVII. 1-4; — Studies in Historical and Political science. Ser. XXIV, 3-10. — Johns Hopkins University. Circular 1906, N. 3-5; 7, 9.

Baltimore. Johns Hopkins Hospital Report, vol. XIII, XIV, (1906), 2 vol. — Peabody Institute. Fortieth Annual Report. June 1, 1897.

* **Basel**. Naturforschende Gesellschaft. Verhandlungen, Bd. XVIII, Heft 3; XIX, 1.

* **Bassano**. Museo Civico. Bollettino, anno III, N. 4; IV, 1907; 1-3.

* **Batavia**. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. — Tijdschrift voor indische Taal-. Land- en Volkenkunde, Deel XLIX, Aflv. 1-4. L, 1. — Dagh- Register gehouden in Casteel Batavia vant passerende daer ter plactse als over geheel Nederlants India. An. 1678 ..... van Dr. F. De Haan, 1907. — Notulen van de Algemeene en direchievergaderingen, Deel XLIV, 2-4. — Verhandelingen, Deel LVI, 5 Stuk. — De Compagnie's kamer van het Museum. Rapporten van de Commissie in Nederlandsch-Indié voor oudheidkundig onderzoek. 1905-1906.

— K. Magnetical and Meteorological Observatory. Vol. XXVII, 1904: Containing meteorological and seismometric observations made in 1904. Batavia, 1906, fol.

— K. Magnetisch en Meteorologisch Observatorium. Regenwaarnenningen in Nederlandisch-Indié; Zeven en twintigsth Jaargan, 1905.

* **Bergen**. Bergens Museum. Aarsberetning for 1906; Aarbog 1906, 3die Hefte; 1907, 1stc., 2det Hefte. — An account of the Crustacea of Norway, vol. V, parts 15-20.

* **Berkeley**. University of California. Bulletins, N. S., vol. VIII, 2. — Library Bulletin, N. 15. — College of Agriculture. Agricultural experiment Station. Bulletin, N. 179-182. — Bulletin of the Department of Geology. Vol. IV, N. 16, 19; V, 1-5. — Botany, vol. II, 12. — Zoology, vol. III, 5-8, 12.

* **Berlin**. K. Preussische Akademie der Wissenschaften. Abhandlungen, 1906. — Sitzungsberichte, 1906, N. XXXIX-LIII; 1907, I-XXXVIII, 8°.

** — K. Preussische Geologische Landesanstalt u. Bergakademie. Abhandlungen, N. F., Heft 47 u. Atl.; 49 u. Atl.; Erläuterungen, Liefg. **127**, Gradabteilung **55**, 3, 9, 15, 21 u. Atl., **131**; Gradabt. **57**, 60; Gradabt. **58,** 55; Gradabt. 72, 1 u. Atl.

* **Bern**. Naturforschende Gesellschaft. Mitteilungen aus dem Jahre, 1905, N. 1591-1608; 1906, 1609-1628.

* **Beyrouth** (Syrie). Université de St.-Joseph. Al-Machriq, revue catholique orientale bimensuelle (in lingua araba), 1907; 1-23.

* **Bologna**. R. Accademia delle Scienze dell'Istituto. Memorie, ser. IV, vol. III. — Rendiconto, N. S., vol. X, (1905-1906).

* — Biblioteca Comunale. L'Archiginnasio. Bullettino, anno I, (1906), N. 5-6; II, 1-5.

* **Bologna**. Società medico-chirurgica e Scuola medica. — Bullettino, 1906. Ser. 7ª, vol. VI, fasc. 12; 1907, vol. VII, 1-10.

— Osservatorio della R. Università. Osservazioni meteorologiche dell'Annata 1905. Bologna, 1906; 4° (Dal dirett. dell'Osserv. prof. M. Rajna).

* **Bordeaux**. Société des sciences physiques et naturelles. Cinquantenaire de la Sociéte. 15-16 Janvier, 1906. — Procès-verbaux des Séances. An. 1905-1906.

* — Faculté des Lettres et Universités du Midi. Annales, 4ème sér. Bulletin hispanique, T. XI, 1-4. — Bulletin italien, T. VII, 1-4. — Revue des études anciennes, T. IX, 1-4.

— Académie Nationale des Sciences, Belles-lettres et Arts. Actes, 3ème Sér., 66e année, 1904; 8°.

— Commission Météorologique de la Gironde. Observations pluviométriques et thermométriques. Juin 1905 à Mai 1906.

* **Boston**. American Academy of Arts and Sciences. Memoirs, vol. XIII, 4-5. — Proceedings, vol. XLI, 35; XLII, 1-28.

* — Boston Society of Natural History. Proceedings, vol. XXXII, Nos. 3-12; XXXIII, 1-2. — Occasional Papers, vol. VII, Nos. 4-7.

— American Philological Association. Transactions and Proceedings 1905, vol. XXXVI; 8°.

— Publications of the Massachusetts General Hospital, vol. I, N. 3 (1907).

* **Boulder Colo**. University of Colorado. Studies. Vol. IV, 1-3.

Bradford. Pa. Seventh Annual Report of the Carnegie Public Library. 8°.

* **Brescia**. Ateneo. Commentari per l'anno 1906; 8°.

* **Brooklyn N. Y**. Museum of the Brooklyn Institute of Arts and Sciences. Science Bulletin, vol. I, N. 4, 8-10. — Cold Spring Harbor Monographs.

Bruxelles. Académie Royale de Belgique. Annuaire, 1907; 73ème année. — Bulletin de la Classe des sciences, 1906, N. 5-12; 1907, N. 1-5. — Classe des sciences. Mémoires, Collection 8°, 2ème sér., T. I, fasc. 4-8. — Biographie nationale. T. XIX, 1er fasc.

— Musée Royal d'histoire naturelle de Belgique. Mémoires, T. III, 4°.

* — Société Géologique de Belgique. Annales, T. XXX, 3ème livr.; XXXIII, 3ème livr.; XXXIV, 1re.

* — Société Entomologique de Belgique. Annales, T. L, 1906.

* — Société des Bollandistes. Analecta Bollandiana, T. XXV, fasc. 4; XXVI, 1-3.

* — Société Belge de Microscopie. Bulletin, T. XIIIe, N. 2; XXIIe. — Annales, XXVI, XXVII, N. 2; XXVIII, N. 1.

* — Société d'Archéologie. Annales, Mémoires, Rapports et Documents, T. XX, 1906, livrs. 3-4; T. XXI, 1907, livrs. 1-2. — Annuaire, T. XVIII, 1907.

* — Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Célébration du deuxième décennaire et Manifestation E. van den Broeck, 16 febbraio 1907. Bulletin. XXème An., T. XX, fasc. 3-5, 1906; XXIème An., T. XXI. Mémoires; XXI, Procès-Verbaux, Janvier-Avril, 1907.

* **Bruxelles**. Observatoire Royal de Belgique. Annuaire astronomique pour 1907. Annales astronomiques, N. S., T. IX, fasc. 2-3, — Physique du Globe, N. S., T. III, fasc. 2. — Annuaire météorologique 1901-1906. — Annales météorologiques, N. S., T. V-XI, XIII, XIV. — Observations météorologiques pendant 1900-1902. — Bulletin Climatologique, 1899, 1ère et 2e partie. — Les observatoires astronomiques et les Astronomes. Bruxelles, 1907; 8°.

* **Bucarest**. Academia Română. Analele, Memoriile secțiunii istorice; literare; stiintifice; Partea administrativă si desbaterile. Ser. II, T. XXVIII, 1905-1906. 4 vol.; 4°. — Discursuri de receptiune de prof. Dr. G. Marinescu cu răspuns de prof. Dr. V. Babes; Discursuri id., id., Demitre Onciul cu răspuns de Demitrie A. Sturdza. — Bibliografia Românescă veche 1508-1830. T. II, fasc. II. — Aslan (Th. C.), Studiu asupra Monopolurilor in Romania. — Dalametra (I.), Dictionar Macedo-Român. — Dobrescu (N.), Istoria Bisericii Române din Oltenia in (timpul) ocupatiunii Austriace. — Filipescu (T.), Coloniile române din Bosnia (Edizioni dell'Accademia di Rumania). — Sturdza (D. A.), L'Académie Roumaine en 1905-1906. Deux rapports. — Creșterile Colectiunilor in Anul 1905-1907.

* — Société des Sciences. Bulletin An. XV, N. 5-6; XVI, N, 1-4.

Bucaresti. Institutul Meteorologic. Buletinul lunar al Observațiunilor Meteorologice din România. An. XIV, 1905; 4°. — Meteorologia și Metrologia in România, 1906; 8°. — Analele, T. XVIII, 1902.

* **Budapest**. K. Ungarische geologische Anstalt. *Publicationen:* Die Untersuchten Tone der Länder der ungarischen Krone. Von A. v. Kalecsinszky, 1906; 8°. — Mitteilungen, XV Bd., Heft. 3-4; XVI Bd., Heft. 1. — Erläuterungen: Umgebungen von Krassova uud Teregova Sectionsblatt. Zone 25/kol. xxvi; Die Umgebung von Magura; Blatt. Zone 19/kol. xxviii. (1:75.000) — Jaresbericht... für 1905.

* — Ungarische Geologische Gesellschaft Földtani Közlöny, XXXVI Kötet, 6-12 Füzet; XXXVII, 1-5.

* **Buenos Aires**. Sociedad Científica Argentina. Anales. 1906, T. LXII, entrega 2-6; LXIII, 1-6; XLIV, 1.

* — Museo Nacional. Annales, Ser. 3a, T. VI-VIII.

* — (Ville de). Annuaire statistique de la Ville de Buenos-Ayres, XVme, an. 1905; XVIme, an. 1906. — Bulletin mensuel de Statistique Municipale, XXme, an. 1906, N. 8, 9, 12; XXIme, an. 1907, N. 1-10.

* **Cagliari**. Società storica sarda. Archivio, Vol. III, fasc. 1-2.

* **Calcutta**. Asiatic Society of Bengal. Journal and Proceedings, Vol. I, N. 4-10; III, 1-4. — Memoirs, vol. I, N. 10-19. Suppl. pp. i-xi; II, 1-4. — Bibliotheca Indica. Collection of Oriental Works. N. S., Ns. 1139, 1142, 1147, 1148, 1150, 1153, 1155 al 1160, 1162, 1169, 1170.

* — Geological Survey of India. Records, vol. XXXIV, part 3-4; XXXV, 1-4; XXXVI, 1. — Memoirs (Palaeontologia indica). Ser. XV, vol. V, Memoir, N. 2. N. S., vol. II, N. 3.

Calcutta. Board of Scientific Advice for India. Annual Report for the year 1905-1906.

* **California.** V. San Francisco.

* **Cambridge.** Cambridge Philosophical Society. List of Fellows Associates and honorary members. August, 1907; 8°. — Proceedings, Vol. XIV, part 1-3; 8°. — Transactions, Vol. XX, N. 11-14; 4°.

* — Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Annual Report, 1905-1906. — Bulletin, vol. XLIII, N. 5; vol. L, N. 6-9; vol. LI, N. 1-6. — Memoirs, vol. XXXIV, N. 1; vol. XXXV; N. 1.

* **Cape Town.** South African Philosophical Society. Transactions. vol. XIII. pp. 289-54; vol. XVI, part 4-5; vol. XVII, part 1ª, XVIII, 1ª.

Caracas (Venezuela). Universidad Central de Venezuela. Anales, año VII, (1906), T. VII, N. 3.

* **Catania.** Accademia Gioenia di scienze naturali. Atti, Ser. 4ª, vol. XIX. — Bollettino delle sedute, 1907, fasc. 92-94.

* — Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, 1907, vol. XXXVI, disp. 1-12.

* **Chambéry.** Société Savoisienne d'histoire et d'archéologie. Mémoires et Documents., 2ème sér., T. XIX. fasc. 1-4; XLV, 1er.

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt. Die Tätigkeit. im Jahre 1906.

* **Cherbourg.** Société Nationale des Sciences naturelles et mathématiques. Mémoires, T. XXXV.

* **Chicago.** Field Columbian Museum. Botanical Series, vol. II, N. 4-5. — Geological Series, vol. II, N. 8-9; III, 3-5. — Report Series, vol. III, N. 1. — Zoological Series, vol. VII, N. 2-3; VIII.

— John Crerar Library. 12° Annual Report for the year 1906, 1907; 8°.

* **Christiania.** Videnskabs-Selskabet Forhandlinger. Aar 1905; 1906. — Skrifter, 1905; 1906: I. Mathematisk-naturvidenskabelig Klasse.

— Institut Météorologique Royal des Pays-Bas. Mededeelingen en Verhandelingen, N. 5.

* **Cincinnati.** Lloyd Library of Botany, Pharmacy and Materia medica. Mycological Notes. By C. G. Lloyd, N. 19-23. — Index of the Mycological Writings of C. G. Lloyd, vol. I, 1898-1905. — The Tylostomeoe. By C. G. Lloyd.

* **Cividale.** Museo Civico. Bollettino, anno II, 1906; II, fasc. 4°; III, 1-2.

* **Clermond-Ferrand.** Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts. Deuxième sér., fasc. 18 e 19; 8°.

* **Colorado** Springs. Colorado College Publication. Science Ser., vol. XII. N. 47, 49, 50. — Engineering Ser., vol. I, N. 1-2.

* **Copenhague.** Académie R. des sciences et des lettres de Danemark. Bulletin (Oversigt), 1906, N. 6; 1907, 1-4. — Mémoires. 7ème sér. Section des Sciences, T. III, N. 2; IV, 1-4; V, 1. — 6e sér. Section des Lettres. T. IV, N. 4. 7ème sér. T. I. 1.

* **Cracovia**. Akademii Umiejętności: Catalogue of Politic-scientific-literature. T. VI (1906), Zeszit 1-4; VII, 1-2. — Bulletin international: Classe des sciences mathématiques et naturelles, 1906, N. 4-10; 1907, 1-3. — Classe de philologie. Classe d'histoire et de philosophie, 1906, N. 4-10; 1907, 1-2. Rozprawy Wydziatu Matematyczno-przyrodniczego. Ser. III, T. V, A, B (1905). — Rozprawy wydziatu filologiczny. Ser. II, T. XXVI, XXVIII. — Rozprawy wydziatu historyczno-filozoficzny, Ser. II, T. XXII, XXIV. — H. Zapatowicz, Conspectus florae Galiciae criticus, vol. I. — J. Kartowicz, Stownik Gwar polskich Tom Czwarty do druku przygolowal, T. IV, V.

Danzig. Naturforschende Gesellschaft. Schriften, N. F. XII. Bd. 1 Heft.

* **Dijon**. Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres. Mémoires, 4ème Sér., T. X, (1905-1906); 8°.

* **Dorpat**. Acta et Commentationes Imp. Universitatis Jurievensis. 1905, T. XIII; 1906, XIV; 8°.

* **Dublin**. Royal Irish Academy. Proceedings: Sect. A, vol. XXVI, N. 2, 3; XXVII, 1-2; Sect. B. vol. XXVI, N. 6-10; Sect. C, vol. XXVI, N. 10-16.

— Royal Dublin Society. Scientific Proceedings, vol. XI (N. S.), N. 13-20; 8°. — Economic Proceedings, vol. I, p. 9-11; 8°. — Scientific Transactions, vol. IX (ser. II). N. 4-6; 4°.

* **Edinburgh**. Edinburgh Geological Society. Transactions, vol. IX, part 1.

* — Royal Observatory. Annals, vol. II (1906).

* — Royal Physical Society. Proceedings, vol. XVI, N. 8; XVII, 2-3.

* — Royal Scottish Society of Arts. Journal, vol. XVII, N, 7-12.

* — Royal Society. Proceedings, vol. XXVI, N. 6; XXVII, 1-5. — Transactions, vol. XLI, part 3ª; XLV, part 1ª-3ª.

* **Erlangen**. Physikalisch-medicinische Sozietät. Sitzungsberichte. 38 Bd., (1906); 8°.

* **Firenze**. R. Accademia della Crusca. Atti (Anno accademico 1905-1906), Adunanza pubblica del 2 dicembre 1906. — Vocabolario (5ª impressione), vol. X, fasc. 1.

* — R. Accademia economico-agraria dei Georgofili. Atti, 5ª serie, Vol. III, disp. 4ª, suppl. alla 4ª; IV, 1ª-3ª.

* — R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento. *Pubblicazioni:* Sezione di scienze fisiche e naturali: Raccolte Planctoniche fatte dalla R. Nave " Liguria ", vol. I, fasc. 1-3. Sezione di Medicina e Chirurgia, Istituto fototerapico annesso colla clinica Dermosifilopatica, Resoconto dell'anno 1906. — R. Osservatorio di Arcetri, fasc. 23-24: Osservazioni astronomiche.

* — Osservatorio Meteorico del R. Museo. Pubblicazioni periodiche di Meteorologia: Osservazioni dell'anno 1904-1906.

* **Frankfurt** am Mein. Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft. Abhandlungen, XXIX Bd., Heft. 2.

* **Freiburg i. Br.** Naturforschende Gesellschaft. Berichte, Bd. XV; 8°.

* **Gap**. Société d'Études des Hautes-Alpes, 3ème sér., An. XXV (1906). N. 19-20; XXVI. 21-22.

* **Genève.** Institut National Genevois. Bulletin, T. XXXVII.

* — Société de Physique et d'Histoire naturelle. Œuvres complètes de J.-C. Galissard de Marignac. (Hors sér. de Mémoires), T. I (1840-1860); II (1860-1887). — Mémoires, Vol. XXXV, fasc. 3.

* **Genova.** Museo civico di Storia naturale. Annali, serie 3ª, vol. II.

* — Società Ligure di Storia patria. Vol. XXXV-XXXVI.

* — Società di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure. An. XXVIII (1906), fasc. 6°; XXIX, 1-6.

* **Giessen.** Universität-Bibliothek. Tesi N. 135, Die Universität Giessen 1607-1907. Beiträge zu ihrer Geschichte. Festschrift zur dritten Jahrhundertfeier herausgegeben von der Universität Giessen. Giessen, 1907; 2 vol. in-4°.

* **Göteborg.** K. Vetenskaps och Vitterhets-Samhälles Handlingar. v. VII-IX; 8.

* **Göttingen.** K. Gesellschaft der Wissenschaften. Abhandlungen, Matematisch-physikalische Klasse, N. F., Bd. V, N. 1-5. — Id., Philologisch-Historische Klasse, N. F., Bd. IX, 1-5. — Nachrichten: Mathematisch-physikalische Klasse, 1906; Heft 4,5; 1907; 1-3. — Id., Philologisch-historische Klasse, 1906, Heft 3, 4; 1907, Beiheft; 1907, Heft 1, 2. — Geschäftliche Mittheilungen, 1907, Heft 1.

* **Granville Ohio.** Scientific Laboratories of Denison University. Bulletin. Vol. XIII, Art. 3.

* **Habana.** Academia de Ciencias Médicas, Físicas y Naturales. Anales. Revista cientifica, T. XXXIX (1902-1903); XL (1903-1904): XLIII (Mayo-Diciember 1906); XLIV (Enero-Agosto 1907).

* **Harlem.** Société hollandaise des sciences. Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Sér. II, T. XII, 1-5 livrs.

* — Musée Teyler. Archives. Sér. II, Vol. X, 3ᵉ et 4ᵉ partie.

* — Fondation de P. Teyler van der Hulst: Verhandelingen van Teyler tweed Genootschap. N. R., Dl. VII.

* **Heidelberg.** Naturhistorisch-medizinisches Verein. N. F., VIII Bd., 3 u. 4 Heft.

* **Helsingfors.** Société des sciences de Finlande. Observations météorologiques publiées par l'Institut Météorologique central: État des glaces et des neiges en Finlande pendant l'hiver 1895-1896. Acta, T. XXXII. — Öfversigt, XLVII (1904-1905). — Bidrag, 63; 4°.

* **Jena.** Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft. Denkschriften. Bd. VI, 2 Teil; VII, 1. — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, N. F., XXXV Bd., Heft 1-3; XXXVI, 1.

** **Inventari** dei Manoscritti delle Biblioteche d'Italia. Vol. XIII; Forlì. 1905-1906: 4°.

* **Kasan.** Société Physico-mathématique. Bulletin. 2ème sér., T. XV, N. 2, 3.

* **Kharkow.** Société mathématique. Comunications, 2ᵉ sér., T. VIII, N. 6; IX, 1-6 1904-1906; 8°.

* **Kiel** und **Leipzig.** Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchungen der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland.

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F., VIII Bd., Abth. Helgoland, Heft 1; 1906.

Kodaikanal. Observatory. Bulletin, N. VIII-IX-X-XI. — Annual Report of the Director. Kodaikānal and Madras Observatories for 1906.

* **Königsberg**. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft. Schriften, XLVII Jahrgang, 1906; 4°.

Kyōto. College of Science and Engineering Kyōto Imp[e] University. Memoirs, vol. I, N. III (1906-1907); 8°.

* **Lawrance**. University of Kansas. Science Bulletin, vol. III.

* **Leipzig**. K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physische Klasse; Abhandlungen, Bd. XXX, N. 1-3. — Berichte, 1906, N. 6-8; 1907, 1-3. — Philologisch-historische Klasse: Abhandlungen, Bd. XXIII, N. 3-4; XXV, 2-3-4-5; XXVI, 1. — Berichte, 1906, N. 3-5; 1907, 1-3.

— Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft. Jahresbericht, 1906, 1907 (März).

— Verein für Erdkunde. Mitteilungen 1906.

* **Liège**. Société Royale des Sciences. Mémoires, 3ème sér., T. VI.

Lima. Ministerio del Fomento. Cuerpo de Ingenieros de Minas del Perú. Boletin, N. 41, 44-49; 8°.

* **Lisboa**. Commissão do Serviço Geologico du Portugal. Communições, T. VI, fasc. 2° (1906-1907); T. VII, 1 (1907); 8°. — Carta hypsometrica de Portugal, 1:500.000, 2 fol.

* **London**. R. Astronomical Society. Memoirs. Appendix 2ª to vol. LV. LVII, part. 1, 2; Appendix. — Monthly Notices, vol. LXVII, N. 1-8 (1906-1907), 9 suppl. number, LXVIII (1907-1908).

— British Association for the advancement of Science. Report of the Seventy-Sixth Meeting of York. August 1906. London, 1907; 1 vol in-8°.

* — British Museum (Natural History). History of the Collections, vol. II, 1906. — Illustrations of British Blood-Seuking Hies, 1906. — Catalogue of Moths, vol. VI. — Catalogue of Orthoptera, vol. II. Catalogue of Corals, vol. VI. — Guide to Exhibition of Old Natural History Books. — Guide to History of Plant Classification. — List of Casts of Fossils.

* — Chemical Society. Journal, 1906, Supplementar Number Title-pages, contents, and Index, January-December 1907. — Proceedings, vol. XXII, N. 318; XXIII, 319-334.

* — Geological Society. Quarterly Journal vol. LXIII, p. 1-4, N. 249-252. — Geological Literature..... during the Year ended December 31st. 1906; 8°.

* — Linnean Society. List (1907-1908). Journal of Botany, vol. XXXVIII, N. 263-64. — Journal of Zoology, vol. XXX, N. 195-96. — Transactions, Botany, vol. VII, part 4-5; Transactions, Zoology, vol. IX, part 11; X, 6, 7. Proceedings, 119th Session. From November 1906 to June 1907.

* — Royal Microscopical Society. Journal, 1907, Part 1-6.

* — Royal Society. Year-Book 1907; 8°. — Proceedings, Ser. A, vol. **78**, N. 526; **79**, **80**, N. 535; Ser. B, vol. **79**.

* **London**. Royal Society. Report of the Commission appointed by the Admiralty, the War Office, and the Civil Government of Malta, for the investigation of Mediterranean Fever....., Part 5ª-7ª. London, 1907; 8°.

— Royal Society. *International Catalogue scientific literature.* (Third, Fourth and Fifth annual issue): **A**. Mathematics; **B**. Mechanics; **C**. Physics; **D**. Chemistry; **E**. Astronomy; **F**. Meteorology including terrestial Magnetism; **G**. Mineralogy including Petrology and Cristallography; **H**. Geology; **J**. Geography mathematical and physical; **K**. Palaeontology; **L**. General Biology; **M**. Botany; **N**. Zoology; **O**. Anatomy; **P**. Anthropology; **Q**. Physiology including Experimental Psychology, Pharmacology and Experimental Pathology; **R**. Bacteriology. London, 1906-1907; 8°.

* — Royal Society of Literature. Transactions, 2d. ser., vol. XXIII, p. 2ª; XXVII, 3ª-4ª. — Cristabel by Samuel Taylor Coleridge illustrated by a facsimile of the Manuscript and by textual and other notes by Ernest Hartley Coleridge London, 1907, vol. I; 4°. — Report and List of Fellows, 1907.

* — Zoological Society. Proceedings, 1906, pp. 759 in fine, 1907, January-June. — Transactions, vol. XVIII, part 1ª.

* **Louvain**. Université catholique. Publications académiques de l'année 1905-1906. Annuaire 1907. — Programme des cours de l'année académique 1905-1906. — T. Van Oppenraaij, La doctrine de la prédestination dans l'église réformée des Pays-Bas. Louvain, 1906. — Ch. Terlinden, Guillaume Ier, roi des Pays-Bas, et l'Église catholique en Belgique. Bruxelles, 1906, 2 vol. — C. L. Houthuysen, Het agrarisch vraagstuk in Nederlandsch Indië. Antwerpen, 1906. — R. Lemaire, Les origines du style gothique en Brabant. Première partie. Bruxelles, 1906.

* **Luxembourg**. Institut Grand-Ducal. Archives trimestrielles (Section des Sciences naturelles, phys. et mathém.), fasc. III et IV. 1906.

* **Lyon**. Académie des Sciences, Belles-lettres et Arts. Mémoires, Sciences et Lettres, 3e sér., T. IX, 8°.

* — Diocèse de Lyon. Bulletin historique, 7e année, 1906, N. 42-47.

* — Société Linnéenne. Annales, 1906, N. S., t. LIII.

* — Université. Annales, Nouvelle Série: I. Sciences, Médecine, fasc. 19.— II. Droit, Lettres, fasc. 16-18.

* **Madison**. University of Wisconsin. Publications of the Observatory. Vol. X, p. 3.

* **Madrid**. R. Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales: Revista, T. V, N. 1-12. — Anuario, 1907. — Memorias, T. XXV.

* — R. Academia de la Historia. Boletín, T. L, cuad. 1-6; LI, cuad. 1-6.

* **Magdeburg**. Museum für Natur- und Heimatkunde: Abhandlungen und Berichte, Bd. I, Heft 2, 3.

* **Manila**. Philippine Ethnological Survey. Publications, vol. I: The Bontoc Igorot by A. E. Jenks, 1905, 8°.

* **Messina**. R. Accademia Peloritana. Atti, vol. XXI, fasc. 2°. — Resoconti delle tornate delle Classi (luglio-dicembre 1906).

— Osservatorio. Istituto di fisica terrestre e Meteorologia della R. Università. Annuario dell'anno 1906 (An. III); 8°.

* **Mexico**. Sociedad Científica " Antonio Alzate „. Memorias y Revista. T. XXII, Nos 7-12; XXIII, 5-12; XXIV, 1-9.

— Observatorio Meteorológico magnético Central. Mes de Diciembre, 1902. — Servicio Meteorológico. Tempo probable en la República durante el mes de Enero-Julio, Septiembre, Octubre 1907. — Boletín mensual. Mes de Enero 1903; Julio-Septiembre 1904. — El Servicio Meteorológico de la República Mexicana, por el Director Ing. Manuele E. Pastrana.

— Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya y Cuajimalpa. Anuario para el año de 1907; 16°. — Observaciones Meteorológicas practicadas en los observatorios durante el año de 1904; 4°.

Milano. R. Commissione Geodetica italiana. Processo verbale delle sedute. Bologna, 1906; 4°.

* — R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere, scienze morali e storiche. Vol. XXI, fasc. 4°. — Rendiconti, Ser. II, Vol. XXXIX, fasc. 19-20; XL, 1-18.

— Reale Osservatorio di Brera. Pubblicazioni N. XL, p. 2ª, Al-Battani sive Albatenii opus astronomicum. Anno 1908, Articoli del Calendario ed effemeridi del sole e della luna per l'orizzonte di Milano. Con appendice. Milano, 1907; 8° (dal Direttore Prof. G. Celoria, Socio corrispondente dell'Accademia). — Pubblicazioni N. XLIII. Nuova determinazione della latitudine del R. Osserv. Astronomico di Brera.

— Città di Milano. Bollettino statistico mensile: An. XXII, 1906, Novembre-Dicembre e Supplemento; An. XXIII, 1907, Gennaio-Novembre.

— Raccolta Vinciana. Fasc. 1-2.

* — Società Italiana di scienze naturali e Museo Civico di storia naturale. Atti, vol. XLV, fasc. 3° e 4°; XLVI, 1° e 2°.

* **Modena**. R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti. Memorie, Serie III, Vol. VI.

Monaco. Institut Océanographique. Bulletin. 1906. N. 87; 1907. N. 88-108.

* **Moncalieri**. Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto. Bollettino Meteorologico e Geodinamico 1907, Gennaio-Settembre. — Riassunto delle Osservazioni Meteorologiche fatte al Grand Hôtel du Mont Cervin durante i mesi di Luglio-Settembre 1900.

* **Montevideo**. República Oriental del Uruguay. Anuario estadístico. Años 1904-1906. T. I, 1907; 4°.

* — Museo Nacional. Anales, T. III, Entrega 1, 2.

* **Montpellier**. Académie des sciences et des lettres. Section des sciences, Sér. 2ᵉ, T. III, N. 5-7; Section des lettres, Sér. 2ᵉ, T. III, N. 3.

Mont Rosa. Laboratoire scientifique international. Travaux des Années 1904-1907, T. II. Turin, 1907; 8° (Dono del Socio residente A. Mosso).

* **Moscou**. Société Impér. des Naturalistes. Bulletin. An. 1905. N. 1-3; 1906. 1, 2, 4. — Nouveaux Mémoires, T. XVII, livrs. 1.

* **München**. K. Bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physikalische Klasse. Abhandlungen. Bd. XXIII, 2 Abth. XXIV, 1. — Sitzungsberichte, 1906, Heft 3; 1907, 1, 2. — Philosoph.-philologische Klasse Abhandlungen, Bd. XXIV, 2. — Historische klasse. Abhandlungen Bd. XXIV, 2. — Sitzungsberichte, 1905, Heft 3; 1907, 1-2. Wilhelm, v. Christ, Gedächtnisrede von O. Crusius.

— K. Sternwarte. Neue Annalen. Suppl. I.

* — Ornithologische Gesellschaft in Bayern. Verhandlungen, Bd. VI, 1905.

* **Nancy**. Académie de Stanislas. Mémoires, 1905-1906, 6ᵉ Sér., T. III.

* **Nantes**. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France. Bulletin, 2ᵉ Sér., T. VI (1906), N. 1-4.

* **Napoli**. Società Reale. Annuario, 1907. — Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Rendiconto, Ser. 3ª, vol. XII (1906); fasc. 9-12; XIII (1907), fasc. 1-7. — Accademia di Archeologia, lettere e belle arti. Atti, vol. XXIV, 1906. Rendiconto, N. S., An. XIX (1905), Aprile-Dicembre; XX (1906); XXI (1907).

* — Accademia Pontaniana. Atti, vol. XXXVI.

* — R. Istituto d'Incoraggiamento. Atti, Ser. 6ª, 1906. — Il R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, MDCCCVI-MCMVI. Ricerche storiche di Oreste Mastrojanni pubblicate per deliberazione del R. Istituto in occasione del primo centenario. Napoli, L. Pierro, 1907; 1 vol. in 4° gr.

— Società di Naturalisti in Napoli nel XXV anniversario della sua fondazione, MDCCCLXXXI-MCMVI. Bollettino, Ser. I, vol. XX (1906).

— R. Osservatorio di Capodimonte. Osservazioni meteoriche fatte nell'anno 1906. — Riassunto delle osservazioni meteorologiche fatte negli anni 1905, 1906. — Determinazioni assolute della inclinazione magnetica eseguite negli anni 1901-1906. — Variazioni della determinazione magnetica negli anni 1903 e 1904. — Sull'altezza delle polveri vesuviane cadute in Napoli dopo le eruzioni del 22 ottobre 1822 e dell'8 aprile 1906. — Osservazioni astronomiche, magnetiche e meteorologiche eseguite nei giorni 28-31 agosto e 1° settembre 1905 in occasione dell'eclisse solare del 30 agosto.

* **Napoli**. Zoologische Station. Mittheilungen, XVIII Bd., 1-3 Heft.

* **Neuchâtel**. Société Neuchâteloise des sciences naturelles. Bulletin, T. XXXII. An. 1903-1904.

* **New York**. American Mathematical Society. Bulletin. vol. XIII, N. 4-10; XIV. 1-3. — Transactions, vol. VIII, N. 1-4. — Annual Register, January 1907.

* — New York Public Library Astor, Lenox and Tilden Fondations. Bulletin, 1907, N. 1-12.

Nürnberg. Naturhistorische Gesellschaft; XVI. Bd.; Jahresbericht für 1905.

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club. The Wilson Bulletin, N. 57-60.

* **Ottawa**. Geological Survey of Canada. Report on the Chibougamau mining Region etc., N. 923. — Preliminary Report on the Rossland, B. C., mining District, N. 939. — Summary Report... for the Calendar Year 1906, N. 959. — Province of Nova Scotia [Carte], 793-796, 836-841, 878.

* — Royal Society of Canada. Proceedings and Transactions, 2e Ser., vol. XII, Meeting of May, 1906; 8°.

* **Padova**. R. Accad. di scienze, lettere ed arti. Atti e Memorie, 1905-1906. N. S., vol. XXII; 8°.

* — Accademia scientifica veneto-trentina-istriana. Atti. N. S., An. III, fasc. 1-2; IV, 1-2.

* **Palermo**. R. Accademia di scienze, lettere e belle arti. Bullettino, anni 1903-1906.

* — Circolo Matematico. Annuario 1907. — Estratti dei verbali delle adunanze e Bollettino delle pubblicazioni ricevute. Vol. II, 1907, N. 3-4. — Rendiconti, T. XXII, fasc. 3; XXIII, 1-3; XXIV, 1-3.

— Collegio degli Ingegneri ed Architetti. Atti, 1906, Luglio-Dicembre.

Paris. Ministère de l'Instruction Publique. Inventaire Sommaire des Archives Départementales, antérieures à 1790: *Aisne*, Archives civiles, Série E, Supplément, T. V. — *Allier*, Série E, Supplément, T. I (Arrondissement de Moulins). — *Calvados*, Archives civiles, Sér. E, T. I; Sér. C, T. IV; Archives ecclésiastiques, Sér. H, T. I; Sér. H Suppl., T. II. — *Cantal*. Archives civiles, Sér. C (Intendance de Clermont, Election d'Aurillac); Sér. D (Instruction Publique). — *Charente-Inférieure*, Sér. B. — *Corse*, Sér. C, Fonds du Civile Governatore, T. I. — *Doubs*. Archives ecclésiastiques, Sér. G., T. II. — *Eure-et-Loire*, Cartulaire de Saint-Jean en Vallée de Chartres. — *Hautes-Alpes*, Archives Communales; Archives de Guillestre. — *Hérault*, Archives civiles, Ser. C, T. IV, Part. I. Inventaire de F. Resseguier. — *Isère*. Ville de Grenoble, 3e partie. Sér. DD, EE et FF. — *Nord*, Archives civiles, Sér. B. Chambre des Comptes de Lille, art. 653 à 1560, T. I (2e partie). — *Puy-de-Dome*. Archives civiles, Sér. C, T. IV. — *Pyrénées-Orientales*, Archives ecclésiastiques, Sér. G. — *Rhône*, Sér. E suppl., Archives anciennes des Communes, T. II. — *Vosges*, Archives ecclésiastiques, Sér. G, T. III.

— Catalogue des Thèses et Écrits académiques, 22e fasc. Année scolaire 1905-1906. — Annales du Musée Guimet. Bibliothèque d'Études; T. XII. XXII, XXIII. Paris, 1906; 8°. — Revue de l'histoire des religions, T. LIII, 2-3; LIV; 1-3.

* — Ministère des Travaux Publics. Annales des Mines, 10e Série. **T. V. (1904) 4 livr.; ** VII (1905) 4 livr.; T. X, (1906) 8-12; XI (1907) 1-6; XII (1907) 7-8.

** — Bureau des Longitudes. Annuaire pour l'an 1907; 8°.

* — École Polytechnique. 11e sér., XIme Cahier (1906).

* — Institut de France. Annuaire pour 1904-1907. — Mémoires de l'Académie des Sciences, T. XLVIII, XLIX, 2e sér. — Académie des Inscriptions et Belles-Lettres: Mémoires, T. XXXVII, 2ème partie. — Notices et Extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Nationale et

autres Bibliothèques, T. XXXVIII, 2ème partie. — Corpus Inscriptionum Semiticarum. Pars 2ª, Inscriptiones Aramaicas continens, T. I Tabulae, fasc. 3 (tab. XLV-CVI). T. II, fasc. 1. — Académie des Sciences Morales et Politiques. Collection des ordonnances des Rois de France, Catalogue des Actes de François 1er. T. VIII.

* **Paris**. Muséum d'histoire naturelle. Bulletin, Ann. 1906, N. 5-7; 1907, 1-5. — Nouvelles Archives, 4e sér., T. VIII, fasc. 4; IX, 1.

* — Société de Géographie. La Géographie, Bulletin, T. XIII (1906), N. 6; XIV (1906), 1-6; XV (1907), 1-6.

* — Société Géologique de France. Bulletin, 4e Sér., T. IV, N. 7; V (1905), 6-7 VI (1906), 1-7.

* — Société Mathématique de France. Bulletin, T. XXXIV, fasc. 4; XXXV, 1-4.

* — Société Nationale des Antiquaires de France. Mettensia, V. Mémoires et Documents, fasc. suppl., fasc. 1°. — Bulletin, 4e trimestre 1906 1r-2e trimestre 1907. — Mémoires, 1906, 7e sér., T. VI.

* — Société Philomatique. Bulletin, 9e Série, T. VIII, N. 5-6; IX, 1-5.

* — Société de Spéléologie. Spelunca. Bulletin & Mémoires, T. VII. N. 47-49.

* — Société Zoologique de France. Ann. 1905, T. XVIII; 8°.

* **Pavia**. Società Pavese di Storia patria. Bollettino, An. VI (1906), fasc. 4; VII (1907), 1-3.

* **Perugia**. R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria. Bollettino, An. XII. fasc. 3; An. XIII, 1.

* — R. Università degli Studi. Annali della Facoltà di Giurisprudenza, Ser. III, (1906), vol. IV, fasc. 3-4.

* **Philadelphia**. Academy of Natural Sciences. Proceedings. 1906, vol. LVIII. part 1-3; LIX, 1.

* — American Philosophical Society. Proceedings, vol. XLV, N. 182-184. — Transactions, vol. XXI, part 3. — The Record of the Celebration of the two Hundredth Anniversary of the birth of Benjamin Franklin, vol. in 8°.

Pietermaritzburg (Natal). Surveyor-General's Department. Third and final Report of the Geological Survey of Natal and Zululand. London 1907; 4°.

* **Pisa**. R. Università. Annuario per l'anno accademico 1906-1907; 8°.

— Società Toscana di scienze naturali. Processi verbali, vol. XVI N. 2-5 (1907).

— Università toscane. Annali. T. XXVII. Pisa 1907, 1 vol. in 4°.

* **Portici**. Regia Scuola Superiore di Agricoltura in Portici nel passato e nel presente, 1872-1906, 1 vol. in fol. — Annali, serie II, vol. V-VI. — Contribuzione alla conoscenza degli insetti dannosi all'olivo e di quelli che con esso hanno rapporti. Portici, 1907; 8°.

* **Porto**. Academia Polytechnica. Annaes scientificos, vol. II, N. 1-3.

Potsdam. K. Preussisches Geodätisches Institut. Veröffentlichung. N. F., N. 30-33.

* **Prag**. K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften. Jahresberichte für das Jahr 1906. — Sitzungsberichte. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe, 1906.

Prag. K. K. Sternwarte. Magnetische und Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1906. 67 Jahrgang. — Astronomische Beobachtungen 1900-1904.

* **Praze.** Ceské Akademie Cisare Frantiska Josefa pro vedi. slovenost a umeni. Almanah Ročnik XVI, XVII. — Archiv pro lexikografii a dialektologii Cislo 4, 6, cast. 1, 2. — Bibliografie Céské Historie. Dil treti Svazek 2, 3. — Bibliotéka klassikü reckych a rimských Cislo 11, 12, 13. — Historicky Archiv, Cislo 25-29. — Bulletin international. Classe des sciences mathématiques, naturelles et de la médecine, IX^{e} An. (1904) II; X^{e} An. (1905) I, II; XI^{e} An. (1906). — Rozpravy, Trida I Cislo 34, 35, 36; Trida II Ročni XIV (1905), XV (1906) XVI; — Trida III, Cislo 21, 22. — Sbírka pramenův ku poznáni litérarniho zivota v čeckách, na Morave a v slezsku. Skupina II, Cislo 5, 6, 8. — Věstnik, Ročnik XIV (1905), XV (1906). Filosofická bibliotheka. Řada II. Cislo 1. O Pomeru predlohy hartmanova Gregoria k starofrancouzskym legendám o sv rčhoři. Napsal Dr. M. Křepinský. — Rukověť Palaezoologie napsal Dr. Ph. Počta 1 Cast (Invertebrata), 2 Cast (Vertebrata). — Dejiny remesel a obchodu cechach v XIV a v XV stoleti sepsal Z. Winter. — Dodatek ke spisu " Sek ve vede a v zakonodarstvi „ napsal Dr. A. Paulicek. — Chemie fysikalna napsal Dr. A. Reychler z franciny prelozil E. Votoček. — Elektrochemie sepsali D. J. Baborovsky a Dr. Fr. Plzak. — Katalog ceskych fossilniich obratlovců (Fossilia vertebrata Bohemiae), sestavil Dr. Fr. Bayer. — Nastuzeni a choroby z nastuzeni napsal Dr. K. Chodounsky.

Pretoria. Transvaal. Meteorological Department. Annual Reports for the Year ended 30th June 1906.

Pusa. Memoirs of the Department of Agriculture in India. Agricultural Research Institute, Botanical ser. vol. I, N. 5-6; vol. I, part 2^{a}; II, 1, 2. Chemical ser. vol. I, N. 2-5. — Entomological ser. vol. I, N. 2-5. — First Report on the Funt experiment at Pusa. Bulletin, 4; 1906.

* **Reims.** Académie Nationale. Travaux, 116ème vol. (1903-1904); et 117ème (1904-1905).

* **Rennes.** Société scientifique et Médicale de l'Ouest. Bulletin, T. XV (1906), N. 1-3.

* **Riga.** Naturforscher-Verein, Korrespondenzblatt, IL, 1906, L, 1907. — Statut des Naturforscher-Vereins zu Riga.

Rio de Janeiro. Biblioteca Nacional. Annaes, 1905, vol. XXVII. — Catalogo da Collecção Salvador de Mendonça. — Relatorio que ao Sr. Dr. J. J. Seabra, Ministro da Justiça e Negocios Interiores e apresentou o Director Dr. M. C. Peregrino da Silva, 1906; 8°. — Documentos relativos a Mem de Sá Governador Geral do Brasil. — Representação do Brasil na Exposiçao Universal da compra da Luisiana. E. U. A., Relatorio apresentado ao Ministro da Industria, Viação et Obras publicas, ecc.

Rio de Janeiro. Observatorio. Annuario para o anno de 1907. — Boletim mensal 1906.

* **Rochester** N. Y. Rochester Academy of Science. Proceedings, vol. III, 3; IV, pp. 203-214.

* **Roma**. Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio. (Direzione generale della Statistica). Statistica delle cause di morte nell'anno 1904-1905. — Statistica delle forze motrici impiegate al 1° gennaio 1904 nell'Agricoltura e nelle industrie del Regno con notizie sulle forze motrici impiegate in alcuni Stati esteri, 1906; 8°. — Statistica giudiziaria penale per l'anno 1903. — Annali, Ser. IV, N. 109: Atti della Commissione per la statistica giudiziaria e notarile. Sez^e del Marzo 1906. Notizie sulle condizioni dell'insegnamento industriale e commerciale in Italia e in alcuni Stati esteri. Annuario del 1907; 8°. — Annuario statistico italiano 1905-1908, fasc. 1°. Appendice al Movimento della Popolazione secondo gli Atti dello Stato civile nell'anno 1906; Confronti internazionali circa la nuzialità, natalità e mortalità, 8°.

— Ministero delle Finanze. (Direzione generale delle Gabelle). Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione del 1906; novembre-dicembre; 1907, gennaio-settembre. — Bollettino di Legislazione e Statistica doganale e commerciale, an. XXIII, 1906, ottobre-dicembre; an. XXIII, 1907, gennaio-ottobre. — Movimento della Navigazione del Regno d'Italia nell'anno 1905. — Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1905; vol. II; 4°. — Relazione sull'Amministrazione delle Gabelle per l'esercizio 1905-1906; 4°. — Tabella indicante i valori delle merci nell'anno 1905 per le statistiche commerciali.

** — Ministero dell'Interno. Calendario generale del Regno d'Italia pel 1907, An. XLV; 8°.

** — Ministero della Pubblica Istruzione. Ruoli di Anzianità al 16 dicembre 1906, Roma, 1907; 8°. — Annuario 1907; 8°.

* — Biblioteca del Senato del Regno. Bollettino delle pubblicazioni di recente acquisto. Anno 1906, N. 5, 6; 1907, 1-4.

* — Istituto di Diritto Romano. Bullettino, A. XVIII, fasc. 3-4.

* — Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei. Memorie, vol. XXIV. — Atti, Anno LIX, Sez. II-VII; 21 gennaio - 17 giugno 1906; An. LX, Sez. I; 16 dicembre 1906; Sez. II-VII; 20 gennaio - 17 giugno 1907.

** — Raccolta Ufficiale delle Leggi e dei Decreti del Regno d'Italia.

— Reale Accademia dei Lincei. Annuario 1907. Atti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Memorie, serie V, vol. VI, fasc. 9-12. Rendiconti 1° e 2° semestre 1907. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Notizie degli scavi di antichità, vol. III, fasc. 7-12 e Indice, vol. IV, fasc. 1-6. — Rendiconti 1907 — Rendiconto dell'adunanza solenne del 2 giugno 1907.

* — R. Comitato Geologico d'Italia. Bollettino, 1906, N. 3, 4; 1907, 1, 2.

— Catalogo della Biblioteca dell'Ufficio Geologico.

* — R. Osservatorio Astronomico del Collegio Romano. Memorie, ser. 3ª, vol. IV, parte II ed ultima; 4°.

— R. Ufficio centrale di Meteorologia e di Geodinamica. Annali, vol. XXIII, p. 1 (1901). 1906; 4°.

Roma. Società degli Agricoltori italiani. Bollettino quindicinale. An. XII (1907), N. 1-24.
* — Società Aeronautica italiana. An. IV, N. 1-12 (1907); 4°.
* — Società Italiana delle Scienze (detta dei XL); Ser. III, T. XIV; 4°.

* **Rovereto.** I. R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Agiati. Atti, Ser. III, vol. XII, fasc. 3-4 (1906); XIII, fasc. 1-2 (1907); 8°.

* **Saint-Louis Mo.** Academy of Science. Transactions, vol. XV, N. 6; XVI, 1-7.
* — Missouri Botanical Garden. Seventeenth Annual Report, 1906; 8°.

* **St-Pétersbourg.** Académie Imp. des sciences. Bulletin, V^e^ Sér., T. XXII-XXIV (1905-1906). Classe Physico-Mathématique. VI^e^ Sér., (1907), N. 1-18. — Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. II, livr. 2.
* — Comité Géologique. Bulletins, vol. XXIII (1904), 7-10. — Mémoires, 1905, livrs. 3, 19, 20.
— Observatoire Physique Central Nicolas. Annales, 1904, parte I-II. — Mission scientifique pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg: 5 Mémoires de la Mission Russe.
* — Société physico-chimique russe. Journal. T. XXXVIII, 9; XXXIX, 1-9.
— Observatoire Magnétique et Météorologique *Constantin*. Étude de l'atmo-, sphère. Fasc. 2; 4°.

San Francisco. University of California. University Chronicle and Official Record, 1906, vol. VIII, N. 3. — American Archaeology and Ethnology, vol. IV, N. 1-2. — Bulletin of the Department Geology, vol. IV, N. 14, 15, 17. — Physiology, vol. III, N. 7. — Zoology, vol. III, N. 2-4. — College of Agriculture. Agricultural Experiment Station. Bulletin, N. 177. 178.

Sassari. R. Università. Studi sassaresi, Anno IV, sez. II, suppl. 6-7, fasc. 2°, V, Sez. II, Suppl. 1-3.

* **Siena.** R. Accademia dei Fisiocritici. Atti, Serie IV, vol. XVIII, N. 6-10; XIX, 1-6.
* — R. Università degli Studi. Annuario accademico 1906-1907; 8°.

* **Stockholm.** Académie R^e^ Suédoise des sciences. Arkiv för: Matematik, Astronomi och Fysik. Bd. III, 2-4. — Kemi, mineralogi och geologi. Bd. II, 2-6. — Botanik, Bd. VI. 3-4. — Zoologi. Bd. III, 3-4. — Accessions Katalog, 20, 1905. — Arsbok (Annuaire), Ar 1906, 1907. — Handlingar, Bd. XLI, N. 4, 6-7; XLII, 1-9. — Meddelanden från K. Vetenskapsakad Nobelinstitut, Bd. I, N. 6-7. — Gobat (A.), Le développement des conventions de la Haye du 29 Juillet 1899. Conférence faite à l'Institut Nobel à Kristiania le 18 Juillet 1906. — Les Prix Nobel en 1904, 1905.
* — Institut Central de Météorologie. Observations météorologiques suédoises, vol. XLVIII (2^e^ sér., vol. XXXIV), 1906; 4°.

Stonyhurst. College Observatory. Results of Meteorological & Magnetical Observations 1906 of the Director Rev. W. Sidgreaves.

* **Stuttgart**. Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg. Jahreshefte, 63 Jahrgang und 2 Beilage.

* **Svizzera**. Société Helvétique des Sciences naturelles. 87^{me} Session. Winterthur du 30 juillet au 2 août 1904; 88^{me} Session. Lucerne du 11 au 13 septembre 1905; 89^{me} Session. St.-Gall du 30 juillet au 1er août 1906. — Verhandlungen. 89 Jahres-Versammlung vom 29 juli bis 1 august 1906 in St-Gallen. — Nouveaux Mémoires, vol. XL. — Das Schweizersbild, eine Niederlassung aus palaeolithischer und neolithischer Zeit. Zweite, verbesserte und vermeherte Auflage (Nouveaux Mémoires, vol. XXXV).

— Geologische Kommission der Schweiz. Naturforschende Gesellschaft. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz XXVI, XXIX livrs. Geotechnische ser., Liefg. IV. — 1. Geologische Karte der Simplongruppe mit 1 geolog. Kartenskizze dazu: St.-Gotthard-Montblanc und 2 Profiltafeln. — 1. Geologische Karte der Gebirge zwischen Lauterbrunnenthal, Kanderthal u. Thunersee mit 1 Profiltafel — 1. Geologische Karte der Gebirge am Walensee.

* **Thonon**. Académie Chablaisienne. Mémoires et Documents, T. XIX.

* **Tōkyō**. Imperial University. Journal of the College of Science, vol. XXI. art. 2-7, 9-11; XXII, XXXIII, 1.

— Earthquake Investigation Committee in Foreign Languages. Publications. N. 22 B. Art. 1-4 (1906); 23, 24 (1907). — Bulletin, vol. I, N. 1-4.

* — K. Japanische Universität, Medicinische Facultät, Mitteilungen, Bd. VII. N. 1, 2.

Topeka. Kansas Academy of science. Transactions, vol. XX, part 2ª.

— University Geological Survey of Kansas. Vol. VIII, Special Report on Lead and Zinc. 1904; 1 vol. in-8°.

* **Torino**. R. Accademia di Agricoltura. Annali, Vol. XLIX, 1906.

* — R. Accademia di Medicina. Giornale, An. LXIX (1906), N. 11-12; (1907), 1-8.

* — R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia. Miscellanea di storia italiana, 3ª ser. T. XII. Le Campagne di guerra in Piemonte (1703-1708) e l'assedio di Torino (1706). — Studi, Documenti, Illustrazioni, vol. I e VIII. Torino, 1907; 8°. — Biblioteca di Storia italiana recente (1800-1850), vol. I. Torino, 1907. Bibliografia storica degli Stati della Monarchia di Savoia, compilata da A. Manno. Vol. 8°, 1907.

— R. Università. Annuario, An. 1906-1907; 8°.

— Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università. Bollettino. Vol. XXI, 1906; 8°.

* — Istituto di Scienze Giuridico-Politiche della R. Università. Abello (L.), Sulla restrizione della facoltà di rogito dei notai al mandamento della sede notarile. Torino, 1907; 8°. — Avanzini (M.), I minori corsi d'acqua del diritto civile italiano. Brescia, 1907; 8°. — Brusa (C. F.), Le eccezioni personali sospensive nei giudizi cambiari. Milano, 1907; 8°. — Cacciami (V.), Del suffragio politico femminile. Vercelli, 1907; 8°. —

Garrone (G.), Le così dette servitù irregolari nel diritto romano e nel diritto moderno. Torino, 1907; 8°. — Marconcini (F.), La genesi storica del diritto di associazione e del diritto di sciopero. Torino, 1907; 8°. — Manera (P.), " Quae temporalia ad agendum perpetua ad excipiendum ". Alba, 1906; 8°. — Mongini (G.), La prescrizione immemorabile nel diritto piemontese. Torino, 1906; 8°. — Opperti (A.), L'azione popolare comunale. Bra, 1906; 8°. — Quaglia (S. M.). Il mandato in diritto romano. Torino, 1907; 8°. — Ricca Barberis (M.), L'impossibilità della prestazione. Milano, 1907; 8°. — Rota (R.), Il delitto politico nell'età antica. Torino, 1907; 8°. — Sacerdote (R.), I rapporti patrimoniali fra i coniugi nel diritto piemontese. Torino, 1907; 8°. — Sarfatti (M.), Rivista della giurisprudenza commerciale straniera. Inghilterra, 1905-1906. Milano, 1906; 8°. — Id., Sulla utilità dello studio del diritto privato inglese in Italia. Milano, 1907; 8°.

* **Torino.** Società degli Ingegneri e degli Architetti. Atti, An. 1906, fasc. 10.

* — Società Meteorologica italiana. Bollettino mensuale. Ser. II, vol. XXIII, N. 1-3 (1903). — Bollettino bimensuale. Serie III, vol. XXV, N. 3, 4, 11-12, XXVI, 1-7.

— Consiglio Provinciale. Atti. Anno 1906. Ciriè, 1907, 1 vol. in-8°.

* — Municipio. Annuario 1905-1906. — Atti del Municipio, Annata 1906; 2 vol. in-4°. — Bollettino statistico, 1906, settembre-dicembre, N. 9-13; 1907, gennaio-agosto, N. 1-8. — Relazione sulle condizioni igienico-sanitarie del Comune (Biennio 1904-1905).

* — Club Alpino italiano. Rivista mensile, 1906, vol. XXV, N. 12; 1907, XXVI, 1-11. — Bollettino pel 1906, vol. XXXVIII, N. 71.

— Cassa di risparmio. Resoconto dell'anno 1906 approvato dal Consiglio d'Amministrazione in seduta 20 aprile 1907.

* **Toronto.** University of Toronto. Studies of history and economics. 1907. — Review of historical publications relating to Canada. Index, vol. I-X; XI, Publications of the Year 1906.

* **Toulouse.** Université. Ann. scolaire 1904-1905; 1905-1906. — Rapport annuel du Conseil de l'Université et Comptes rendus des Travaux des Facultés et de l'Observatoire. Rapports sur les Concours. 1 vol. in-8°. — Bulletin, fasc. 18-19. — Annales du Midi. Revue de la France Méridionale, XVIII^e An., N. 71; XIX^e, N. 72-74. — Annales de la Faculté des sciences, 2^e Sér., T. VIII, Année 1906, fasc. 2-4; T. IX, 1907, 1. — Revue des Pyrénées, 2^e trimestre 1905. — Bibliothèque méridionale, 1re sér., T. XI, 2^e sér., T. XI.

* **Trieste.** Società di Minerva. Archeografo Triestino. Raccolta di memorie, notizie e documenti per servire alla storia della regione Giulia, vol. III, serie 3^a, fasc. 2.

Upsal. Observat. Météorologique de l'Université. Bulletin. vol. XXXVIII, 1906.

* **Upsalae.** R. Societas scientiarum Upsaliensis. Nova Acta, ser. IV, vol. I, fasc. 2.

* **Uppsala**. Kgl. Universitäts-Bibliothek. Katalog der Incunabeln von Dr. I. Colligir, II; Uppsala-Leipzig, 1907; 8°. — Linnéporträtt. Vid Uppsala Universitels minnesfest på tvåhundraårsdagen af Carl von Linnès. Stockholm, 1907; 4°. — Bref och Skrifvelser af och till Carl von Linnès. Drel I. Stockholm, 1907; 8°.

* **Urbana** (Illn.). Illinois State Laboratory of natural history. Bulletin, vol. VII, art. 6-9.

Valle di Pompei. Il Rosario e la Nuova Pompei. An. XXIII, quad. X-XII; XXIV, 1-10. — Calendario del Santuario, 1907. — Valle di Pompei, Periodico semestrale, An. XVII, 1, 2 (1907).

* **Venezia**. Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Atti, Serie 8ª, T. IX, disp. 1-10. — Memorie, vol. XXVII, N. 7-8.

* **Verona**. Accademia d'Agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio. Atti e Memorie, serie 4ª, vol. VI, fasc. unico; vol. VI, fasc. 2. — Osservazioni meteoriche dell'anno 1904-1905; 8°.

* — Madonna Verona. An. 1°, fasc. 1-3 (1907).

* **Vicenza**. Accademia Olimpica. Atti (1905-1906), vol. XXXV.

* **Washington**. Carnegie Institution. Publications Nos.; 9 (vol. IV), 32-34, 36. p. II, 44, 48, 50, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 60, 61, 65, 69, 70, 76. — Research in China 1903-1904. Geographical and Geological Maps, Bailey Willis. Text in-8°; Atl. in fol. mas.

— Carnegie Foundation for the advancement of Teaching. First Annual Report of the President and Treasurer 1906. — Bulletin, N. 1.

* — Carnegie Institution. Year Book, N. 5 (1906); 1 vol. in-8°.

* — Smithsonian Institution. Smithsonian Miscellaneous Collections, volume XLVIII (N. 1656); Part of vol. XLIX (N 1652) Hodgkins Found. — Annual Report of the Board of Regents of the Smiths. Instit. for the Year ending June 30, 1905.

* — Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology: Bulletin, 30, 32.

* — Smithsonian Institution. United States National Museum: Proceedings, vol. XXX-XXXI. — Bulletin, N. 56, part I (Families Didelphiidae to Muridae). — Report of the U. S. National Museum... Year ending June 30, 1905; June 30, 1906. — Contribution from the U. S. National Herbarium, vol. X, part 3-4. — Bulletin, N. 39, part P, Q.

* **Washington**. Department of Commerce and Labor. Bureau of Standards: Bulletin, vol. III, N. 1-4.

* — Department of Interior. Coast and Geodetic Survey. Report of the Superintendent of the Coast and Geodetic Survey showing the progress of the work from July 1, 1905, to June 30, 1906.

* — Department of the Interior, United States Geological Survey. Geologic Atlas of the United States, fol. N. 136-140; 5 fasc. in f°.

* — United States Naval Observatory. Synopsis of the Report of the Superintendent for the fiscal year ending June 30, 1906. — Publications, 2nd ser., vol. IV.

Washington. Library Congress. Report of the Librarian Congress and Report of the Superintendent of the Library Building and Grounds for the Fiscal year ending June 30, 1906; 1 vol. in-8°.

Wien. Œsterreichische Kommission für die Internationale Erdmessung. Die Astronomisch geodätischen Arbeiten des K. u. K. Militärgeographischen Institutes. Bd. XXI (1906); 4°. — Astronomische Arbeiten, Bd. XIV, Pendelbeobachtungen. — Protokoll über die am 29 dezember 1905 abgehaltene Sitzung.

* — K. K. Geologische Reichsanstalt. Verhandlungen, 1906, N. 11-18; 1907, N. 1-10. — Jahrbuch, 1906, Bd. LVI, Heft. 3 u. 4; Bd. LVII, Heft 1-3. — Abhandlungen, Bd. XVIII, Heft 2; Bd. XX, Heft 2.

— K. u. K. Militärgeographisches Institut. Die Ergebnisse der Triangulierungen, Bd. IV, 1906; 8°.

* — K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft. Jahrgang, 1906, Bd. LVI.

* **Würzburg.** Physikalisch-medicinische Gesellschaft. Sitzungsberichte. 1906. N. 1-7; 1907, 1-2. — Verhandlungen. N. F., Bd. XXXIX, 1-2.

* **Zagreb.** Societas scientiarum naturalium Croatica Glasnik, Godina X, Broj 1-6; XVII, 2; XVIII, 1-2; XIX.

* — Archeološkoga odjela narodnoga muzeja. Vjesnik krvatskoga Archeološkoga društva. Nove Serije, Sveska IX, 1906-1907; 4°.

— Kr. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskoga Zemaljskoga Arkiva. Vjesnik, Godina IX, Sveska 1-4 (1907); 8°.

* — Jugoslavenska Akademija znanosti i umjetnosti: Codex diplomaticus regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae. Vol. IV. — Ljetopis za godinu 1906. — Rad. Knjiga 166. — Razredi historiko-filologički i filosofičko-juridički, 66, 67. — Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika, Svezak 26. Lubovida-Marili. — Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena Kńiga XI, Svezka 2; XII, 1.

* **Zürich.** Naturforschende Gesellschaft. Vierteljahrsschrift. Jahrgang LI, (1906), 2-4 Heft; LII (1907), 1-2 Heft.

PERIODICI 1907.

* **Acta** mathematica. Zeitschrift herausg. von G. Mittag-Leffler. Stockholm; 4°.
** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris; 8°.
* **Annals** and Magazine of Natural History. London; 8°.
** **Annals** of Mathematics. Charlottesville; 4°.
** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.
** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen. Leipzig; 8°.
** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.
** **Archives** italiennes de Biologie... sous la direction de A. Mosso. Turin; 8°.
** **Archivio** per le Scienze mediche. Torino; 8°.
** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.

* **Archivio** storico lombardo. Milano; 8°.
* **Archivio** storico per la Sicilia orientale. Catania, 1904; 8°.
* **Archivio** storico sardo. Edito dalla Società storica sarda. Cagliari; 8°.
* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.
** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.
* **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
* **Beiträge** zur chemischen Physiologie und Pathologie. Braunschweig; 8°.
** **Berliner** philologische Wochenschrift; 8°.
** **Bibliographie** der deutschen Zeitschriften-Litteratur, mit Einschluss von Sammelwerken und Zeitungsbeilagen; 4°.
** **Bibliotheca** Philologica Classica. Lipsiae; 8°.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliotheca** mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik herausg. von G. Erneström. Stockholm; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia cristiana. Roma; 8°.
** **Bullettino** di Archeologia e Storia dalmata. Spalato; 8°.
** **Bulletins** de la Société anatomique de Paris, etc. Paris; 8°.
** **Centralblatt** für Mineralogie, Geologie und Paleontologie in Verbindung mit dem neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. Stuttgart; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.
** **Comptes-rendus** hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Paris; 4°.
* **Cosmos** di Guido Cora.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
** Ἐφημερὶς ἀρχαιολογική. Ἐν Ἀθήναις. 4°.
Eranos. — Acta philologica Suecana.
Euphorion, Zeitschrift für Literaturgeschichte heurasg. von August Sauer.
** **Fortschritte** der Physik. Braunschweig; 8.
* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
* **Gegenbaurs** Morphologisches Jahrbuch. Leipzig; 8°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.
** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini. Milano; 8°.
* **Giornale** storico e letterario della Liguria diretto da Achille Neri e da Ubaldo Mazzini. An. V, 1904; VI, 1905. Spezia; 8°.
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Heidelberger Jahrbücher** (Neue). Heidelberg; 8°.
* **Historische** Zeitschrift. München; 8°.

* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. 1901, Berlin; 8°.
** **Jahrbuch** (Neues), für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. 1906, Stuttgart; 8°.
** **Jahresberichte** der Geschichtswissenschaft im Auftrage der historischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben von E. Berner. Berlin; 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. Dana. New-Haven; 8°.
** **Journal Asiatique**, ou Recueil de Mémoires, d'Extraits et de Notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples orientaux. Paris; 8°.
** **Journal** de Conchyliologie, comprenant l'étude des mollusques vivants et fossiles. Paris; 8°.
** **Journal** de Mathématiques pures et appliquées. Paris; 4°.
** **Journal** des Savants. 1906, Paris; 8°.
** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin; 4°.
* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca; 8°.
** **Minerva**. Jahrbuch d. gelehrten Welt. Jahrg. 1907-1908; Strassburg, 1907; 16°.
** **Modern** language notes. Baltimore.
* **Monatshefte** für Mathematik und Physik. Wien; 8°.
** **Moyen Age** (Le). Bulletin mensuel d'histoire et de philol. Paris; 8°.
** **Nature**, a weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.
* **Nieuw Archieff** voor Wirskunde. Uitgegeven doorh el Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.
** **Palaeontographica**. Beiträge zur Naturgeschichte der Vorzeit.
** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographisch. Anstalt.
** — Ergänzung.
* **Physical Review** (The); a journal of experimental and theoretical physic. Published for Cornell University Ithaca. New-York; 8°.
* **Portugalia**. Materiaes para o etudo de povo portuguez.
* **Prace** matematyczno fizyczne. Warzawa, 1905; 8°.
* **Psychologische Studien** herausg. von W. Wundt. Neue Folge der Philosophischen Studien. Leipzig; 8°.
** **Quarterly** Journal of pure and applied Mathematics. London; 8°.
** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. 8°.
Revista de Mathematica per G. Peano.
** **Revue** archéologique. Paris; 8°.
** **Revue** de la Renaissance. 1906. Paris; 8°.
* **Revue** de l'Université de Bruxelles. 8°.
** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.
Revue du Mois. Paris; 8°.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.
** **Revue** numismatique. Paris; 8°.
** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.
** **Revue** scientifique. Paris; 4°.
* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.
** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.
** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.

** **Rivista** filosofica in continuazione della *Filosofia delle Scuole italiane* e della *Rivista italiana di Filosofia*, Pavia; 8°.

Rivista di Scienze, organo internazionale di Sintesi scientifica. Bologna; 8°.

* **Rivista** internaz. di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.

* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.

* **Rivista** storica benedettina. Roma; 8°.

* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.

Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.

** **Science**. New-York; 8°.

* **Science Abstracts**. Physics and Electrical Engineering. London; 8°.

** **Séances et travaux** de l'Académie des sciences morales et politiques. Paris; 8°.

* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia, organo dell'Accademia medico-fisica fiorentina. Firenze: 8°.

** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.

** **Studi** medioevali diretti da F. Novati e R. Renier. Torino; 8°.

* **Tridentum**. Rivista mensile di studi scientifici. Trento; 8°.

* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap. Amsterdam; 8°.

* **Zeitschrift** für matematischen und naturwissenschaftl. Unterricht, herausg. v. J. C. Hoffmann. Leipzig; 8°.

** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig; 8°.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

Dal 16 Giugno al 17 Novembre 1907.

Allievo (T.). Il laboratorio di tecnologia tessile del R. Istituto Tecnico " G. Sommeiller " in Torino. Torino, 1908; 8° (*dall'A.*).

Bassani (I.) e **Galdieri** (A.). Sui vetri forati di Ottajano nella eruzione vesuviana dell'aprile 1906. Napoli, 1907; 8° (*dal prof. Bassani, Socio corrispondente dell'Accademia*).

Borredon (G.). Realtà dell'Essere. L'Essere è il non Essere - Tempo e Spazio. 1907; 8° (*dall'A.*).

Cabreira (A.). Demonstraçao Mathematica do Seguro Portugal Previdente. Lisboa, 1907; 8°.

— Sobre o calculo das reservas mathematicas. Lisboa, 1907; 8°.

— Sur les corps polygonaux. Coimbre, 1907; 8° (*dall'A.*).

Cantor (M.). Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 4 Bd. 3e Liefg. Leipzig, 1907; 1 vol. 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Coblentz (W. W.). Infra-red emission spectrum of burning carbon disulphide. Lancaster and New York, 1907; 8°.

— Radiation from selectively reflecting bodies. Lancaster and New York, 1907; 8°.

— Radiometric investigations of infra-red absorption and reflection spectra. Washington, 1907; 8°.

— A vacuum radiomicrometer. Washington, 1907; 8°.

— Selektive Reflektion und Molekulargewicht von Mineralien. Leipzig, 1907; 8°.

— Kristallwasser und Konstitutionswasser. Leipzig, 1907; 8°.

— Bericht über den Zusammenhang zwischen chemischer Konstitution und ultra-roten Absorptionsspektren. Leipzig, 1907; 8°.

— Über selektive Reflexion und anomale Dispersion. Göttingen, 1907; 4° (*dall'A.*).

Eclipse total de Sol del 30 agosto de 1905. Observaciones hechas in Carrion de los Condes (Palencia) por la Seccion Astronomica del Observatorio de Cartuja (Granada). Granada, 1905; 1 vol. in 8° (*dono della Direzione dell'Osservatorio*).

Favaro (A.). Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspicî di S. M. il Re d'Italia. Trent'anni di studi Galileiani. Firenze, 1907; 8° (*dall'A.*).

Galileo (G.). Le Opere. Edizione Nazionale sotto gli auspici di S. M. il Re d'Italia. Vol. III, p. 2ª e vol. XIX. Firenze, 1907; 2 vol. in 8° (*dono del Ministero dell'Istruzione Pubblica*).

Gotschlich (B.). Biografia del Dr. Rodulfo Armando Philippi (1808-1904). Santiago (Chilì), 1904; 1 vol. in 8° (*dall'A.*).

Grandeau (L.). L'Agriculture et les Institutions agricoles du monde au commencement du XXᵉ siècle. Paris, 1906; vol. 2-4 in 8°.

Crocco (G. A.). La dinamica degli aerostati dirigibili. Ricerche teoriche e sperimentali. Roma, 1907; 4° (*dall'A.*).

Hoegh (K. v.). Über Materie. Masse, Trägheit. Gravitation und über die Möglichkeit einer mechanischen Erklärung der Naturvorgänge. Leipzig, 1907; 8° (*dall'A.*).

Lombardi (L.). Lezioni di elettrotecnica. Napoli. 1907; 2 vol. in 8° (*dall'A.*).

Memoria que dirige al Congreso Nacional de los Estados Unidos de Venezuela el Ministro de Guerra y Marina en 1907. Tomo II. Caracas, 1 vol. in 4° (*dono del Governo*).

Natur und *Staat*. Beiträge zur naturwissenschaftlichen Gesellschaftslehre. Eine Sammlung von Preisschriften. Herausgegeben von Prof. Dr. H. E. Ziegler in Verbindung mit Prof. Dr. Conrad und Prof. Dr. Haeckel. IX Teil. Jena, 1907; 1 vol. in 8° (*dal prof. Haeckel, Socio straniero dell'Accademia, e collaboratori*).

Oddone (E.). Measurements of the electric potential during the total Solar eclipse of August 30, 1905, at Tripoli, Barbary. Baltimore, 1906; 8°.

— La quinta conferenza internazionale d'aerostazione scientifica a Milano. Roma. 1906; 4°.

— Gli andamenti delle radiazioni termica ed attinica del sole, durante l'eclisse del sole del 30 agosto 1905 a Tripoli di Barberia. Catania. 1907; 8° (*dall'A.*).

— Sur quelques constantes sismiques déduites du tremblement de terre du 4 avril 1904. Paris, 1907; 4° (*Id.*).

— Quelques constantes sismiques trouvées par les macrosismes. Strassburg, 1907; 8° (*Id.*).

Pizzetti (P.). VI, 1, 3. Höhere Geodäsie. Leipzig; 1 fasc. in 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Pochmann (E.). Ueber zwei neue und zwar dynamicale, durch innere actuelle Energie wirkende Eigenschaften der atmosphärischen Luft und deren Bedeutung für Wärmemechanik, wie für die Energetik und damit für die gesammte Naturwissenschaft. Linz a. d. Donau, 1896; 8°.

— "Wärme ist nicht Kälte und Kälte ist nicht Wärme" etc. Linz, 1890; 8°.

— Sämmtliche Bacterien der modern Bacterienwissenschaft sind keine Bacterien etc. Linz a. d. Donau, 1896; 8° (*dall'A. per il premio Bressa*).

Righi (A). Sulla deviazione dei ioni generanti le scintille dovuta ad un campo elettrico trasversale. Bologna, 1907; 4° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Romiti (Discorso pronunciato per l'apertura della 21ª Riunione della Società Anatomica). Würburg; Jena, 1907; 8° (*dall'A.*).

** **Rutherford** (E.). Radio-Activity. Second edition. Cambridge, 1905, 1 vol.; 8°.

Schaefer (Th. W.). The Contamination of the Air of our Cities with Sulphur Dioxid the cause of respiratory Disease. Boston, 1907; 8° (*dall'A.*).

Schiaparelli (G.). Come si possa giustificare l'uso della media aritmetica nel calcolo dei risultati d'osservazione. Milano, 1907; 8° (*dall'A. Socio dell'Accademia*).

See (J. J.). On the temperature, secular cooling and contraction of the Earth, and the theory of Earthquakes held by the ancients. Philadelphia, 1907; 8° (*dall'A.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. 5 9 livrs. II vol. Fauna Exotica, 1, 2 liv.

Silvestri (F.). Contribuzione alla conoscenza degli insetti dannosi all'olivo e di quelli che con esso hanno rapporto. La tignola dell'olivo. Portici, 1907; 8° (*dall'A.*).

Torrese (R.). Nuovi rimedi organici ed inorganici di nome convenzionale. Torino-Genova, 1907; 1 vol. 8° (*Id.*).

True (Fr. W.). Remarks on the type of the fossil Cetacean Agorophius Pygmeus (Müller). City of Washington. 1907; 4° (*Id.*).

Vivante (C.). Trattato di diritto commerciale. Vol. I. I Commercianti. Milano, Vallardi; 8° (*Id.*).

Dal 21 Giugno al 24 Novembre 1907.

Arnò (C.). Riccardo Sineo e la proclamazione di Roma Capitale d'Italia. Tortona, 1907; 8° (*dall'A.*).

— Di una interpolazione certa nella C. 4 de periculo et commodo rei venditae (Cod. 4, 48). Montpellier, 1907; 8° (*Id.*).

Boselli (P.). Sul disegno di legge: Sistemazione degli Uffici finanziari, della Scuola di guerra, dell'Officina Carte-Valori e della Biblioteca Nazionale Universitaria in Torino, e approvazione di una convenzione con quel Comune per la sistemazione predetta. Roma, 1907; 4°.

— Per l'inaugurazione della bandiera sociale (Società " Dante Alighieri "). Discorso 21 aprile 1907. Casalmonferrato, 1907; 8° (*dall'A. Vice-Presidente dell'Accademia*).

Buonamici (F.). Burgundio Pisano. Pisa, 1907; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Cocchia (E.). Saggi filologici: Vol. IV, Uno storico ed un poeta nell'età di Augusto. Napoli, 1907; 1 vol. in 8°.

— L'Ideale artistico, religioso e politico di Giosuè Carducci. — Conferenza tenuta in Napoli il 3 marzo 1907 per invito della Lega democratica. Napoli, 1907; 8° (*dall'A.*).

Couturat (L.). Per la lingua internazionale. Coulomniers, 1906; 8° (*dall'A.*).

Fontana (L.). Bibliografia degli Statuti dei Comuni dell'Italia superiore. Torino, 1907; 3 vol. in 8° (*dono dell'Ing. Vincenzo Fontana, figlio dell'A.*).

Fusani (L.). Gian Francesco Galeani Napione di Cocconato-Passerano. Vita e Opere. Torino, 1907; 8° (*dall'Autrice*).

Garibaldi (G.). Memorie. Edizione diplomatica dall'autografo definitivo a cura di Ernesto Nathan. Torino, 1907; 8° (*dono del sig. E. Nathan*).

** **Garollo** (G.). Dizionario biografico universale. Milano, 1907; 2 vol. in 8°.

Graf (A.). Per la nostra coltura, Un discorso e tre saggi. Milano, 1907; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

** **Litta**: Famiglie celebri italiane: Seconda serie, fasc. XXVI, XXVII e XXVIII, in fol°.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum Scriptores, fascicoli 45, 49 e 51.

— Archivio Muratoriano. Studi e ricerche in servizio della nova edizione dei *Rerum italicarum Scriptores*, N. 3 e 4. Città di Castello.

Nallino (C. A.). Di alcune epigrafi sepolcrali arabe trovate nell'Italia meridionale. Palermo, 1906; 8° (*dall'A.*).

* *Parma:* R. Biblioteca Palatina. Atlanti e Carte nautiche dal secolo XIV al XVII conservati nella Biblioteca dell'Archivio di Parma. Note di Mario Longhera. Parma, 1907.

— Esposizione di cartografia parmigiana e piacentina nel salone della Palatina. Catalogo compilato dal Prof. Dott. Umberto Benazi. Parma, 1907.

— Inventario dei manoscritti geografici della R. Biblioteca Palatina di Parma. Parma, 1907.

Pennisi-Mauro (A.). L'Universale. Organo filosofico della dimostrazione dell'Ente principio creativo ed ordinativo del mondo, ecc. Catania, 15 ottobre 1907, An. X, fasc. 2°.

Rosi (M.). Il risorgimento italiano e l'azione d'un patriota cospiratore soldato. Roma-Torino, 1906; 1 vol. in 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Storia*).

Savio (F.). Il terzo centenario del Cardinale Cesare Baronio. Roma, 1907; 8° (*dall'A. Socio dell'Accademia*).

— I Monasteri antichi del Piemonte. Il Monastero di S. Giusto di Susa. Roma, 1907 (*Id.*).

Sforza (G.). Contributo alla vita di Giovanni Fantoni (Labindo). Genova, 1907; 8° (*dall'A. Socio dell'Accademia*).

Strazzulla (V.). I Persiani di Eschilo e il Nomo di Timoteo volgarizzati in prosa. Messina, 1904; 8°.

— Sul mito di Perseo nelle più antiche relazioni tra la Grecia e l'Oriente classico. Messina, 1906; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Storia*).

Tavani (F.). On a certain aspect of reality as intelligible. London, 1906; 8° (*dall'A.*).

** **Thieme** (H.). Guide bibliographique de la littérature française de 1800 à 1906. Paris, 1907; 1 vol. in 8° gr.

Dal 17 Novembre al 1° Dicembre 1907.

Allgemeine Deutsche Biographie. Bd. LII, Liefg. 4, 5, LIII, 1-5.

Cesnola (A. P. Di). A first study of natural selection in " Helix arbustorum „ (Helicogena). 1907; 8° (*dall'A.*).

Goppelsroeder (F.). Neue Capillar- und Capillaranalytische Untersuchungen mitgeteilt der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel. Basel, 1907; 1 vol. in 8° (*dall'A.*).

Guareschi (I.). Notizie storiche su Felice Fontana. Torino, 1907; 4°.

— Notizie storiche su Ch. Gerhardt ed A. Kekulé. Torino, 1907; 4° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Helmert (F. R.). Bestimmung der Höhenlage der Insel Wangeroog durch trigonometrische Messungen im Jahre 1888. Berlin, 1907; 8° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

Largaiolli (V.). Le Diatomee del Trentino. Padova, 1907; 8°.

— Idracae del Trentino. 1907; 8° (*dall'A.*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus..... conditum, nunc continuatum Dre G. Beck de Mannagetta. T. XIX, Decas II, 8, 13, 14, 15, 16, XXIV, 12, 13, 14. Lipsiae et Gerae; 4°.

Riccò (A.). Periodi di riposo dell'Etna. Catania, 1907; 8°.

— Attività dello Stromboli. Catania, 1907; 8°.

— Sui metodi di costruzione in Calabria. Nota preliminare. Modena, 1907; 8°.

— Anomalie della gravità e del magnetismo terrestre in Calabria e Sicilia. Roma, 1907; 4° (*dall'A.*).

— e **Cavasino** (A.). Osservazioni meteorologiche del 1906 fatte nel R. Osservatorio di Catania, 1907 (*dal Prof. Riccò*).

Dal 24 Novembre all'8 Dicembre 1907.

Arnò (C.). Di una interpolazione certa nella C. 4 *de Periculo et Commodo rei venditae* (Cod. 4, 48). Montpellier, 1907; 8° (*dall'A.*).

Atti del Congresso internazionale di Scienze Storiche (Roma. 1-9 aprile 1903). Roma, 1904-907; 12 vol. in 8° (*dal Socio Boselli, Vice-Presidente dell'Accademia*).

D'Ovidio (F.). Nuovi studi danteschi: Ugolino, Pier della Vigna, i Simoniaci e discussioni varie. Milano, 1907; 1 vol. in 8° (*dall'A.*).

Lameire (I.). Les occupations militaires de l'île Minorque pendant les guerres de l'ancien droit. Paris, 1908; 1 vol. in 8° (*dall'A.*).

Mostra di topografia romana ordinata in occasione del Congresso storico inaugurato in Roma il 2 aprile del 1903. Roma, 1903; 8°.

Pernier (L.). Lavori eseguiti dalla Missione Archeologica italiana in Creta dal 2 aprile al 12 settembre 1906. Relazione. Roma, 1907 (*Dono del Presidente della Scuola italiana di Archeologia, Prof. E. De Ruggiero*).

Sforza (G.). Labinto. Discorso. Firenze, 1907; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Stampini (E.). Dieci lettere di Giovanni Labus a Costanzo Gazzera. Brescia. 1907; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Dal 1° al 15 Dicembre 1907

** **Barrande** (J.). Système Silurien du centre de la Bohême: 1ère Partie: Recherches Paléontologiques, continuation éditée par le Musée Bohême, vol. IV. Gastéropodes par le Doct. J. Perner. Redigé en français par A. S. Oudin. Praga, 1907; 1 vol. in 4°.

De Toni (G. B.). Sylloge Algarum omnium hucusque cognitarum. Vol. V. Myxophyceae curante Doct. Achille Forti (*Dono del Prof. De Toni*).

Gordan (C.). Groupes abéliens généraux contenus dans les groupes linéaires à moins de sept variables. Paris. 1907; 4°.

— Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires: Première partie: Réseaux de formes quadratiques; Deuxième partie: Réseaux de formes linéaires. Paris, 1907; 2 fasc. in 4°.

Surasin (E.) e **Tommasina** (T.). Sur le dédoublement de la courbe de désactivation de la radioactivité induite. Genève. 1907; 8°.

— — Sur quelques modifications qui produisent le dédoublement de la courbe de désactivation de la radioactivité induite. Paris, 1907; 4°.

— — De l'effet des écrans en toile métallique sur le rayonnement secondaire de radioactivité induite. Paris, 1907 (*dagli A.i*).

Tommasina (T.). Quelques observations à propos de la Note de M. H. Pellat sur la constitution de l'atome. Paris, 1907; 4° (*dall'A.*).

Venturi (A.). Terza campagna gravimetrica in Sicilia nel 1905. Roma, 1907; 8° (*dall'A.*).

Dall'8 al 22 Dicembre 1907.

Brini (G.). Di Oreste Regnoli e del Momento odierno del diritto civile. Bologna, 1898; 8° (*Dono dell'On. Avv. Loero*).

Coda (C.). Pensieri e riflessioni. Edizione 3a aumentata. Torino, 1907; 8° (*dall'A.*).

De Gregorio (G.). Studi glottologici italiani. Torino. E. Loescher. 1899-1907; 4 vol. in 8° (*dall'A.*).

** **Justiniani Augusti**. Digestorum seu pandectarum codex Florentinus olim Pisanus phototypice expressus. Vol. II, fasc. VI. Romae, 1907; fol.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 52 (Fasc. 1 del T. VIII, p. 1a). Città di Castello, 1907; 4°.

Ottolenghi (G.). Il rapporto di neutralità. Torino, 1907; 8° (*dall'A*).

Pelizzone (E.). Memorie storiche su Rosingo e la sua Parrocchia. Gabiano. 1907; 8° (*dall'A.*).

Petrone (I.). Il diritto nel sistema della filosofia dello spirito. I. Posizione dell'assunto. Napoli, 1906; 8° (*dall'A.*).

Regnoli (O.). Scritti editi ed inediti di Diritto civile raccolti e pubblicati per cura dell'Avv. Attilio Loero. Bologna, 1900; 8° (*Dono dell'On. Avv. Loero*).

Stampini (E.). La metrica di Orazio comparata con la greca e illustrata su liriche scelte del poeta, con una appendice di carmi di Catullo studiati nei loro diversi metri. Torino, 1908; 8° (*dall'A.*).

Dal 15 al 29 Dicembre 1907.

Edridge-Green (F. W.). Colour systeme (Ophthalmological Society. Transaction, vol. XXVI) (*dall'A.*).

Guareschi (I.). Storia della Chimica. VI. Sui colori degli antichi. Parte 2ª, dal secolo XV al secolo XIX. Il " Plichto " di Giovanventura Rossetti (1540). Torino, 1907; 4° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Guidi (C.). Lezioni sulla scienza delle costruzioni date nel R. Politecnico di Torino. Parte III. Elementi delle costruzioni. Statica delle costruzioni civili. 3ª ediz., Torino, 1907; 1 vol. in 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

** **Reichenbach** (L.) et **Reichenbach** (H. C.). Icones florae Germanicae et Helveticae simul terrarum adjacentium ergo Mediae Europae. T. XIX, 2 Decas 17. Hieracium II. Lipsiae et Gerac. 4°.

Dal 22 Dicembre 1907 al 5 Gennaio 1908.

Arnò (C.). La prima parola di resistenza all'Austria pronunziata in Piemonte nel 1846 con la Società per l'esportazione dei vini indigeni. Roma, 1907; 8° (*dall'A.*).

** **Litta**. Famiglie celebri italiane (Seconda Serie). Fasc. XXIX. Caracciolo di Napoli.

Sarfatti (M.). Del contratto d'abbonamento alle cassette di sicurezza nelle banche. Contributo alla teorica del compromesso. Torino, 1908; 8°.

Toesca di Castellazzo (C.). La così detta avulsione dei capitali dal giro degli affari commerciali e l'imposta della ricchezza mobile. Torino, 1907; 8°.

— L'ammortizzazione del prezzo dell'avviamento di un'azienda e l'imposta di ricchezza mobile. Torino, 1907; 8°.

Dal 29 Dicembre 1907 al 12 Gennaio 1908.

** **Bosscha** (J.). La correspondance de A. Volta et M. van Marum. Leyde, 1905; 1 vol. 8°.

** *Cambridge (The) Modern history.* Cambridge, at the University Press, 1907. Vol. I-IV, VII-X; 8 vol. 8°.

Mattirolo (O.). Francesco Ferrero. Commemorazione. Roma, 1907; 8°.

— Seconda contribuzione allo studio della Flora ipogea del Portogallo. Coimbra, 1907; 8° (*dall'A., Socio dell'Accademia*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. Fauna palaeartica. 10-12 livrs. Stuttgart; 4°.

Dal 5 al 19 Gennaio 1908.

Bargagli (P.). L'Accademia dei Georgofili nei suoi più antichi ordinamenti. Firenze, 1907; 8° (*dall'A.*).

Boiardo (M. M.). Orlando innamorato. Riscontrato sul Codice Trivulziano e su le prime stampe da Francesco Foffano. Bologna, 1906-1907; 3 vol. 8° (*dal sig. Fr. Foffano per il concorso al premio Gautieri per la letteratura, 1905-1907)*.

Russo (A.). In memoria del cav. Marcellino Pizzarelli. Parole. Catania, 1907; 8° *(dall'A.)*.

Dal 12 al 26 Gennaio 1908.

Cabanyes (J.). Polisección gráfica del ángulo. Madrid, 1908; 8° *(dall'A.)*.

Cantor (M.). Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. IV. Bd. 4. Liefg. Leipzig, 1907; 1 vol. 8° *(dall'A.., Socio corrispondente dell'Accad.)*.

Ciscato (G.) e **Antoniazzi** (A.). Differenza di longitudine fra Padova (Osservatorio) e Roma (Monte Mario) determinata nell'agosto 1906. Venezia, 1907; 4° *(dal Direttore del R. Osservatorio di Padova, prof. Lorenzoni, Socio dell'Accademia)*.

Goebel (K.). Einleitung in die experimentelle Morphologie der Pflanzen. Leipzig und Berlin, 1908; 1 vol. 8° *(dall'A., Socio corrispondente dell'Accademia)*.

Guerrini (G.). Sulla funzione dei muscoli degenerati. Comunicazione I a VII. Firenze, 1905-1907; 7 fasc. 8°.

— Sul comportamento dei granuli della cellula epatica intorno alla sede di una ferita. Firenze, 1907; 8°.

— Di una proprietà meccanica del muscolo che si può chiamare *potenza*, Firenze, 1906; 8°.

— Delle minute modificazioni di struttura di alcuni organi nel corso della fatica (fegato, rene, ipofisi, capsule surrenali). Firenze, 1907, 8° *(dall'A.)*.

Mattirolo (O.). Carlo Allioni. Cenno biografico, con ritratto *(dall'A., Socio dell'Accademia)*.

Somigliana (C.). Sulla preparazione matematica degli allievi ingegneri. Torino, 1907; 8°.

— Sulla teoria Maxwelliana delle azioni a distanza. Roma, 1907; 8° *(dall'A., Socio dell'Accademia)*.

Dal 19 Gennaio al 2 Febbraio 1908.

Codex iuris pontificii seu canonici. Taurini, ex typ. G. Derossi, 1888-1907, 10 vol.; 8°.

Colomiatti (Mons. E.). Codex iuris Pontificii seu canonici. Taurini, ex typ. G. Derossi, 1888-1907; 10 vol. 8°.

Muratori (L. A.). Rerum italicarum Scriptores. Fasc. 53 (fasc. 1° del T. III, p. 2ª); 54 (fasc. 4°, T. XXIII, p. 3ª). Città di Castello, 1907).

Dal 26 Gennaio al 9 Febbraio 1908.

Agassiz (A). An Adress at the opening of the Geological Section of the Harvard University Museum. June 12, 1902. Cambridge U. S. A. 1902 (*dal Museum Comparative of Zoology at Harvard College*).

James (W.). Louis Agassiz: Words spoken ... at the reception of the American Society of Naturalists by the President and Fellows of Harvard College at Cambridge. On December 30, 1896. Cambridge U. S. A. 1907 (*dal Museum Comparative of Zoology at Harvard College*).

Leyst (E.). Luftelectrische Zerstreuung und Radioactivität in der Höhle Bin-Basch-Choba in der Krim. Moscou, 1906; 8°.

— Ueber Schätzung der Bewölkungsgrade. Moscou, 1906; 8°.

— Ueber das Erdbeben von San-Francisco nach den Aufzeichungen der Seismographe Moskau. Moskau, 1906; 8°.

— Höfe um Sonne und Mond in Russland. Moskau, 1906: 8° (*dall'A.*).

Schaeberle (J. M.). The effective surface temperature of the sun and the absolute temperature of space.

— The probable origin and physical Structure of our Sideral and solar systems (Reprinted from *Science* N. S. vol. 26) (*dall'A.*).

Dal 2 al 16 Febbraio 1908.

Lajolo (G.). Simboli ed enigmi danteschi. Esposizione ragionata delle allegorie più notevoli e controverse della Divina Commedia. Torino-Roma, 1906; 1 vol. in 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Letteratura*).

Raymond (G. L.). The psychology of inspiration. New York and London, 1908; 1 vol. in 8°.

— Dante and other Poems. Washington; 1 vol. in 16° (*dall'A.*).

Dal 9 al 23 Febbraio 1908.

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. I vol. Fauna palaeartica, fasc. 13 e 14.

Edridge-Green (F. W.). Observations on hue perception (Ophthalmological Society's Transaction, vol. XXVII).

— Observations with Lord Rayleigh's coulour-mixing apparatus (Idem) (*dall'A.*).

Dal 16 Febbraio al 1° Marzo 1908.

Foffano (F.). Un secentista plagiario dell'Aretino. S. a.; 4°.

— La rotta di Roncisvalle nella letteratura romanzesca italiana del cinquecento. Bologna, 1887; 8°.

— Studi sui poemi romanzeschi italiani. I. Il " Morgante „ di Luigi Pulci. Torino, 1891; 8°.

— Un letterato italiano del secolo XVI (Rinaldo Corso). Bologna, 1892; 8°

— Gaspare Gozzi, poeta drammatico. Genova, 1893; 8°.
— Studi sui poemi romanzeschi italiani. II. L' " Amadigi di Gaula „ di Bernardo Tasso. Torino, 1905; 8°.
— Il " Floridante „ di Bernardo Tasso. Milano, 1895; 8°.
— Comunicazioni ed appunti. Ancora del " Floridante „ di Bernardo Tasso. Torino; 8°.
— Ricerche letterarie. Livorno, 1897; 1 vol. 8°.
— Un capitolo inedito d'uno studente pavese del cinquecento. Bergamo, 1897; 4°.
— Postille inedite di G. Baretti al " Bacco in Toscana „ del Redi. Torino, 1899; 8°.
— Due documenti goldoniani. Venezia, 1899; 8°.
— Giuseppe Parini. Conferenza letta agli alunni del R. Liceo di Pavia il 23 marzo 1899. Torino, 1899; 8°.
— La popolarità dell'Orlando Furioso. Lettera al Dott. Giuseppe Pitré. Palermo, 1899; 8°.
— L'estetica della prosa volgare nel cinquecento. Pavia, 1900; 8°.
— Per una edizione dell'Orlando innamorato. Firenze, 1904; 4°.
— I precursori del Bojardo. Roma, 1905; 8°.
— Due preziosi cimeli in biblioteche milanesi, Milano. 1907; 8°.
— Prose filologiche: La questione della lingua con introduzione e commenti. Firenze, 1908 (*dall'A. per il premio Gautieri per la letteratura*).

Manfredi (E.). Rime scelte con alcune sue prose e con prefazione e note del Dott. Francesco Foffano. Reggio Emilia, 1888; 8° (*dono del Prof. Dott. F. Foffano per il premio Gautieri per la letteratura*).

** **Muratori** (L. A.) Rerum italicarum Scriptores. T. IX, part. V, fasc. 2° ed ultimo. T. XXVII, part. I, fasc. unico. Città di Castello, 1907; 4°.

Porena (F.). L'Antropogeografia nelle origini e ne' suoi progressi. Roma. 1908; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Quarta (O.). Discorso pronunziato presso la Corte di Cassazione di Roma nell'assemblea generale del 3 gennaio 1908. Roma, 1908; 8° (*dall'A.*).

** **Schrader** (O.). Reallexicon der indogermanischen Alterhunskunde. Grundzüge einer Kultur und Völkergeschichte Alteuropas. Strassburg, 1901; 1 vol. 8°.

Dal 23 Febbraio all'8 Marzo 1908.

Colomba (L.). Escursione ai giacimenti di Brosso e Traversella (14-15 settembre 1907). Roma, 1907; 8°.
— Osservazioni mineralogiche sui giacimenti auriferi di Brusson (Valle di Aosta). Torino, 1907; 8°.
— Apofillite di Traversella. Roma, 1907; 8° (*dall'A.*).

Oddone (E.). Déchainement des tremblements de terre à l'arrivée des ondes sismiques dues à un premier macrosisme lointain. Modena, 1908; 8° (*dall'A.*).

* **Taramelli** (T.). A proposito di una nuova ipotesi sulla struttura dell'Appennino. Milano, 1908; 8° (*dall'A.*).

Dal 1° al 15 Marzo 1908.

Carnevali (T.). Il Comune. Nuovi studi. Torino, 1908; 8° (*dall'A.*).

Maes (C.). Sul Concorso al premio Reale per l'Archeologia all'Accademia dei RR. Lincei, 1903-1908. Ricorso a S. M. il Re. Roma, 1908 (*Id.*).

Mosso (A.). Le armi più antiche di rame e di bronzo. Roma, 1908; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Dall'8 al 22 Marzo 1908.

Atti del VI Congresso internazionale di Chimica applicata. Roma, 26 aprile-3 maggio 1906. Roma, 1907, 7 vol. 8° gr. (*Dono della Presidenza del Congresso*).

Gautier (R.). Resumé météorologique de l'année 1906 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. Genève, 1907; 8° (*dall'A.*).

Gautier (R.) et **Duaime** (H.). Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice pendant l'année 1906. Resumé, Genève, 1907; 8° (*dagli AA.*).

Reichenbach. Icones Florae Germanicae et Helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. T. XIX, 2 Decas 18.

Dal 15 al 29 Marzo 1908.

Bonelli (G.). Le imposte indirette di Roma antica. Roma, 1900; 4°.

— A proposito dei beni di Beatrice Della Scala nella Calciana. Milano, 1903; 8°.

— Una " barbarie „ più immaginaria che reale. Milano, 1906; 8°.

— La Santa Casa di Loreto ad Alessandria e a Vigevano. Alessandria, 1907; 8°.

— Un archivio privato del cinquecento, le Carte Stella. Milano, 1908; 8° (*dall'A.*).

** **Litta**. Famiglie celebri italiane. 2ª ser. Fasc. XXX: Caracciolo di Napoli - Foscarini di Venezia.

Scrocca (A.). Studi sul Monti e sul Manzoni. Napoli. 1905; 8° (*dall'A. per il premio Gautieri per la Letteratura*).

Dal 22 Marzo al 5 Aprile 1908.

Allievo (T.). Le fibre tessili di applicazione industriale. Torino. 1908, in-4° (*dall'A.*).

Bender (O.). Ueber Berechnung von Anfangstemperaturen. Wiesbaden.

Haeckel (E.). Wanderbilder. Nach eigenen Aquarellen und Oelgemälden. I u. II ser. Die Naturwunder der Tropenwelt Ceylon und Insulinde.

— La lotta per l'evoluzione. Prima traduzione italiana autorizzata dall'Autore, di Mario Domenichini. Torino, 1908; 8°.

Masciari-Genoese (F.). Come si sono formate le montagne? Roma, 1908; 8° (*dall'A. per il premio di scienze fisiche Vallauri*).

Somigliana (C.). Sui potenziali ritardati. Palermo, 1908; 8° (*dall'A. Socio residente*).

Taramelli (T.). Notizie circa il pozzo artesiano di Bagnacavallo. Perugia, 1907; 8°.

— Della utilizzazione dei laghi e dei piani lacustri di alta montagna per sopperire alle magre dei nostri fiumi. Roma, 1907; 8°.

— Benedetto Costa. Roma, 1907; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Dal 29 Marzo al 12 Aprile 1908.

Bouchet (Ch.-A.). Les Archives de la ville d'Evian en Chablais. Inventaire des archives antérieures à l'année 1790. Evian-les-Bains; 8° (*dall'A.*).

Buccelli (V.). Un viaggio a Rio Grande del Sud. Milano; 4° (*Id.*).

Einaudi (L.). La finanza sabauda all'aprirsi del secolo XVIII e durante la guerra di successione spagnuola. Torino, 1908; 4°.

— Studi di economia e finanza. Torino-Roma, 1907; 8°.

— Le entrate pubbliche dello Stato sabaudo nei bilanci e nei conti dei tesorieri durante la guerra di successione spagnuola. Torino, 1907; 4° (*Id.*)

****Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores, fasc. 57 (fasc. 1 del T. XV, p. III).

Prato (G.). Rassegne statistiche ed economiche. Torino, 1908; 8°.

— Il costo della guerra di successione spagnuola e le spese pubbliche in Piemonte dal 1700 al 1713. Torino, 1907; 8°.

— Censimenti e popolazione in Piemonte nei secoli XVI, XVII e XVIII. Roma, 1906; 8° (*dall'A.*).

Ruffini (Fr.). Le spese di culto delle opere pie. Torino, 1908; 8° (*dall'A., Socio residente*).

Dal 5 al 26 Aprile 1908.

Böhm (J. G). Die Kunst-Uhren auf der k. k. Sternwarte zu Prag. Auf öffentliche Kosten herausgegeben von Prof. Dr. L. Weinek. Prag, 1908; 4° (*dono del Prof. L. Weinek Direttore dell'Osservatorio*).

Cantor (M.). Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 4 Bd., 5 Liefg. Leipzig, 1908; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Coblentz (W. W.). Ultrarote Emissionsspektren. Leipzig; 4°.

— Instruments and methods used in radiometry. Washington, 1908; 8° (*dall'A.*).

Haton de la Goupillière. Axes principaux du temps de parcours. Paris, 1907; 4° (*Id.*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus..... conditum, nunc continuatum D^re^ G. Beck de Mannagetta. T. XXIV, 15. Lipsiae et Gerae; 4°.

See (T. J. J.). The new theory of Earthquakes and Mountain formation, as illustrated by processes now at work in the Depths of the Sea. Philadelphia, 1907; 8° (*dall'A.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. II vol. Fauna. Americana, 3, 4 livrs.; 4°.

Tommasina (T.). Sur l'action exclusive des forces Maxwell-Bartoli dans la gravitation universelle. Genève, 1908; 8° (*dall'A.*).

Dal 12 Aprile al 3 Maggio 1908.

** **Cambridge** (The) Modern history: planned by Lord Acton. Vol. V. The age of Louis XIV.

Manno (A.). Ermanno Ferrero. Commemorato. Torino, 1908; 8°.

— Leone Fontana. Ricordi. Torino, 1908; 8° (*dall'A. Socio residente*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 58, fasc. 2° del T. XXXII, p. I.

Verga (E.). L'Archivio della Fabbrica del Duomo di Milano. Riordinato e descritto... Milano, 1908; 1 vol. 4°.

Dal 26 Aprile al 10 Maggio 1908.

Clerici (E.). Resoconto del XXVI Congresso geologico italiano tenuto in Torino nel settembre 1907. Roma, 1907; 8° (*dono del prof. F. Sacco*).

De Toni (G. B.). Illustrazione del secondo volume dell'erbario di Ulisse Aldrovandi. Venezia, 1908; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Morselli (A.). Primo elenco degli scritti del Prof. Enrico Morselli. Milano. 1907; 8°.

Paoli (G. C.). Idea dell'Universo ovvero interpretazione della natura e sue conseguenze teoriche e pratiche. Palermo, 1907-1908, 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Rapport sur les travaux du Bureau central de l'Association Géodésique internationale en 1907 et programme des travaux pour l'exercice de 1908 (*dal Socio straniero Helmert*).

Sacco (F.). I Molluschi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria. Considerazioni generali. Indice generale dell'opera. Torino, 1904; 4°.

— Le pieghe degli gneiss tormaliniferi della Bassa Val di Susa. Milano, 1907; 8°.

— Le facies faunistiche del miocene inferiore. Perugia, 1907; 8°.

— Gli Abruzzi. Schema geologico. Roma, 1907; 8°.

— Sur l'âge du gneiss du Massif de l'Argentera. Paris, 1907; 8°.

— Geologia applicata della Città di Torino. Perugia, 1907; 8°.

— La funzione pratica della geologia. Roma, 1907; 8°.

— Rapporti fra Geologia ed Astronomia. Considerazioni. Torino; 8°.

— Le fratture e le rughe della Luna. Torino, 1907; 8°.

— Essai schématique du Sélénologie. Turin, 1907; 8°.

— 1° Congresso della Società italiana per il progresso della scienza. Torino, 1907; 8°.

— Giuseppe Lanino. Roma, 1907; 8°.

— Martino Baretti. Roma, 1907; 8°.

— Cenni biografici su Carlo Mayer-Eymar. Roma, 1908; 8° (*dall'A.*).

Dal 10 al 24 Maggio 1908.

Ascien (P.). Meteorologia e perturbazioni sismiche. Venezia, 1908; 16° (*dall'A.*).

Greco (M.). Determinazione sperimentale diretta del coefficiente di Poisson in una pietra tufacea della Sicilia. Palermo, 1908; 8° (*Id.*).

Oddone (E.). Intorno al problema della rigidità della Terra. Catania, 1908; 4° (*Id.*).

Weber (S. E.). Mutation in Mosquitoes. Discussion and communications. Lancaster Pa., 1907; 8°.

— Polygenesis in the Eggs of the Culicidae. Lancaster Pa., 1906; 8° (*Id.*).

Dal 17 al 31 Maggio 1908.

Dalla Vedova (G.). Sull'oggetto degli uffici della Sezione VI dell'Associazione italiana per il progresso delle scienze. Roma, 1908; 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

D' Ercole (P.). Il filosofo Pietro Ceretti (Dal fasc. N. 3 dell'anno II del " Caenobium ") (*dall'A.*).

Litta. Famiglie celebri italiane. 2ª serie, fasc. XXXI: D'Aquino di Capua.

** **Pagliaini** (Attilio). Indice per Materie del Catalogo generale della Libreria italiana dall'anno 1847 a tutto il 1899. Puntata I e II. 4°.

Dal 24 Maggio al 14 Giugno 1908.

Borredon (G.). La falsità del sistema di Newton e la scoperta del vero sistema del mondo. Napoli, 1906; 8°.

— Realtà dell'essere. 1907; 8° (*dall'A.*).

Fehr (H.). Le 4e Congrès internat. des Mathématiciens. Rome, 1908; 8° (*Id.*).

Helmert (F. R.) — Trigonometrische Höhenmessung und Refraktionskoeffizienten in der Nähe des Meeresspiegels. Berlin, 1908; 8° (*dall'A. Socio straniero*).

Mattirolo (O.). Proposte intese a promuovere la coltivazione dei tartufi in Italia. Torino, 1908; 8°.

— L'Orto sperimentale della R. Accademia di Agricoltura di Torino nell'anno 1907. Lavori e Bilanci. Torino, 1908; 8° (*dall'A.*).

Poincaré (H.). Une lettre au Journal " Le Temps " sur le 4e Congrès international des Mathématiciens (*dal Circolo Matematico di Palermo*).

** **Reichenbach** (L.) et (H. G.) fils. Icones florae germanicae et helveticae simul terrarum adjacentium ergo mediae Europae. Opus... conditum, nunc continuatum Dre G. Beck de Mannagetta. T. XIX, Decas II, 19. Lipsiae et Gerae; 4°.

Schaeberle (J. M.). The earth as a heat-radialing planet. Science, N. S., vol. XXVII, N. 688.

— The infallibility of Newton's law of radiation at Known temperatures. Sciences, N. S., vol. XXVII, N. 698 (*dall'A.*).

Sergi (G.). Europa. L'origine dei popoli europei e loro relazioni coi popoli d'Africa, d'Asia e d'Oceania. Torino, 1908; 8° (*Id.*).

Ugueto (L.). Determinaciones de posicion del Cometa Daniell en el Observatorio Cajigal (Caracas) (*dono del Minitesrio de Instrucion Publica del Estados Unidos de Venezuela*).

Verbeek (R. D. M.). Rapport sur les molusques. Reconnaissances géologiques dans la partie orientale de l'Archipel des Indes Orientales Néerlandaises (Édit. Française du Jaarboek van het Mijnwezen in Nederlandsch Oost-Indié, T. XXXVII, 1908, partie scientifiques), 1 vol. 8° et Atl. f° (*dal Governo Neerlandese*).

Dal 31 Maggio al 21 Giugno 1908.

** **Litta**. Famiglie celebri italiane (sez. seconda). *Provana*, per cura del barone A. Manno e di E. Provana dei conti di Collegno. Tav. I-IV, fasc. XXXII, f°.

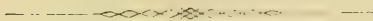
Lizier (A.). Le Scuole di Novara ed il Liceo-Convitto. Monografia storica. Novara, 1908, 1 vol. 4° (*dono della Direzione del Convitto*).

Luzio (A.). Nuovi documenti sul processo Confalonieri. Roma-Milano, 1908, 1 vol. 8° (*dall'A. Socio corrispondente*).

Muratori (L. A.). Rerum Italicarum scriptores. Fasc. 59, T. XVI, p. I, fasc. unico. Città di Castello, 1908; 4°.

Vidari (G.). Carlo Cantoni. Discorso commemorativo letto nell'Università di Pavia il 21 marzo 1908. Pavia, 8° (*dall'A.*).

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Novembre 1907.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, SPEZIA, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica:

1° i ringraziamenti di S. M. il Re e di S. A. R. il Duca di Genova per l'omaggio del volume testè pubblicato delle *Memorie* accademiche;

2° il ringraziamento dell'Avv. E. BARRAJA per la parte presa dall'Accademia alle onoranze di Gian Francesco RE;

3° la morte del Socio corrispondente Carlo KLEIN avvenuta il 24 giugno 1907 e delle condoglianze inviate dalla Presidenza.

Il Presidente riferisce intorno al voto dell'Istituto di Scienze di Bologna perchè venga conferito il premio Nobel al Senatore Stanislao CANNIZZARO per la Chimica. La Classe unanime si associa al voto dell'Accademia di Bologna.

Il Presidente presenta le pubblicazioni seguenti mandate in dono:

dal Socio MOSSO il vol. II del *Laboratoire scientifique international du Mont Rosa;*

dal Socio non residente G. SCHIAPARELLI il suo lavoro, intitolato: *Come si possa giustificare l'uso della media aritmetica nel calcolo dei risultati di osservazione;*

dal Socio corrispondente Prof. Moritz CANTOR il 3° fascicolo del vol. IV delle: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik;*

dal Socio corrispondente Prof. Paolo PIZZETTI: *Höhere Geodäsie;*

dal Socio corrispondente Prof. BASSANI: *Sui vetri forati di Ottajano nella eruzione Vesuviana dell'aprile 1906* scritto in collaborazione del Dott. A. GALDIERI;

dal Socio corrispondente C. JORDAN tre note: *1) Groupes abéliens généraux contenus dans les groupes linéaires à moins de sept variables; 2-3) Reduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires, 1ère et 2ème partie;*

dal Socio GUARESCHI le sue *Notizie storiche su Felice Fontana* e *Notizie storiche su Ch. Gerhardt e A. Kekulè.*

Il Signor Luigi SAUDINO invia nuovi documenti intorno alla sua nuova pila elettrica costante ed economica. La Classe delibera che essi vengano consegnati alla Commissione già precedentemente nominata per esaminare il lavoro del SAUDINO.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° N. JADANZA e V. BAGGI: *Un livello che dà sicuramente la visuale orizzontale;*

2° C. BURALI-FORTI: *Funzioni vettoriali*, dal Socio PEANO.

Il Socio PARONA presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche il lavoro del Prof. SACCO, intitolato: *Il gruppo del Gran Sasso d'Italia;* il Presidente delega i Soci PARONA e SPEZIA per riferire intorno ad esso.

Il Socio PARONA, a nome del Socio MATTIROLO, presenta pure per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche il lavoro del Dott. Efisio FONTANA, intitolato: *Ricerche intorno ad alcune specie del genere Elaphomyces Nees;* il Presidente delega i Soci MATTIROLO e PARONA per riferire intorno ad esso.

Il Socio GUARESCHI presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche il suo lavoro, intitolato: *Nuove notizie storiche sulla vita e sulle opere di Macedonio Melloni.* La Classe con votazione segreta unanime delibera la stampa di questo lavoro nei volumi delle *Memorie.*

LETTURE

Un livello che dà sicuramente la visuale orizzontale.

Nota di N. JADANZA e V. BAGGI.

Un livello a cannocchiale allora può dirsi perfetto quando può dare una visuale orizzontale (nei limiti tracciati dalla bontà del cannocchiale che si adopera e dalla sensibilità della livella) senza dar luogo ad altri errori, per l'eliminazione dei quali conviene in molti casi ricorrere a metodi speciali di osservazione.

Tre soli livelli si accostano a questo ideale e sono il livello *a compensazione del* Breithaupt, il livello a cannocchiale mobile e livella con *doppia graduazione*, ed il livello a due cannocchiali di Brito Limpo.

Di cotesti tre livelli il primo richiede una costruzione accuratissima e non si è mai sicuri del parallelismo tra l'asse di sospensione e l'asse proprio della livella; il secondo richiede il parallelismo perfetto tra i due assi della livella, ciò che finora difficilmente si ottiene anche dai più abili costruttori; il terzo, quando si voglia costruirlo per livellazione di precisione, richiede cannocchiali di maggior potenza e quindi riesce troppo pesante.

A tutti gli inconvenienti ora detti si rimedia adoperando il livello che proponiamo noi, che non è altro se non il livello a cannocchiale mobile e livella fissa al cannocchiale (livello di Chezy) avente sovrapposta al cannocchiale un'altra livella mobile della stessa sensibilità di quella fissa. Esso è rappresentato dalla figura (1); la livella superiore però deve essere costruita in modo che, quando il cannocchiale fa una rotazione di due angoli retti intorno al suo asse meccanico, essa possa rimanere nella sua posizione primitiva, così come lo mostra la fig. (2).

Chiameremo *prima posizione* quella della fig. (1), *seconda posizione* quella della fig. (2).

Supposto corretto lo strumento (ed ora vedremo come ciò si ottenga) e messo in stazione in un punto A, si diriga il cannocchiale alla stadia che si trova in un punto qualunque B: si faccia su di essa una lettura l_1 quando la bolla della livella

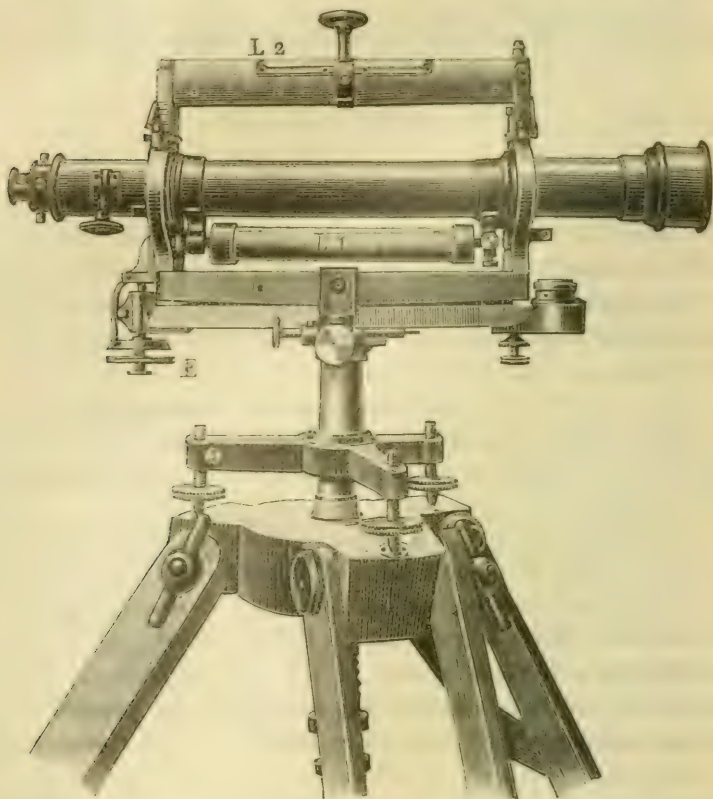



Fig. 1.

inferiore è centrata (posizione 1ª): indi fatto rotare il cannocchiale di due angoli retti intorno al proprio asse di figura (posizione 2ª) si faccia una seconda lettura l_2 sulla stadia, dopo aver centrato la bolla della livella mobile mediante la vite di elevazione E: la lettura $l_m = \frac{l_1 + l_2}{2}$ sarà la lettura corrispondente alla visuale orizzontale.

Correzione dell'Istrumento.

Essendo fornito di vite di elevazione, sarà sufficiente rendere verticale l'asse dell'istrumento soltanto approssimativamente. Ciò si ottiene mediante una qualunque delle due livelle

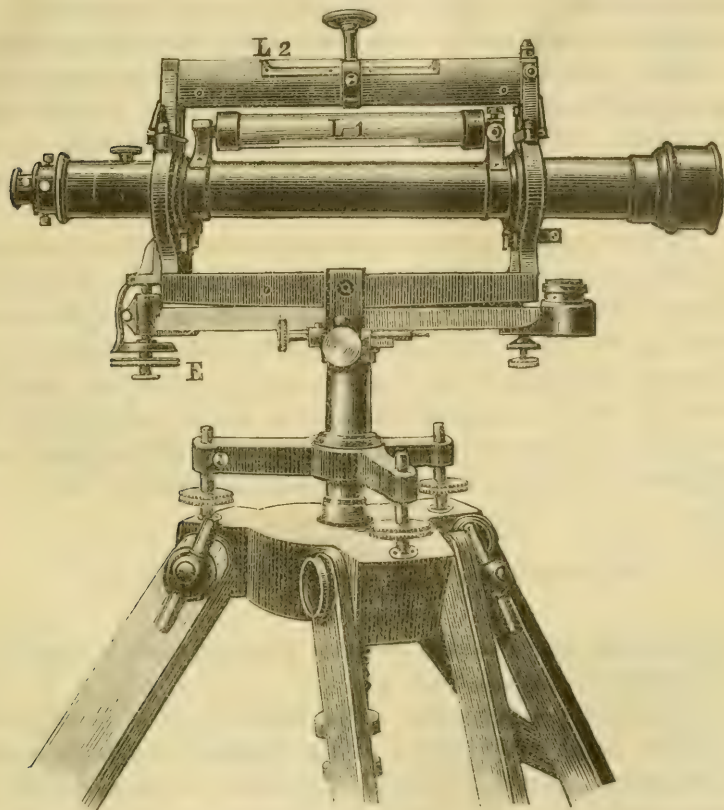



Fig. 2.

dirigendola prima in direzione di una delle viti del basamento e centrando la bolla con questa vite, quindi girando l'alidada di 2 angoli retti e centrando la bolla della stessa livella per mezzo della vite di elevazione. Mettendo in ultimo la livella in direzione della retta che unisce le altre due viti del basamento si centrerà di nuovo la bolla con movimento simultaneo ed inverso di queste due viti.

Correzione della livella inferiore L_1.

La bolla deve rimanere centrata prima e dopo la inversione del cannocchiale sulle forchette che lo sostengono.

Posta la livella L_1 in una direzione qualunque si centri la bolla mediante la vite di elevazione E, quindi si inverta il cannocchiale in modo che il perno che prima era a destra dell'osservatore vada a sinistra e viceversa, e lo spostamento della bolla si corregga metà colla vite di elevazione e metà colla vite propria della livella. Tale operazione si ripeta fino a che la bolla rimanga centrata prima e dopo la inversione del cannocchiale.

È bene *cullare* la livella per assicurarsi che il suo asse non sia sghembo coll'asse di rotazione del cannocchiale. Se nel cullare la livella la bolla si sposta dal centro la si riporterà mediante le viti laterali di essa, attenendosi alla nota regola: Se spostando la livella verso l'osservatore, la bolla va verso la destra di esso, l'estremità destra della livella dovrà essere allontanata dall'osservatore: se la bolla va verso la sinistra, sarà l'estremità di sinistra che dovrà essere allontanata dall'osservatore.

Correzione della livella superiore L_2.

La bolla deve rimanere centrata prima e dopo la inversione della livella sul cannocchiale.

Disposto il cannocchiale nella posizione 2ª e sovrapposta la livella L_2 al cannocchiale, si centri la bolla mediante la vite di elevazione, quindi si inverta la livella L_2 in modo che il braccio di destra vada a sinistra e viceversa: lo spostamento della bolla se c'è si corregga metà colla vite di elevazione e metà colla vite propria della livella. Tale operazione si ripeta fino a che la bolla rimanga centrata prima e dopo la inversione della livella. Si *culli* la livella per assicurarsi che il suo asse non sia sghembo coll'asse di rotazione del cannocchiale. Se la bolla della livella si sposta mentre si culla, la si riporterà in centro mediante le viti laterali di essa nel modo seguente:

Se spostando la livella verso l'osservatore la bolla va verso

la destra di esso, l'estremità destra della livella dovrà essere avvicinata all'osservatore; se la bolla va verso la sinistra, sarà l'estremo di sinistra che deve essere avvicinato all'osservatore.

Discussione.

Supporremo, per maggiore generalità, il cannocchiale conico (fig. 3) $ABA'B'$ poggiante su due cuscinetti formati a $\vee$ di ampiezza $= 2\lambda_1$; la retta che unisce i vertici di questi $\vee$ sia la HH'. Questa retta è quella che rimane orizzontale quando invertendo il cannocchiale la bolla della livella L_1 è sempre centrata.

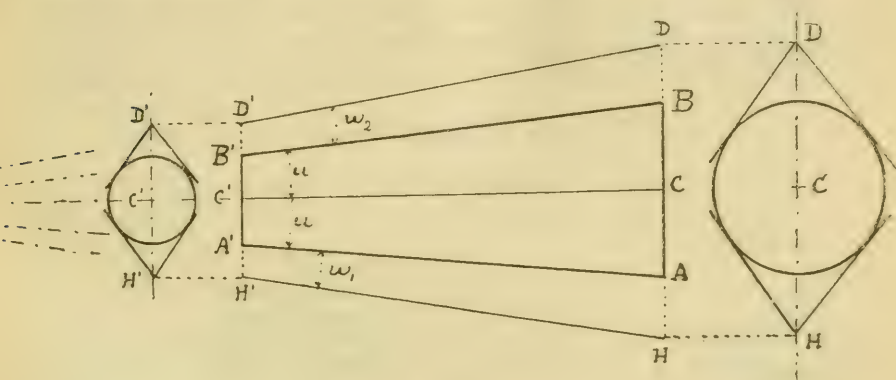



Fig. 3.

La livella superiore L_2 abbia le sue braccia formate anch'esse a $\vee$ di ampiezza $= 2\lambda_2$; la retta che unisce i vertici di tali $\vee$ sia DD'. È noto che tale retta è orizzontale se la bolla della livella L_2 rimane centrata prima e dopo l'inversione di essa.

Indicando con $2u$ l'ampiezza del cono del cannocchiale, con ω_1 l'angolo che la generatrice AA' fa colla retta HH', con ω_2 l'angolo che la generatrice BB' fa colla retta DD', con r_1 ed r_2 i raggi dei due perni AB, $A'B'$ e con d la distanza CC' si avrà

$$CD = \frac{r_1}{\operatorname{sen}\lambda_2}; \qquad CH = \frac{r_1}{\operatorname{sen}\lambda_1};$$

$$C'D' = \frac{r_2}{\operatorname{sen}\lambda_2}; \qquad C'H' = \frac{r_2}{\operatorname{sen}\lambda_1};$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{r_1 - r_2}{d}; \quad \operatorname{tg}(u + \omega_1) = \frac{r_1 - r_2}{d \,.\, \operatorname{sen}\lambda_1}; \quad \operatorname{tg}(u + \omega_2) = \frac{r_1 - r_2}{d \,.\, \operatorname{sen}\lambda_2}.$$

Supposto l'asse ottico coincidente con l'asse di figura CC' ed il piano AB più vicino all'obbiettivo, su di una stadia situata verticalmente ad una distanza D si farà una lettura l_1, quando la livella L_1 è centrata, data da

$$(1) \qquad l_1 = a + D \,.\, \mathrm{tg}\,(u + \omega_1)$$

essendo a la lettura che si farebbe coll'asse orizzontale CC'.

La lettura l_2 che si farà quando la bolla della livella L_2 è centrata è data da

$$(2) \qquad l_2 = a - D \,.\, \mathrm{tg}\,(u + \omega_2) \,.$$

Dalle (1) e (2) si deduce

$$l_m = \frac{l_1 + l_2}{2} = a + \frac{D}{2}\left[\mathrm{tg}\,(u + \omega_1) - \mathrm{tg}\,(u + \omega_2)\right]$$

$$l_1 - l_2 = D\left[\mathrm{tg}\,(u + \omega_1) + \mathrm{tg}\,(u + \omega_2)\right]$$

e quindi

$$(3) \qquad r_1 - r_2 = \frac{d}{D}(l_1 - l_2)\frac{\mathrm{sen}\,\lambda_1 - \mathrm{sen}\,\lambda_2}{\mathrm{sen}\,\lambda_1 + \mathrm{sen}\,\lambda_2}$$

$$(4) \qquad a = \frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2}\,\frac{\mathrm{sen}\,\lambda_1 - \mathrm{sen}\,\lambda_2}{\mathrm{sen}\,\lambda_1 + \mathrm{sen}\,\lambda_2}$$

le quali darebbero la lettura vera a e la differenza dei raggi dei perni in funzione delle letture fatte sulla stadia e di quantità note nel caso più generale.

Nella pratica il costruttore può sempre fare $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e quindi le (3) e (4) diventano

$$(5) \qquad r_1 - r_2 = \frac{l_1 - l_2}{2} \,.\, \frac{d}{D} \,.\, \mathrm{sen}\,\lambda$$

$$(6) \qquad a = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

La (6) dice che la semisomma delle due letture è indipendente dalla grandezza dei perni e quindi l'errore dovuto alla disuguaglianza dei perni è eliminato.

È eliminato anche l'errore dovuto alla non coincidenza dell'asse ottico coll'asse di figura, se prima di fare la lettura l_2 si fa rotare il cannocchiale di dùe retti intorno al proprio asse di figura.

La differenza tra i raggi dei perni si può trovare praticamente senza conoscere il valore angolare di una parte della graduazione della livella nel modo seguente:

Quando la bolla della livella L_1 è centrata si faccia una lettura sul tamburo della vite di elevazione E (supposto che vi sia); tale lettura sia e_1; si faccia su di esso una nuova lettura e_2 quando è centrata la bolla della livella L_2, la differenza $e_2 - e_1$ rappresenterà l'angolo $2u + \omega_1 + \omega_2$; lo stesso angolo sarà rappresentato dallo spostamento m_1 avvenuto nella bolla della livella L_1 ed anche dallo spostamento m_2 avvenuto nella bolla della livella L_2 quando si ritorna a centrare la livella L_1; si avrà dunque

$$(7) \qquad \begin{cases} e_2 - e_1 = 2u + \omega_1 + \omega_2 \\ m_1 = 2u + \omega_1 + \omega_2 \\ m_2 = 2u + \omega_1 + \omega_2 \end{cases}$$

e queste possono servire per la ricerca del valore angolare di una parte del tamburo della vite di elevazione e di quella di una parte della graduazione di una delle due livelle L_1 ed L_2 quando è noto il valore angolare di una qualunque di esse.

Le formole precedenti si semplificano se il cannocchiale poggia su cuscinetti circolari e se la livella superiore L_2 ha anch'essa le braccia terminate ad arco di cerchio; in questo caso sarà $\omega_1 = \omega_2 = 0$ e quindi

$$(8) \qquad \begin{cases} e_2 - e_1 = 2u \\ m_1 = 2u \\ m_2 = 2u \end{cases}$$

La formola (5) diventa

$$(9) \qquad r_1 - r_2 = \frac{d}{D} \cdot \frac{l_1 - l_2}{2}$$

Nel caso di $\lambda_1 = \lambda_2 = 45^\circ$ sarà

$$r_1 - r_2 = \frac{d}{D} \cdot \frac{l_1 - l_2}{4} \cdot \sqrt{2} \tag{10}$$

Nel caso di $\lambda_1 = 90^\circ$ e $\lambda_2 = 45^\circ$ si avrà

$$r_1 - r_2 = \frac{d}{D} (l_1 - l_2) (\sqrt{2} - 1) \tag{11}$$

e la correzione da fare alla semisomma delle due letture l_1 ed l_2 per avere a è

$$\frac{l_1 - l_2}{2} \cdot (3 - 2\sqrt{2})$$

ovvero

$$0{,}086 \, (l_1 - l_2) \, . \tag{12}$$

Conviene osservare che il livello da noi proposto differisce da quelli *apparentemente* analoghi costruiti dall'Hildebrand, dal Salmoiraghi e da altri costruttori pel fatto che esso, a differenza degli altri, permette di valersi della livella mobile L_2 quando il cannocchiale trovasi nella posizione 2ª.

Quando lo strumento è corretto, la certezza di ottenere la lettura a corrispondente ad una visuale orizzontale mediante la media delle due letture l_1 e l_2 non è menomata da alcun dubbio di cause d'errore accidentali come si verifica per i livelli di precisione fin qui adottati.

Infatti nei livelli del tipo Chezy (è il livello della fig. (1) quando si supponga soppressa la livella mobile L_2) dopo che si è corretta la livella L_1 nel modo detto precedentemente, oltre che non è possibile verificare direttamente se i collari del cannocchiale hanno lo stesso diametro (nei limiti ben inteso della sensibilità della livella), non è neppure possibile eliminare strumentalmente l'errore dovuto alla non coincidenza dell'asse ottico coll'asse meccanico del cannocchiale perchè portando il cannocchiale nella posizione 2ª la livella L_1 non presenta più all'osservatore la sua faccia graduata, e la lettura fatta sulla stadia in questa posizione del cannocchiale è per conseguenza incerta.

Il livello a cannocchiale mobile e livella mobile tipo Barthelemy, che si adopera anche in Italia per le livellazioni di precisione, è certamente uno dei migliori tipi di livelli fin qui adoperati ed è preferibile al precedente: esso equivale a quello da noi descritto nella ipotesi che manchi la livella L_1.

Con tale livello dopo aver corretto la livella L_2 si ottiene la lettura a dalla media l_1 e l_2 di due letture fatte sulla stadia prima e dopo la rotazione del cannocchiale intorno al proprio asse meccanico; però questo tipo di livello non permette di eliminare strumentalmente l'errore dovuto alla disuguaglianza dei diametri dei collari.

Volendo adoperare il livello da noi descritto senza correggere preventivamente lo strumento, il che può riuscire conveniente allorchè si debbono battere pochi punti, si procederà con il metodo della media delle quattro letture; cioè si faranno sulla stadia due letture l_1 l'_1 colla bolla della livella L_1 centrata (prima e dopo l'inversione del cannocchiale sulle forcelle d'appoggio) colla sola vite di elevazione. Poscia si girerà di 180° il cannocchiale intorno al proprio asse meccanico, e si faranno sulla stadia due letture l_2 l'_2 colla bolla della livella L_2 centrata unicamente colla vite di elevazione prima e dopo l'inversione della livella L_2 sui collari d'appoggio: sarà evidentemente

$$a = \frac{1}{4}(l_1 + l'_1 + l_2 + l'_2).$$

Prima di leggere sulla stadia bisogna essere sicuri che la bolla della livella che si osserva sia *centrata* ed *in riposo.*

Applicazione.

Il Gabinetto di Geodesia della R. Università di Torino possiede un livello di precisione della Casa *Hildebrand* (successore *Lingke*). La livella superiore però serviva soltanto per la ricerca della disuguaglianza dei perni del cannocchiale. Abbiamo fatto allungare le braccia della livella, ed ora è quello rappresentato dalle figure (1) e (2).

In questo livello il cannocchiale poggia su cuscinetti fog-

giati ad arco, mentre la livella poggia con piedi a V la cui apertura è un angolo retto.

In questo caso la visuale corretta è data da

$$a = \frac{l_1 + l_2}{2} + 0{,}086\,(l_1 - l_2)$$

e quindi se si ha $l_1 = l_2$, l'istrumento è esente dall'errore della diseguaglianza dei perni.

In questo livello il perno più vicino all'oculare è più grande di quello che sta verso l'obbiettivo, e ciò è stato constatato mediante la livella superiore, determinando con essa la diseguaglianza dei perni.

La correzione da fare alla media delle due letture l_1, l_2 non raggiunge il mezzo millimetro *alla distanza* di 100 metri.

Le forcelle mediante le quali la livella appoggia sul cannocchiale e quelle che servono di sostegno al cannocchiale conviene che sieno tutte foggiate a V coll'apertura di un angolo retto; ciò è utile non solo per rendere nulla la correzione da fare alla media delle due letture, ma anche per rendere nulli od almeno minimi gli spostamenti dell'asse meccanico del cannocchiale (quando questo ruota intorno ad esso) causati: 1° dal non essere i collari perfettamente circolari, pur essendo uguali; 2° dal non essere perfettamente simmetrici rispetto ad un piano che passi pel loro centro, allorchè sono eguali fra loro, ma non circolari (*).

(*) Cfr. V. Baggi, *Sulla forma più conveniente da dare ai sostegni del cannocchiale nei teodoliti e nei livelli* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1897).

Funzioni vettoriali.

Nota di C. BURALI-FORTI in Torino.

In due note precedenti ho ottenuto le importanti funzioni fisiche *rotazione* e *divergenza*, mediante le omografie vettoriali (*). Esse si possono ottenere anche indipendentemente dalle omografie vettoriali (utilissime anche in Geometria, ma poco note) mediante due funzioni D_u e K_u che corrispondono esattamente alle omografie, " derivata del vettore u rispetto al punto P del quale u è funzione „ " coniugata (nel senso del K di HAMILTON) della precedente omografia „. L'importante significato fisico delle funzioni D, K risulta evidente dalle (3) di questa nota; per le applicazioni il lettore può esaminare le due note sopra citate.

Mi valgo sistematicamente delle notazioni stabilite col Prof. R. MARCOLONGO nelle note I, II, III: *Per l'unificazione delle notazioni vettoriali*, pubblicate nel Tomo XXIV dei *Rendiconti* del *Circolo matematico di Palermo*.

1. FUNZIONI D e K. — Se u è un vettore funzione del punto P, variabile in un dato campo, con D_u, K_u, indichiamo due funzioni che applicate ad un vettore x qualunque, funzione di P, producono i vettori $\mathrm{D}_u x$, $\mathrm{K}_u x$ individuati dalle condizioni seguenti:

$$(\mathrm{D}_u x) \times a = x \times \operatorname{grad}(u \times a) \tag{1}$$

$$(\mathrm{K}_u x) \times y = (\mathrm{D}_u y) \times x \tag{2}$$

(*) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. *Sopra alcune operazioni proiettive applicabili nella Meccanica. Sulle omografie vettoriali* (Volume XLII, 1906-907).

valevoli qualunque sia il vettore *costante* (cioè indipendente da P) $\boldsymbol{a}$, e qualunque sia il vettore $\boldsymbol{y}$ funzione di P.

È necessario dimostrare che le condizioni (1), (2) definiscono univocamente le funzioni D, K.

Essendo O un punto fisso, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ vettori fissi unitari formanti un sistema ortogonale destrogiro, e

$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\,, \qquad \boldsymbol{u} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}\,,$$

si ponga, indipendentemente da $\boldsymbol{a}$ e da $\boldsymbol{y}$,

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{i})\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x} + \ldots + \ldots = (\boldsymbol{x}\times\operatorname{grad} a)\,\boldsymbol{i} + \ldots + \ldots,$$

$$\mathrm{K}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{i})\operatorname{grad} a + \ldots + \ldots = \left(\boldsymbol{x}\times\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \ldots + \ldots,$$

ove i terzi membri si ottengono dai secondi ricordando che

$$\operatorname{grad} m = \frac{\partial m}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial m}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial m}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Ciò posto si ha:

$$(\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{x}\times\operatorname{grad} a)(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a}) + \ldots = \boldsymbol{x}\times\operatorname{grad}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{i})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i}) + \ldots$$
$$= \boldsymbol{x}\times\operatorname{grad}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a}),$$

$$(\mathrm{K}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{x}\times\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\right)(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{y}) + \ldots = \boldsymbol{x}\times\left\{(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{i})\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x} + \ldots\right\} = \boldsymbol{x}\times\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{y}.$$

Dunque le funzioni D, K *esistono*. Sono uniche perchè dalle (1), (2) si ha

$$(\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x} - \mathrm{D}'_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{a} = 0\,, \qquad (\mathrm{K}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x} - \mathrm{K}'_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = 0$$

qualunque siano $\boldsymbol{a}$ ed $\boldsymbol{y}$, cioè $\mathrm{D}'_{\boldsymbol{u}} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}$, $\mathrm{K}'_{\boldsymbol{u}} = \mathrm{K}_{\boldsymbol{u}}$.

Esaminiamo ora le principali proprietà delle funzioni D, K che sono conseguenze dirette delle condizioni (1), (2). Supposto che $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sieno *vettori* e m *numero reale*, funzioni di P, si ha:

(3) $\qquad \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}dP = d\boldsymbol{u}\,, \qquad (\mathrm{K}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x})\times dP = \boldsymbol{x}\times d\boldsymbol{u}$

(4) $\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x} = 0$ e $\mathrm{K}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x} = 0$, per $\boldsymbol{x}$ qualunque, solo quando $\boldsymbol{u} = \text{cost.}$

$$(5)\quad \begin{cases} D_u(x+y) = D_u x + D_u y\,, \qquad D_u(mx) = mD_u x \\ K_u(x+y) = K_u x + K_u y\,, \qquad K_u(mx) = mK_u x \\ \text{cioè D e K sono } \textit{funzioni lineari.} \end{cases}$$

$$(6)\qquad D_{u+v}x = D_u x + D_v x\,, \qquad K_{u+v}x = K_u x + K_v x$$

$$(7)\qquad \begin{cases} D_{mu}x = mD_u x + (x \times \operatorname{grad} m)\, u \\ K_{mu}x = mK_u x + (x \times u) \operatorname{grad} m \end{cases}$$

$$(8)\qquad \operatorname{grad}(u \times v) = K_u v + K_v u$$

$$(9)\qquad \begin{cases} D_{u\wedge v}x = u \wedge D_v x - v \wedge D_u x \\ K_{u\wedge v}x = K_u(v \wedge x) - K_v(u \wedge x) \end{cases}$$

Le (3) danno il *carattere fisico* delle funzioni D, K. La prima dice che applicando D_u ad uno spostamento qualsiasi dP di P si ottiene lo spostamento corrispondente du di u. La seconda esprime che la proiezione (composta, *lavoro*) di $K_u x$ su dP eguaglia la proiezione di x su du. — La funzione D_u può chiamarsi " derivata di u rispetto a P "; la K_u è coniugata di D_u come esprime la (2) con lo scambio dei vettori x, y. — Se nella (2) si pone x al posto di y, risulta che $D_u x - K_u x$ è normale a x [Cfr. (12)]; in particolare la seconda delle (3) dice che $K_u dP - du$ è normale a dP.

Dimostriamo ora le formule precedenti.

Dim. (3). $(D_u dP) \times a = dP \times \operatorname{grad}(u \times a) = d\,(u \times a) = (du) \times a$

$(K_u x) \times dP = (D_u dP) \times x = x \times du\,.$

Dim. (4). — Risulta dalle (1) e (2) ricordando che $\operatorname{grad} m = 0$ per qualunque posizione di P, solo quando $m = \text{cost}$.

Dim. (5). $(D_u x + D_u y) \times a = (x+y) \times \operatorname{grad}(u \times a) =$

$= \{D_u(x+y)\} \times a$

e analogamente per mx e per K.

Dim. (6). $(D_{u+v}\,x) \times a = x \times \operatorname{grad}(u+v) \times a =$

$= x \times \operatorname{grad} u \times a + x \times \operatorname{grad} v \times a = (D_u x) \times a + (D_v x) \times a\,,$

e analogamente per K.

Dim. (7).
$$(D_{mu}x)\times a = x\times \{ m\,\text{grad}(u\times a) + (u\times a)\,\text{grad}\,m \} =$$
$$= m(D_u x)\times a + (x\times \text{grad}\,m)\,u\times a,$$
$$(K_{mu}x)\times y = (D_{mu}y)\times x = m(D_u y)\times x + (y\times \text{grad}\,m)\,u\times x =$$
$$= m(K_u x)\times y + (x\times u)\,\text{grad}\,m\times y\,.$$

Dim. (8).
$$\text{grad}(u\times v)\times dP = d(u\times v) = u\times dv + v\times du =$$
$$= (K_u v)\times dP + (K_v u)\times dP,$$

che dimostra la (8) *purchè* P possa spostarsi almeno in due direzioni distinte.

Dim. (9). — Se a è vettore costante si ha

$$D_{u\wedge a}x = -a\wedge D_u x\,,\qquad K_{u\wedge a}x = K_u(a\wedge x)$$

come dimostrano le seguenti eguaglianze:

$$(D_{u\wedge a}x)\times b = x\times \text{grad}(u\wedge a\times b) = x\times \text{grad}(u\times a\wedge b) = a\wedge b\times D_u x =$$
$$= -a\wedge D_u x\times b,$$
$$(K_{u\wedge a}x)\times y = (D_{u\wedge a}y)\times x = -a\wedge(D_u y)\times x = (D_u y)\times a\wedge x =$$
$$= \{K_u(a\wedge x)\}\times y\,.$$

Ciò posto, le seguenti eguaglianze dimostrano le (9):

$$(D_{u\wedge v}x)\times a = x\times \text{grad}(u\times v\wedge a) = x\times K_u(v\wedge a) + x\times K_{v\wedge a}u =$$
$$= v\wedge a\times D_u x + u\times D_{v\wedge a}x = -v\wedge(D_u x)\times a - u\times a\wedge D_v x =$$
$$= (u\wedge D_v x - v\wedge D_u x)\times a\,,$$
$$(K_{u\wedge v}x)\times dP = x\times d(u\wedge v) = x\times u\wedge dv - x\times v\wedge du =$$
$$= (x\wedge u)\times dv - (x\wedge v)\times du = (K_v x\wedge u - K_u x\wedge v)\times dP.$$

La prima delle (9) si può anche dimostrare, osservando che

$$D_{u\wedge v}dP = d(u\wedge v) = u\wedge dv - v\wedge du = u\wedge(D_v dP) - v\wedge(D_u dP)$$

e che essendo dP arbitrario si può sempre porre $dP = \tau x$ con τ infinitesimo. Questa dim. rende anche la prima delle (9) indipendente dalla (8), della quale ci siamo valsi nella prima dimostrazione. — Si osservi però che se P varia in una superficie, allora non si può porre $dP = \tau dx$ altro che per x parallelo al piano tangente in P, e quindi la dim. ora considerata cade in difetto.

Se nel sistema di riferimento $O,\ i,\ j,\ k$ si ha

$$P = O + xi + yi + zk\,,\qquad u = ai + bj + ck\,,$$

allora si è già trovato che

$$(10)\quad \begin{cases} D_u x = (x \times i)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x \times j)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (x \times k)\dfrac{\partial u}{\partial z} = \\ = (x \times \operatorname{grad} a)\, i + (x \times \operatorname{grad} b)\, j + (x \times \operatorname{grad} c)\, k, \\ K_u x = (x \times i) \operatorname{grad} a + (y \times j) \operatorname{grad} b + (y \times k) \operatorname{grad} c = \\ = \left(x \times \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) i + \left(x \times \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) j + \left(x \times \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) k. \end{cases}$$

Le precedenti formule (1)-(9), che noi abbiamo dimostrate indipendentemente da qualsiasi sistema di riferimento, si dimostrano anche valendosi delle (10) e in modo assai semplice.

Le (10) permettono di dimostrare ancora la proprietà seguente:

(11) $D_u x = K_u x$ qualunque sia x, solo quando u è il gradiente di un numero funzione di P.

Dalle (10) risulta che $D_u = K_u$ solo quando

$$\operatorname{grad} a = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\dots, \dots\dots$$

che, per essere $u = ai + bj + ck$ danno

$$\frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}, \qquad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial z}, \qquad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x},$$

le quali esprimono esistere un numero m tale che

$$a = \frac{\partial m}{\partial x}, \qquad b = \frac{\partial m}{\partial y}, \qquad c = \frac{\partial m}{\partial z}$$

cioè tale che

$$u = \frac{\partial m}{\partial x} i + \frac{\partial m}{\partial y} j + \frac{\partial m}{\partial z} k = \operatorname{grad} m.$$

Non sappiamo dalle (1) e (2) dedurre direttamente, senza l'aiuto delle (10), la proprietà (11), la quale deve ridurre la condizione $D_u = K_u$ a questa, " $u \times dP$ è un differenziale esatto. „

2. Rotazione e divergenza. — Se $\boldsymbol{u}$ è vettore funzione di P, rot $\boldsymbol{u}$, " rotazione di $\boldsymbol{u}$ " e div $\boldsymbol{u}$ " divergenza di $\boldsymbol{u}$ ", sono, rispettivamente, il *vettore* e il *numero*, individuati dalle condizioni seguenti

$$(12) \qquad (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{x} = \mathrm{D}_u \boldsymbol{x} - \mathrm{K}_u \boldsymbol{x}$$

$$(13) \qquad (\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{a} = \mathrm{D}_u \boldsymbol{a} - \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{a})$$

verificate qualunque siano il vettore $\boldsymbol{x}$ *funzione di P* e il vettore $\boldsymbol{a}$ *costante*.

Il vettore rot $\boldsymbol{u}$ e il numero div $\boldsymbol{u}$ sono univocamente determinati dalle condizioni (12), (13).

Dalle (10) si ha:

$$\mathrm{D}_u \boldsymbol{x} - \mathrm{K}_u \boldsymbol{x} = \left\{ (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{i}) \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} - \left(\boldsymbol{x} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\right) \boldsymbol{i} \right\} + \ldots + \ldots =$$
$$= \left(\boldsymbol{i} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\right) \wedge \boldsymbol{x} + \ldots + \ldots = \left\{ \boldsymbol{i} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \ldots + \ldots \right\} \wedge \boldsymbol{x},$$

e quindi posto

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{j} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \boldsymbol{k} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}$$

la (12) è verificata. Esiste dunque almeno un vettore rot $\boldsymbol{u}$; esso è unico perchè dalla (12) si ha, qualunque sia $\boldsymbol{x}$, $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} - \mathrm{rot}'\boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{x} = 0$.

Tenendo conto dell'espressione ora trovata di rot $\boldsymbol{u}$ si ha

$$\mathrm{D}_u \boldsymbol{a} - \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{a}) = \left\{ (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{i}) \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} - \boldsymbol{i} \wedge \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \wedge \boldsymbol{a}\right) \right\} + \ldots + \ldots =$$
$$= \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} \times \boldsymbol{k} \right\} \boldsymbol{a},$$

e quindi posto

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \times \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} \times \boldsymbol{k}$$

la (13) è verificata. Il numero div $\boldsymbol{u}$ è univocamente determinato, perchè la (13) dà, qualunque sia il vettore $\boldsymbol{a}$ costante, $(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - \mathrm{div}'\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{a} = 0$.

Se rispetto al sistema O, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ di riferimento si ha

$$P = O + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{u} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k},$$

allora

$$
(14)\quad \begin{cases}
\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} \wedge \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{j} \wedge \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \boldsymbol{k} \wedge \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = \\
\quad = (\operatorname{grad} a) \wedge \boldsymbol{i} + (\operatorname{grad} b) \wedge \boldsymbol{j} + (\operatorname{grad} c) \wedge \boldsymbol{k} = \\
\quad = \left(\dfrac{\partial c}{\partial y} - \dfrac{\partial b}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\dfrac{\partial a}{\partial z} - \dfrac{\partial c}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\dfrac{\partial b}{\partial x} - \dfrac{\partial a}{\partial y}\right) \boldsymbol{k}, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{j} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + \boldsymbol{k} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} = \\
\quad = (\operatorname{grad} a) \times \boldsymbol{i} + (\operatorname{grad} b) \times \boldsymbol{j} + (\operatorname{grad} c) \times \boldsymbol{k} = \\
\quad = \dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial b}{\partial y} + \dfrac{\partial c}{\partial z}.
\end{cases}
$$

I primi membri sono già stati ottenuti; gli altri si ottengono facilmente dalla nota espressione di gradiente mediante il sistema di riferimento.

Per le funzioni rot, div, valgono le formule seguenti nelle quali $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sono vettori e m è numero reale, funzioni di P.

$$
(15)\quad \operatorname{rot}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v}, \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \operatorname{div} \boldsymbol{v}
$$

$$
(16)\quad \begin{cases}
\operatorname{rot}(m\boldsymbol{u}) = m \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + (\operatorname{grad} m) \wedge \boldsymbol{u} \\
\operatorname{div}(m\boldsymbol{u}) = m \operatorname{div} \boldsymbol{u} + (\operatorname{grad} m) \times \boldsymbol{u}
\end{cases}
$$

$$
(17)\quad \begin{cases}
\operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} - (\operatorname{div} \boldsymbol{u}) \boldsymbol{v} - \{ \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} - (\operatorname{div} \boldsymbol{v}) \boldsymbol{u} \} \\
\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}
\end{cases}
$$

(18) $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$ in tutto il campo di variazione di P, solamente quando $\boldsymbol{u}$ è il *gradiente* di un numero.

(19) $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ in tutto il campo di variazione di P, solamente quando $\boldsymbol{u}$ è la *rotazione* di un vettore.

Dimostriamo le formule (15)-(19).

Dim. (15). — Risultano subito dalle (12), (13), (6); ad es.

$$
\operatorname{rot}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{x} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}} \boldsymbol{x} - \mathrm{K}_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}} \boldsymbol{x} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x} - \mathrm{K}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x} + \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{x} - \mathrm{K}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{x} = (\operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{x}.
$$

Dim. (16). $(\operatorname{rot} m\boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{x} = \mathrm{D}_{m\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x} - \mathrm{K}_{m\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x} = m(\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x} - \mathrm{K}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x} \times \operatorname{grad} m) \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u}) \operatorname{grad} m = m (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{x} + \operatorname{grad} m \wedge \boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{x}$,

e analogamente per $\operatorname{div}(m\boldsymbol{u})$.

Dim. (17). — Dalle (14) si ha

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = \left\{ \boldsymbol{i} \wedge \left(\boldsymbol{u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \right) + \boldsymbol{i} \wedge \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \wedge \boldsymbol{v} \right) \right\} + \ldots + \ldots =$$

$$= \left[(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{i}) \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \boldsymbol{i} \right) \boldsymbol{v} - \left\{ (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{i}) \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \times \boldsymbol{i} \right) \boldsymbol{u} \right\} \right] + \ldots + \ldots =$$

$$= \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v} - (\operatorname{div} \boldsymbol{u}) \boldsymbol{v} - \{ \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u} - (\operatorname{div} \boldsymbol{v}) \boldsymbol{u} \} .$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \wedge \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{i} + \boldsymbol{u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \times \boldsymbol{i} \right\} + \ldots + \ldots =$$

$$= \left\{ \boldsymbol{v} \times \left(\boldsymbol{i} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \right) - \boldsymbol{u} \times \left(\boldsymbol{i} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \right) \right\} + \ldots + \ldots =$$

$$= \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} .$$

Ecco un'altra dim. di quest'ultima formula, indipendente dal sistema di riferimento:

$\{ \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \} \boldsymbol{a} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}} \boldsymbol{a} - \operatorname{rot} \{ (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{a} \} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}} \boldsymbol{a} - \operatorname{rot} \{ (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}) \boldsymbol{v} -$ $- (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \boldsymbol{u} \} = \boldsymbol{u} \wedge \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{v} \wedge \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}) \operatorname{rot} \boldsymbol{v} - \operatorname{grad}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{v} +$ $+ (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \operatorname{grad}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \wedge \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{v} \wedge \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}) \operatorname{rot} \boldsymbol{v} +$ $+ (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \operatorname{rot} \boldsymbol{u} - (\mathrm{K}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{v} + (\mathrm{K}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \wedge (\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{a} - \mathrm{K}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{a}) -$ $- \boldsymbol{v} \wedge (\mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{a} - \mathrm{K}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \operatorname{rot} \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}) \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \wedge \{ (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{a} \} -$ $- \boldsymbol{v} \wedge \{ (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{a} \} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) \operatorname{rot} \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}) \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \ldots$

Non sappiamo fare cosa analoga per la prima delle (17).

Dim. (18). — Risulta dalle (11) e (12).

Dim. (19). — Affinchè esistano i numeri m, n, p, funzioni di P e tali che

$$a = \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial z}, \qquad b = \frac{\partial m}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad c = \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y}$$

è necessario e sufficiente, per l'ultima delle (14), che sia $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$; dunque solo in questo caso $\boldsymbol{u} = \operatorname{rot}(m\boldsymbol{i} + n\boldsymbol{j} + p\boldsymbol{k})$.

È ben nota la formula

$$d\boldsymbol{u} = \frac{1}{2} (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) \wedge dP + \operatorname{grad}_{0+dP} (dP \times d\boldsymbol{u}) \tag{20}$$

che trasforma lo spostamento $d\boldsymbol{u}$, in una rotazione e in una traslazione. Un'altra espressione notevole di $d\boldsymbol{u}$ si ottiene ponendo nella (12) dP al posto di $\boldsymbol{x}$.

$$d\boldsymbol{u} = (\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) \wedge dP + \mathrm{K}_{\boldsymbol{u}} dP \tag{21}$$

nella quale la rotazione è doppia della precedente e la traslazione si ottiene mediante la funzione K.

Si può sempre determinare un numero m e un vettore $\boldsymbol{v}$, funzioni di P, in modo che

(22) $\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} m + \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ (Teorema di CLEBSCH).

Valgano le notazioni delle (14). Si può determinare il numero m_1, in modo che

$$\operatorname{div}(a\boldsymbol{i}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} m_1$$

cioè in modo che [per le (14)]

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial^2 m_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m_1}{\partial z^2}.$$

Il vettore $a\boldsymbol{i} - \operatorname{grad} m_1$ ha dunque la divergenza nulla, cioè, (19), è la rotazione di un vettore $\boldsymbol{v}_1$, vale a dire

$$a\boldsymbol{i} = \operatorname{grad} m_1 + \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_1 .$$

Ripetendo per $b\boldsymbol{j}$, $c\boldsymbol{k}$ e sommando, per le (15) si ha la (22).

3. FUNZIONI D′, K′. — La prima delle (17) suggerisce di considerare la funzione $D'_{\boldsymbol{u}}$ tale che qualunque sia il vettore $\boldsymbol{x}$, funzione di P, si abbia

(23) $$D'_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x} = D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x} - (\operatorname{div} \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{x} ,$$

e allora la prima delle (17) assume la forma

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) = D'_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} - D'_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$$

che ha analogia con la (8) che esprime $\operatorname{grad}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ mediante la funzione K.

Per analogia con la (23) si può porre

(24) $$K'_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x} = K_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x} - (\operatorname{div} \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{x} ,$$

e allora rot u vien anche definito da (cfr. la 12)

$$(\text{rot}\, u) \wedge x = D'_u x - K'_u x$$

e div u da

$$(\text{div}\, u)\, x = D_u x - D'_u x = K_u x - K'_u x$$

qualunque sia il vettore x funzione di P [Cfr. con la (13)].

Le formole (2), (5), (6) sussistono ancora cambiando D e K in D′ e K′. Le altre subiscono modificazioni.

Rispetto al sistema di riferimento si ha

$$D'_u x = (x \wedge i) \wedge \text{grad}\, a + \ldots + \ldots = \left(x \wedge \frac{\partial u}{\partial x}\right) \wedge i + \ldots + \ldots$$

$$K'_u x = (x \wedge i) \wedge \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots + \ldots = (x \wedge \text{grad}\, a) \wedge i + \ldots + \ldots$$

come facilmente risulta dall'identità

$$(b \wedge c) \wedge a + (c \wedge a) \wedge b + (a \wedge b) \wedge c = 0$$

ponendo al posto dei vettori a, b, c, le terne di vettori grad a, x, i; $\frac{\partial u}{\partial x}$, x, i, e le analoghe per j e k. Quindi le funzioni D′, K′ risultano anche come elemento combinatorio nei doppi prodotti vettoriali delle componenti di u e du.

4. Prodotti delle funzioni grad, rot, div, e le funzioni Δ, Δ'. — Dalle (14) si ha facilmente

$$(25) \quad \begin{cases} \text{div grad}\, m = \dfrac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 m}{\partial z^2} \\ \text{grad div}\, u - \text{rot rot}\, u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{cases}$$

Segue che l'*operatore simbolico*

$$(26) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

dipendente dalle coordinate di P, è rappresentato e, anzi, *definito in modo autonomo*, dalla funzione div grad o grad div - rot rot.

secondochè si intende applicato ad un numero o ad un vettore. Ordinariamente il simbolo (26) viene indicato con la notazione Δ_2 riserbando Δ per indicare la funzione mod grad. Ora, non avendo quest'ultima bisogno di simbolo speciale perchè nel calcolo vettoriale non si presenta mod grad, ma semplicemente grad, noi porremo

$$(27) \qquad \begin{cases} \Delta = \text{div grad} \\ \Delta' = \text{grad div} - \text{rot rot} \end{cases}$$

e risulta che: Δ è funzione da applicarsi ad un numero e che produce un numero: Δ' è funzione da applicarsi ad un vettore e che produce un vettore. Segue che Δ e Δ' ammettono le potenze di qualsiasi ordine, e $\Delta\Delta'$, $\Delta'\Delta$ non hanno significato.

Per esprimere brevemente le proprietà dei prodotti delle funzioni grad, rot, div, Δ, Δ' scriveremo semplicemente g, r, d, al posto di grad, rot, div.

I prodotti gg, gr, rd, dd sono privi di significato. Dalle (18) e (19) si ha subito

$$(28) \qquad rg = 0 \qquad dr = 0$$

e per le (27)

$$(29) \qquad dg = \Delta \qquad gd - rr = \Delta'.$$

Dei prodotti di tre delle funzioni g, r, d, alcuni sono privi di significato. Per gli altri si ha dalle (28) (29)

$$(30) \qquad \begin{cases} drg = rrg = rgd = gdr = drr = 0 \\ gdg = g\Delta , \qquad dgd = d\Delta' , \qquad rrr = -r\Delta'. \end{cases}$$

Da queste formule si ricavano i prodotti di quattro o più funzioni, prese con ripetizione, tra le funzioni g, r, d. In tali formule è però utile la proprietà *commutativa* del prodotto di Δ o Δ' per una delle funzioni g, r, d, come è espresso dalle formule:

$$(31) \qquad \begin{cases} \Delta' g = g\Delta , \qquad \Delta d = d\Delta' \\ \Delta' r = r\Delta' \end{cases}$$

che risultano immediatamente dalle precedenti.

Per i quadrati di Δ e Δ' si ha

$$\Delta\Delta = d\Delta' g = dg\Delta$$

$$\Delta'\Delta' = g\Delta d - r\Delta' r = gd\Delta' - rr\Delta'.$$

Di qui, come dalle (27) e (31), risulta la necessità di indicare con due simboli diversi, Δ e Δ', il simbolo (26) delle coordinate cartesiane, secondo si applica a numero o a vettore, in luogo dell'ordinario segno tachigrafico Δ_2.

Torino, Ottobre 1907.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 24 Novembre 1907.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-Presidente, Manno, Direttore della Classe, Brusa, Allievo, Renier, Pizzi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza e De Sanctis, Segretario.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 9 giugno 1907.

Il Presidente ricorda la morte del socio nazionale non residente Conte Costantino Nigra, accennando brevemente alle sue molte benemerenze. Legge i telegrammi di condoglianza inviati in quella occasione dall'Accademia alla famiglia e il telegramma diretto al Sindaco di Rapallo, che rappresentò l'Accademia stessa ai funerali. Dà poi comunicazione di una lettera dell'On. Pinchia che accompagna una Circolare contenente l'invito a partecipare alla sottoscrizione per un ricordo marmoreo all'illustre estinto.

Si annuncia il dono fatto dal R. Gabinetto Numismatico di Brera in Milano di due esemplari di una medaglia commemorativa della unità italiana con capitale Roma.

Sono presentati dal Presidente i seguenti libri inviati in omaggio all'Accademia:

1° Giovanni Sforza, *Contributo alla vita di Giovanni Fantoni* (Labindo), Genova, tip. della Gioventù, 1907.

2° Fedele SAVIO, *Il terzo centenario del Cardinale Cesare Baronio* (estratto dalla " Civiltà Cattolica "). Roma, 1907.

3° Fedele SAVIO, *I monasteri antichi del Piemonte. — Il monastero di S. Giusto in Susa* (estratto dalla " Rivista Storica Benedettina "). Roma, 1907.

4° Francesco BUONAMICI, *Burgundio Pisano*, Pisa, Vannucchi, 1907.

5° Francesco D'OVIDIO, *Nuovi Studii Danteschi. Ugolino, Pier Della Vigna, i Simoniaci e discussioni varie*, Milano, Hoepli, 1907.

Il Socio BOSELLI, Vice-Presidente, presenta la intera raccolta dei dodici volumi degli *Atti del Congresso Internazionale di Scienze Storiche* di Roma rilevandone l'importanza con le seguenti parole:

Presento la collezione completa dei dodici volumi degli *Atti del Congresso Internazionale di Scienze Storiche* di Roma. E per circostanze facilmente spiegabili e scusabili, li presento con qualche ritardo: giacchè l'ultimo volume edito comparve alla luce nell'aprile u. s.

Questa importante collezione attesta, anzitutto, la serietà e la grande operosità del Congresso.

I *Congressisti*, con l'aggiunta de' Delegati, sommarono alla cospicua cifra di circa *tre mila*.

Gli *Stati* rappresentati al Congresso furono 37, e i *Delegati* furono circa *500*, cifra che ritengo non essere stata mai raggiunta in nessun altro Congresso.

Del resto, il Volume I riesce una cronaca fedele e particolareggiata del Congresso, e ciascuno può attingervi i dati e le notizie che desidera.

Merito insigne del Congresso è di avere chiuso, com'è noto, il proprio bilancio con lire 3221,10 di avanzo netto. Questa somma fu versata alla *R. Accademia de' Lincei*, e, arricchita degl'interessi annui e del provento della vendita de' volumi degli

Atti, costituirà il fondo per un *premio internazionale* per gli studi storici.

Rammento altresì che nella seduta inaugurale del Congresso in Campidoglio, il dì 2 aprile 1903, il nostro collega Manno, a nome della nostra R. Deputazione di Storia Patria, presentò con elette parole alle LL. MM. il Re e la Regina una riproduzione in pergamena della *Protocarta Comitale Sabauda*, nella quale appare per la prima volta chiaramente il titolo di *Conte* attribuito a Umberto Biancamano (2 aprile 1003), 41° antenato del nostro Sovrano, proprio esattamente 900 anni prima.

Il volume I degli *Atti* ricorda quella solenne cerimonia.

Riferire separatamente dell'importanza di ciascuno de' dodici volumi richiederebbe soverchio tempo. Mi limito a dire che l'edizione fu diligentemente curata, e che ogni volume reca notevole contributo alla speciale scienza storica cui è dedicato.

Fra i più meritevoli di attenzione da parte degli studiosi annovererò il vol. IX (Storia del diritto), che è stato da tutti altamente lodato, e che ha lasciato tracce durature delle elevate discussioni e comunicazioni che ebbero luogo nel seno della sez. V del Congresso, nella quale ebbi qualche parte io stesso quale *Delegato* di questa Accademia delle Scienze, e nella quale ebbero parte essenziale, come direttori ed organizzatori scientifici, l'on. Senatore Prof. Vittorio Scialoja e il nostro chiarissimo collega Prof. Francesco Ruffini.

Largo e nuovo contributo alla scienza recano pure, in special modo, i volumi V (Archeologia), il vol. III (Storia medievale e moderna e Scienze Storiche ausiliari) e il vol. II, che raccoglie gli atti de' tre gruppi della sez. I (Storia antica e filologia classica), nella quale ebbe notevole parte altro nostro valoroso collega il Prof. Ettore Stampini; e così tutti gli altri, cioè, il I (parte generale), il IV (Storia delle letterature), il VI (Numismatica), il VII (Storia dell'arte), l'VIII (Storia dell'arte musicale e drammatica), il X (Storia della geografia-geografia storica),

l'XI (Storia della filosofia, Storia delle religioni) e il XII (Storia delle Scienze fisiche, matematiche, naturali e mediche). A questo volume diedero notabile contributo chiarissimi colleghi ed altri esimii scienziati.

Ma se ciascun volume ha pregi e caratteristiche particolari, il valore della collezione risulta dal suo insieme, dall'essere, cioè, la collezione, nel suo complesso, un importante quadro e documento sincrono delle scienze storiche in Italia e ne' principali Stati del mondo al principio dell'anno 1903.

La collezione, co' pregi ed anche co' difetti inerenti a siffatto genere di pubblicazioni, è stata universalmente lodata dalla stampa italiana, europea ed americana, e resterà monumento onorevole per l'Italia e per la nostra cultura.

E pertanto, nel farne la presentazione alla Accademia delle Scienze, mando un cordiale plauso al venerando e illustre Prof. PASQUALE VILLARI, del quale l'Italia riverente ha solennizzato giorni sono l'80° genetliaco, a Pasquale Villari, che fu il degno Presidente del Congresso e che ha pure presieduto con intelletto d'amore alla pubblicazione degli *Atti*. E ricordo in pari tempo, con onore, il Comm. GIACOMO GORRINI, che, quale Segretario generale, fu del Villari l'operoso e intelligente cooperatore, tanto per il Congresso, quanto per la pubblicazione degli *Atti*.

Il Vice-Presidente BOSELLI offre pure il volume di MALLADRA A. e RANIERI G. E., *La Sacra di S. Michele*, Torino, Streglio, 1907, pronunciando a proposito di esso un breve discorso che è pure inserito negli *Atti* (1).

Il Socio STAMPINI fa omaggio della sua pubblicazione: *Dieci lettere di Giovanni Labus a Costanzo Gazzera* (estratto dalla " Illustrazione Bresciana "), Brescia, Fratelli Geroldi, 1907. Presenta inoltre due pubblicazioni del Prof. Enrico COCCHIA dell'Università di Napoli, cioè il IV volume dei suoi *Saggi Filo-*

(1) Comparirà in uno dei prossimi fascicoli.

logici (Napoli, Pierro, 1907) ed una Conferenza dal titolo: *L'ideale artistico, religioso e politico di Giosuè Carducci* (Napoli, Pierro, 1907). Il Socio Stampini si ferma specialmente sulle sette monografie contenute nel volume dei Saggi Filologici, già pubblicate a parte via via dal 1892 al 1902, mettendone in rilievo la notevole importanza.

Per la inserzione negli *Atti* vengono presentate le seguenti note:

1° Dal Socio Renier: Enrico Sicardi, *Per un' abrasione del Vat. Lat. 3195 e per la giusta collocazione di due sonetti del Petrarca;*

2° Dal Socio De Sanctis: Carlo Frati, *Aneddoti da codici Torinesi e Marciani.*

LETTURE

Per un'abrasione del Vat. Lat. 3195 e per la giusta collocazione di due sonetti del Petrarca.

Nota di ENRICO SICARDI.

Rispetto alla speciosa collocazione che i sonetti *Aspro core* e *Signor mio caro* tengono nel Cod. Vat. Lat. 3195, l'archetipo del canzoniere petrarchesco, una nuova ed acuta congettura è stata messa fuori da uno specialista autorevole, così che non possiamo sottrarci al desiderio di prenderla subito in esame. Alludo alla breve nota del prof. G. A. Cesareo, *Per la giusta collocazione di due sonetti di F. Petrarca*, testè comparsa nella Miscellanea per il giubileo di un illustre Maestro, di cui mi onoro assai di essere stato anch'io umile discepolo (1).

Le osservazioni e i rilievi a cui ha dato luogo il posto tenuto da que' due sonetti nella raccolta definitiva de' *Rerum Vulgarium Fragmenta* ne' riguardi della sua particolare divisione testè tornata in onore, son noti da un pezzo agli studiosi del nostro poeta. Infatti, contro codesta divisione in due parti distinte, di cui la prima si chiude col son. *Arbor victoriosa* e la seconda s'apre con la canz. *I' vo pensando*, divisione che il ritrovamento del Codice originale, con le sue parecchie carte bianche intermedie fra que' due componimenti, ha riconsacrato agli occhi de' critici come voluta espressamente dal Petrarca, que' due sonetti, che, come si sa, tengon dietro appunto alla canz. *I' vo pensando,* contrastano in modo irrimediabile. Così che già fin dal 1898 il Cesareo medesimo, in un suo bel volume di ricerche petrarchesche, si domandava " come mai posson trovarsi, dopo la canzone introduttiva alla seconda parte, que' due sonetti *Aspro core*

(1) *Miscellanea di Archeologia, di Storia e di Filologia dedicata al Professore A. Salinas nel XL anniversario del suo insegnamento.* Palermo, 1907, pagine 340-342.

e *Signor mio caro*, i soli in tutta la raccolta, i quali contrastino con quello studio d'una certa unità quasi di poema, determinata particolarmente ne' prologhi e negli epiloghi, che si riscontra per tutto il volume. Sarà stato un capriccio? un errore di trascrizione? una convenienza materiale che a noi riesce troppo oscura e lontana? Io — confessa — non ne so nulla (1) „. " Di fatti — ora aggiunge e riassume — mentre la seconda parte contiene rime tutte di religione e di morte, que' due sonetti soltanto sprigionan faville di desiderio e d'amore terreno come tutt' i componimenti della prima parte alla quale si vorrebbero ricongiunti e ricollegati (2) „. E già, in forza di queste stesse osservazioni, il Cochin mostrò anch'egli d'essersi persuaso che " il faut bien admettre que le classement du recueil n'est pas sans quelques anomalies (3) „: anomalie contro le quali cozzò, pure invano, la dottrina e l'acume di A. Mussafia (4), l'illustre romanista che non è possibile ricordare senza rimpianto.

Tornato dunque ora daccapo sul curioso problema, il Cesareo da certe peculiarità esterne dell'Archetipo stesso s'è indotto a sospettare che a quella stonatura, frutto per certo d'una svista materiale del menante, il Petrarca medesimo abbia pensato a rimediare — si vedrà ora come — così che " se la *sua* congettura paresse plausibile, un inconveniente non piccolo nell'ordinamento delle *Poesie volgari* ne verrebbe sanato, e i due sonetti, tornando nella prima parte, occuperebbero il luogo che loro spetta con l'altre rime dell'errore e della passione mondana, mentre la parte seconda apparirebbe composta tutta di rime ispirate a pensieri d'espiazione e di morte. E la trasposizione sarebbe stata accennata dallo stesso poeta „.

La cosa è tale dunque, che merita bene il nostro più attento esame. E poichè si tratta di poche parole, riporteremo tale

(1) *Su le " Poesie volgari „ del Petrarca. Nuove ricerche*, Rocca S. Casciano, 1898, p. 127 e seg.

(2) *l. c.*, p. 341.

(3) *La Chronologie du " Canzoniere „ de Pétrarque*. Paris, 1898, p. 122.

(4) *Dei Codici Vaticani Latini 3195 e 3196 delle " Rime „ del Petrarca*, Wien, 1899, nel capitolo *I primi componimenti della seconda parte* (estr. dai *Denkschriften d. K. Akademie d. Wissensch. — Philosoph-Histor. Classe*, Band XLVI). Si vedano anche le giuste osservazioni del Moschetti in *Rass. bibl. d. lett. it.*, 1899, p. 131 e del Melodia, *Giorn. dantesco*, 1900, p. 370.

e quale la precisa argomentazione del valente professore dell'Università di Palermo. " Fra le poesie del Petrarca riprodotte diplomaticamente di sul Vat. 3195 a cura del Modigliani — osserva — alcune sono segnate sul margine da una crocetta, con la quale, a mio giudizio, il poeta, rivedendo l'opera sua, intendeva ammonire se stesso che aveva da recar qualche emenda, sia nella lezione, sia nella collocazione ".

Or per l'appunto i sonetti *Aspro core* e *Signor mio caro* (n. 265 e n. 266 della raccolta) son preceduti da una crocetta, anzi il secondo da due, l'una nell'interno della iniziale, l'altra sul margine. In vece, dopo il son. *Arbor victoriosa* onde si chiude la prima parte, è un accidente ch'io riferirò con le parole medesime dell'editore: " Circa due centimetri sotto questo verso è una larga rasura di parole, ora non più leggibili, scritte su due righe. La prima riga sembra comprendesse due o tre parole e incominciasse con un *A*; la seconda è un po' più lunga, principia con un *S* e termina con un *o* o con un *ro*.

Ebbene: io sospetto forte che le parole scritte su le due righe fossero il cominciamento de' due sonetti; così:

Aspro core

Signor mio caro

Ognun vede come i dati corrispondano esattamente. La prima riga contiene due parole e comincia con *A*; la seconda è un po' più lunga, principia con *S* e finisce con *ro*. E la trasposizione di que' due sonetti non potrebb'essere più acconcia e, sto per dire, più necessaria " —.

È evidente, continua il Cesareo, che nessun altri che il poeta poteva indicare quella modificazione da introdurre nell'opera sua.

E qui s'apre la serie de' miei dubbi. E comincio dalle croci.

Di croci nel Codice ce n'è molte: dappertutto. Talora se ne trova una sola accanto al v. 1 del componimento cui è stata apposta, talora son due, di cui la seconda, certo perchè più difficilmente potesse sfuggire allo sguardo di chi riprendesse quel manoscritto fra mani, dentro la lettera iniziale del verso stesso (1). Così non solo, per non allontanarci appunto dal caso

(1) Le ha elencate e distinte con la consueta diligenza il Vattasso, nella sua dotta introduzione a *L'Originale del " Canzoniere " di F. P. Cod. Vat. Lat. 3195 riprodotto in fototipia a cura della Biblioteca Vaticana*. Milano, Hoepli, 1906, p. XI, nª 3ª.

nostro, ce n'è accanto ad *Aspro core* e *Signor mio caro*, ma allo stesso modo, e perfettamente identiche, se ne trovano ancora, o ne furono già apposte, accanto alle poesie immediatamente seguenti, così:

	† *Aspro core*
† † la 2ª entro l'iniziale	*Signor mio caro*
† † la 2ª entro l'iniziale	*Oimè il bel viso*
† † abrase	*Che debb' io far?*
† abrasa	*Rotta è l'alta*
† abrasa in parte	*Amor se vuo'*
	† *L'ardente nodo*
	† *La vita fugge*
† abrasa in parte	*Che fai? che pensi?*
† abrasa in parte	*Datemi pace*
† † abrase in parte	*Occhi miei*
† entro l'iniziale	*Poichè la vista*
† entro l'iniziale	*S'Amor novo*
† entro l'iniziale	*Ne l'età sua*
( )	*Se lamentar*
† abrasa in parte	*Mai non fui.*

A questi seguono poi nove componimenti non contraddistinti in nessun modo, e poi altri segnati con la solita crocetta, e così alternativamente, sino in fondo alla silloge. Delle altre che spesseggiano del pari nella prima parte del volume, non occorre che io parli. Ora, risalga o no al Petrarca la paternità di queste croci, che il Modigliani (1) e il Vattasso (2), non so bene se a ragione o a torto, son concordi nell'attribuire ad una terza mano seriore, che conclusione se ne può trarre? Che, seppure son sue, e se, in mancanza di meglio, ci può esser consentito di aggrapparci all'ipotesi che il poeta le apponesse a' componimenti di cui voleva ricordarsi per tornarci su (e in questo caso bisognerebbe ammettere che essi fossero speciosamente disposti in serie alternantisi con altre serie di rime a suo giudizio del tutto perfette —

(1) *Il "Canzoniere" di F. P. riprodotto letteralmente dal Cod. Vat. Lat. 3195.* Roma, 1905, p. XVIII.
(2) *Op. c., l. c.*

e mal si capirebbe poi come quel distintivo avesse a mancare in que' sonetti che portan tracce di numerose correzioni (1) — e come possiamo ritenere ch'e' si servisse di quel segno medesimo per indicare cosa del tutto diversa, per richiamarci ad una trasposizione che poteva essere fatta e specificata in cento modi diversi e semplicissimi? Non sarebbe stato assai più ovvio, per un esempio, (e non dico se più chiaro!) indicare il nuovo ordine da seguire per mezzo di lettere, come vediamo che messer Francesco fece su i fogli degli abbozzi (2), o meglio per mezzo di numeri, come usò appunto in questo stesso suo manoscritto per gli ultimi trentuno componimenti? (3). Ma poi, osservo, seguendo

(1) Si vedano per esempio i n.[i] 125, 142, 158, 165, 183, 196, 197, 198, 201, 207, 211, 213, 215, ecc. della riproduzione del Modigliani.

(2) Si vedano gli *Abbozzi vaticani*, *Cod. Vat. Lat. 3196*, cc. 1[v] e 3[v], dove accanto a' sonn. *Almo sol* (seconda redazione), *I' vidi in terra*, e *Non fur mai* stanno le lettere *Y*, *a* e *b*, a indicare trasposizioni che poi furono eseguite di fatto nel Codice definitivo. Come è noto, il Codice in parola è stato riprodotto due volte in eliotipia: nell'*Archivio Paleografico italiano* del Monaci (1890) e dalla Biblioteca Vaticana, *Il ms. Vat. Lat. 3196 autografo di F. P.* Roma, 1895.

(3) Si veda Modigliani, *Op. cit.*, n.[i] 336 e seg. — Segni speciali ben distinti, quando non ricorrevano a dirittura all'abrasione, apponevano in questo caso, per solito ne' margini, i copisti o gli autori stessi, facendo seguire immediatamente a' segni l'esplicita dichiarazione del loro significato. Così, per non uscire dal campo in cui ci aggiriamo, fece il Collazionatore Casanatense (cod. Casan. 924) che a c. 36[v], nel margine esterno, accanto alla sestina *Chi è fermato*, annotò: “ Questa canzon vuol andare innanzi a q̃l soneto che comẽza *Io son si stancho*, il quale è in la faza dinanzi segna di questo segno ♡ „. E nella “ faza dinanzi „, cioè al *recto* della medesima carta, sull'*O* dell'*Io* iniziale del son. è ripetuto il segno ♡. Ancora: Sul 1° verso del son. *Dicesette anni*, c. 49[r], sono tre croci piccole e ben fatte in rosso, e poi nel verso della medesima carta, nel margine esterno, accanto al son. *Quelle pietose rime*, è annotato: “ Questo soneto vole andare innãzi a q̃llo che comẽza *Dicesette anni* & el quale e ĩ la faza dinanzi segnado di questo segno ✠ „. E immediatamente dopo, nel solito margine, accanto alla Ballata *Donna mi vene*: “ Questa ballata nõ e in lo originale che messer Franc. Petrarcha & ĩ luogo di q̃sta uole esser una che comẽza *Or vedi amor che giovenetta* La quale e a carte 91 segnada di questo segno ☿ „. E a c. 91[r], accanto alla *O* iniziale della Ballata su detta è ripetuto il segno già indicato. Così anche nel famoso Cod. Laur. XLI, 17 delle *Rime*, quello stesso che il Cesareo, *Su le “ Poesie volgari „* cit. App. II, vorrebbe copia del Codice mandato dal poeta a Pandolfo Malatesta, se non quello stesso,

nel Codice (vedi caso!), e giusto dopo il son. *Arbor victoriosa*, parecchi fogli bianchi, non aveva il poeta tutto l'agio di trascriver lì per intero que' due sonetti, lì, al posto dove andavano collocati, abradendoli da quel foglio dove costituivano una stonatura e doveva ripugnargli tanto che stessero (1)?

Aggiungo ancora che, una volta trascritti nel Codice que' due capoversi dalla stessa mano del Petrarca, che aveva vergato (si badi) tutta quella carta e molte altre precedenti — non c'era dunque pericolo di confonderla con quella d'un intruso guastamestieri qualsiasi — non so immaginare che qualcuno di coloro presso i quali rimasero come un deposito sacro i suoi manoscritti, sarebbe stato oso di perpetrarvi, non si saprebbe poi se per capriccio o per giuoco o per quale altro strano schiribizzo, una bestiale raschiatura di parole, che anche un idiota avrebbe capito che avevan una speciale ragion d'essere, annullando così per sempre una preziosa avvertenza di cui bisognava fare il maggior conto per la giusta disposizione ordinativa voluta dal poeta nell'opera sua. Ma invece noi sappiamo che il *Liber fragmentorum*, per una nostra rara ventura, è passato per una ininterrotta serie di mani riguardose e intelligenti che ne hanno rispettato, e, direi quasi, venerato, persino le macchie, gli sgorbi, le prove di penna ecc., conservando sino a noi quel cimelio nella sua preziosa e genuina integrità (2). Chi dunque avrebbe potuto pensare alla immaginata profanazione? E come mai, poi, se que' due capoversi fos-

---

accanto alla *Canzone alla Vergine*, trascritta lì prima di parecchie altre poesie (e questa sola particolarità m'indurrebbe, da sola, a negare che si tratti della copia in discorso: ma ad ogni modo il Codice fu esemplato vivente il Petrarca), si trovano le parole *in fine libri ponatur*, parole che se risalgono, come è da credere, al poeta, ci mostrano quanto chiaramente egli usasse indicare le trasposizioni che intendeva introdurre nell'ordine delle sue poesie, e, in ogni modo, di quali espedienti semplici e perspicui si soleva allora comunemente fare uso in quello o in simili casi.

(1) E di sonetti interamente abrasi nel nostro Originale ce n'è parecchi. Li indico, al solito, secondo il numero d'ordine che hanno nella riproduzione del Modigliani. Sono i n.[i] 121, 194, 246, 327.

(2) Non tengo conto de' ripassamenti o semplici ritocchi di penna, là dove l'inchiostro cominciava a sbiadire o a scrostarsi, e che sono dovuti ad un qualche tardo ed amoroso possessore: forse il Bembo, forse Fulvio Orsini, i quali del resto meno di qualsiasi altri avrebbero potuto pensare ad alterare menomamente cosa alcuna che fosse nel Codice.

sero stati trascritti al posto indicato, sia nelle varie copie che di quell'Originale furono fatte, dalla morte del Petrarca, se non prima, sino alla stampa Padovana del 1472, e in quest'ultima, esemplata certamente su quel Codice, come del resto nelle molte altre edizioni seguenti, non si sarebbe tenuto mai alcun conto dell'avvertimento segnato di pugno del Petrarca? Come mai si sarebbe lasciato sempre ineseguito il nuovo ordinamento così espressamente voluto? E sarebbe possibile che in nessuno delle parecchie centinaia di manoscritti rimastici del Canzoniere, esso non fosse stato mai tradotto in effetto, o che almeno non ce ne fosse rimasta, o per un verso o per un altro, una qualche traccia?

Per me non è dubbio che, se quelle parole di cui ora è rimasto sul foglio appena qualche debole segno furono rase senza pietà, codesto ci prova che esse apparvero ad un esperto possessore del Codice una evidente contaminazione dovuta ad una mano sacrilega, che voleva apporre alla così detta prima parte del Canzoniere uno di que' soliti *explicit* che si trovano quasi in tutti i Codici delle *Rime*: un *explicit* non diverso, in sostanza, da quello che un altro pover' uomo appose lì stesso più tardi, e che vi si legge ancora: solo che non più nel medesimo posto preciso del primo, sia perchè rimasto scabro per l'abrasione, sia per bisogno d'un maggior spazio, ma nel *verso* della carta medesima (1): un *explicit* codesto, che, come tutti gli altri alimentati da una mera e medesima illusione e diffusisi rapidamente per contagio, tradisce in fondo una non molto intima conoscenza del contenuto dell'opera del Petrarca. E giudichi qui stesso il lettore se non siano ben giustificate le mie parole.

Infatti, nello sforzo stesso di toglier di mezzo la curiosa incongruenza da lui rilevata per primo, al valente petrarcologo

(1) Si legge appena, e suona così: Francisci petrarce expliciūt soneta de Vita..... am... et deo gratias. | Un bel morir tuta la vita honora. Con l'aiuto della fotografia il Vattasso, *L'Originale di F. P. cit.* p. XI e n.a 5, malgrado la macchia lasciata da un reagente al posto de' puntini, l'ha completata così: " Fr. p. expl. soneta de vita *Laure sue* am*en* ecc. „ Codesta postilla fu scritta nel nostro Codice almeno prima (quanto?) del 1463, giacchè il Cod. Reginense 1110, che fu scritto in quell'anno, a c. 107r, innanzi alla canz. *I' vo pensando* ha queste parole: *Quę sequuntur post mortem dominę Laurę scripta sunt* (infatti!) *Ita enim proprio codice domini Francisci annotatum est; et cartę quatuor pretermissę vacuę.*

siciliano è sfuggita un'osservazione che in questa faccenda ci si mostra d'una importanza decisiva. Questa: che se il Petrarca avesse voluto la trasposizione in discorso, in forza di que' medesimi criteri estetici ordinativi attribuiti dalla critica al poeta, questi, non già dopo il son. *Arbor victoriosa*, ma prima di esso avrebbe dovuto trascrivere i due capoversi *Aspro core* e *Signor mio caro*; lì, giusto lì, preciso. Non è *Arbor victoriosa* il sonetto di chiusura della prima parte di " quella specie di poema dell'anima „ che è il *Canzoniere*, come la canzone *Vergine bella* la chiusa meditata della parte seconda di esso? Come mai il fatto sta diversamente? E come mai l'intelletto così esercitato ed acuto del critico ed amico nostro non ha veduto da sè l'obiezione, che non poteva sfuggire a chiunque avesse ripreso in esame la questione? Or se questa obiezione sussiste, continuerà a sussistere del pari l'inesplicabile incongruenza da lui così ben rilevata, e pur sempre vani ci appariranno tutti i tentativi a cui s'è ricorso finora per sbarazzarcene. Anzi, si può esser certi, che essa avrà sempre consistenza saldissima agli occhi de' critici, finchè non si saranno ben persuasi che il sonetto *Arbor victoriosa* non chiude nulla; che la canz. *I' vo pensando* non inizia nulla; che ogni divisione del Canzoniere in due parti è del tutto arbitraria; e che le ragioni su cui essi si sono fondati finora per volerlo diviso a quel modo sono prettamente illusorie, anzi in piena contraddizione con la espressa volontà del poeta stesso.

Le tre parvenze di cui l'illusione predetta si è alimentata finora sono: *a)* i fogli bianchi che stanno nel Codice dopo la c. 49 r.; *b)* l'interpretazione estrantenzionale data dal Mestica, e generalmente accettata, alla canz. *I' vo pensando*; e, più di tutto, *c)* l'iniziale mediocremente rabescata di questa stessa notissima canzone. Ma ormai che lo studio reiterato e quanto altro mai minuto di tutti i caratteri paleografici del Codice, e tutto il resto che, per vie diverse, si è potuto accertare intorno ad esso, ci ha consentito di ficcar bene a dentro lo sguardo sul modo preciso come si andò preparando man mano il " libro in ordine „ delle rime petrarchesche, su l'uso cui doveva prestarsi ecc., ecc., insomma su tutto ciò che lo concerne, a ciascuno di que' due accidenti esterni (verremo appresso all'argomento interno) possiamo dare finalmente la portata e quindi la valuta-

zione sua vera. Su questo argomento riassumo qui, in parte, ciò che ho detto altrove (1).

Nel 1369, decisosi il Petrarca a raccogliere in una silloge completa e definitiva (o almeno!), e per suo uso, le " rime sparse ", le riprese ancora una volta fra mani dal cassetto dove stavano trascritte nella loro ulteriore forma, e già divise, per una ragione di comodo che vedremo appresso, in due gruppi di fogli o quaderni staccati, per passarle tutte in esame, allo scopo di introdurvi tutte quelle correzioni che stimasse opportune, come ancora per inserirvi altri nuovi componimenti messi provvisoriamente da parte. Chi conosce la sua disperante incontentabilità, immagina bene che codesta revisione non sarebbe stata mai, in modo certo, un affar breve. Mentre un discreto numero di poesie non gli parevano più suscettibili di nuove, profonde modificazioni, lo stesso, ahimè, non poteva dirsi di tant'altre su cui era quindi necessario soffermarsi più o meno a lungo, senza parlare poi di quelle, fra le più antiche, che aveva in animo di trascegliere ed aggiungere. D'altra parte occorreva non indugiarsi più oltre a dar principio alla copia desiderata, per ragioni ovvie a immaginare, fra cui non ultima il timore della prossima fine, che il poeta ebbe sempre presente, in ispecie dacchè ebbe compito il paventato sessantatreesimo anno (2). Gli si presentò allora del tutto ovvia l'idea di rivedere e correggere le *Rime* alternando la revisione fra la prima e la seconda parte in cui la raccolta era materialmente divisa (ma già lavorare saltuariamente su' *Fragmenta* era stata sempre, oltre che un'abitudine, quasi una necessità dato il carattere frammentario dell'opera): avrebbe avuto così più tempo di scegliere e correggere i componimenti non definitivamente assoluti, per inserire i quali (a fine di evitare lo sconcio di doverli porre fra quelli in morte di Laura se costei vi compariva bella e vivente) era sempre ricorso all'espediente, del tutto ovvio, d'interpolare sempre nuovi fogli o quaderni nel corpo della copia provviso-

(1) Nel *Giorn. stor. d. Lett. ital.*, v. L, p. 14.

(2) Si veda *Senil. VIII*, 1 e 8, e anche I, 5 a cui se ne potrebbero aggiungere parecchie altre. Ma già il medesimo si ricava dalla lettura de' più antichi componimenti del Canzoniere, ove non di rado, fra le rime d'amore, s'affaccia pure il pensiero della morte prossima.

riamente ultima (1). Levata quindi la mano da un certo numero di componimenti tanto del primo che del secondo gruppo, egli li consegnò al copista perchè cominciasse il lavoro richiesto, che fu in conseguenza intrapreso di fatto con la trascrizione simultanea del son. *Voi ch' ascoltate* e con la canz. *I' vo pensando*. Avvenne così che il copista medesimo, dopo aver messo insieme e rigato i due primi quaderni pergameni ben distinti, per amor del mestiere, seppure quel contrassegno mnemonico non era già, chissà, forse in germe nel suo antigrafo, o seppure non cedette anche lui alla solita illusione prodotta dalle carte bianche interpolate nell'antigrafo stesso, dopo avere rabescato con grandi fregi la V iniziale del I sonetto, passò a disegnare e ad ornare, però assai meno vistosamente, l'iniziale di *I' vo pensando*. Quel contrassegno mnemonico, ho detto. S'intende infatti, che anch'egli, dovendo poi riprendere spesso fra mani alternativamente que' quaderni, gli sarebbe stato più facile distinguere a colpo d'occhio le due parti di seguito alle quali avrebbe dovuto aggiungere via via gli altri componimenti, quando il poeta ne avesse levato finalmente le mani. Di equivoci, infatti, si capisce bene che ne potevan nascere. Ad un certo punto della copia, quale che ne fosse la cagione, probabilmente il licenziamento del non diligentissimo amanuense, l'autore stesso si sostituì a costui. E quando fu quasi in fine al suo lavoro, prevedendo bene che facilmente avrebbe potuto esumare ancora dalle sue infinite schedette (*plurimae ... senio exesae*) ancora qualche altro componimento *in vita*; mentre i quattro ultimi sonetti che gli rimanevano ancora da copiare non avrebbero occupato che il *recto*

(1) Codesto ci prova per indiretto lo spazio bianco lasciato parimente nel ben noto Chigiano L. V. 176 e nel Laurenziano XLI, 17, che si possono ritenere entrambi anteriori di parecchio al Vat. 3195. Nel Chig. a c. 71r finisce la, diciamo, prima parte del Canzoniere, col son. (si badi) *Passa la nave mia*, che non si può dire per certo un sonetto di chiusa. La parte scritta del foglio occupa sole tredici righe; il resto è bianco; e in bianco è il suo *verso*. Poi, nel *recto* della carta seguente, c. 72, segue *I' vo pensando*. Nel Laur. sono in bianco, nel *verso* della c. 48 le ultime sette righe: al *recto* della carta 49 segue la canz. *I' vo pensando*. È chiaro però in ogni modo che quello spazio non può avere altra origine che quella da me indicata, per quanto potesse essere scambiato assai facilmente sin d'allora, ma sempre a torto, per un'illusione dell'occhio, con un segno di divisione in parti.

di una carta sola, al solito, aggiunse a' quaderni precedenti del " libro „, interamente vergati, un duernione, che, a buon conto, gli lasciava disponibili non meno di sette pagine in bianco, dove avrebbero potuto trovar posto poco meno di quattrocento versi (1). Stando così le cose, mi par che se ne debba concludere, per necessità, che nè codeste carte bianche che stanno di mezzo al Codice, nè l'iniziale grande di *I' vo pensando* possono realmente dare alcun fondamento alla divisione del *Canzoniere* che è da poco tornata in onore.

E veniamo al contenuto stesso della su detta canzone.

Lo ripeto. Secondo me il Mestica, forviato da quelle stesse parvenze esterne di divisione, che, dietro a lui, hanno ingannato tanti altri, s'indusse di leggieri a scoprire in quella poesia un riposto scopo intenzionale, e quindi un ufficio, che non vedo come possa rispondere a verità. O io non riesco a intenderne il significato, o chi voglia esaminarla senza preconcetti di nessuna specie deve convenire con me che, per quelle stesse stessissime ragioni per cui non si vorrebbero i sonn. *Aspro core* e *Signor mio caro* al posto in cui stanno, non si dovrebbe volere la canzone su detta al posto in cui si trova. In essa anzi, in forza di quello stesso carattere quasi tragico che v'assume la lotta tra la carne e lo spirito (della quale il Mestica fu trascinato a non rilevare che un lato solo, quello che meglio poteva puntellare le sue idee preconcette), più espliciti, più fieri e significativi che altrove vi si fanno sentire gli accenti della non simulata passione per cui, contro ogni suo sforzo, il poeta è pur sempre legato alla terra: oh, certo, mille volte più fieri ed espliciti che non riecheggino in que' due sonetti! Infatti, o io non mi rendo conto delle sue parole, o è qui stesso che egli dice che " la sua ragione è sviata dietro a' sensi „ e che " il mal costume oltre [= oltre i limiti del giusto] la spinge „; che Laura " nacque sol per farlo morire [= dannare] „ e che " e' si sente perire senza alcun dubbio „; è qui ch'e' dice che " non

(1) Allo stesso espediente, sebbene in forma in parte diversa, ricorse il Petrarca per inserire nuovi componimenti in fondo alla raccolta, ma prima della *Canzone alla Vergine*, già trascritta. È noto infatti che egli aggiunse un altro foglio innanzi a' quattro ultimi, formando così in fine al manoscritto un quaderno di *sei* fogli.

*l'*assolve [= gli lascia requie] un pensier per usanza in *lui* sì forte, ch'a patteggiar n'ardisce con la Morte „; e che " il lume de' begli occhi..... *lo* strugge soavemente al suo caldo sereno e *lo* ritiene con un freno contro cui non *gli vale* nullo ingegno o forza „; e, finalmente, suonan così, tali e quali, gli ultimi versi con cui si chiude l'angoscioso soliloquio:

> Canzon, qui sono, ed ò 'l cor via più freddo,
> della paura, che gelata neve,
> sentendomi perir senz' alcun dubbio;
> chè, pur deliberando, ò volto al subbio
> gran parte omai de la mia tela breve:
> nè mai peso fu greve
> quanto quel ch' i' sostengo in tale stato;
> chè, co la Morte a lato,
> cerco del viver mio novo consiglio;
> et veggio 'l meglio, et al peggior m'appiglio!

Se questi sono i sentimenti che sommuovono tuttavia l'anima del Petrarca, a che parlare di " conversione morale „ e richiamarsi agli orrori della peste del '48, l'orribile flagello che, secondo il Mestica, avrebbe determinato nel suo spirito un radicale mutamento? (1) a che parlare d'una nuova e diversa situazione psicologica per cui quel canto avrebbe bene il diritto di aprire

(1) Si veda il Mestica ne' *Cenni* premessi alla sua edizione critica delle *Rime*, Firenze, Barbèra, 1896, p. VII, e si confronti il giudizio del benemerito letterato marchigiano con ciò che scrive, p. es. il Gaspary, *Storia d. Lett. it.*, I, p. 403, che osserva giustamente, sia pure con qualche esagerazione subiettiva rispetto al valore estetico della canzone di cui parliamo; " ... di tutte le poesie del *Canzoniere* — così il compianto professore di Breslavia — mi sembra la più bella quella in cui questa fluttuazione dell'anima combattuta ha trovato la più compiuta espressione, la canz. *I' vo pensando* „. Del resto è evidente che, dato il posto che la canzone in parola occupa nelle *Rime*, essa è cronologicamente spostata, giacchè fu per certo composta quando nell'anima del poeta non s'era affacciato ancora il timore crescente che Laura potesse morire per contagio, cioè prima ch'egli avesse composto un buon numero di sonetti che stanno innanzi ad *Arbor victoriosa*. Sicchè avrebbe in fondo ragione l'Appel, *Die Berliner Handschriften der Rime Petrarca's*, Berlin, 1886, p. 61, che, pur fondandosi su ragioni d'altra natura, la giudicò di parecchi anni anteriore al 1348.

solennemente la serie delle rime di religione e di morte? Ma no, ripeto. *I' vo pensando* non inizia nessun nuovo prospetto nelle *Rime*, per la ragione molto evidente e altrettanto semplice, che vi risuona dentro pur sempre, verso per verso, quel solito e medesimo contrasto tra Cielo e Terra, tra Amore e Dio, fra le tentazioni larvate del senso e la viva aspirazione alla più alta spiritualità cristiana che fu ed è, a dir vero, la nota fondamentale di tutta l'opera del nostro poeta, in ispecie innanzi alla morte di Laura: quel medesimo contrasto per cui il nostro " homuncio " ora viene spinto ad esaltare e rivestire di parvenze quasi mistiche il suo amore, ora a detestarlo e a maledirlo come una colpa ribrezzosa, e a chiederne perdono al suo Creatore. Così può accadere, per un esempio, che al son. *Benedetto sia 'l giorno*, segua, subito dopo, il grido desolato e sublime al *Padre del Ciel*, col quale, nell'anniversario stesso del suo innamoramento, il figliuolo della pia Eletta implora dall'Altissimo che gli voglia far scordare per sempre quella povera Laura che, così malaticcia ed infelice, non si sa poi come riuscisse a dargli tanta guerra. Di guisa che, ripeto e concludo, quelle medesime ragioni di coerenza logica ed estetica che avrebbero dovuto persuadere il Petrarca a trasferire dalla seconda alla prima parte del suo poema psicologico *Aspro core* e *Signor mio caro*, avrebbero dovuto indurlo del pari (ma anzi!) a relegare in una con essi, innanzi alla pretesa chiusa *Arbor victoriosa, triumphale*, la canz. *I' vo pensando*, che abbiamo visto, pur di scorcio, così fremente di mal domi ardori terrestri. Eppure di essa, a proposito della nostra questione, nessuno ha parlato (e confesso di meravigliarmene) e certo sempre per quella specie d'incantesimo che ha esercitato, anche un po' per contagio, e pur su gl'ingegni più sodi e penetrativi, quella tale iniziale bellamente cincischiata di cui s'è detto tanto qui innanzi. E ne tace cogli altri anche il Cesareo, che, fra la *I* e la *v* di quel 1° verso avrebbe potuto rilevare una piccola rasura con cui lì stesso fu certo cancellata una croce..... È vero per altro che due altre rasure del genere stanno accanto a' due *Che* iniziali de' due versi sottostanti, così che non si capisce che cosa mai se ne sarebbe potuto dedurre.

Da tutto ciò, o m'inganno, o mi pare che non si cavi altra conclusione che questa: che quanti hanno voluto vedere nel *Canzoniere* una divisione in parti che servisse a rispecchiare este-

riormente qualcosa come l'esecuzione meditata di un disegno estetico prestabilito, si sono ingannati d'assai. L'opera del Petrarca è, per questo lato, più schietta e spontanea di quello che in generale non si supponga. Certo avrebbe dovuto avere in ogni caso, per necessità, un preludio e de' sonetti introduttivi; ma neppure questi si può giurare che siano stati composti da lui di proposito, per quest'ufficio. Fra i mille e mille scritti per Laura, mettiamo dal '27 al '33 (1), non aveva che da frugare per sceglier fra essi i n.[ri] II-V — quattro soli in tutto! — perchè gli avessero a servire per quella specie di preambolo.

Composta poi, assai più tardi, la *Canzone alla Vergine*, nulla gli dovette parere più acconcio che di chiudere con essa la raccolta, per quanto è vero che v'implora dalla Madre di Dio perdono della colpa di avere amato una miserella creatura mortale, e la grazia..... di poterla raggiungere in Cielo: conclusione che, dato il suo crescente fervore religioso, non potevamo non aspettarci.

In quanto al resto, salvo a scegliere fra' tanti componimenti già composti solo i migliori e ad aggrupparli insieme quando fossero stati ispirati da una stessa circostanza particolare, egli non si curò che il suo *Canzoniere* avesse altro ordine nè altra unità che non gli derivasse sia dalle speciali e determinate condizioni di fatto e d'ambiente dentro cui s'era ingenerata e continuava a svolgersi la sua produzione poetica, sia dalla natura particolarissima del soggetto che la sentiva e la elaborava. Vi si trova perciò quell'unità interiore genuina ed intrinseca di cui è appunto una riprova la sua stessa varietà e disparità con gli alti e bassi della passione: la sola di cui essa fosse

(1) Scelgo il '33 come termine *ad quem*, perchè di quell'anno o circa sono i più antichi componimenti del *Canzoniere*. Ma nessuno potrebbe credere ragionevolmente, seppure non ci assicurasse del contrario il Petrarca stesso (*Fam.* X, 3; *Senil.* XV, 1), che egli non cominciasse subito, sin dal '27, a comporre de' versi d'amore per Laura. Per questo lato anzi noi possiamo ritenere che le poesie raccolte poi nel *Canzoniere* non ci rappresentino che uno sparutissimo numero di poesie superstiti, di fronte a le tantissime altre che egli ne escluse e dannò al fuoco. Infatti non ci dànno una media superiore a 12 componimenti l'anno, compresi naturalmente quanti ne trascorsero dalla morte dell'amata. E questo ci rende ben ragione del titolo — un titolo per modo di dire! — da lui dato alla raccolta, cioè di *Liber fragmentorum* o di *Rerum Vulgarium Fragmenta*, che torna lo stesso.

suscettibile e che qualsiasi criterio ordinativo avrebbe pur sempre sciupato in modo miserando. In forza di ciò, il Petrarca ha badato bene solo a non confondere insieme le rime in cui Laura compariva come vivente con quelle in cui si parla di lei come di persona morta. Ne consegue che, se una divisione si può pensare mai d'introdurre ne' *Fragmenta*, l'unica che potrebbe avere in sè stessa un qualche fondamento logico, e non già, com'è stato finora, una pura accidentalità esteriore, sarebbe quella introdottavi *ab antico* da' nostri buoni vecchi (Aldina, 1514 (1)) e che è poi durata in seggio sino alla comparsa dell'edizione del Mestica (Barberiana, 1896), il quale la scomunicò solennemente come una " invenzione se non una profanazione de' posteri (2): cioè a dire quella di *Rime in vita* e di *Rime in morte di madonna Laura*. Una mera divisione di comodo, per quanto poco o punto rispondente al vero, giacchè, com'è noto, il *Canzoniere*, non contiene solo, come que' due sottotitoli potrebbero far supporre, rime scritte per Laura: una divisione che ha già apportato alla raccolta un nuovo e grosso guaio, giacchè doveva fatalmente partorire una parte terza di *Sonetti e canzoni sopra varî argomenti* di cui alcuni editori hanno anche fatto una parte quarta, che hanno relegato dopo i *Trionfi* (3)! Ma ad ogni modo, se l'opera petrarchesca è idealmente divisa in due parti dal fatto esteriore della morte di Laura, è anche vero che il Petrarca stesso, fra l'una e l'altra di quelle, non interpose nessun *explicit* nè altra indicazione o sottotitolo, nè era sua intenzione che vi dovesse rimanere alcuno spazio bianco a indicare una divisione purchessia: cose tutte che gli editori presenti e passati si son dati la pena d'introdurvi, usando di una libertà che nessuno ha loro concesso. E la ragione per cui messer Francesco si guardò bene dal far

(1) La divisione era già negli antichi manoscritti, p. es. nel Riccardiano 1124 del sec. XV, dov'è indicata soltanto dall'iniziale in oro e a colori.

(2) *Cenni* cit., p. VI.

(3) Cito per tutte la nota edizione stereotipa del Barbèra, tante volte riprodotta per il molto pregevole commento del Leopardi, edizione che ha partorito quella non meno nota del Sonzogno, con le note del Camerini, Milano, 1862, esemplata su quella. Ma l'idea prima dello scempiato smembramento risale al Vellutello, che nella sua edizione del *Canzoniere*, *Il Petrarcha*, ecc., Giolito, 1545, formò di que' *Sonetti e Canzoni* non amorosi una parte terza premessa a' *Trionfi*.

nulla di tutto ciò, mi par chiara. Anche quella distinzione *in vita e in morte* era a dirittura in contrasto col concetto che egli doveva avere ragionevolmente de' *Fragmenta* rispetto al loro contenuto preso nel suo insieme. Giacchè e' doveva considerare quella sua raccolta di poesie trascelte, e sotto un certo aspetto assai giustamente, come una specie di diario, e sia pure non senza lacune intermedie, delle voci più vibranti e secrete dell'anima sua, non escluse perciò, oltre la maggiore ispirata dall'amore, quelle altre che erano e sono un'eco calda e simpatica de' suoi affetti familiari, sociali e civili. E perchè poi, in fine, a distinguere nel Codice definitivo, dove sono tutte così nitidamente trascritte, le rime *in vita* dalle altre, seppure ciò poteva mai servirgli a qualche cosa (ma a che cosa?), doveva parergli più che sufficiente, da solo, quell'*Oimè* così significativo del son. *Oimè il bel viso,* con quella sua semplicissima quanto nitida iniziale in azzurro, che spicca ancora così bene nel largo e candido margine interno della pergamena.

Aneddoti da Codici Torinesi e Marciani.

Nota di CARLO FRATI

Sommario. — I. La Grammatica Greca di Giovanni Sagomala o Zygomala e Giovanni Foresto da Brescia (1540). — II. Lettera di Paolo Loredano (1591). — III. Codici Torinesi delle *Donne Famose* del Boccaccio. — IV. V. Monti, J. Morelli e il *Dittamondo.*

In un'accolta di carte di Jacopo Morelli, quasi tutte autografe, altrettanto disordinata quanto interessante, e precisamente nel vol. I del nº 17 del cosiddetto " Archivio Morelliano ", trovasi un inserto, su cui è scritto di mano dell'infaticabile bibliotecario: *Professori a Venezia.* Il titolo dice abbastanza il tema di questi appunti del Morelli, il quale, come tant'altri, che poi non condusse a termine, divisava probabilmente un lavoro sui *Professori*, ossia letterati d'altre città o nazionalità, che insegnarono a Venezia o furono in rapporto co' Veneziani.

Tra altro, trovansi in codesto inserto due copie estratte da codici torinesi, che attirarono la mia attenzione, perchè vi ravvisai subito la mano del Vernazza, attestata, del resto, espressamente anche da un foglietto volante ivi aggiunto.

Il foglietto reca, pur di mano del Vernazza: *Due lettere del secolo XVI, una latina, una italiana, conservate nella Biblioteca imperiale in Torino, copiate dall'autografo per servizio del signor cavaliere abate Jacopo Morelli, per mano di Giuseppe Vernazza di Freney.* — I codici della Biblioteca, allora Imperiale ed ora Nazionale di Torino, da cui furon tratti codesti aneddoti, sono due, come due sono le lettere da essi ricavate: ed entrambi appartenenti al fondo greco, sebbene, delle due lettere una sia in latino, e l'altra in italiano.

I.

Il primo è il cod. greco CCCXXI (secondo la numerazione Pasiniana), già segnato C. II. 24, poi C. IV. 19, e finalmente B. IV. 40, cartaceo, sec. XVI, di ff. 138 (1). Il codice conteneva un "Compendio di grammatica greca„ di Giovanni Sagomala (così era detto nel ms. torinese) di Nauplia, tradotto in latino da Giovanni Foresto, di Brescia, e da quest'ultimo inviato al patrizio veneto Federico Badoer, figlio di Alvise, con epistola latina, datata "Ex gymnasio nostro, calendis martiis, M.D.XXXX„. In questa epistola il Foresto (come scrive il Pasini) "Badoarium mirifice commendat, & maximopere hortatur, ut opusculum edendum curet, maximae utilitati graecae linguae studiosis futurum„ (2). Molto probabilmente però l'operetta grammaticale non fu mai pubblicata, chè non si trova registrata nella ricca *Bibliographie hellénique* del Legrand; e fu questa la ragione per cui, con meraviglia del Pasini, il Fabricio, "qui Grammaticos Graecos diligentissime recensuit„, non fece menzione di questa operetta. Ma se il Fabricio non fece menzione dell'opera, ricorda però più volte l'autore, che deve identificarsi con Giovanni Zygomala, di Nauplia, gran retore della Chiesa di Costantinopoli, ricordato più volte nella *Turcograecia* di Martino Crusio (3), e, di sul Crusio, dal Fabricio (4) e dal Legrand (5). L'identità dei due nomi fu acutamente e giustamente scorta dal Morelli (6): mentre l'Harles, che pur riparò all'omissione del Fabricio, registrando la grammatica del Sagomala nelle sue aggiunte alla

(1) Pasini J., *Codices mss. Bibliothecae R. Taurinensis Athenaei*. Taurini, 1749, tom. I, pp. 402-3.

(2) Pasini, o. c., tom. I, p. 403, vol. 1.

(3) *Turcograeciae libri octo a* Martino Crusio, *in Academia Tybingensi Graeco et Latino Professore, utraque lingua edita*. Basileae, (1584), in fol., pp. 92, 241, 243, 245, 256, 257, 259, ecc.

(4) Fabricii, *Bibl. Graeca* ... Editio nova, cur. Gottl. Christ. Harles. Hamburgi, 1802 sg., tom. VIII, pp. 93, 95; tom. XI, pag. 724.

(5) Legrand E., *Bibliographie hellénique ou Description raisonnée des ouvrages publiés en grec par des Grecs aux XV^e et XVI^e siècles*. Paris, 1885. tom. I, pp. 253, 254, 256, 257; tom. II, pp. 145, 210, 423.

(6) Veggasi l'appunto autografo del Morelli, riferito più oltre (p. 54).

Bibliotheca graeca (1), sembra non essersene avveduto, poichè registra la grammatica del Sagomala sotto questo nome, senza identificarlo con Giovanni Zygomala, menzionato più volte dal Fabricio, e nell'Indice della *BG*. pone il *Sagomala* della grammatica sotto questo nome, e lo *Zygomala* sotto " Joannes „. La perfetta equivalenza delle due forme è poi confermata dall'opera del Crusio sopra ricordata, dove (2) è pubblicato un Epigramma dello Zygomala al Consiglio dei Dieci, in cui fa istanza che gli venga confermato il titolo spettantegli di " esarcoretore „ e dove egli è appunto detto Ἰωάννου τοῦ Σαγουαλᾶ. Tale epigramma, secondo il Crusio, fu scritto prima del 1540 " quo (anno) Turcis patria Joannis Zygomalae, Nauplia, tradita est a Venetis „: e ciò conviene assai bene coll'operetta contenuta nel codice torinese e colla lettera dedicatoria del Foresto, che è appunto delle calende di marzo 1540.

Di Giovanni Foresto, o Foresti, non fanno menzione nè Ottavio Rossi (3), nè Leonardo Cozzando (4), nè A. M. Quirini (5). Solo Vincenzo Peroni (6) scrive di lui: " Foresti Giovanni, gentiluomo, giureconsulto collegiato, versatissimo nell'erudizione e nelle belle lettere. Morì in Venezia l'anno 1595. *Epistola*. Sta colle Epistole di Gio. Planerio, a cui è diretta „ (7).

Ora il Vernazza, premesso un indice latino del contenuto del codice, pressochè identico a quello che si legge nel Catalogo

(1) Fabricii, *Bibl. Graeca*, ed. cit., tom. XI, p. 655.

(2) Crusii M., *Turcograecia*, p. 259.

(3) Rossi O., *Elogi historici di Bresciani illustri. Teatro.* Brescia, Bart. Fontana, 1620, 1 vol.

(4) Cozzando L., *Libraria Bresciana*, I e II Parte. Brescia, 1694, 1 vol. in 8°. — Id., *Vago e curioso Ristretto, profano e sagro, dell'historia Bresciana.* Brescia, 1694, 1 vol. in 8°.

(5) Quirini A. M., *Specimen variae Literaturae etc.* Brixiae, 1739, 1 vol. in 2 parti.

(6) Peroni V., *Biblioteca Bresciana: op. postuma.* Brescia, N. Bettoni, s. a. (1816), vol. II, p. 68. — Anche il ms. dell'opera del Peroni, che si conserva nella Queriniana di Brescia, non dice più dello stampato, come mi comunica cortesemente il Direttore di quella Biblioteca, Prof. Filippo Garbelli, il quale mi avverte inoltre che " dall'ispezione dei nostri Cataloghi mss. e stampati niente risulta del Foresti „.

(7) Planerii J., *Varia opuscula* i. e. *Epistolae Morales*, etc. Venetiis, ap. Fr. Zilettum, 1584, in 8°.

del Pasini (1), trascrisse di sua mano per intero, ed inviò al Morelli, l'epistola del Foresto, che qui pubblichiamo, e che abbiamo ragione di credere tuttora inedita e sconosciuta. Quanto al codice Torinese, da cui essa fu ricavata, rimase purtroppo assai malconcio dall'incendio del 1904 (2): ed anche perciò l'autografo vernazziano è ora singolarmente prezioso.

Dall'imperial codice manoscritto, in carta, C. IV. 19 (anticamente C. II. 24. Catal. Tom. I, pag. 402).

Compendium grammaticae graecae sic collectum per Joannem Sagomalam Naupliensem. In quo haec continentur:

De octo partibus orationis brevis examinatio per interrogationem et responsionem.

Declinationes nominum, in quibus quot genera, quot terminationes habeat, et quomodo unaquaeque declinatio genitiuum, et reliquos casus faciat, clarissime tractatum est.

Declinationes uerborum, in quibus tres temporum cognationes cuiuscumque coniugationis praemittuntur.

Collectio uerborum synonymorum cum eorum constructione per omnes regulas, et cum flexione suorum temporum.

Addita sunt etiam haec:

Sententiae diuersorum poetarum qui graece Μονόστιχοι *appellantur.*

Nonnulla electa epigrammata.

Quaedam divinae Demosthenis sententiae ex eius orationibus excerptae.

Quae omnia in latinum sermonem per Joannem Forestum Brixianum translata sunt.

Joannes Forestus nobilissimo ex ordine patricio iuueni Federico Badoario magnifici Aloisii filio s. p. d.

Alexander ille Macedo, qui uniuersum terrarum orbem imperio suo virtute bellica subegit, interrogatus, ubi thesauros haberet, amicos sibi

(1) Pasini, o. c., tom. I, pp. 402-3.

(2) Scrive il De Sanctis nel suo Inventario dei Codd. greci superstiti della Biblioteca Torinese: " Attaccato ai margini dal fuoco, che ha asportato parte del testo verso i margini laterali, verso il superiore, e talora verso l'inferiore. Il rimasto è leggibile ". Cfr. Cipolla C., De Sanctis G., Frati C., *Inventario dei Codd. superstiti greci e latini antichi d. Bibl. Nazionale di Torino*. Torino, 1904, p. 415, n° 169.

fidelissimos ostendit. Quo facto, Federice mi obseruande, non minus omni argento, omni auro, et gemmis pretiosissimis charos habendos esse amicos comprobauit. Quam tanti regis sententiam tu mihi, quoties opera et patrocinio tuo opus fuit, uerissimam esse ostendisti. Nihil enim unquam intactum reliquisti quo mihi maxime prodesses, quo honori meo fidelissime consuleres, quo denique decus et praesidium meum te ipsum mihi omnibus in rebus offerres. Qua tua thesauri mei charitate quid melius, quid gratius, quid denique mihi optatius posset euenire? Nulla est argenti, uel auri tanta uis, nulla est tanta uel tanti precii gemmarum copia, cui tua in me maxima uel beneuolentia, uel charitas iure optimo non praeferenda uideatur. Ne igitur tanti tui in me amoris oblitus, quod nefas esset maximum, uideri unquam possim, qua obser-vantia miles strenuus ducem clarissimum, qua fide cliens optimus pa-tronum maximum, qua beneuolentia seruus fidelissimus dominum cle-mentissimum et de se optime meritum observare et colere iure humano et diuino tenetur, eadem ego te observantia, fide, beneuolentia, et cha-ritate mihi observandum semper duxi. Tu enim humanitate singulari, nobilitate summa, et uirtute praestanti ornatus, omni honore, omni laude et gloria, uno omnium qui te norunt consensu, dignissimus ha-bendus es. Natura enim ipsa dotibus suis pulcherrimis te ornatum uoluit esse. Fortuna uero in conferendis in te larga manu beneficiis naturae non cessit, uerum certamine quodam altera alteram bene de te merendo superare studuit. Tu uero ipse tibi animi ornamenta studio tanto com-parasti, ut mihi iure optimo laetandum sit quod te literis et optimis moribus instituendum ab ineunte aetate susceperim, qui cum omni mo-destia et moribus optimis praeditus in utraque lingua tantum profeceris, ut Federici Badoarii nomen apud clarissimos quosque uiros in dies magis elucescat, tantum te mihi moderatori tuo re ipsa deuinctum fa-teris, ut Alexandro Magno hac in re nihil cedas qui et ipse Aristoteli praeceptori magis quam patri Philippo se astrictum et obnoxium asse-rebat, quod ab hoc solum communem omnibus mortalibus uiuendi uim et regnum a praeceptore uero honeste uiuendi rationem et optime re-gnandi modum accepisset, quo praestantius in terris nihil potest esse. Tu igitur animo gratissimo iuuenis muneribus plurimis et maximis me ipsum afficere nunquam destitisti, et sic animi tui uere generosi can-dorem mihi continue perspectum in dies magis in me prae te fers. Quamobrem et ego ne ingrati animi uidear, a quo semper maxime abhorrui, qua uia paria paribus referrem, saepe et multum mecum ipse cogitavi. Sed cum nulla ratione id assequi ualeam te ipsum qui quoties-cunque munus aliquod praeclarum tibi ab amicis affertur, eo me dignum statim iudicas, et hilari fronte impertis, hac in re imitari uolui. Nam, cum mihi hoc tempore gratissimum a Joanne Sagomala, viro in

utraque lingua doctissimo, munus grammaticae graecae compendium dono datum fuerit. eodem ego te statim dignissimum esse censui, quod ut fructuosum et adolescentibus utilissimum mihi uisum est, sic tu luce dignissimum arbitraberis et in gratia adolescentium qui graecae linguae cupidissimi sunt, et in ea facultate brevissimo temporis spacio et proficere et excellere exoptant, imprimendum curabis et demum patrocinio tuo non indignum existimabis. Quod si a te factum fuerit, non minus tibi debebunt Graecarum litterarum cultores, quam Aloisio patri tuo viro magnificentissimo et de Republica Veneta optime merito se deuinctos esse ciues uniuersi et patricii Veneti ubique locorum praedicare non desinunt. Cuius tanti viri eloquentia cum sapientia coniuncta egregiaeque domi et foris virtutes celebrabuntur illae quidem non solum latinis sed pene omnium gentium literis et linguis neque ulla unquam aetas de eximiis suis laudibus conticescet qui uti paucis ante diebus ad illustrissimum imperatorem Carolum legationis munere felicissime functus est, sic hoc tempore ad Turcam ex communi senatus Veneti sententia delectus optimis auspiciis orator accessit et longe melioribus pacis exoratur in patriam rediturus, maiorem omni trophaeo et triumpho laudem et gloriam relaturus est. Quod si nobis contigerit, quibus laudibus Aloisium Badoarium patrem magnificentissimum efferemus? quibus studiis prosequemur? qua beneuolentia et obseruantia complectemur? parietes ipsi huius nobilissimae ciuitatis medius fidius iam illi gratias agere et habere gestiunt. Cumque nihil sit opere uel manu factum quod aliquando non conficiat et consumat vetustas, tanti viri laus et gloria in dies magis efflorescet. Nam quicquid manu, quicquid lingua, quicquid animo admirabile est, id omne in huius tanti senatoris laudem et gloriam perducitur.

Tu igitur, Federice, optima patris clarissimi vestigia, virtutes egregias et merita in bonos viros sectatus de studiosis adolescentibus bene mereri studebis, hoc graecae linguae compendium hilari fronte suscipies, atque ut in hominum lucem prodeat, imprimendi curam adhibebis maximam. Vale omnium bonorum decus eximium, et praesidium patriae certissimum. Ex gymnasio nostro calendis martiis M. D. XXXX.

In calce alla copia il Morelli annotò:

" Il Foresto (vedi se Bresciano) è messo nei Professori di Lettere in Venezia dal Toscanella nel Dizion., p. 190, t. Vedi qui „.

II.

L'altro codice torinese, di cui si valse il Vernazza, è il gr. CCCXXXI (numerazione Pasiniana), già segnato C. II. 34, poi C. IV. 6, e ultimamente C. V. 6, anch'esso cart., del sec. XVI, di ff. 207; che conteneva varie opere di Michele Psello, con in fine due sermoni di Niceforo Blemmida. In questo ms. trovavasi pure, non menzionata dal Pasini (1), una lettera di Paolo Loredano scritta " Di villa li 28 ott. 1591 " a persona non conosciuta: lettera che il Vernazza trascrisse dall'autografo, e che ci è stata per tal modo fortunatamente conservata, mentre il cod., di cui faceva parte, andò, come sembra, totalmente distrutto (2).

Ecco il testo della lettera, preceduto dall'indicazione del ms. e da un'avvertenza del Vernazza:

Dall'imperial codice manoscritto, in carta, C. IV. 6 (anticamente C. II. 34. Catal. Tom. I, pag. 412).

Manca il foglio nel qual dovea essere l'indirizzo della lettera. Perciò non si sa a chi fosse scritta. Dai titoli nondimeno si conosce ch'era scritta a persona ecclesiastica.

Ill.mo et R.mo S. mio Coll.mo,

Ella sapia che in questo tempo ho hauuto grandissimo martello della persona sua, et se ella è sta' priuo del nutrimento, ella sapia che ne darò tanto che la sarà ogni hora più consolata. Et li do breuemente conto de un ordine che ho tenuto in molte questioni da me in questo tempo compite. Prima, se de l'anima si può auer scientia; seconda, sotto qual scientia auuta che si habbia ella ha da cascar; terza, e suponiamo la natural, in qual luoco e tra tante parti ella sia per cascare; e tratando Ar.^e de l'anima communissima, è da ueder se anco de l'anime celesti ne raggiona: ma perchè dir anime celesti suppone il ciel animato, ho giudicato prima saper, essendo tre sorte de anime, di qual di esse egli sia animato: et che'l sia animato, bisogna che con qualche mezo lo habbiamo trouato: imperò primo è ueder con che mezo hab-

(1) Pasini, o. c., tom. I, pp. 412-15.

(2) Il cod. non è infatti registrato dal De Sanctis, *Inventario* ecc., neppure tra i Mss. frammentarî.

biamo che'l cielo sia animato et de qual anima animato, et questa è la quarta questione; segue la quinta, se de l'anima celeste parla Ar.e in questi libri *de l'anima*. Sesta, qual sia il suggetto. Settima, come s'intende li accidenti portar molta utilità alla cognition della sustantia: ottaua, se l'anima ha propria operatione: nona, la differentia del definir del dialetico et del philosopho natural: et ho spiegato tutto il primo libro con altre questioncele nate dalle parole de' testi. Passato al secondo, fatte gran considerationi su tutti li primi texti, quel atto primo e secondo ho dechiarito, su la definition de l'anima ho sudato, non tramettendo considerationcella: et perchè Aris.e dà tre specie de anime, quatro gradi de uita, cinque facultà, tutto ho resoluto, e se le facultà sono dalla essentia de l'anima differenti et d'onde sia nasuta la differentia de queste tre anime, et presa la prima che è la uegetatiua, ho discorso intorno alle sue tre principal potentie, che è la nutritiua, augmentatiua, e generatiua. Tutte queste con bellissime dubitationi e secure et reali resolutioni ho considerate et esaminate. Et uoleuo intrar ne' sensi hauendo in altro tempo espedito quello che apparteneua al intelletto. Ma sentoui, ill mo s.r mio, chiamarmi con tanto zelo " mio figliolo „, da l'altro canto non resoluto uenirò et sarò un de questi giorni con essa lei et da mio figliolo la saprà il quando che mi manderà la gondola. Vorrei ben che la terra pensase a' fatti suoi, e lassar uiuer me nella mia quiete, che non impazo alcuno, nè tenir conto di sì pocco hometo, come son io, e li giuro per Dio che per V. S.ria ill.ma io ripatrio; e poteua rompersi la testa li miei, che almeno io finiua in tutta questa uernata questa commentatione qui in uilla, la qual finirò a Uenetia. Graccerano poi se non mi uederano così spesso alle piaze; io, mons. ill.mo, son nato libero et uoglio uiuer libero, però uirtuosamente; et se questi conoscessero che cosa è uita uirtuosa et che cosa è uiuer in essa, si rosirebbero, più delle loro uanità, che io non consolato nella mia retiratezza. Raccomandatimi al mio S.r Gioanni et a tutti li amici della narationi (*sic*), quali tutti ho per fratelli, difendino da morsi rabbiosi l'inocentia ch'altri non offende. Io sarò dunque presto con essa lei, et tratanto ui bascio le mani. *Di uilla, li 28 ott.e 1591.*

Di .V. S. Ill.ma et R.ma
S.or obligatissimo
POLO LOREDANO.

In calce all'apografo Vernazziano il Morelli annotò: " Di Polo Loredano, vedi libri stampati. — Dialogo in lode dei Gobbi ms. mio. Opuscoli vari. 4°, dove è fatto Lettore pub.o „. — Ma ne' Cataloghi della Marciana, così degli stampati, come dei Mss., nulla ora si trova di ciò che qui il Morelli accenna.

Agli apografi Vernazziani non trovasi unita la lettera, colla quale l'erudito piemontese dovette trasmetterli al Morelli; nè tale accompagnatoria fa ora parte delle altre lettere del Vernazza che si trovano nel Carteggio Morelliano. Sembra però che la comunicazione dei due documenti fosse fatta nel 1813, poichè in una lettera del Vernazza al Morelli dell'8 agosto di quell'anno, trovasi scritto sulla sopracoperta di mano del Morelli: " Grammatica Sagomala Zygomala. — Lettera Foresto Badoaro. — Accad. Ven. — Polo Loredan „, che sono appunto oggetti o soggetti della comunicazione fatta al Morelli dal Vernazza.

Nè furono questi i soli rapporti che intercessero fra il Vernazza e il dotto Bibliotecario di S. Marco. Le non poche lettere di lui che si conservano nella Marciana, e le responsive del Morelli, che si conserveranno indubbiamente presso la R. Accademia delle Scienze di Torino, stanno ad attestare la continuità ininterrotta, sebbene non troppo frequente, delle loro relazioni letterarie fra il 1789 e il 1814: ma queste potranno essere oggetto di altra comunicazione sui *Corrispondenti Piemontesi di Jacopo Morelli*.

III.

Anche in altra parte de' manoscritti Morelliani troviamo notizie e transunti da codici Torinesi, ora divenuti preziosi; ed anche in questo caso, sebbene indirettamente, le notizie provengono dal Vernazza.

Tra i codici italiani della Nazionale di Torino, che andarono distrutti nell'incendio (1), e dei quali è fatta menzione nel Catalogo di Bernardino Peyron (2), ve n'erano due contenenti il volgarizzamento delle *Donne famose* del Boccaccio, dovuto a maestro Donato da Casentino: l'uno, segnato ultima-

---

(1) Cfr. Renier R. nella recensione del *Catalogo* del Peyron, inserita nel *Giorn. stor. d. Lett. it.*, vol. XLIV (1904), pp. 407-19, dove si avverte che " dei 976 codici ch'esso descrive [il *Catalogo* Peyron] buona parte più non esiste, o esiste in pessimo stato. I mss. italiani e romanzi, per la loro ubicazione, furono i più disgraziati „.

(2) Peyron B., *Codices italici manu exarati, qui in Bibliotheca Taurinensis Athenaei ante d. XXVI Jan. M. CM. IV. asservabantur*. Taurini, 1904, pp. 82-83 e 195-96 (nº XCVI e CCXCII).

mente N. VI. 17, e anticamente I. IV. 44 (n° CXXI del Pasini), membranaceo, del sec. XV, di ff. 198, in 4° p., aveva iniziali dorate, principiava (f. 1) col *Dialogo di Giannozzo Manetti, consolatorio della morte del figliuolo*, e recava l'opera del Boccaccio a ff. 73-194; — l'altro, segnato ultimamente N. III. 9, e anticamente K. IV. 26 (n° LIII del Pasini), era pure membranaceo e del sec. XV, contava ff. 90 in fol., di cui solo 86 numerati, e non conteneva che l'opera del Boccaccio.

Ora di entrambi codesti codici boccacceschi di Torino troviamo l'indicazione e qualche estratto nel volume n° 29 dell' " Archivio Morelliano „. Dopo altre notizie bibliografiche concernenti il Boccaccio, vi si legge a fol. 29 (con sèguito a fol. 53):

" Codice ms. di Torino, registrato nel Catalogo, t. II, p. 446, più diffusamente descritto dal Vernazza all'ab. Schioppalalba (che è segnato I, IV, 44), ha:

" *Delle Donne famose, alla illustre reina Johanna di Puglia incomincia il Libro felicemente. Opera di* Giovanni Boccaccio *Fiorentino traducto in volgare per maestro* Donato di Casentino. Com.: Eva. Dovendo io scrivere per che virtù siano cognosciute le famose donne, non parrà cosa indegna di pigliare il cominciamento da quella che fu madre di tutti gli uomini, Eva etc. L'ultimo capitolo è il CIV, *Séguita pure della medesima* [segue a f. 53] *reina Giovanna*. L'autore che scrisse di queste famose donne non arrivò al fine di questa reina famosissima e gloriosa per lo tempo passato, et benchè egli prometta in questo libro scrivere le historie di quelle, nondimeno alcuna volta, o che egli fosse tratto da piacere di dare parole, o che egli si muova per cupidità di dire cose oneste, la qual cosa più mi piace, lascia quelle cose che si potevano dire di quelle, et tocca solamente le sue lode „. Finisce: " Poi fu sepellita con reale onore d'ultima sepoltura, et fece manifesto che la vita umana è una frivola [cosa], e che gl'è vero quel decto del poeta che noi doviamo aspectare l'ultimo dì a lodare alcuno uomo et che niuno si dee chiamare beato inanzi che muoia et che sia sepellito „. Segue:

" *Epistola del magn.° Sig.* Astore de' Manfredi *mandata a una splendida donna da lui sommamente amata delle prigioni fiorentine. f. Brancha* (sic) (1) *a sua instantia*. " Gentilissima et valorosa donna... „. Finisce: " Ex tenebris publicorum carcerum Florentinorum „.

---

(1) Peyron B. (p. 196) ha: " S. Brancha „. Dovrà forse leggersi: " S[er] Brancha? „

" Altro codice di Torino, segnato K. IV. 26, registrato nel Catalogo a pag. 118, ragguagliato dal Vernazza allo Schioppalalba, ha il volgarizzamento suddetto con la giunta della Regina Giovanna: e nel fine si legge: *Finito libro de famose donne compilado per misser* Zuane Bocacio *ad petizion della famosissima raina Zuana de Puglia, poi fo stralatado in idioma volgar per maistro* Donato da Casentino *al magnifico marchese Nicolo da Este, principo e signor de Feraria* „. E termina coll'indicazione di un codice Marciano: " Delle Donne illustri, Volg. Ms. S. M.° „: cioè il cod. Marc. It., Z. LXVIII.

IV.

Altrove il Morelli registra pure il codice Torinese (1) del *Dittamondo* di Fazio degli Uberti, col commento di Guglielmo Capello, che, sebbene non distrutto, fu pure assai malconcio dall'incendio. Si legge infatti in " Arch. Morell. „, n° 20, f. 219:

" Uberti Fazio, *Dittamondo*, ed altro.

" Codice ms. nella Bibl. dell'Università di Torino, in fine ha: *Transcriptus anno Christi MCCCCXXXVII et absolutus die Mercurii V Junii, quem glosavit doctus vir et egregius magister Guglielmus Capellus in Regia Estensi Ferrariae*. Vedi Andres, *Cartas*, T. V, p. 65. — Indice dei Mss. a stampa non dice niente (2). — È riferito così da Malacarne negli *Ozii letterari*, Torino, 1787, T. 2, p. 222 „. E rispetto al commento del codice Torinese avverte più oltre, nello stesso volume (" Arch. Mor. „, n° 20, f. 238), il Morelli: " Le Chiose del Codice Torinese, sono le stesse che quelle del Codice Veneto „; e rimanda ad una lettera di Vincenzo Monti, a lui diretta, del 28 febbraio 1815.

Infatti, non solo nella corrispondenza letteraria del Morelli, ma anche in un altro fascio delle sue carte, che ora compongono il n° 19 dell' " Archivio Morelliano „, si trovano sei lettere del Monti al Morelli, e la minuta di due risposte del Morelli al

(1) È il cod. della Biblioteca Nazionale di Torino già segnato N. I. 5, di cui può vedersi la descrizione in B. Peyron, o. c., pp. 7-9. Intorno a questo ms. veggasi anche ciò che scriveva il Borghesi al Perticari in una lettera del 5 aprile 1818 pubblicata dal Pelaez, o. c., pp. 331-32.

(2) Cioè il Catalogo del Pasini, che non lo registra, perchè pervenuto alla Biblioteca dopo la stampa del Catalogo stesso.

Monti, che concernono appunto il *Dittamondo* ed il commento del Capello, contenuti ne' codici Torinese e Veneto (Farsetti, poi Marciano): e ciò in servizio della nuova edizione di quel poema che il genero del Monti, Giulio Perticari, si proponeva di pubblicare, dedicandola al marchese Giacomo Trivulzio. Crediamo quasi interamente inedita tale corrispondenza, e perciò utile pubblicarla, tanto più che essa viene opportunamente ad aggiugnersi alle altre lettere del Monti al Perticari su codesta progettata edizione del *Dittamondo*, che già furono pubblicate nella nota raccolta di Lettere Montiane, edita dal Bertoldi e dal Mazzatinti (1); e sopra tutto alla copiosa corrispondenza Monti, Trivulzio, Borghesi, Morelli, Costa, Roverella, ecc., messa in luce dal prof. Mario Pelaez in appendice alla sua interessante memoria sugli studi del Perticari intorno al *Dittamondo* (2).

Ecco la lettera colla quale il Monti faceva presente al Morelli il desiderio proprio e del genero:

Preclarissimo Sig. Cavaliere,

Milano, 23 X.bre 1814.

Il Conte Giulio Perticari di Pesaro, coltissimo giovine (del quale, s'ei non fosse mio genero, metterei qui molte lodi), sopra un antico e bel codice del *Dittamondo* di Fazio si è dato di tutta forza a illustrarlo e sanarlo dalle orribili piaghe che gli hanno fatto le stampe. Voler dire a Voi il molto utile che dalla illustrazione di questo primo poema didascalico dell'Italia può tornarne alla nostra Letteratura sarebbe vera e presuntuosa pazzìa. Ma non sarà vano il farvi sicuro che il Chiosatore condurrà a buon porto la sua fatica, e dileguerà tutte le tenebre, solo che Voi gli siate cortese del favore, ch'io in suo nome per questa lettera vi domando: e qual sia vel dica egli stesso col seguente paragrafo dell'ultima che mi scrive:

" Dalla *Biblioteca Farsetti* comprendo come le note poste ai due

(1) *Lettere ined. e sparse di* V. Monti, *racc., ord. ed illustr. da* A. Bertoldi *e* G. Mazzatinti. Torino, 1896, vol. II, pp. 132, 137, 138, 140, 143, 150, 152, 156, 170. — A pp. 143 e 150 di questa edizione si legge " Novelli „ in luogo di " Morelli „.

(2) Pelaez M., *Notizia degli studi di Giulio Perticari sul " Dittamondo „*, in *Atti d. R. Accad. Lucchese di sc., lett. ed arti*, vol. XXIX (Lucca, 1898), pp. 273-360.

" codici Estense (1) e Veneto (2) son piene di belle notizie, specialmente
" intorno ad alcuni fatti, de' quali in veruno storico non è rimasa
" memoria. Parmi adunque necessario il veder queste note, o per seguirle,
" se diranno cose che altronde non si saprebbero, o per confutarle, se
" andranno lungi dal vero. Il non vederle renderebbe l'opera difettosa;
" nè l'editore fuggir potrebbe il rimprovero di negligente, o d'avaro.
" Quindi ho fermato di fare a qualunque spesa copiar quelle Chiose o
" sul Codice di S. Marco, o su quello di Modena. Non so dove tornerà
" meglio e per la onestà del prezzo, e per la esperienza del copiatore.
" Il nostro Antaldi mi dice aver trovato nel dottissimo sig. Abate Mo-
" relli molto desiderio di questa edizione, e ne' suoi Copisti molta ca-
" pacità. So che quell'ottimo Letterato è vostro Collega nell'Istituto.
" In voi dunque ripongo il pensiero ecc. „.

E qui il Perticari mi commette la cura di procacciargli la copia di quelle Chiose, e di udire da Voi, egregio Collega, la spesa che importeranno. Indi soggiugne:

" Nella descrizione che il sullodato sig. Ab. Morelli ha fatto di
" quelle Annotazioni leggo che il Commentatore (creduto essere un Fer-
" rarese) non chiosa per nulla le oscurissime cose che risguardano gli
" antichi novellatori d'Inghilterra e di Francia: de' quali è grande pe-
" nuria per tutto, e qui assoluta mancanza. Non ho potuto nè manco
" vedere la *Tavola Rotonda* di Lancillotto, nè alcun altro che tocchi
" queste anticaglie cavalleresche. Onde se voi non me ne soccorrete, il
" Chiosatore di Pesaro rimarrà in secco del pari che il Ferrarese, il
" quale nel codice di S. Marco si confessa ignorante di queste istorie
" francesi, e d'aver visti pochi libri di quella gente „.

Intorno a questi secondi aiuti ch'egli dimanda io nol posso sovvenire che della *Tavola Rotonda*: ma non saprei a che altre fonti condurlo, perchè la mia erudizione rispetto a quei tempi e costumi si estende poco. Voi che siete vero mar di dottrina e più d'ogni altro potete metter mio genero sulla via di trovar la luce ch'ei cerca. Voi degnatevi indicarne le opere che a quell'effetto più sono da consultarsi. E se fra la tanta suppellettile dell'immenso vostro sapere n'avete alcuna di scarto sul *Dittamondo*, prendete consiglio dalla vostra singolar cortesìa, e fatene dono; chè il dono non sarà taciuto.

(1) Il cod. Estense VIII. G. 15 (= ital. 483), del sec. xv *ex.*, con commento del Capello, e con figure illustrative nei margini. A questo cod. accenna anche il Monti in una sua lettera al Perticari (Milano, 11 luglio 1815). Cfr. *Lettere ined. e sparse*, ecc., ed. Bertoldi e Mazzatinti, II, p. 150, riferita più oltre (V. pag. 27).

(2) Il cod. già Farsetti, poi Marciano: cfr. più innanzi pag. 60, nota 4.

Io vi porgo queste preghiere non tanto in nome del Perticari e mio proprio, quanto dell'inclito Cavaliere, a cui l'opera verrà intitolata, dico l'onorando Sig. Marchese Giacomo Trivulzio, del quale a questi tempi nessuno è più benemerito delle buone lettere. Sono co' sentimenti della più grande stima ed affetto

Vostro dev.mo ser. ed Amico
V. Monti.

(Segue di mano del Brocchi):

Il mio dotto ed illustre amico Sig. Monti mi obbliga di aggiungere anch'io alcune righe raccomandandole l'affare sopra esposto, il che credo del tutto superfluo conoscendo per esperienza quanta sia la gentilezza del Sig. Cav. Morelli, e sapendo quanto Ella apprezzi il bravo Monti.

Io ho abbandonata l'idea di pubblicare Zosimo di Panopoli essendo troppo confuso il codice di cotesta Biblioteca (1). Mi vien detto che l'Imperatore d'Austria richiegga al Re di Francia gli oggetti di belle arti, ed i manoscritti tolti dagli Stati che il primo ora possede. Se la restituzione si avvera, tornerà alla biblioteca il bel codice de' Chimici (2). Ho l'onore di essere con tutta stima

suo dev. obbl. Servitore
Brocchi.

E nel giorno stesso (23 dicembre) il Monti scriveva al Perticari: " Ho già commesso con lettera ferventissima, in nome pure dello stesso Trivulzio, all'ab. Morelli la copia delle chiose che tu desideri, ed ho per fermo che in breve ne sarai in possesso. Spero insieme di acquistarti qui in Milano la *Tavola Rotonda*, di cui so in certe mani un esemplare a cui ho teso le reti. Quanto agli altri libri da consultarsi, ho pregato il Morelli a somministrarne tutti quei lumi che potrà l'immensa sua erudizione, aggiugnendo che se egli stesso ti farà dono di qualche particolare notizia che cresca luce al tuo bel lavoro, il suo dono non sarà taciuto. Mi fo sicuro d'una pronta risposta alle mie domande, e tu subito la saprai „ (3).

---

(1) È probabilmente lo stesso cod. indicato nella nota seg., e che contiene appunto scritti di Zosimo Panopolita.

(2) Il cod. Gr. CCXCIX, *Chemicorum Graecorum collectio*, membr., del sec. XI. Cfr. Zanetti, I, 140.

(3) Monti V., *Lett.*, ed. cit., II, 138.

La risposta del Morelli non giunse con quella prontezza, che avrebbe desiderata la premura impaziente del Monti: il quale il 4 gennaio 1815 riscriveva al Perticari: " Il Morelli non mi ha per anche data risposta, e ciò forse (siccome pensa anche il Trivulzio) vuol dire ch'egli tarda il rispondere perchè si occupa delle mie dimande. Nulladimeno lo stesso Trivulzio gli aggiugne colle lettere di quest'oggi le sue premure „ (1). Ma il ritardo fu lieve, e il 4 gennaio 1815 (2) il Morelli rispondeva colla lunga lettera, che fu già pubblicata dal Pelaez (3), ma che ci sembra non superfluo riprodurre qui, per alcune differenze di forma che si riscontrano tra la minuta esistente nell' " Archivio Morelliano „, e l'originale di cui si valse il Pelaez, e per alcuni schiarimenti che le carte del bibliotecario Veneziano ci pongono in grado di soggiugnervi.

Al Cav. Monti,

4 feb.° *(corr.* Gennaio) 1815
a Milano.

Benchè io sia occupatissimo ed anche incomodato dalla malvagità della stagione, pure non voglio differire a rispondere alla vostra lettera, la quale mi fu gratissima specialmente perchè mi assicura della continuazione della vostra bontà di animo verso di me.

Oltre a quello che ho già scritto intorno al codice del *Dittamondo* provenuto dal Farsetti a questa Imp. Biblioteca (4), ora potrei dire che un altro codice, splendido, con figure, contenente anche Chiose inedite, trovasi nella Bibl. Reale di Torino, non registrato nell'Indice a stampa di que' Codici, ma riferito e allegato con laude dal Malacarne negli *Ozii letterarii*, Torino, 1787, T. II, p. 222, alla fine di cui si legge:

(1) Monti V., *Lett.*, ed. cit., II, 140.

(2) La minuta autografa del Morelli reca veramente *4 Feb.° 1815*; ma lo scambio del mese è reso evidente, non solo dalla data esatta " 4 Gennaro 1815 „ che si ha nell'originale edito dal Pelaez, ma anche dal fatto che il Monti scrive al Perticari di aver ricevuto " poco fa „ la risposta del Morelli il 7 genn. 1815 (cfr. Monti, *Lett.*, ed. cit., II, 143). Anche in altra minuta di lettera del Morelli al Monti prima era scritto *8 Genn.° 1815*, poi fu corretto *8 Febb.° 1815*.

(3) Pelaez, art. cit., pp. 333-36.

(4) Cfr. [Morelli J.], *Biblioteca ms. di T. G. Farsetti*. Ven. 1780, vol. II, pp. 163-177 (n° CCVI). — Il cod. è ora segn. Marc. It., IX, 40. — Alla Marciana pervenne anche un secondo cod. Farsetti (n° CCVII) del *Dittamondo* (ms., in fol., sec. xv), ma senza commento. È ora segn. Marc. It., IX, 41.

Transcriptus anno Christi MCCCCXXXVII. et absolutus die Mercurii. V. Junij, quem glosavit doctus vir et egregius magister Guglielmus Capellus *in Regia Estensi Ferrariae.* [*In margine della minuta*: Di questo Cappello, ch'è forse lo stesso autore delle Chiose nel Cod. di S. Marco (1), devo aver registrata qualche notizia che ora non ho tempo di cercare (2)]. Ciò conferma anche l'Andres nelle *Lettere Spagnuole* a suo fratello, stampate in Madrid nel 1793, t. V, p. 65. Due codici Ambrosiani di Milano mi esaltava con una lettera nell'aprile 1812, come trovati da sè preziosissimi, il Valeriani (3), uno de' due eroi che vole-

(1) Nel Catalogo della *Biblioteca ms. Farsetti* (II, p. 176) il Morelli aveva espresso, sebbene dubitativamente, altra opinione: cioè che le Chiose del *Dittamondo* potessero attribuirsi a Pier Andrea de' Bassi, ferrarese, spositore della *Teseide* del Boccaccio.

(2) Più tardi (1816) il Morelli aggiunse in calce alla sua minuta la notizia riguardante il Capello, che, nel momento di scrivere al Monti, non gli era sovvenuta: " Guillelmus Capellus scripsit Benvenuti de Imola Comment. in Valerium Maxim. in cod. 380 S. Marci. Vedi se nel *Dittamondo* se ne è giovato ". — Infatti, in fine del cod. Marc. Lat., Z. 380 (cfr. Zanetti, II, 155, e Valentinelli, VI, 29-30), contenente il *Commentarium in Valerium Maximum* di Benvenuto da Imola (mbr., in fol. p., a 2 col.), si legge: " Explicit expositio super Valerium Maximum per Magistrum Benuegniutum de Imola (col. 2) eximium historiographum; quam scripsi ego Guillelmus Cappellus de Aulecta per me finita die Sabati XVIIJ° decembris 1406 ". — In altro foglio autografo del Morelli trovasi questo appunto sul Capello: " Di Guglielmo Capello, Rosmini, *di Guarino*, II, 152, e Memoria mia *di Callistrato* [*cioè*: Morelli, *Osservazioni filologiche sopra le descrizioni di Statue, dettate da Callistrato* in *Memorie d. I. R. Istituto Lombardo-Veneto.* Milano, 1821, tom. II (1814-15), p. 333], dove di Plinio emendato da Guarino; Decembrii, *Politia Litteraria*; Guarini, *Epistolae* mss. et *Carmina*; Baptistae Guarini, *Carmina* e ms. inedito ".

(3) Sono i due codd. Ambrosiani D. 80 sup. e E. 141 sup., entrambi del sec. xv. Il secondo di questi codici reca infine la data: 9 dic. 1467. — Ecco la lettera di Lodovico Valeriani al Morelli (Carteggio in " Arch. Mor. ", n° 119):

Pregiatissimo Sig. Cav.,

Milano, 29 aprile 1812.

La nostra impresa ha incontrato tutto il favore dell'Accademia della Crusca, e si eseguirà in Firenze. Presto le invierò il Manifesto.

Ho trovato nell'Ambrosiana due preziosissimi codici del *Dittamondo* e due della *Teseide.* Sto già rettificando la lezione di queste due opere.

Debbo pregarla intanto con tutto il calore a volersi degnare di farmi collazionare il *Pataffio* di Ser Brunetto. Nel primo Tomo della *Biblioteca Farsettiana*, al n° LXXVIII, esso è notato colle Annotazioni del Salvini.

vano far tante maraviglie nei testi di lingua. Le Biblioteche Fiorentine, Laurenziana, Riccardiana, Magliabechiana ed altre, sono ricche di codici del *Dittamondo*, e massimamente quanto al testo, che non vi sarà alterato e guasto da dialetti forastieri, vogliono essere diligentemente collazionati. Lascio altri Codici noti, che potrebbero giovare all' edizione forse più di quel che si possa presumere. Di uno che sta nella Bibl. Regia di Parigi ha data notizia Ginguené nel tomo sesto delle *Notices et extraits des Mss. de la Bibl. R.*, ma non ne mostrò bene il pregio.

Quanto al Codice Veneziano, lasciando di ripetere quel che già ho scritto nella *Bibl. ms. Farsetti*, mi riduco a dire che le Chiose sono molte, e non poche alquanto lunghe; ma ve n'è però buon numero di triviali ed affatto inutili, le quali non vi sarebbe pregio dell'opera se si trascrivessero. Il Sig. Antaldi, da me riverito, rimase abbastanza soddisfatto del Copista, unico che io ho, ed è insieme uno de' due distributori di libri, obbligato ad altre incombenze, il quale gli trascrisse pochi componimenti, e se li fece rivedere da lui, sopra originali quasi tutti, o stampati, o recentemente scritti. Ora si tratta d'opera grande, scritta nel margine con abbreviature, in carattere minuto del sec. XV, a lui poco famigliare. Gli feci vedere ed esaminare il Codice, ed egli si prende l'impegno di copiare le note tutte, escluse quelle che sono da niente, per il prezzo di lire italiane 120, compresa la carta; e finirebbe il lavoro dentro il termine di sette mesi circa (1), quando però nuove

Se potessero aversi anche le Annotazioni, sarebbe bene. La prego ancora di ordinarmi la copia del codice notato n° LXXIX, che ha per titolo: *Detti di Secondo, filosofo Ateniese, raccolti per* Brunetto Latini. Quest'opera inedita sarà preziosa per la nostra Collezione. In quanto alla spesa, che possa occorrere, le sarà fornita dal Sig. Adolfo Cesare, al quale ne scrivo, ad ogni suo cenno. Siccome le opere di Ser Brunetto formeranno il secondo volume della nostra Collezione, così bramerei di averle il più presto possibile. Prego la sua bontà a indicarmi entro qual tempo potrò averle.

Se nel farmi apprestar queste copie potesse inviarmi ancora l'*Introduzione alle Virtù* da Lei corretto, mi sarebbe carissimo. Ho l'onore intanto di rassegnarle la mia distintissima stima.

Aff.mo ed Obblig.mo Serv.re vero
Lodovico Valeriani.

(1) Il nome del copista ci è rivelato da una ricevuta, che pure conservasi fra le carte del Morelli (" Arch. Morell. „, n° 19):

Primo Ottobre 1815, Venezia.

Per la Copia delle Glosse al *Dittamondo* di Fazio degli Uberti, fatta per conto del Sig. Cav. Monti, ho ricevuto io sottoscritto dal Sig. Ab. Morelli, R.° Consigliere e Bibliotecario, Lire Ottanta Italiane, dico

L. 80. —
Io Luigi Sclatelli.

operazioni che hanno da farsi non venissero sollecitamente comandate; nel qual caso egli, ed io, e il mio Vicebibl. D. P[ietro] B[ettìo] non saressimo nel caso di avanzare la copia e l'opportuna revisione di essa, che da me si vorrebbe compiere in qualche maniera. Se si credesse a proposito copiare le Chiose di un Libro, si manderebbero quelle, e così successivamente. Una buona edizione del *Dittamondo*, degnissima di essere riprodotta bene, è desideratissima; sicchè porge all'editore bel campo di farsi onore eseguendola felicemente.

Per illustrare il poema quanto alle cose favolose e romanzesche vi sarebbe un diluvio di libri da studiare. Basta leggere Apostolo Zeno sulla *Bibl.* del Fontanini, T. I, p. 191, e la *Biblioteca Italiana* di Milano, T. II, p. 359, e la *Storia della Poesia* del Crescimbeni e del Quadrio, per ispaventarsi; e chi poi volesse ora trovare que' libri tradotti in italiano, o pur anche francesi, avrebbe molto che fare per essere state consumate coll'uso le vecchie stampe, e per non esserne di sì fatte opere state fatte di nuove. Altri libri per cercare quei Romanzi non mancano; e per ora posso suggerire li seguenti che servono a conoscerli: *De l'Usage* Percel (1) (1734), Millot (1774), Curne S. Palaye (1781), Barbazan (1779, 1808), Sismondi (1813, I, capo VII), *Acad. Iscriz. Table*, p. 136, Manzi *sul Barberino* 390, oltre Plinio, Pomponio Mela, ecc. La mitologia del *Dittamondo* è facile che sia quella del Boccaccio nelle *Gen. degli Dei*, o quella di Albrico anteriore a lui. La Geografia è quella specialmente di Solino, cui servono a schiarimento opere varie geografiche de' bassi tempi venute in luce posteriormente.

Io vi scrivo alquanto in fretta, e secondo che le cose mi vengono alla mente, ma scusatemi per le continuate e necessarie occupazioni, che non mi lasciano quiete, e mi rendono più vecchio di quello che gli anni vorrebbero. Salutatemi con ogni sentimento di stima il vostro Sig. Genero, e tenetemi pure quale con pienezza d'estimazione e d'affetto mi dichiaro.

(Poscritto). Date li miei saluti al Sig. Brocchi, e fategli sapere che quanto alli Codici, io so bene quello che è stato, e quello che è, ma non so poi niente quello che sarà.

Il Monti, coll'affettuosa sollecitudine per gli studi del genero che dimostra in questa occasione, si affrettò a trasmettere tal quale la risposta del Morelli al Perticari (7 gennaio 1815): " *Mio caro figlio ed amico*, Eccoti la risposta del Morelli, giuntami poco fa. Gli replico che la dimanda del suo copista parmi

(1) Cioè: *De l'Usage des Romans avec une Bibl. de Romans* par Gordon de Percel, Tom. 2, Amst. 1734.

discreta, ma non il tempo ch'ei vorrebbe pigliarsi per copiare le chiose che si desiderano. Quindi gli propongo di limitarsi puramente alle più singolari, il che sarà risparmio ad un tempo di fatica e di prezzo „ (1). Ma tutto ciò egli non potè scrivere al Morelli che parecchi giorni più tardi, perchè incomodato da' suoi malanni nella rigida stagione invernale. Riscriveva dunque al Bibliotecario di S. Marco il 26 gennaio:

Prestantissimo e Carissimo Collega ed Amico,

Milano, 26 Gen.° 1815.

Afflitto da molti giorni nella salute per aver poco curato il rigore della stagione e scioccamente dimenticato che il bell'Aprile della mia vita è passato da molto tempo, e son già presso al Decembre, non ho potuto, com'io voleva, replicar subito alla vostra carissima e cortesissima. Il fo oggi, libero alquanto da' miei malanni, e innanzi a tutto vi rendo grazie delle notizie che mi porgete intorno ai codici del *Dittamondo*. Quanto agli Ambrosiani, il Marchese Trivulzio nulla ha trovato che possa soccorrere al lavoro del Perticari. Quanto al Torinese, il detto Signore ha già scritto; e in breve si saprà che possa aiutarci. Intanto rimane fermo il divisamento di far copiare le glosse del Veneziano: e nulla si vuole scemare della mercede che dal vostro amanuense viene dimandata. La sola cosa che al Perticari non potrà piacere sarà la lunghezza del tempo, che il Copiatore si piglia per questo effetto. Tutto adunque bene considerato, a me pare (e pare anche al Trivulzio) che ad affrettare questa faccenda metta meglio il limitarsi per ora unicamente ai passi più tenebrosi e difficili del poema. E ne darò un esempio acciocchè vi sia più chiaro il mio pensamento, e abbiate ad un tempo la prova se il glossatore colga nel segno.

Fazio al p.° lib., cap. 1, ha questi versi in bocca di Roma, al poeta, parlando di Cesare:

Nè la gran pioggia al Rubicone il tenne,
Nè il mio dolor, nè l'oscuro sembiante,
Nè i suoi veder pensar tra l'Effe e l'Enne.

Il primo e il secondo sono perspicui; ma il terzo, alla maniera di parecchi altri di Dante, a cui Fazio si piace di far la scimmia, è pieno di tenebre. Il senso però non altro può essere che l'incertezza in cui i soldati di Cesare si trovavano tra il *Fas* e il *Nefas* di quell'impresa,

---

(1) Cfr. Monti, *Lett.*, ed. cit., II, 143.

tra l' Ingiustizia e la Giustizia di muover le armi contro la patria. La lezione della stampa porta *tra l'Esse e l'Enne*. E allora si dee spiegare tra il *Sì* e il *No*, il che torna lo stesso che tra il *Fas* e il *Nefas*. Se il Glossatore del Codice Veneto non si perde nel buio di questo passo, e vi trova la luce, io auguro bene delle sue interpretazioni, e stimo che sia prezzo dell'opera il farne l'acquisto. S'ei salta il fosso, come suol dirsi, temo che se ne debba cavar poco frutto.

Un altro passo ne darà meglio a conoscere la bravura: ed è questo, L. 2, 27:

Solo per un cagnuol, che è una beffe,
Si mosse guerra e sdegno che ancor dura.
Se 'l sai, nol so, dico dal P all'Effe,
Tra quai di Falterona un serpe corre,
Che par che il corpo di ciascuna acceffe.

G. Villani, L. 6, c. 2, mette in chiaro i primi tre versi raccontando l'origine della Guerra che i Pisani mossero ai Fiorentini (*il P. all'Effe*) a cagione di un cagnoletto. Con questa chiave alla mano si disserra il senso di quel serpe che corre da Falterona tra l'Effe e il P. e che altro non è che l'Arno, che serpeggiando *acceffa il corpo*, cioè passa per mezzo a Firenze ed a Pisa. Anche in questo logogrifo si può veder manifesto l'acume dell'Espositore, e prender norma di ciò che fra le sue dichiarazioni meritar può la pena di esser copiato. Ma io non m'avveggo di portar frasche alla selva, e prestar occhi al custode della giovenca. Mille volte meglio di me voi sapete vedere ciò che sia da gittarsi e da ritenersi. Abbandono dunque alla somma vostra perspicacia tutto l'affare, e null'altro vi raccomando che l'abbreviamento del tempo, parendomi che, ristretta questa fatica dello trascrivere unicamente alle cose più oscure, non debba protrarsi molto alla lunga. Rispetto al prezzo vi ripeto che quanto mi direte, tanto vi manderò; nè altrimenti si dee procedere nel pagamento d'un premio che dipende tutto dall'onesto vostro giudizio.

Curate la preziosa vostra salute ed amate l'amantissimo

Vostro Ser. ed Amico
V. Monti.

Rispose l' 8 febbraio il Morelli:

Amico e Collega Stimatissimo,

Venezia, 8 Feb.° 1815.

Ottimo partito mi sembra quello che si è preso di far copiare alcune Chiose del Codice Veneziano, per formare idea della loro qualità, e specialmente delle due terzine indicatemi. Nella cartina qui compie-

gata (1) ho fatto dunque trascrivere dal disegnato copista ciò che il chiosatore vi dice, ordinando ad esso copista che scriva quel che vede, e non cambii nè parole, nè ortografia, e faccia come la copia di un ritratto: altrimenti, per ignoranza, avrebbe fatto grande guasto. Vedrete che sul primo passo nulla si dice con fondamento, che giovi all' intel-

(1) Anche della " cartina „ trovasi, unita alla risposta del Morelli, la minuta, tutta autografa di lui:

" *Dittamondo* ms. f.°

Canto II, Capo 1:

" Nè la gran pioggia a Rubicon il tenne
Nè'l mio dolore nè l'oscuro sembiante
Nè suoi pensier veder tra l'esse e l'enne.

Quel dì che Cesar arivò a rubicon partito da ravena era piovesto et cresciute le aque et lì li apparve roma in forma di dona, la qual lo confortò non dovesse passare li termini de la sua provincia se l'era citadin Romano et era grande ultra la forma humana. Rubichon ha nome oge pisatello et i picoli fiumi (*sic*) tra cesena e rimino. Questo fu termine tra Galia cisalpina et Italia. poi questo termine si mutò però che senogalia fu cità da gali fundata. et cossì ampliòno i soi termini. e i romani in pregio di Italia si tenevano a bargi confini (*sic*), come che non volesseno cossì fata gente per uicini che sempre fu lor nemica „.

Canto II, Capo 27:

" Ben vuo' che pogni a quel ch'or dico cura
Che sol per un cagnol ch'è una bestia
Si mosse sdegno e guerra ch'ancor dura.
Se'l sai nol so: dico tra'l p e l'effe
Trai quai di Fulterona un serpe corre
Che par ch'in corpo di ciascun acieffe.

" Essendo in Roma a la coronacion di questo Federico I° Imperatore de molte ambasarie, tra l'altre quelle de' fiorentini e quelle de' pisani, avene che un cardinale romano convitò l'ambasciatori di fiorentini a mangiare. uno degli ambasiatori videli un cagnoleto spagnolo e dimandollo in dono al cardinale, il quale li concesse volentieri et che mandasse per esso. un altro dì lo cardinale diè mangiare agli ambasiatori pisani et simelmente uno di quelli, veduto lo cagnolo, lo dimandò. lo cardinale non se ricordando l'avesse promesso già, disse: volentieri, mandariti per esso. lo firentino mandò primo et hebelo. lo pisano ciò sapiendo se ne turbò et da inde alcuni dì li pisani andando a corte si scontròno co' fiorentini, e ultragioli di parole e poi de fatti facendo di pugni i firentini con altri amici. poi apreso l'andono a trovare et fero vendeta de l'offesa. li pisani scrisono a pisa, agravando lo fatto; per la qual cosa i pisani aristarono la roba de' fiorentini. onde poi appresso si cominciò la guerra tra loro aspra e lunga „.

ligenza; e che sul secondo il chiosatore copiò da Giovanni Villani, anche quanto ad alcune parole e frasi che sono le medesime di ambedue gli scrittori. Ad ogni modo non vi sarebbe mai pregio dell'opera nel far copiare le chiose tutte; e ciò vorrebbe essere riservato soltanto a quelle che risguardano luoghi oscuri, facendosene prima un esame e indicandoli precisamente.

Voi bramereste che la copia non si portasse tanto in lungo quanto vi ho accennato, ed io invece devo dirvi ingenuamente che temo dovrebbesi ella prolungare. Quel copista, che è il solo da potere essere [adoperato] in somiglianti lavori, ed ancora senza netta la fiducia di sua buona riuscita, fra pochi giorni ha da cominciare un travaglio che sarà non poco molesto anche a me. Si tratta di sciegliere fra dieci mille volumi incirca una parte di essi consistente in quattro mille ad uso della Biblioteca; e altresì di trasportarvi Medaglie, Monete, Stampe, Anticaglie ed altro; e ciò per legato di un Gentiluomo Molino, recentemente morto (1). Potete immaginarvi quanta occupazione porta seco questo affare, nel sciegliere, esaminare, riscontrare, concertare, ecc.; talchè tratto tratto sarà anche necessario di tenere chiusa la Bibl. La Providenza mi assista. Io sono bene disposto a fare per Voi quanto posso, ma le faccende s'aumentano, ed anche l' Istituto, benchè in Venezia non faccia comparsa, non lascia però di sempre più rendermi spossato. Venga presto almeno la buona stagione a liberarmi dalli crudeli incomodi dell' inverno. Conservate salute perfetta a Voi, e la vostra cara grazia a me. Addio.

Anche questa seconda risposta del Morelli fu inviata, insieme alla " cartina „ inclusavi, al Perticari dal Monti, che così scrivevagli il 28 febbraio 1816: " Scriverò domani al Morelli conformemente al tuo suggerimento, che ottimo mi riesce, e lo spronerò a mandarmi di mano in mano che si trascriveranno le glosse del codice veneto. Per avere un saggio del loro valore io aveva già eccitato il Morelli a significarmi quelle del passaggio del Rubicone, e dell'origine della guerra tra Pisani e Fiorentini, due luoghi del *Dittamondo*, a mio giudizio, difficilis-

(1) Si riferisce qui il Morelli al lascito di Girolamo Ascanio Molin, il quale con suo testamento 24 febbraio 1813 fece dono della sua cospicua libreria alla città di Venezia, con obbligo di deposito presso la Biblioteca di S. Marco. Per tal modo la Marciana si arricchì di circa 4000 volumi di rare e pregiate edizioni; il Museo Archeologico, di antichità preziose; l'Accademia di Belle Arti, di disegni e dipinti; ed il Liceo pubblico, di un Gabinetto di storia naturale.

simi e da te felicissimamente interpretati. Dalla risposta che ti accludo vedrai che quel glossatore ha saltato il fosso. il che torna a tua lode, ma porge ad un tempo poca speranza che quelle chiose debbano portarti gran luce fra le tenebre di quel poema. Alla lettera del Morelli unisco una cartolina che il Bibliotecario dell'Ambrosiana ha mandata al nostro Trivulzio intorno ai due codici Milanesi. Molto aiuto io spero dal Torinese, le cui chiose son le medesime che quelle del Veneto, ma la correzione del testo assai più castigata. Noi ne avremo tutte le varianti, e dipenderà dall'acume del tuo criterio l'adottare quelle che ti parranno migliori „ (1). Ma invece di attendere il giorno seguente, il Monti riscrisse al Morelli lo stesso 28 febbraio, così:

Amico e Collega Stim.°,

Milano, 28 Feb.° 1815.

Ben veggo che prima del termine da voi chiesto egli è difficile il poter avere le chiose del *Dittamondo*. Nulladimeno sembrami esservi una via di mezzo, ed è questa. Se per trascrivere tutta la chiosa vuolsi il tempo di sei mesi, di viva necessità ne consegue che tre mesi debbano essere assai per averne la metà. Dovendo adunque tutta l'illustrazione col testo dividersi in due volumi, pigliatevi di grazia il pensiero che dentro tre mesi io possa avere le chiose del primo. E se la preghiera non è soverchiamente importuna, fate che di mano in mano che il Copista le verrà trascrivendo, io le abbia in tante rimesse, quanti sono i libri del poema. Questo sarebbe il desiderio del Perticari, ed il mio. Se questo divisamento otterrà la vostra approvazione, io mi rendo certo di vederne anche l'effetto. Non parlo della gratitudine che il Perticari ed io ve ne avremo, ed anche il Trivulzio. Solo vi dico che sarà somma, e palese.

Degnatevi di rispondere se acconsentite, e state sano: chè la vostra salute è preziosa a tutti gli amici dell' Italiana Letteratura.

Il vostro Aff.mo A.° e Collega
V. Monti.

P. S. Le Chiose del Codice Torinese sono le stesse che quelle del Veneto.

Di qui innanzi il Morelli non serbò più minuta delle risposte sue: sicchè dobbiamo accontentarci di far seguire in

(1) Cfr. Monti, *Lett.*, ed. cit., II, 143-44.

ordine cronologico le altre tre lettere del Monti che ancora ci restano nel Carteggio Morelliano.

Il primo invio delle Chiose non dovette farsi molto attendere, chè una lettera del Monti, senza data, ma certamente scritta dopo l'ultima surriferita (28 febbr.) e prima del 15 giugno, annunzia al Morelli ricevimento delle Chiose al primo libro del *Dittamondo*:

Stimatissimo Amico e Collega,

Ricevo le note del Codice Veneto al primo libro del *Dittamondo*, e ve ne ringrazio, pregandovi di proseguirmele.

Al Sig. Fortunato Stella ho fatto il pagamento delle Lire dieci Italiane da darsi, secondo il vostro senno, al Copista; e questa via di rimborsarvi terrò pure per l'avvenire, se sarà di vostro piacere.

Curate la preziosa vostra salute ed amate

Il Vostro Amico e Collega
V. Monti.

Altri invii dovettero via via succedersi, come rileviamo da un'altra lettera del Monti al Morelli del 15 giugno:

Amico Pregiatissimo,

Caraverio in Brianza, 15 Giugno 1815.

Scrivo allo Stella, che faccia prontamente venire alle vostre mani un altro a conto di cinquanta lire italiane. Il rimanente della somma convenuta sarà pagato alla fine del lavoro, di cui sono impaziente. Intanto della parte che me n'avete mandato abbiatevi i miei ringraziamenti, e scusi il ritardo di questa lettera l'aver io tardi ricevuto nella solitudine di questi monti il piego da voi speditomi.

Curate la vostra salute, ed amate

Il Vostro Ser.e ed Amico
V. Monti.

Il Monti poteva così, poco appresso, compiacersi col genero di aver già ricevuto il più delle tanto sospirate Chiose; e gli scriveva, di ritorno a Milano, l'11 luglio: “ Il più delle note venete al *Dittamondo* è già venuto. Il manoscritto mandatomi dal Morelli ingombra finora 94 pagine, e giugne fino al cap. XIV del terzo canto. Lettere di Torino mi danno speranza d'aver presto in mia mano l'effetto delle promesse fattemi da quello avv. Costa da tanto tempo. Mi sono di più procacciato l'elenco

di tutti i vocaboli del *Dittamondo* citati dalla Crusca. Ciò pure servirà a qualche cosa. Nel passare ch'io poi farò da Modena, mi tratterrò colà qualche giorno espressamente per riscontrare il codice estense, onde recarti tutto il tesoro che si può raccogliere per la maggior possibile illustrazione del tuo lavoro „ (1).

Verso la fine del luglio l'invio delle Chiose era terminato, ed il Monti ne ringraziava il Morelli con questa lettera, che è l'ultima di quelle conservate nel Carteggio Morelliano:

Pregiatissimo Amico e Collega,

Milano, 26 Lug.° 1815.

Ricevo il compimento delle Note, che il vostro senno ha prescelte da cotesto Codice del *Dittamondo*, e ve ne rendo grazie quante mai so. A maggior compensò della fatica sostenuta dal Copiatore farò passare dal Sig. Stella nelle vostre mani altre Lire 20 Ital. Se parravvi che queste sian poche, starò alla discreta vostra insinuazione.

Mi sperava di trovar fra queste Note qualche schiarimento a quel passo del 2° Libro, Cap.° 2°, ove, dopo l'aver detto, che *l'Esse, il Pe, il Qu e l'Erre D'oro scolpìte dentro al campo rosso* fu insegna celebre di Roma (ed è manifesto essere queste sigle il *Senatus Populusque Romanus*, segnate sugli stendardi di quei Potenti) Fazio soggiugne, che quelle lettere intendere si ponno, per la preghiera di Cristo sulla Croce.

Allorchè disse ne' pensier più tristi,
O Cristo salvator di tutto il mondo
Salva Populum Tuum Quem Redemisti.
E in altro ancor l'intendo ch'io nascondo.

Ben si vede che in quest' ultimo verso il poeta chiude un senso artificiosamente celato. Del certo un interprete non è tenuto a indovinare le cose che il poeta vuole nascoste. Nulladimeno una ragione di quel silenzio vi debb'essere, e parmi che il trovarla tornerebbe a molto onore del Commentatore. Ora il Perticari mi scrive d'averne rinvenuta la spiegazione nel frammento di Benvenuto, pubblicato dal Muratori (2) nella

(1) Cfr. Monti, *Lett.*, ed. cit., II, 150.

(2) A questo punto della lettera del Monti il Morelli annotò di propria mano: " Canto XVI. Paradiso. Muratori (*Antiquit. Ital.*, III, 1288) ha: Nicolaus . . . exponebat istas litteras: *Senatus Populus Que Romanus* sic: *Sozzo Popolo Conchato Romano.* Ms. S. Marco, Cl. XII, Cod. VI: idest *Socio* (per *Sozzo*) *Popolo Concacato Romano.* Il Cod. è del sec. xiv. — Codice mio [cioè il Marc. Lat., XIII, 120, cart. in fol.], sec. xv, ha: exponebat istas litteras sic: *S. P. Q. R.* dicens *Socio Popolo Quoncato Romano*: *Quoncato* sarà per *Concacato* „.

Raccolta degli Scrittori delle cose italiche (1); ed è questa. Fazio fu coetaneo di Cola da Rienzo, che secondo la Cronica del Fortifiocca era l'unico che *sapea lejere li pitaffi.* Ora di costui Benvenuto narra che sendo *Vir magnae mentis et prudentiae saepe arguens populum romanum de vilitate et furore intollerabili eorum, exponebat istas litteras S. P. Q. R. sic:* Sozzo Popolo Quoncacato Romano. A me pare che il mistero sia svelato, e che il Fazio abbia voluto tacerlo per non unirsi egli pure ai vituperatori di quel popolo. Cionnostante io stimo bene di sottoporre al vostro acuto intendimento questa dichiarazione per due ragioni: 1° per udire se l'approvate; 2° per pregarvi di riscontrare con più diligenza il Codice veneto, onde vedere se il suo Scoliaste ha veramente saltato il fosso del tutto (2).

La perdita di Mons. Marini è grande del certo per l'Italiana Letteratura, ma grazie al Cielo voi siete vivo e sano, e per onor nostro giova sperare che il sarete ancor lungamente; e per voi tutti gridano: *Tardus in caelum redeas.* Amatemi, e custodite la preziosa vostra salute.

Il Vostro Aff.mo A.co
V. Monti.

P. S. Lo Stella è a Varese. Tosto che egli ritorni darò l'ordine di cui sopra etc.

La risposta del Morelli a questa lettera del Monti (Venezia, 5 agosto 1815) trovasi pubblicata nella ricordata *Memoria* del Pelaez (3).

(1) Com'è noto, non è già nei *Rerum Italicar. Scriptores*, come qui scrive per svista il Monti, ma nelle *Antiquitates ital. m. ae.* che il Muratori pubblicò (tom. I, col. 1027-1298) *excerpta* dal Commento Dantesco di Benvenuto, di sul cod. Estense.

(2) Annotò di propria mano il Morelli: " Codice *Dittamondo*, S. Marco, a quel passo ha:

Senatus Populus Que Romanus
Salva Populum Quem tu Redemisti.

" Togliendo le prime lettere di queste dictioni venne a rilevare *Senatus* „ &c.

E in altro ancor lo intendo ch'io nascondo

" Vol dir che queste quattro lettere medesime può significare S *Succi* (per *Sozzi*) P. *Porci* Q. *Questi* R. *Romani*; ma perchè era iniuriosa parola la tacque „.

(3) Pelaez M., in *Atti d. R. Accad. Lucchese*, vol. XXIX (1898), pp. 337-38.

Mons. Gaetano Marini era mancato il 17 maggio 1815; il Morelli gli sopravvisse solo di quattro anni (m. 5 maggio 1819). L'augurio affettuoso del Monti non ebbe quindi tutto l'effetto, che i numerosi estimatori ed ammiratori del venerando bibliotecario veneziano avrebbero cordialmente desiderato per l'onore degli studi italiani. Così questi due sommi eruditi, che, nati entrambi pochi anni avanti la morte di Apostolo Zeno e di Lodovico Antonio Muratori (1750), sembrarono quasi ereditare lo spirito e l'intelletto di quei due insigni maestri, della cui nobile tradizione furono certo i più degni ed illustri continuatori, e che tennero (in campi diversi, ma reciprocamente integrantisi) alto il nome della dottrina e della erudizione italiana sino agli albòri del secolo XIX, mancarono a breve distanza di tempo, siccome erano stati uniti in vita da una costante, cordiale amicizia.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 1° Dicembre 1907.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Salvadori, Mosso, Spezia, Segre, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Morera. Grassi, Somigliana, Fusari e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Socio Naccari scusa l'assenza.

Il Presidente, a nome del Socio straniero F. R. Helmert, fa omaggio alla Classe del lavoro: *Bestimmung der Höhenlage der Insel Wangeroog durch trigonometrische Messungen im Jahre 1888.*

Il Socio Mattirolo presenta il volume del Prof. G. B. De-Toni che è il quinto della *Sylloge Algarum*, repertorio della massima importanza per la scienza algologica di cui l'Autore ha arricchita la Biblioteca accademica.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Prof. Giovanni Boccardi: *Ascensioni rette di alcune stelle fondamentali del catalogo di Newcomb*, dal Socio Jadanza

2° Prof. Francesco Giudice: *Una dimostrazione d'inseparabilità per radicali delle 27 rette di superficie cubiche*, dal Socio Peano.

Il Socio Parona, anche a nome del Socio Spezia, legge la relazione sul lavoro del Prof. F. Sacco, intitolato: *Il Gruppo del Gran Sasso d'Italia. Studio geologico*. La relazione conchiude favorevolmente per la stampa del lavoro ed è approvata all'unanimità. La Classe con votazione segreta accoglie il lavoro del Prof. F. Sacco per la stampa nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Mattirolo, a nome anche del Socio Parona, legge la relazione intorno al lavoro della Dott.^a^ Efisia Fontana, intitolato: *Ricerche intorno ad alcune specie del genere Elephomyces, Nees* (E. Variegatus, E. Granulatus e affini). La relazione conchiude favorevolmente per la stampa del lavoro ed è approvata all'unanimità. La Classe con votazione segreta accoglie il lavoro della Dott.^a^ Fontana per la stampa nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Segre presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dott. Perazzo, intitolato: *Sopra alcune varietà di rette ed in particolare sui vari tipi di complessi cubici*. Il Presidente incarica i Soci Somigliana e Segre per riferire intorno ad esso.

La Classe stabilisce di porre in votazione, per la prossima seduta, la elezione del Direttore di Classe per compiuto sessennio del Socio Conte Tommaso Salvadori in detta carica.

LETTURE

Ascensioni rette di alcune stelle fondamentali del Catalogo di Newcomb

riosservate in Torino da G. BOCCARDI

I. Nel volume dell'*Annuario astronomico* di Torino pel 1906 ho accennato al lavoro di riosservazione di stelle da me intrapreso in luglio 1904, spiegando il metodo che ho adottato per la determinazione delle costanti istrumentali relative ai passaggi pel meridiano. Qui ricorderò che l'istrumento adoperato è il vecchio circolo meridiano di Reichenbach, ridotto oggi a servire come semplice istrumento dei passaggi; di guisa che, per ora, la riosservazione ebbe per oggetto le sole ascensioni rette, riserbandomi di riosservare le declinazioni quando l'Osservatorio di Torino possederà un istrumento da ciò.

Ricorderò pure che fra le costanti istrumentali, la sola inclinazione dell'asse orizzontale venne da me determinata mediante mezzi fisici, cioè con frequenti letture della livella, e che le altre: azimut, collimazione, correzione dell'orologio, e anche l'andamento di questo durante la serata o corso di osservazioni, furono determinate mediante il metodo dei minimi quadrati, ogni stella fondamentale fornendomi una equazione di condizione. Evitai di osservare le stelle di grandezza superiore alla 4ª, e per quanto fu possibile mi restrinsi ad osservare stelle dalla $4^{m},0$

alla $5^m.5$, scendendo rare volte al disotto di questa grandezza. Procurai di osservare in ogni corso almeno una polare e v'inclusi quasi sempre una zenitale e qualche volta due. Le costanti furono mantenute piccole per quanto fu possibile, per modo che l'azimut, per cui si ebbero le maggiori variazioni, fu mediante la mira mantenuto entro $\pm 1^s$, salvo i casi in cui non fu possibile distinguere la mira. Dal quadro delle posizioni stellari dato in fine della presente Nota si scorgerà che io mi tenni lontano dal caso poco favorevole per la determinazione delle costanti, cioè di declinazioni ristrette entro 3° o 4°. Del resto io spero poter spiegare in una più ampia Memoria i particolari del mio metodo di osservazione, nonchè le attenzioni minuziose da me avute nell'osservare e nel ridurre. Il gran numero di fondamentali osservate in ogni sera (fino a 21), l'avervi incluso una polare ed una zenitale, l'avere mantenuti piccoli i valori delle costanti e finalmente la piccolezza dei residui $\Delta\alpha \cos\delta$ delle equazioni di condizione (1), la media dei quali è di circa $\pm 0^s.029$, cioè eguale all'errore ammissibile sopra una buona osservazione, tutto questo potrà garantire la precisione dei risultati del presente lavoro.

Per ragioni che si possono vedere facilmente e che spiegherò (come ho detto) in altra Memoria, io volli spostare il meno possibile il cannocchiale e m' imposi la legge di non osservare a distanza zenitale maggiore di 62°, giungendo a questa solo in un caso. Il crescere che fa l'errore di osservazione sensibilmente con $\cos\delta$ e anche secondo una certa funzione della distanza zenitale, attenua di molto (a mio credere) i vantaggi della determinazione delle costanti istrumentali mediante stelle di δ molto diversa; perchè nella espressione di queste, ch'è in forma di frazione, non bisogna avere riguardo soltanto al denominatore, ma anche alla incertezza maggiore o minore del numeratore.

Del rimanente, dati i motivi pei quali ho ritenuto necessario di spostare il meno possibile il cannocchiale nel corso di ogni serata di osservazione, e quindi data la necessità di non prendere stelle con δ molto diversa, l'essenziale è trovare un sistema di valori per le costanti, il quale metta d'accordo nel

(1) Dopo la sostituzione dei valori delle costanti.

miglior modo le α osservate delle fondamentali con le loro α calcolate. Con ciò non si vuol dire che i valori dell'azimut e della collimazione determinati in questo modo risultino identici a quelli che si otterrebbero con mezzi puramente fisici o con stelle di δ tutte diverse fra loro, ma è certo altresì: 1° che date le condizioni del nostro circolo meridiano, non si può parlare propriamente di *costanti* per ridurre le osservazioni di stelle di qualsiasi declinazione; 2° che sia necessario il tormentare il meno possibile l'istrumento. In queste condizioni strumentali sarebbe piuttosto illusorio il voler determinare le costanti con lo spostare frequentemente l'istrumento, e l'accordo fra le α osservate (e ridotte mediante quel sistema di costanti) e le α calcolate sarebbe certamente minore.

A quel modo dunque che, ridotti a piccolissimi valori l'azimut e la collimazione e restringendosi ad osservare fondamentali in una ristrettissima zona (1), si potrebbe addirittura ridurre ad una sola le costanti, cioè alla correzione dell'orologio (2), applicandola a tutti i passaggi delle altre stelle, non fondamentali, di cui si volesse formare un catalogo, allo stesso modo si può, restringendosi in una zona di 10° o 15° di qua e di là dall'equatore, determinare i valori di certi parametri, i quali mettono d'accordo le α osservate con le calcolate, parametri che saranno valevoli anche per altre stelle di cui si volesse formare un catalogo.

Ma io non ho fatto proprio così, avendo osservata sempre una (e talvolta due polari) e quasi sempre una zenitale (e spesso due). Per le altre fondamentali mi sono invece ristretto ad una zona come sopra.

Nè è da temere che col mio metodo gli errori di osservazioni delle fondamentali entrino a falsare i valori dei parametri così ottenuti. Infatti, spesso mi è accaduto di ripetere più volte per lo stesso corso o serata di osservazioni la determinazione delle costanti; per esempio: una prima volta servendomi di tutte le fondamentali osservate e formando altrettante equazioni di

(1) E quindi di grandezze molto diverse fra loro, donde il funesto influsso della differente equazione di splendore.

(2) Modificata per l'andamento di esso.

condizione; una seconda volta, escludendone alcune, sia perchè osservate in condizioni un po' diverse di cielo o d'illuminazione, sia perchè i residui della prima determinazione per quelle stelle erano rilevanti. Ebbene, con questa seconda, ed anche con qualche altra successiva determinazione, se i valori dei singoli parametri variavano sensibilmente, il risultato del loro insieme, cioè la somma delle correzioni da fare ai passaggi osservati, era di poco differente nei diversi casi. Ne segue che le altre stelle, per esempio quelle di Albany, ridotte con diversi sistemi di costanti, davano α apparenti molto vicine nei vari casi, cioè differenti appena per $0^s,01$ o al più $0^s,02$. Io domando se determinando le costanti con stelle di δ molto diverse fra loro si potrebbero garantire quantità così piccole in modo che variando le fondamentali osservate si ottenessero sempre risultati identici pei valori delle costanti.

Questo fatto dell'accordo completo delle costanti per le fondamentali e per le stelline (nel mio metodo) fa vedere che gli errori accidentali sulle osservazioni delle fondamentali, di cui tanto si temerebbe teoricamente per la determinazione delle costanti, perchè in condizioni poco favorevoli, sono invece connessi con quelli esistenti sulle osservazioni delle stelline, e che quindi fu prudente consiglio il mio, di determinare parametri per la riduzione delle stelline, mediante osservazioni di fondamentali di δ non molto diversa.

II. Le costanti determinate coi minimi quadrati mi servirono per ridurre i passaggi delle stelle non fondamentali da me osservate, cioè alcune scelte dal Catalogo di Albany dell'*Astronomische Gesellschaft*.

Le α del Catalogo di Newcomb furono ricondotte prima all'equinozio medio del principio dell'anno, mediante i dati del detto Catalogo e poi alla posizione apparente per la data rispettiva, mediante le costanti adottate nella Conferenza di Parigi nel 1896. Si tenne conto dei moti propri indicati da Newcomb. Queste riduzioni furono calcolate per le stelle non contenute nelle Effemeridi: *Connaissance des temps*, *Nautical Almanac* e *American Ephemeris*. Per le altre, le posizioni apparenti furono prese da dette Effemeridi.

Se queste α apparenti fossero esenti da errore, i residui

delle equazioni di condizione rappresenterebbero soltanto l'effetto degli errori di osservazione, che si traducono anche nella incertezza residuale su i valori delle costanti. Ma come non apparisce una causa per cui quegli errori di osservazioni debbano essere sempre nello stesso senso, così debbono ritenersi come accidentali, ed è questo appunto che mi autorizzò ad adoperare il metodo dei minimi quadrati per la determinazione delle costanti strumentali. Stando così le cose, per ogni stella osservata più volte i segni ed i valori assoluti dei residui non dovrebbero presentare nulla di sistematico. Se invece anche le posizioni di Newcomb hanno un piccolo errore, dovrebbe notarsi un sistema nei residui. Ora, per molte delle fondamentali da me osservate si notò una quasi costanza nel segno e nel valore assoluto del residuo nelle diverse date di osservazione. Come d'altra parte io ho osservato molte fondamentali in ogni sera, è da ritenere che i valori delle costanti determinati coll'insieme delle osservazioni sieno già molto vicini al vero, per la perequazione che si avvera nel metodo adottato, e che, ad ogni modo, dall'insieme dei residui relativi ad ogni stella si può con molto fondamento di verità dedurre l'errore delle α di Newcomb ricondotte all'epoca delle mie osservazioni. S'intende per quelle fondamentali per cui le differenze fra le mie α, dedotte dall'insieme dei residui, e quelle di Newcomb sono sensibili, avuto anche riguardo al numero delle mie osservazioni. Ciò non mi ha impedito di dare nel quadro finale le α per tutte le stelle da me osservate molte volte, lasciando agli astronomi il decidere, in base alla differenza: Boccardi—Newcomb, se la posizione data da Newcomb sia da correggere o no.

A me sta a cuore il dare i risultati delle mie osservazioni. Del resto, la parte principale del mio lavoro è quella che concerne le stelle di Albany. Qui do soltanto come un primo risultato le differenze fra le mie α e quelle di Newcomb.

Per citare qualche esempio analogo, il mio lavoro sarebbe qualche cosa di simile a quello di riduzioni delle lastre fotografiche del cielo quando si adoperano molte stelle *de repère*; oppure alla determinazione degli errori dei luoghi normali, quando si è giunti ad elementi assolutamente corretti di un'orbita.

III. Questo però suppone che per ogni stella le osservazioni

sieno state in gran numero. Ora, nel mio lavoro io ebbi principalmente in mira di estendere la lista delle fondamentali, scegliendo alcune stelle del Catalogo di Albany e riosservandole molte volte; ma in alcune ore di ascensione retta non furono più di 8 o 9 le osservazioni per le singole stelle, quindi per alcune delle fondamentali di Newcomb il numero delle mie osservazioni non fu tale che io potessi credermi autorizzato a dedurne correzione alcuna alle α date dal detto astronomo. Ne segue che nella lista di fondamentali, che riporto in ultimo, io do solo quelle per cui ebbi un numero sufficiente di osservazioni. In verità, anzichè attenermi al numero di queste io posi mente ai loro pesi. Questi furono da me dati in base all'accordo maggiore o minore fra i passaggi ai singoli fili e la loro media. Ogni stella (specialmente se fondamentale) fu osservata quasi sempre a tutti i 9 fili del reticolo. Ecco ora i criterî coi quali ho dato i pesi:

Differenza media dei fili osservati dalla loro media	Peso
da $0^s,00$ a $0^s,05$ escluso	4
„ 0 ,05 „ 0 ,08 „	3
„ 0 ,08 „ 0 ,13 „	2
$>0,13$	1

Quando mancavano 2 fili su i 9 ho diminuito di una unità il peso. Quando la stella venne osservata a meno di 5 fili ho dato sempre peso 1 alla sua osservazione. Per le circumpolari e per le zenitali ho adottato dei limiti più grandi.

Non sarà forse inutile l'osservare che il peso 1 non venne dato quasi mai, e che il peso 3 fu dato molto spesso, tanto per le osservazioni di stelline quanto per quelle delle fondamentali. Per queste ultime poi i pesi furono quasi sempre 3 o 4.

Questi pesi, come sembra evidente, e risulta altresì dai miei fogli di osservazione, sono strettamente connessi con lo stato del cielo; onde può dirsi che i pesi 4, 3, 2, 1 corrispondano rispettivamente alle indicazioni: osservazione *ottima*, *buona*, *mediocre*, *cattiva*. Nel quadro che do in ultimo ho indicato col sim-

bolo Σp la somma dei pesi per tutte le osservazioni di ciascuna stella. L'avere io tenuto conto dei pesi nel formare le medie sembrerà forse a taluno una fatica inutile. Io però ho pensato che dal momento che è invalso l'uso (e con ragione) di indicare la qualità delle osservazioni, un astronomo coscienzioso non può trascurarla nel calcolare i risultati definitivi. Nel quadro ora detto ho riferito soltanto le stelle per cui $\Sigma p > 30$; in altri termini, ho ritenuto su per giù le stelle di cui ho fatto almeno 10 buone *osservazioni*. Ma si vede in quel quadro che la media dei pesi è per una stella presso a poco 80.

IV. Il lasso di tempo abbracciato dalle osservazioni per ogni stella fu ordinariamente di 15 o 16 mesi (1). Solo per le stelle da 20^h a $23^h\ ^1/_2$, avendole io osservate in tre anni successivi, il periodo delle osservazioni è di 28 mesi tutt'al più. Questa circostanza del breve tempo in cui furono eseguite le osservazioni per ogni stella mi sembra non trascurabile, per molte ragioni che ognuno può vedere da sè. Io non potrei pretendere che una posizione di una fondamentale poggiata sopra osservazioni di un solo astronomo sia da preferirsi ad una posizione poggiata sopra un numero eguale di osservazioni eseguite da diversi astronomi, perchè nel primo caso è da temere qualche errore sistematico, mentre nel secondo si può sperare sopra un certo compenso fra gli errori sistematici dei diversi astronomi. Ma se nel primo caso le osservazioni furono eseguite in breve tempo, mentre le altre abbracciano molti e molti anni, io vedrei di non poco ridotta la superiorità della posizione dell'altro caso. Ad ogni modo, l'omogeneità anzi l'identità dello strumento, dell'osservatore, del metodo di osservazione e di riduzione, nonchè la costanza della equazione personale in breve tempo, produce una maggiore compattezza nell'insieme delle posizioni anche per le diverse stelle. Le posizioni di un catalogo eseguito in queste condizioni potranno sì avere una differenza dalle vere posizioni, ma questa differenza si ha diritto di ritenerla quasi costante; mentre i cataloghi poggiati su osservazioni di due o più astronomi avranno sempre una mancanza di omogeneità.

(1) La serie completa delle mie osservazioni (dopo alcuni giorni di addestramento) va dal 2 luglio 1904 al 29 novembre 1906.

A questo proposito sarà bene far notare che le mie osservazioni in ogni serata abbracciarono molte ore, fino a 6 o 7 qualche volta. Questo era necessario per realizzare il programma di osservare molte volte ogni stella e in un breve lasso di tempo. In verità è da ritenere che in sì lunghe serate o corsi di osservazione le condizioni atmosferiche e quelle fisiologiche dell'osservatore abbiano variato un poco: ma grazie alla incognita y da me introdotta nella determinazione delle costanti, cioè l'andamento dell'orologio (deducendolo dalle stesse osservazioni), su quella incognita, la quale per ogni stella ha per fattore il tempo trascorso dalla osservazione della prima fondamentale della serata all'istante in cui passa la stella considerata, su quella incognita, dico, vanno a rigettarsi tutte le variazioni funzioni del tempo, cioè quelle dovute alle condizioni atmosferiche e fisiologiche e quelle relative all'azimut ed alla collimazione. Infatti le mie fondamentali (salvo la polare e la zenitale) sono contenute in una zona non larga, e quindi i coefficienti di azimut e di collimazione per le diverse stelle sono vicini fra loro, e per le variazioni differenziali di dette costanti, si possono addirittura ritenere eguali.

Ora, sì per la natura del sistema di perequazione, col quale io fo concorrere tutte le stelle osservate in 4, 5, 6 ore alla determinazione delle costanti, e sì per avere io protratte le mie osservazioni per due anni e mezzo circa, senza interruzione sensibile, ne segue che le mie α costituiscono a così dire un sistema compatto ed omogeneo, il che non avrebbe luogo se avessi osservato anche molte altre stelle ma in 2 o 3 ore tutt'al più, interrottamente in molti anni. Gli astronomi mi comprenderanno, meglio che io non sappia spiegarmi.

Un altro vantaggio del mio modo di osservare è che mi sono ristretto ad una grandezza e mezzo, per mettermi al sicuro contro notevoli differenze nell'apprezzamento del passaggio, cioè contro la *equazione di splendore*. Ma di questa e di molte altre ricerche da me fatte mi occuperò in altra Memoria. È inutile il dire che il rugginoso circolo meridiano del nostro Osservatorio non ha il così detto *micrometro impersonale*.

V. Quanto poi alla precisione delle mie osservazioni, potrà aversene una idea dai saggi che riferisco dopo questa introdu-

zione, i quali non sono poi dalle stelle osservate meglio di tutte le altre.

Data la differente precisione delle α delle diverse stelle da me riferite nel quadro, è chiaro che i millesimi di 1^s si potrebbero sopprimere per le α aventi una somma di pesi minore di 40 o 50; ma ho voluto conservare quella 3^a decimale sia per l'uniformità, sia perchè la si è conservata in altri cataloghi di ben minore precisione.

Riguardo al *sistema* su cui sono poggiate le α da me date nel quadro, esso non è proprio quello di Newcomb, ma è questo sistema *corretto*; cioè la posizione dell'equinozio è quella di Newcomb, ma le α delle stelle sono affinate e perfezionate, in modo da far sparire le sensibili divergenze o contraddizioni che il metodo dei minimi quadrati ha messi in luce sulle α di Newcomb. La sorgente principale delle imperfezioni ora dette mi sembra si debba ricercare anzitutto nei moti proprî, perchè le α di Newcomb al 1875,0 sono certamente di grande precisione, non inferiore a quella del catalogo fondamentale di Auwers. Però quelle posizioni sono poggiate sopra osservazioni, in generale, molto lontane dal 1900, e i moti proprî dati da Newcomb sono in molti casi difettosi. Ne segue che le α di Newcomb pel 1900,0 e più pel 1905,0, epoca cui corrispondono le α del mio quadro, hanno precisione sensibilmente minore delle α al 1875,0.

In quest'ordine d'idee dirò di un tentativo da me fatto per avere pei moti proprî dei valori, che forse si avvicinano alla verità più di quelli dati da Newcomb. Partendo dal principio che le α di Newcomb al 1875,0 sono d'indiscutibile precisione, sì da potersi ritenere in esse, per zone vicine all'equatore e generalmente parlando, garantito quasi sempre il centesimo di secondo in tempo, e d'altra parte potendo io pure fare assegnamento sull'alta precisione delle mie α, le quali poggiano su di un sistema molto vicino a quello di Newcomb, ho stimato che, ridotte al 1905,0 le α di Newcomb con la sola precessione e variazione secolare, ecc., *senza i moti proprî*, e paragonatele con le mie anche al 1905,0, la differenza: Boccardi-Newcomb divisa per l'intervallo di tempo potesse darmi un buon valore del moto proprio. Poichè nelle α di Newcomb al 1875,0 si è tenuto conto del moto proprio e invece nel ridurre le mie os-

servazioni al 1905,0 non ebbi riguardo ad esso, l'intervallo di tempo ora detto è per ciascuna stella la differenza fra l'epoca media di tutte le osservazioni da me fattene ed il 1875,0. I moti propri dati nel quadro sono appunto ottenuti con questo procedimento. È però evidente che la 4ª decimale è data solo per uniformità con altri cataloghi.

S'intende che l'epoca media delle osservazioni di ogni stella venne da me calcolata con aver riguardo ai pesi delle singole osservazioni. Noterò pure che, percorrendo i saggi di osservazioni, dal semplice andamento delle α osservate in anni diversi, e ridotte all'istesso equinozio medio senza tener conto del moto proprio, questo viene in luce dalle sole mie osservazioni allorchè esso è di qualche entità. Così, per esempio, nelle osservazioni di 40 γ Capricorni, 3495 B. A. C., γ Piscium, 13 Ceti.

VI. Nel quadro dato in ultimo, che riassume i risultati delle mie osservazioni, la 1ª e la 2ª colonna contengono il *nome* e lo *splendore* delle stelle, com'è dato da Newcomb. La 3ª dà le *declinazioni approssimate* al decimo di minuto primo, avuto riguardo anche al moto proprio quando occorreva. La 4ª dà le *ascensioni rette* da me adottate in base alla discussione delle mie osservazioni. La 5ª e la 6ª dànno rispettivamente la *precessione annua* e la *variazione di questa*, in unità della 4ª decimale di 1^s, per + 1 anno. Ho adottato questo metodo perchè dà risultati un poco più precisi dell'altro, in cui si adopera la variazione secolare. Questa variazione per + 1 anno venne dedotta dalla differenza fra le precessioni annue al 1935,0 e al 1905,0. Sicchè a rigore quella variazione corrisponde al 1920,0; ma, salvo per le stelle circumpolari, si può con i miei dati della precessione trasportare le α del mio breve Catalogo ad un equinozio medio lontano di 60 e più anni, senza errare di $0^s,01$.

Il *moto proprio* dato nella 7ª colonna è quello che venne da me calcolato come ho detto al N. V. Vengono in seguito: l'*epoca media* delle mie osservazioni relative ad ogni stella, la *somma dei pesi* di tutte le osservazioni per ogni stella, e da ultimo le differenze fra le mie ascensioni rette e quelle di Newcomb e di Auwers per le medesime stelle.

Nota. — Mi è grato il dichiarare che il Dott. V. Fontana applicò a tutte le α apparenti delle fondamentali da me osservate la correzione necessaria per ricondurle agli equinozi medî del 1904,0, 1905,0 e 1906,0, e di questo aiuto io gli sono riconoscente. Devo anche al Dott. F. Chionio la determinazione delle costanti in poche serate o corsi di osservazione. Tutto il rimanente, a cominciare dalle osservazioni e rilievi del cronografo fino alle medie fatte 4 volte, è opera mia.

SAGGI DELLE

Nota. – Le α sono all'equinozio medio del 19 o, o del 1905,0 oppure del 1906,0.
il secondo numero è il giorno del mese. I piccoli numeri scritti dopo la cifra dei

Equinozio medio del 1904,0

15 Vulpeculae

1905	$19^h 57^m$
	s
6-28	8,84$_2$
7- 1	8,84$_4$
2	8,80
4	8,87$_1$
9-10	8,82$_4$
16	8,84$_4$
22	8,91$_4$
27	8,85$_2$
30	8,85$_1$
10- 7	8,82$_3$
12	8,86$_4$
22	8,78$_4$
23	8,86$_4$
27	8,90$_4$
28	8,83$_4$
31	8,86$_4$
11- 8	8,84$_4$
9	8,81$_4$
10	8,81$_4$
12	8,89$_2$
1906	
7- 6	8,81$_4$
14	8,87$_3$
16	8,86$_4$
18	8,86$_3$
21	8,83$_3$
27	8,89$_3$
9-22	8,86$_4$
23	8,73$_3$
27	8,87$_3$
28	8,89$_3$
11- 8	8,73$_3$
11	8,89$_4$
12	8,89$_3$

3 Aquarii

1904	$20^h 42^m$
	s
7- 2	40,33$_2$
5	40,41$_2$
8	40,31$_2$
16	40,40
8- 8	40,43$_2$
9- 4	40,39$_2$
11	40,37$_2$
15	40,39$_1$
18	40,41$_3$
20	40,44$_1$
22	40,40$_2$
27	40,44$_3$
10- 9	40,40$_1$
11- 3	40,39$_3$
5	40,40$_4$
11	40,45$_4$
1905	
6-28	40,40$_4$
7- 1	40,38$_4$
2	40,39$_4$
4	40,38$_4$
7	40,38$_2$
9	40,38$_4$
9-10	40,31$_4$
14	40,41$_4$
22	40,40$_3$
27	40,39$_3$
10-12	40,42$_4$
23	40,29$_2$
27	40,34$_3$
28	40,37$_4$
31	40,36$_3$
11- 8	40,40$_4$
9	40,39$_4$
10	40,43$_4$
12	40,46$_2$
1906	
7-14	40,27$_3$
16	40,37$_3$
18	40,35$_3$
21	40,34$_3$
27	40,44$_3$
9-27	40,42$_3$
28	40,35$_3$
11- 8	40,39$_4$
10	40,35$_3$
11	40,49$_4$
12	40,37$_4$

40 γ Capricorni

1904	$21^h 34^m$
	s
7- 5	46,43$_2$
8	46,44$_3$
16	46,45$_1$
8- 8	46,43$_2$
9-15	46,44
20	46,38$_1$
27	46,41$_4$
11- 3	46,44$_4$
5	46,41$_4$
24	46,42$_3$
26	46,44$_4$
1905	
6-28	46,39$_1$
7- 1	46,44$_3$
2	46,43$_1$
4	46,43$_1$
7	46,42$_2$
9	46,45$_1$
9-10	46,46
14	46,35$_1$
16	46,40$_4$
22	46,50$_3$
27	46,42$_2$
10-23	46,46$_2$
27	46,43$_1$
28	46,43$_4$
31	46,46$_3$
11- 8	46,40$_2$
9	46,39$_4$
10	46,39$_4$
12	46,44$_2$
1906	
9-21	46,35$_3$
11-28	46,49$_4$

3495 B. A. C. pass. infer.

1904	$22^h 15^m$
	s
7- 3	46,92$_2$
4	46,83$_2$
5	46,85$_3$
6	46,89$_2$
8	46,86$_2$
9	46,99$_2$
16	46,71$_4$
29	46,83$_2$
8- 8	46,86$_2$
9	46,87$_2$
12	46,87$_4$
9-15	46,85$_1$
20	46,86$_3$
27	47,00$_3$
10- 9	46,83$_2$
11- 3	46,91$_1$
5	46,88$_3$
26	46,72$_2$
12-11	46,69$_2$
13	46,72$_2$
14	46,72$_1$
16	46,74$_2$
17	46,71$_3$
18	46,76$_2$
1905	
6-28	46,73$_2$
7- 1	46,77$_3$
2	46,78$_1$
4	46,74$_4$
7	46,76$_2$
9	46,77$_2$
9-10	46,78$_3$
14	46,75$_2$
16	46,79$_3$
22	46,89$_3$
27	46,81$_4$
30	46,81$_3$

3495 B. A. C. (contin.)

1905	$22^h 15^m$
	s
10- 7	46,78$_1$
10	46,76$_2$
12	46,82$_1$
22	46,72$_1$
23	46,84$_2$
27	46,79$_2$
28	46,84$_2$
31	46,82$_1$
11- 8	46,77$_2$
9	46,76$_3$
10	46,75$_3$
12	46,82$_4$
1906	
9-21	46,47$_4$
22	46,58$_2$
27	46,79$_3$
28	46,76$_1$
11- 8	46,67$_2$
10	46,92$_4$
12	46,73$_4$
25	46,68$_3$
26	46,71$_3$
28	46,38$_3$
29	46,70$_4$

γ Piscium

1904	$23^h 12^m$
	s
7-16	11,36$_3$
29	11,41$_3$
8- 8	11,41$_3$
9	11,32$_2$
12	11,34$_3$
9-11	11,39$_2$
15	11,36$_2$
20	11,43$_2$
27	11,37$_4$
10- 9	11,42$_3$
11- 1	11,35$_3$
3	11,31$_4$
5	11,38$_2$
26	11,38$_4$
12- 9	11,39$_3$
13	11,40$_3$
14	11,36$_4$
16	11,41$_4$
17	11,39$_4$
18	11,36$_4$
20	11,39$_4$
23	11,43$_4$
24	11,39$_4$
1905	
1- 1	11,32$_2$
2	11,39$_4$
3	11,39$_3$
7- 9	11,41$_4$
10-12	11,45$_3$
23	11,41$_4$
27	11,44$_3$
28	11,44$_3$
1906	
11- 8	11,45$_3$
10	11,40$_3$
25	11,36$_3$
28	11,41$_3$
29	11,39$_3$

SERVAZIONI

ogni data, il primo numero indica il mese col suo numero d'ordine nell'anno
simi di 1″, in basso, rappresentano i pesi delle singole osservazioni.

				1905,0						1906,0	
3 Ceti		20 Ceti		6 Sextantis		δ Sextantis		91 υ Leonis		47 *k* Herculis	
4	0^h30^m	1904	0^h48^m	1904	9^h46^m	1904	10^h24^m	1904	11^h32^m	1906	16^h45^m
	s		s		s		s		s		s
9	$18,39_2$	8- 9	$6,08_3$	12-13	$26,83_2$	11-29	$39,26_4$	12-13	$5,09_3$	3-27	$45,47_4$
2	$18,39_2$	12	$6,03_2$	19	$26,84_4$	12-13	$39,25_2$	19	$5,08_4$	31	$45,48_4$
1	$18,39_2$	9- 2	$6,03_2$	22	$26,82_2$	19	$39,24_3$	22	$5,08_4$	4- 2	$45,47_3$
5	$18,33_2$	11	$6,02_2$	23	$26,87_4$	22	$39,29_2$	23	$5,09_3$	7	$45,52_3$
0	$18,39_2$	15	$6,09_2$	1905		1905		1905		5- 2	$45,45_4$
7	$18,37_2$	16	$6,11_1$	1- 8	$26,87_1$	1- 2	$39,22_2$	1- 2	$5,10_3$	3	$45,46_3$
9	$18,32_2$	27	$6,03_2$	26	$26,85_3$	8	$39,27_3$	8	$5,04_3$	13	$45,41_3$
1	$18,33_1$	11-26	$6,02_3$	2- 6	$26,81_3$	11	$39,21_4$	11	$5,09_3$	25	$45,55_2$
7	$18,48_4$	30	$6,04_4$	9	$26,84_4$	12	$39,15_4$	12	$5,07_4$	6- 3	$45,35_3$
0	$18,38_3$	12-11	$6,03_4$	10	$26,83_3$	26	$39,29_3$	26	$5,02_4$	4	$45,47_3$
3	$18,34_4$	17	$6,14_4$	12	$26,87_3$	2- 6	$39,19_3$	2- 6	$5,10_4$	6	$45,42_4$
5		20	$6,06_4$	14	$26,81_3$	8	$39,24_4$	8	$5,08_4$	17	$45,52_4$
1	$18,39_4$	23	$6,00_3$	16	$26,89_3$	10	$39,24_3$	10	$5,13_4$	23	$45,47_3$
2	$18,37_3$	1905		26	$26,89_4$	12	$39,20_4$	12	$5,20_4$	25	$45,45_4$
3	$18,35_4$	1- 1	$6,08_3$	28	$26,85_4$	14	$39,24_4$	14	$5,12_3$	26	$45,45_4$
4	$18,37_2$	2	$6,05_4$	3- 5	$26,84_4$	16	$39,23_4$	16	$5,06_4$	28	$45,39_4$
5	$18,42_1$	3	$6,07_4$	7	$26,89_2$	26	$39,23_4$	3- 5	$5,10_4$	7- 6	$45,43_4$
8	$18,38_3$	4	$6,10_4$	8	$26,83_3$	28	$39,29_4$	7	$5,15_4$	8	$45,42_4$
9	$18,43_4$	8	$6,07_4$	10	$26,81_4$	3- 5	$39,19_3$	8	$5,04_3$	13	$45,48_3$
0	$18,38_4$	9	$6,04_3$	13	$26,85_4$	7	$39,22_4$	17	$5,02_4$	14	$45,55_3$
1	$18,40_4$	10	$6,04_4$	17	$26,88_4$	8	$39,23_3$	26	$5,06_3$	16	$45,45_4$
2	$18,41_3$	11	$6,08_4$	25	$26,90_1$	10	$39,20_4$	30	$5,09_4$	18	$45,42_4$
27	$18,41_2$	12	$6,09_1$	26	$26,85_3$	13	$39,29_4$	4- 1	$5,14_4$	21	$45,43_4$
26	$18,42_4$	13	$6,06_4$	29	$26,85_3$	17	$39,22_3$	12	$5,14_4$	27	$45,46_4$
6		9- 4	$6,09_3$	30	$26,84_3$	18	$39,32_4$	17	$5,14_4$		
2	$18,36_3$	10-27	$6,13_4$	31	$26,84_3$	25	$39,22_4$	22	$5,19_4$		
7	$18,39_3$	12-26	$6,07_4$	4- 3	$26,93_3$	26	$39,21_4$	23	$5,04_3$		
9	$18,40_3$	1906		7	$26,87_2$	30	$39,26_4$	26	$5,16_4$		
0	$18,38_3$	1- 2	$6,09_4$	8	$26,84_2$	31	$39,26_4$	5- 7	$5,04_4$		
25	$18,39_3$	7	$6,08_3$	12	$27,01_2$	4- 1	$39,21_3$	18	$5,10_4$		
26	$18,36_4$	9	$6,08_4$	17	$26,86_4$	3	$39,20_3$	20	$5,07_4$		
28	$18,37_4$	14	$6,07_4$	22	$26,91_1$	7	$39,24_3$	21	$5,11_4$		
		11-25	$6,11_3$	23	$26,80_4$	22	$39,17_4$				
		26	$6,01_3$	11-10	$26,85_2$	23	$39,31_4$				
						24	$39,26_4$				
						26	$39,17_4$				
						5- 7	$39,25_4$				

1905,0

✶	Nome della Stella	Grandezza	Declinazione approssimata	Ascensione retta
			° ′	h m s
1	4165 B. A. C.	6,2	+88.13,6	0.14.24,11
2	13 Ceti	5,2	— 4. 6,9	0.30.21,445
3	147 B Piscium	5,7	+ 4.47,5	0.43.23,908
4	20 Ceti	4,9	— 1.39,6	0.48. 9,131
5	83 τ Piscium	4,7	+29.35,1	1. 6.25,523
6	89 *f* Piscium	5,3	+ 3. 6,9	1.12.53,837
7	98 μ Piscium	5,2	+ 5.39,3	1.25.12,375
8	106 ν Piscium	4,7	+ 5. 0,4	1.36.29,165
9	111 ξ Piscium	4,8	+ 2.43,1	1.48.38,150
10	78 ν Ceti	5,0	+ 5.10,7	2.30.53,264
11	96 κ Ceti	5,0	+ 3. 1,3	3.14.22,660
12	10 Tauri	4,4	+ 0. 6,0	3.32. 1,446
13	38 ν Tauri	4,0	+ 5.43,6	3.58. 6,099
14	1235 B. A. C.	6,7	+85.18,3	4. 6.32,47
15	48 ν Eridani	4,1	— 3.32,8	4.31.34,294
16	57 μ Eridani	4,1	— 3.25,7	4.40.45,106
17	22 o Orionis	4,6	— 0.28,5	5.16.54,732
18	158 H′ Cephei	6,4	+85. 9,0	5.31.27,99
19	66 Orionis	5,7	+ 4. 9,9	5.59.57,141
20	18 Monocerotis	4,8	+ 2.31,0	6.42.54,431
21	17 β Cancri	3,7	+ 9.28,7	8.11.21,856
22	4 δ Hydrae	4,2	+ 6. 2,1	8.32.37,682
23	18 ω Hydrae	5,6	+ 5.28,3	9. 0.58,353
24	22 θ Hydrae	3,8	+ 2.42,9	9. 9.25,368
25	29 υ Ursae majoris . . .	3,9	+59.29,2	9.44.14,504
26	6 Sextantis	5,9	— 3.47,9	9.46.26,853
27	3495 B. A. C. pass.° sup.e .	5,6	+84.44,1	10.15.56,19
28	29 δ Sextantis	5,2	— 2.15,1	10.24.39,235
29	58 *d* Leonis	5,0	+ 4. 7,7	10.55.39,298
30	74 φ Leonis	4,5	— 3. 7,9	11.11.49,936
31	91 υ Leonis	4,5	— 0.17,9	11.32. 5,095
32	60 σ Virginis	5,0	+ 5.58,2	12.12.48,411
33	82 *m* Virginis	5,3	— 8.13,4	12.36.37,488
34	92 Virginis	6,0	+ 1.30,9	12.51.37,400
35	93 τ Virginis	4,3	+ 2. 0,2	13.56.48,628
36	94 Virginis	6,8	— 8.26,3	14. 1.15,840

Precessione annua	Variazione per + 1 anno	Moto proprio	Epoca media	Σ pesi	Boccardi-Newcomb	Boccardi-Auwers
s		s			s	s
+ 0,361	+ 6,65	−0,0854	1904,92	32	−0,33	
3,0597	+ 0,15	+0,0261	5,43	87	−0,038	
3,0935	+ 0,67	+0,0496	5,28	104	+0,038	
3,0644	+ 0,30	+0,0003	5,28	103	+0,024	
3,2893	+ 2,39	+0,0051	5,30	68	−0,014	+0,012
+ 3,0952	+ 0,73	−0,0047	5,18	80	−0,042	
3,1205	+ 0,92	+0,0193	5,22	77	−0,017	
3,1204	+ 0,89	−0,0021	5,45	46	−0,019	+0,023
3,1014	+ 0,85	+0,0005	5,27	72	−0,032	+0,008
3,1465	+ 1,05	−0,0013	5,30	66	+0,035	
+ 3,1253	+ 0,95	+0,0177	5,23	36	−0,012	
3,0743	+ 0,79	−0,0153	5,33	36	−0,003	
3,1879	+ 0,90	+0,0004	5,61	36	−0,015	+0,038
17,391	+17,67	+0,0130	5,87	48	+0,02	+0,01
2,9957	+ 0,58	−0,0002	5,51	53	+0,009	+0,047
+ 2,9972	+ 0,51	+0,0010	5,49	55	−0,003	+0,040
3,0616	+ 0,92	+0,0006	5,39	55	+0,020	
18,702	+ 4,09	+0,0163	6,44	31	+0,11	
3,1698	+ 0,40	−0,0017	5,16	33	−0,009	−0,007
3,1301	− 0,08	−0,0020	5,44	31	+0,006	−0,006
+ 3,2599	− 0,72	−0,0031	5,20	34	+0,013	+0,029
3,1835	− 0,66	−0,0047	5,18	32	+0,004	
3,1626	− 0,68	−0,0016	5,17	44	−0,012	
3,1154	+ 0,05	+0,0085	5,72	56	−0,012	+0,042
4,3387	− 8,15	−0,0376	5,22	82	+0,022	+0,047
+ 3,0236	− 0,24	+0,0015	5,18	97	+0,012	+0,054
9,434	− 0,57	−0,0895	5,19	141,5	+0,073	
3,0512	− 0,45	−0,0034	5,16	127	−0,012	
3,0991	− 0,35	−0,0007	5,14	103	+0,010	
3,0572	+ 0,09	−0,0070	5,17	125	+0,006	
+ 3,0716	+ 0,05	+0,0004	5,17	115	+0,012	+0,059
3,0288	+ 0,29	−0,0018	6,37	41	−0,015	
3,1515	+ 1,02	−0,0622	6,36	43	+0,035	
3,0559	+ 0,72	−0,0034	6,35	40	−0,014	
3,0497	+ 0,63	+0,0001	6,36	40	−0,028	
3,1725	+ 1,16	−0,0008	6,36	38	+0,008	

(Continuaz.) **1905,0**

*	Nome della Stella	Grandezza	Declinazione approssimata	Ascensione retta
			° ′	h m s
37	25 ρ Bootis	3,7	+30.47,3	14.27.44,175
38	109 Virginis	3,7	+ 2.17,6	14.41.26,713
39	19 δ Librae	4,9	— 8. 8,5	14.55.53,674
40	3 Serpentis	5,4	+ 5.17,5	15.10.27,920
41	32 μ Serpentis	3,6	— 3. 8,4	15.44.39,694
42	50 σ Serpentis	4,8	+ 1.15,1	16.17.15,589
43	10 λ Ophiuchi	3,8	+ 2.11,5	16.26. 7,265
44	47 *k* Herculis	5,5	+ 7.24,7	16.45.42,548
45	58 ε Herculis	3,9	+31. 4,0	16.56.39,304
46	49 σ Ophiuchi	4,4	+ 4.13,4	17.21.48,018
47	62 γ Ophiuchi	3,8	+ 2.44,6	17.43. 7,740
48	67 Ophiuchi	4,0	+ 2.56,1	17.55.53,214
49	58 η Serpentis	3,4	— 2.55,4	18.16.23,665
50	6 H Scuti	4,1	— 4.51,0	18.42. 7,970
51	63 θ Serpentis	4,3	+ 4. 4,8	18.51.29,787
52	21 Aquilae	5,2	+ 2. 7,9	19. 8.55,29
53	55 η Aquilae	(var.)	+ 0.45,7	19.47.38,02
54	60 β Aquilae	3,9	+ 6.10,1	19.50.38,82
55	15 Vulpeculae	4,8	+27.29,4	19.57.11,31
56	63 τ Aquilae	5,6	+ 7. 0,6	19.59.29,93
57	69 Aquilae	5,2	— 3.12,1	20.24.41,13
58	3 Aquarii	4,6	— 5.22,6	20.42.43,55
59	8 α Equulei	4,1	+ 4.51,3	21.11. 4,52
60	22 β Aquarii	3,3	— 8.59,4	21.26.33,53
61	23 ξ Aquarii	4,8	— 8.16,8	21.32.41,73
62	40 γ Capricorni	3,8	—17. 5,5	21.34.49,74
63	16 Pegasi	5,1	+25.28,7	21.48.44,32
64	31 ο Aquarii	4,7	— 2.36,8	21.58.24,03
65	3495 B. A. C. pass.° inf.e .	5,6	+84.44,1	22.15.56,24
66	62 η Aquarii	4,1	— 0.36,4	22.30.28,48
67	73 λ Aquarii	3,9	— 8. 5,1	22.47.39,52
68	76 δ Aquarii	3,5	—16.19,9	22.49.36,57
69	4 β Piscium	4,6	+ 3.18,5	22.59. 2,53
70	6 γ Piscium	3,8	+ 2.45,8	23.12.14,44
71	8 κ Piscium	5,0	+ 0.44,1	23.22. 3,76
72	72 Pegasi	5,2	+30.48,1	23.29.14,28
73	λ Piscium	4,6	+ 1.15,4	23.37.11,91

Precessione annua	Variazione per +1 anno	Moto proprio	Epoca media	Σ pesi	Boccardi-Newcomb	Boccardi-Auwers
s		s			s	s
+2,5939	−0,13	−0,0073	1906,36	59	+0,016	+0,043
2,0378	+0,75	+0,0071	6,39	55	+0,007	+0,061
2,2052	+1,17	−0,0052	6,38	67	−0,003	
2,9810	+0,67	−0,0026	6,38	53,5	−0,028	−0,017
3,1334	+0,86	−0,0048	6,41	79	+0,033	+0,084
+3,0461	+0,67	−0,0109	6,42	89	+0,030	
3,0256	+0,59	−0,0024	6,42	89	−0,003	+0,047
2,9076	+0,48	+0,0023	6,44	85	−0,027	
2,2979	+0,31	−0,0024	6,43	77	+0,038	+0,058
2,9751	+0,38	−0,0008	6,43	70	−0,029	
+3,0086	+0,28	−0,0012	6,45	59	+0,012	+0,050
3,0039	+0,20	−0,0002	6,45	57	−0,031	+0,048
3,1405	+0,12	−0,0347	6,48	50	+0,106	+0,141
3,1839	−0,09	+0,0002	6,49	45	−0,065	
2,9795	−0,05	+0,0023	6,48	35	−0,012	+0,021
+3,0249	−0,15	+0,0006	6,48	31	+0,021	
3,0566	−0,31	+0,0001	6,61	32	−0,014	+0,017
2,9444	−0,15	+0,0028	6,10	91	+0,013	+0,052
2,4659	+0,13	+0,0051	6,22	115	+0,018	
2,9299	−0,20	0,0000	5,67	149	−0,031	
+3,1328	−0,53	+0,0009	6,70	36	−0,010	
3,1678	−0,66	+0,0001	5,65	146	+0,019	
2,9961	−0,26	+0,0036	6,15	67	+0,008	+0,034
3,1595	−0,70	+0,0015	5,69	132,5	+0,012	+0,065
3,1889	−0,83	+0,0071	5,87	37	−0,011	
+3,3157	−1,30	+0,0126	5,44	100	−0,008	
2,7273	+0,55	−0,0001	6,73	33	−0,019	+0,017
3,1033	−0,49	−0,0006	6,84	32	−0,053	
9,434	−0,57	−0,0867	5,56	141,5	+0,16	
3,0778	−0,28	+0,0049	5,87	30	−0,025	+0,011
+3,1313	−0,59	−0,0002	5,56	147	−0,012	+0,030
3,1907	−1,05	−0,0032	5,18	90	+0,004	+0,044
3,0521	+0,03	+0,0002	5,41	113	−0,018	
3,0591	+0,07	+0,0508	5,17	116	+0,021	+0,063
3,0696	+0,02	+0,0056	5,22	82	+0,002	+0,044
2,9658	+1,68	+0,0033	5,29	72	−0,006	+0,014
3,0695	+0,13	−0,0092	4,94	73	−0,006	

Una dimostrazione d'inseparabilità per radicali delle 27 rette di superficie cubica (*).

Nota del Prof. FRANCESCO GIUDICE.

Consideriamo l'equazione generale del 5° grado

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ed indichiamo con s_m la somma delle potenze m^{me} delle sue radici.

Dalla trasformatrice

$$y = \lambda x + \mu \left(x^2 - \frac{s_2}{5}\right) + \nu \left(x^3 - \frac{s_3}{5}\right) + \omega \left(x^4 - \frac{s_4}{5}\right)$$

venga essa trasformata nella

$$y^5 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0$$

dove p, q, r, s sono forme quaternarie dei gradi 2, 3, 4, 5 nelle variabili λ, μ, ν, ω. Se le rette della superficie cubica $q = 0$ si potessero separare per mezzo dell'aggiunta di convenienti radicali al campo ordinario di razionalità, siccome una di tali rette incontrerebbe in quattro punti la superficie quartica

$$p^2 = 5r,$$

si potrebbe ottenere che la trasformata fosse

$$y^5 + py^3 + \frac{p^2}{5} y + s = 0$$

e questa è soddisfatta se

$$y = a + b, \qquad ab = -\frac{p}{5}, \qquad a^5 + b^5 = -s,$$

(*) Per indicazioni: V. p. es., *Encyklopädie*. I; Leipzig, B. G. Teubner, 1898-1904; pag. 340, in nota 113, e pag. 515, 519, 551.

cosicchè, se quelle rette si potessero separare col mezzo indicato, allora l'equazione generale del 5° grado sarebbe risolubile per radicali, perchè dopo l'accennata separazione non occorrerebbe che la risoluzione d'un'equazione del 4° grado.

Il metodo seguito può suggerire facili dimostrazioni di proposizioni analoghe a quella presa ora in considerazione.

Genova, Novembre 1907.

Relazione sullo *Studio geologico* del Prof. F. SACCO, col titolo: *Il Gruppo del Gran Sasso d'Italia,* presentato per la pubblicazione nei volumi delle *Memorie.*

L'elevato gruppo montuoso, studiato dal prof. SACCO, è uno dei più interessanti fra quelli, che costituiscono l'Appennino Centrale, per i caratteri geografici e per la sua costituzione geologica, in dipendenza della varietà di terreni, spesso fossiliferi, e della tectonica, non di rado complessa per contorsioni e fratture.

Premessi pochi cenni generali e la bibliografia geo-paleontologica della regione, l'A. passa alla descrizione dei terreni, dai più antichi ai più giovani, indicando, per ciascun orizzonte geologico, i caratteri orografici, litologici ed economici, nonchè quelli paleontologici e stratigrafici.

L'*Infralias* (che più propriamente, per i suoi caratteri in questo caso, si direbbe *Retico*), di poco spessore e povero di fossili, porge poco campo ad osservazioni. Il *Lias* invece è più largamente descritto, anche per la ricchezza in fossili, già in gran parte conosciuti per opera del CANAVARI.

Più interessante ed esteso è il capitolo che tratta del *Cretaceo*, rappresentato da una serie molto potente, con fisionomia litologica e paleontologica assai diversa da luogo a luogo; calcarea o dolomitica, senza fossili o coi caratteri di un vero calcare di scogliera assai fossilifero. Riguardo alla cronologia ed alla paleontologia, è da notare il fatto, che l'A. crede di poter comprendere nel *Cretaceo* una estesa formazione ad ellipsactinie, caratterizzata da una fauna abbastanza ricca, a crinoidi, corallari e molluschi, che presenta stretta affinità, per non dire identità, con quella del *Giura superiore* e più precisamente colla fauna a facies titoniana di Stramberg e di Sicilia.

Noi riteniamo invece, che questi calcari a facies titoniana dimostrino la presenza del *Giura* fra la serie *liasica* e quella indubbiamente *cretacea*.

Pure assai esteso è il capitolo relativo all'*Eocene*, al quale l'A. attribuisce una serie straordinariamente estesa e potente, molto variabile di aspetto e di caratteri paleontologici nei varî orizzonti e nelle diverse regioni. I fossili vi abbondano quasi dovunque, ed è notevole come nella parte inferiore, commisti con fossili di tipo eocenico, compaiano spesso resti, più o meno incompleti, di chamacee e rudiste cretacee, indicandoci un esteso fenomeno di rimaneggiamento, verificatosi al principio del periodo eocenico. Anche in questo capitolo si nota un contrasto fra il riferimento cronologico ed i dati paleontologici, nel senso che l'A. attribuisce all'*Eocene* estese formazioni calcaree e marnose, le quali, per i fossili inclusivi, sarebbero piuttosto da riferire al *Miocene*, come altri infatti ritiene. Del resto è anche questa una questione aperta, alla quale l'A., pur seguendo un criterio geologico personale, porta, colle sue ricerche di fossili, un importante contributo coll'intento di avvicinarsi alla soluzione.

Nel capitolo relativo al *Miopliocene*, l'A. esamina i terreni del *Miocene* recente, estesissimi e potenti nella parte settentrionale ed orientale del gruppo montuoso, ma quasi senza fossili. Interessanti sono, oltre quelle delle solite lenti di gesso, le indicazioni di banchi o lenti estesissime di conglomerati fortemente cementati, spesso sollevati alla verticale, che attestano l'attività delle fluitazioni torrenziali, nelle regioni litoranee del Gran Sasso, verso la fine del periodo miocenico.

Pochi cenni sono dati del *Miocene* propriamente detto, che appare per poco all'estremità orientale della carta geologica. Invece è assai esteso il capitolo, che riguarda i terreni quaternarî, specialmente del *Plistocene*, che l'A. distingue in *diluviali* e *glaciali*. I primi sono molto estesi, colla solita facies conglomeratica, passante però spesso a forme travertinoidi, ed in generale si appoggiano su depositi marnoso-argillosi, i quali accennano ad una fase lacustre svoltasi in molte ed estese zone sul principio dell'èra quaternaria. Quanto ai depositi glaciali, riesce interessante il loro sviluppo, notevole in parecchi punti della regione elevata del Gran Sasso, ed il trovarsi alcuni di

essi molto in basso sul versante settentrionale, è prova che quivi i ghiacciai sono discesi sotto i 1000 m. Fra questi depositi di origine glaciale, l'A. nota la frequenza, caratteristica per l'Appennino, di quelli a carattere misto, di morena e di frana.

L'A. poco si estende riguardo all'*Olocene*, che comprende i depositi essenzialmente alluvionali o di falda della seconda metà del *Quaternario*; tuttavia si intrattiene a proposito dei fenomeni carsici, assai frequenti in queste regioni, e nelle masse calcari del Mesozoico e dell'Eocene e nei conglomerati quaternarî, diluviali e glaciali.

La *Memoria* in esame può dirsi la descrizione ragionata della carta geologica, alla scala di 1:100.000, della regione del Gran Sasso, che l'A. ha rilevato e che pure presenta per la pubblicazione. Per verità l'una e l'altra avrebbero potuto avere un opportuno complemento in qualche sezione geologica ed in qualche profilo o paesaggio geologico, che esprimessero anche graficamente i concetti dell'A. sulla tectonica della regione, e che mettessero in luce i più caratteristici rapporti tra la struttura geologica ed il modellamento oro-idrografico. Tuttavia la carta geologica e la descrizione relativa, nonchè le determinazioni paleontologiche, per le quali l'A. si valse anche del concorso di qualche collega, segnano un progresso nello studio e nella conoscenza geologica di questo importante nodo di montagne, specialmente per ciò che riguarda i terreni terziarî e quaternarî.

Noi quindi proponiamo l'accettazione della *Memoria* per la stampa nei volumi accademici.

G. Spezia.

C. F. Parona, *relatore*.

Relazione intorno alla *Memoria* presentata dalla Dott[a] Efisia Fontana, intitolata: *Ricerche intorno ad alcune specie del genere Elaphomyces Nees (E. variegatus, E. granulatus e affini).*

Il lavoro presentato dalla Dottoressa Efisia Fontana per la inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche, dal titolo: *Ricerche intorno ad alcune specie del Genere Elaphomyces Nees* (E. variegatus — E. granulatus e affini), si occupa dello studio di alcune Tuberacee, fra le più comuni e le più difficili ad essere scientificamente sistemate.

Disponendo l'A. di grande quantità di materiali, provenienti da località differenti, riuniti dal sottoscritto relatore, in un periodo di oltre un ventennio di ricerche, ha potuto meglio di qualsiasi altro studioso finora, riuscire a risultati i quali valgono a definire le molte controversie che duravano nella scienza intorno al valore sistematico delle specie che formano l'importante tribù degli Elafomiceti dei gruppi *variegatus* e *granulatus.*

Gli studi fatti dall'A. sopra i corpi fruttiferi di questi funghi portarono a conclusioni di non dubbio interesse, che qui riassumeremo brevemente:

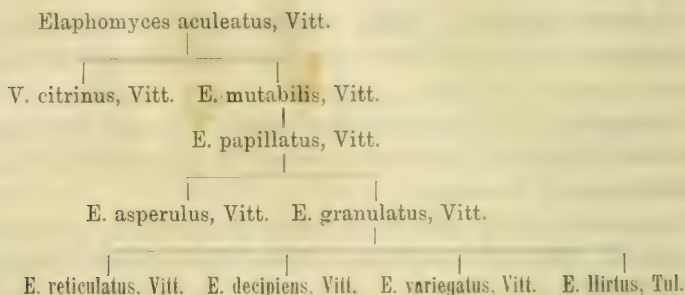
1° La massima importanza, per la sistemazione dei gruppi ricordati, spetta ai caratteri del *peridio*; mentre la *gleba* presenta, per le notevoli variazioni a cui va soggetta, durante lo sviluppo, caratteri poco costanti.

2° Scarso valore si deve concedere ai caratteri peridiali relativi al colore, alla consistenza del corpo fruttifero; mentre costanti si dimostrano quelli che hanno riguardo alla struttura sottile, alla conformazione degli strati peridiali interni ed esterni, considerati, sia dal punto di vista delle loro funzioni, sia da quella delle loro relazioni anatomiche.

3° Di notevole interesse sistematico risultarono inoltre la forma dei rilievi peridiali, lo spessore del peridio, la presenza delle venature e delle reticolature.

4° La *gleba* ha caratteri di poca costanza, variando assai quelli che si possono desumere dal colore, dall'abbondanza o non del capillizio, dei sepimenti, ecc.

5° Le dimensioni delle spore, i caratteri del loro perinio, risultarono pure notazioni di qualche valore.

Dall'esame comparativo di tutti questi caratteri e della loro subordinazione in ordine di importanza, l'A. assurge ad una classificazione delle forme studiate, la quale possiamo riassumere nello schema seguente:

Una esatta revisione delle questioni che riguardano l'intricata sinonimia, rischiara molti dubbi e spiega i molti errori, che gli A., i quali si occuparono troppo superficialmente di questo argomento, a partire dall'anno 1831, epoca della comparsa della celebre *Monografia* di Carlo Vittadini, avevano purtroppo introdotto nella scienza.

Lo studio della Signorina Fontana ha importanza speciale, per ciò che ha riguardo a tipi vegetali interessanti anche dal lato della pratica della silvicoltura, vivendo essi in relazioni simbiotiche colle radici di molte delle specie arboree dei nostri boschi.

Due tavole ben condotte illustrano abbondantemente i particolari studiati con esattezza e con un senso severo di critica.

Il lavoro a cui attese con amore la Signorina Fontana è stato eseguito con molta diligenza, ed i risultati (che uno di noi ha potuto seguire e controllare) sono tali da potersi ritenere definitivamente acquistati alla scienza.

Per queste ragioni noi crediamo di poter assolvere il compito che ci avete affidato, dichiarando il lavoro della signorina Fontana meritevole di essere accolto per la pubblicazione nei volumi delle *Memorie* accademiche.

C. F. Parona.

Oreste Mattirolo, *relatore*.

Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie (*).

Nota 2ª di BEPPO LEVI, a Cagliari.

I sistemi finiti di soluzioni razionali, razionalmente indipendenti.

Riferiti i punti di una cubica piana a coefficienti razionali ad un parametro ellittico, per modo che la somma dei valori del parametro in tre punti allineati sia nulla, a meno di periodi, si è già osservato nella Nota I (n. 11) che da un punto assegnato A si deduce razionalmente *soltanto un numero finito* di punti della cubica, sempre e solo quando il parametro ellittico del punto A è una parte aliquota d'un periodo.

Nella presente Nota vogliamo studiare un poco le condizioni in cui un tal punto può essere razionale e le configurazioni di punti razionali razionalmente dedotti da esso, sopra la cubica.

Incominceremo con alcune considerazioni generali sopra queste configurazioni. Nei n[i] 1-4 l'ipotesi che i punti in questione siano razionali passerà spesso in seconda linea. Sarà essenziale che si tratta di sistemi finiti di punti razionalmente dedotti da uno solo (conveniente) di essi.

1. — Se è finito il numero dei punti della cubica razionalmente dedotti da un suo punto A, sarà in particolare finito il numero dei punti dedotti da A con sole successive operazioni di tangenziali. Ma è facile vedere che la proposizione si inverte.

Una successione di tangenziali sopra la cubica può aver termine per due fatti: o perchè un ultimo punto ottenuto sia un

(*) Questa Nota fu presentata e approvata nell'adunanza 13 maggio 1906.

flesso, o perchè tale ultimo punto abbia per tangenziale uno dei punti ottenuti precedentemente.

Se α è la coordinata ellittica del punto A, quella del suo tangenziale sarà -2α: la successione dei tangenziali ottenuti a partire da A avrà dunque termine sempre e solo quando esiste un numero μ tale che, ω essendo un *conveniente* periodo del parametro ellittico ed Ω, Ω' due suoi periodi primitivi indipendenti,

$$(1) \qquad (-2)^\mu \alpha \equiv \frac{\omega}{3} \pmod{\Omega, \Omega'},$$

ovvero esistono due numeri μ, ν ($\mu \geq \nu$) (*) tali che

$$(2) \qquad (-2)^{\mu+1} \alpha \equiv (-2)^\nu \alpha \pmod{\Omega, \Omega'};$$

e la successione terminerà nel primo caso con un flesso, nel secondo col ritrovarsi il punto di parametro $(-2)^\nu \alpha$ (già incontrato precedentemente) come tangenziale del punto $(-2)^\mu \alpha$.

Nell'uno e nell'altro caso esiste un periodo ω' tale che

$$(1') \quad (-2)^\mu \alpha = \frac{\omega'}{3} \qquad \text{ovvero} \qquad (2') \quad (-2)^{\mu+1} \alpha = (-2)^\nu \alpha + \omega'$$

onde

$$(1'') \quad \alpha = \frac{\omega'}{(-2)^\mu . 3} \quad , \qquad (2'') \quad \alpha = \frac{\omega'}{(-2)^{\mu+1} - (-2)^\nu} .$$

Si osservi che si può sempre supporre ω' non divisibile per 2 $(\text{mod. } \Omega, \Omega')$, altrimenti la successione di tangenziali avente per origine A si sarebbe arrestata prima di giungere al punto di parametro $(-2)^\mu \alpha$.

Le (1''), (2'') dimostrano la proposizione annunciata che, *se la successione dei tangenziali derivanti da* A *è finita*, α *è parte aliquota del periodo*, ma ci permettono ancora alcune osservazioni notevoli.

Si ha

$$(-2)^{\mu+1} - (-2)^\nu = (-2)^\nu . \left[(-2)^{\mu-\nu+1} - 1\right] =$$
$$-(-2)^\nu . 3 . \left[(-2)^{\mu-\nu} + (-2)^{\mu-\nu-1} + \dots\right]$$

(*) Anzi $\mu \geq \nu + 2$ come tosto si vedrà.

e si noti che, poichè nell'ipotesi delle formole (2), (2'),... si suppone che il punto di coordinata ellittica $(-2)^\nu \alpha$ sia il tangenziale del punto $(-2)^\mu \alpha$, diverso da questo, non potrà a sua volta questo esser tangenziale del primo e sarà quindi $\mu - \nu > 2$: ne segue che l'ultimo fattore di $(-2)^{\mu+1} - (-2)^\nu$ non è mai 1, nè è multiplo di 2, perchè tutti i suoi termini sono pari tranne l'ultimo che è 1; e quindi *la successione dei tangenziali avente* A *per origine terminerà con un flesso sempre e solo quando il denominatore del parametro ellittico di* A *(per ipotesi parte aliquota di un periodo), all'infuori di* un *fattore 3 non possiede che fattori 2. Se invece tali altri fattori esistono, la successione di tangenziali ha termine perchè alcuni (gli ultimi) di essi si incatenano in poligono chiuso; i vertici di questo poligono abbracciano tutti i punti considerati* (*incluso* A) *ovvero no,* secondochè $\nu = 0$ ovvero $\nu > 0$, cioè *secondochè il detto denominatore non contiene ovvero contiene il fattor 2; e nella seconda ipotesi il numero dei punti che non sono vertici del poligono è precisamente uguale al numero di questi fattori 2.*

A maggiormente chiarire queste osservazioni è utile notare ancora che, quando la coordinata ellittica di un punto A è una parte aliquota d'un periodo, *si può sempre supporre che il denominatore possegga il fattor 3;* infatti i parametri ellittici di tutti i punti della cubica possono sempre alterarsi tutti per una stessa costante additiva: volendo conservata la condizione che sia nulla, a meno di periodi, la somma dei valori del parametro in punti allineati, tal costante dovrà essere una terza parte d'un periodo, del resto qualunque. L'aggiunzione d'una tal costante porterà nel denominatore il fattor 3, qualora non esistesse. Questa ipotesi sarà mantenuta nel seguito per evitare la ripetizione della stessa configurazione, sotto denominatori diversi.

2. — Indicheremo dunque in generale con $\alpha = \frac{\omega}{3t}$ la coordinata del punto A. La proposizione or ora enunciata circa la forma della successione dei tangenziali a seconda che t è potenza di 2 o non, ci conduce a distinguere le configurazioni di punti razionali d'una cubica, razionalmente dedotti da un punto A, in due tipi principali:

Configurazioni arborescenti corrispondenti a t potenza di 2. Porremo $t = 2^\nu$; il nome adottato sarà più completamente giustificato fra poco.

Configurazioni poligonali corrispondenti a t non potenza di 2. Distingueremo in configurazioni poligonali *semplici* o *miste* a seconda che t possiede oppur no fattori di 2.

Si presentano qui opportune alcune altre considerazioni generali.

3. — *Configurazioni arborescenti.* — È noto che sopra ogni cubica, se CBA sono punti tangenziali ciascuno del successivo, e se B_1 è un altro punto avente per tangenziale C, la retta AB_1 taglia ulteriormente la cubica in un punto A_1 avente pure per tangenziale B (*). La proposizione risulta ancora vera se, C essendo un flesso, si fa coincidere B_1 con C.

Supposto allora $t = 2^\nu$, si chiamino A, A_1, A_2, ..., A_ν i punti ottenuti con successive costruzioni di tangenziali, a partire da A: A_ν sarà flesso. La proposizione ricordata mostra che la retta $A_{\nu-2} A_\nu$ taglia la cubica in un punto $A'_{\nu-2}$ avente per tangenziale $A_{\nu-1}$. A sua volta $A_{\nu-3} A'_{\nu-2}$ taglierà la cubica in $A''_{\nu-3}$ avente per tangenziale $A_{\nu-2}$ e così via. Se i punti A, A_1, ..., A_ν sono razionali, tali saranno pure $A'_{\nu-2}$, $A''_{\nu-3}$, ..., onde risulta intanto che *ogni punto della catena* A, A_1, ... A_ν, *tolto il primo e l'ultimo, è tangenziale di un secondo punto razionale.* Si giustifica così il nome adottato per la configurazione.

La proposizione sopra ricordata è un caso particolare di quest'altra: che se tre punti sono allineati, anche i loro tangenziali sono allineati. Si supponga che uno dei tre punti sia un flesso: si avrà che i tangenziali di due punti allineati con un flesso sono ancora allineati con questo: cosicchè le congiungenti di A_ν con A, A_1, ..., $A_{\nu-2}$ taglieranno la cubica in punti A', A'_1; ..., $A'_{\nu-2}$ (quest'ultimo è il punto $A'_{\nu-2}$ precedentemente trovato) anch'essi razionali ed aventi ciascuno per tangenziale il successivo. La catena A', A'_1, ..., $A'_{\nu-2}$, $A_{\nu-1}$, A_ν ha comportamento affatto analogo a quello della catena A, A_1, ..., A_ν ed ogni suo punto diverso da A' sarà quindi tangenziale, oltrechè di quelli ora trovati, di un altro punto razionale. Ma

(*) La proposizione risulta immediatamente dalla rappresentazione per coordinate ellittiche. Se α, -2α, 4α, $-2\alpha + \frac{\omega}{2}$ sono le coordinate ellittiche di A, B, C, B_1, la coordinata di A_1 sarà $\alpha + \frac{\omega}{2}$.

con tutta generalità si può affermare che *ciascun punto razionale della configurazione il quale sia tangenziale di altri punti razionali e non sia il flesso* A_ν, *è precisamente tangenziale di 2 di questi punti e ad esso vengono a far capo due diversi rami della configurazione, fra loro completamente identici per quanto riguarda le relazioni di allineamento e di tangenzialità dei loro punti.* Per mostrarlo basta osservare che i due punti di coordinate ellittiche $\frac{k\omega}{3\cdot 2^\mu}$ e $\frac{k\omega}{3\cdot 2^\mu}\pm\frac{\omega}{2^\rho}$ ($\rho\leq\mu$, k dispari), i quali hanno lo stesso ρ-esimo tangenziale $\left(\text{il punto } (-1)^\rho \frac{k\omega}{3\cdot 2^{\mu-\rho}}\right)$ esistono o non esistono contemporaneamente (per una conveniente determinazione del segno $\pm$) nella configurazione considerata. Infatti si ha

$$\frac{\omega}{2^\rho}=\frac{\omega}{3\cdot 2^\rho}+\frac{\omega}{3\cdot 2^{\rho-1}};$$

si supponga quindi che si sappia esser punto razionale della cubica il punto K di coordinata $\frac{k\omega}{3\cdot 2^\mu}$, e siano A_i e A_{i+1} i punti della successione $A, A_1, \ldots, A_\nu$ di coordinate $(-1)^\epsilon\frac{\omega}{3\cdot 2^\rho}$, $-(-1)^\epsilon\frac{\omega}{3\cdot 2^{\rho-1}}$ (ϵ essendo uno conveniente dei numeri 0,1). Sia H il 3° punto di intersezione della cubica con la retta KA_i, la sua coordinata ellittica sarà $-\frac{k\omega}{3\cdot 2^\mu}-(-1)^\epsilon\frac{\omega}{3\cdot 2^\rho}$. Se quindi K' è il 3° punto d'intersezione della cubica colla HA_{i+1}, la sua coordinata ellittica sarà precisamente $-\left[-\frac{k\omega}{3\cdot 2^\mu}-(-1)^\epsilon\frac{\omega}{3\cdot 2^\rho}-(-1)^\epsilon\frac{\omega}{3\cdot 2^{\rho-1}}\right]=\frac{k\omega}{3\cdot 2^\mu}+(-1)^\epsilon\frac{\omega}{2^\rho}$, e K' sarà punto razionale.

4. — *Configurazioni poligonali.* — Se la coordinata ellittica del punto A è $\frac{\omega}{3t}$ (t primo con 2), le coordinate ellittiche dei punti ottenuti da A con successive determinazioni di tangenziali sono della forma $\frac{h\omega}{3t}$ dove h è primo con $3t$; tali punti sono vertici di un poligono di tangenziali che avrà p vertici, se p è il primo numero [divisore di $\varphi(3t)$ (*)] tale che

(*) Dove φ denota, secondo l'uso, la funzione d'Eulero.

$(-2)^p \equiv 1$ (mod. $3t$). Insieme con questi punti si potranno presentare altri punti razionali, razionalmente dedotti da essi, ricorrendo, oltre che alla determinazione di tangenziali, a quella di terze intersezioni della cubica con rette congiungenti due suoi punti razionali già noti. Fra questi punti potrà esistere un flesso [così per $t = 5, 7, 11, \ldots$ (*)], ovvero potrà non esistere (così per $t = 3, 9, \ldots$); potranno inoltre esistere punti vertici di altri poligoni di tangenziali; se la coordinata ellittica di un tale vertice è $\frac{h\omega}{3t}$, il nuovo poligono sarà analogo al primo per relazioni di allineamento e numero dei vertici, se h è primo con t; in caso contrario avrà minor numero di vertici. Avviene il primo caso per $t = 11$; il secondo per $t = 15$.

Se poi la coordinata ellittica del punto A è della forma $\frac{\omega}{3 \cdot 2^\nu \cdot t'}$ (t' primo con 2), soltanto dopo aver determinato, a partire da A, ν tangenziali successivi si giungerà ad un punto A_ν, di coordinata $(-1)^\nu \frac{\omega}{3t'}$, vertice di un poligono di tangenziali. Col punto A_ν si presenterà tutta una configurazione del tipo poligonale identica a quella che si otterrebbe nell'ipotesi che $\frac{\omega}{3t'}$ fosse la coordinata ellittica del punto A. Questa configurazione poligonale semplice può chiamarsi *nucleo* della configurazione poligonale mista che si sta considerando.

Riguardo alle configurazioni poligonali miste possono farsi considerazioni analoghe a quelle fatte per le configurazioni arborescenti. Si osservi anzitutto che, fissato un ρ arbitrario $\leq \nu$, esiste sempre un $\lambda \geq \rho$ e un h (sempre, ben inteso, numeri interi) tali che $3ht' + 1 = (-2)^\lambda$ (**). Il punto di coordinata ellittica $(-1)^{\nu-\rho} \frac{(3ht' + 1)\omega}{3t'2^\rho}$ si ottiene allora con successive costruzioni di tangenziali dal punto A di coordinata $\frac{\omega}{3 \cdot 2^\nu t'}$. Del

(*) Senza preoccuparci per ora della possibilità di queste configurazioni, in quanto esse siano costituite di punti razionali. — Di ciò ci occuperemo in una prossima nota.

(**) Si ricordi infatti che, pel teorema di Fermat, esiste un intero l tale che $(-2)^l \equiv 1$ (mod. t'); basterà prendere per λ un multiplo conveniente di l.

pari con successive costruzioni di tangenziali si ottiene da A il punto $(-1)^{\nu-\rho}\frac{\omega}{3\,.\,2^\rho t'}$.

Ciò posto, si supponga che appartenga alla considerata configurazione di punti razionali il punto di coordinata $\frac{k\omega}{3\,.\,2^\nu t'}$; apparterrà pure alla configurazione il punto di coordinata

$$\frac{k\omega}{3\,.\,2^\nu t'}+(-1)^{\nu-\rho}\left[\frac{\omega}{3\,.\,2^\rho t'}-\frac{(3ht'+1)\omega}{3\,.\,2^\rho t'}\right]=\frac{k\omega}{3\,.\,2^\nu t'}-(-1)^{\nu-\rho}\frac{h\omega}{2^\rho}$$

il quale si ottiene con due successive determinazioni di terze intersezioni della cubica con una retta congiungente due suoi punti razionali, cioè i punti $\frac{k\omega}{3\,.\,2^\nu t'}$, $(-1)^{\nu-\rho}\frac{\omega}{3\,.\,2^\rho t'}$ prima, e il punto ottenuto e $(-1)^{\nu-\rho}\frac{(3ht'+1)\omega}{3\,.\,2^\rho t'}$ poi.

Questa constatazione, analoga a quella con cui finisce il n. 3, ci permette di giungere, per le configurazioni poligonali miste, a conclusioni analoghe a quelle che, per le arborescenti, hanno fatto oggetto di detto n°.

Si supponga anzitutto che il punto $-\frac{2k\omega}{3\,.\,2^\nu t'}$ sia tangenziale d'un altro punto della configurazione e non appartenga al nucleo (cosicchè sarà $k=2^\mu k'$, $\nu-1>\mu>0$, k' dispari) e si assuma $\rho=1$; il punto $\frac{k\omega}{3\,.\,2^\nu t'}-(-1)^{\nu-1}\frac{h\omega}{2}$ avrà lo stesso tangenziale $-\frac{2k\omega}{3\,.\,2^\nu t'}$ del punto $\frac{k\omega}{3\,.\,2^\nu t'}$ (e non apparterrà al nucleo) cosicchè, *se un punto che nella successione di tangenziali preceda* (immediatamente o non) *un vertice del nucleo* (e non appartenga al nucleo), *è tangenziale d'un altro punto della configurazione, alla configurazione appartiene un altro punto razionale che ha lo stesso tangenziale.* Si faccia inoltre, più generalmente, $\rho\leq\nu-1$ e si supponga sempre che il punto $(-1)^\rho\frac{k\omega}{3\,.\,2^{\nu-\rho}t}$ non appartenga al nucleo (vale a dire che $\mu<\nu-\rho$); si otterrà che, pel fatto che il punto $(-1)^\rho\frac{k\omega}{3\,.\,2^{\nu-\rho}t}$ appartiene ad una successione di tangenziali della configurazione, non appartenenti al nucleo, *a questo punto vengono precisamente a far capo due rami arborescenti simili*

fra loro. Cosicchè, se un vertice del nucleo è estremo d'una successione di tangenziali, contenente più di un punto che lo preceda, esiste tutto un sistema di punti razionali di configurazione analoga ad una arborescente (e precisamente a quella che corrisponde al parametro ellittico iniziale $\frac{\omega}{3 \cdot 2^{\nu}}$, se $\frac{\omega}{3 \cdot 2^{\nu} t'}$ è il parametro iniziale della configurazione studiata) che conducono ad esso con successive determinazioni di tangenziali. Di più *un analogo sistema di punti razionali* (di identica configurazione) *esisterà in corrispondenza ad ogni altro punto del nucleo che si deduca razionalmente da esso.* Ciò consegue ancora immediatamente dalla formola trovata superiormente, per i punti che appartengono col punto $(-1)^{\nu-\mu} \frac{k'\omega}{3t'}$ (il quale appartiene al nucleo e deriva per una successione di tangenziali dal punto $\frac{k\omega}{3 \cdot 2^{\nu} t'}$) allo stesso poligono del nucleo, ove si lasci prendere a ρ valori $> \nu - \mu$: ma risulterà anche più facilmente per tutti i vertici del nucleo dalla osservazione seguente. Sia $\frac{k'\omega}{3 \cdot 2^{\nu-\mu} t'}$ la coordinata ellittica di un punto non appartenente al nucleo (sia quindi $\mu \leq \nu - 1$); si chiami A il punto di coordinata $(-1)^{\nu-\mu} \frac{k'\omega}{3t'}$ il quale apparterrà al nucleo ed è il primo punto del nucleo che derivi per costruzioni di tangenziali dal punto $\frac{k'\omega}{3 \cdot 2^{\nu-\mu} t'}$. Sia A_ρ un altro punto del nucleo che si deduca razionalmente da A e che potrebbe coincidere con A, e A_σ un punto che appartiene al nucleo in quanto appartiene alla AA_ρ (eventualmente, in quanto è tangenziale di A). A partire da A_σ si percorra il poligono del nucleo cui A_σ appartiene in senso inverso alla generazione (passando cioè da ciascun vertice a quello di cui esso è tangenziale) fino al vertice che rispetto ad A_σ, in tale ordine, ha lo stesso numero d'ordine che il punto di parametro $\frac{k'\omega}{3 \cdot 2^{\nu-\mu} t'}$ rispetto ad A. La congiungente il punto ottenuto col detto punto di parametro $\frac{k'\omega}{3 \cdot 2^{\nu-\mu} t'}$ taglierà la cubica in un punto razionale, non appartenente al nucleo (perchè vi appartiene il primo e non vi appartiene quest'ultimo punto); ed applicando replicatamente il fatto che i tangenziali di tre punti allineati sono allineati, si

mostra che una successione di tangenziali identica a quella che da $\frac{k'\omega}{3 \cdot 2^{\nu-\mu} t'}$ conduce ad A, conduce dal punto trovato a A_σ. (Potrebbe eventualmente A_σ esser flesso: il poligono di tangenziali da percorrersi si ridurrebbe ad A_σ medesimo).

Si ottiene in particolare che, *se il nucleo contiene un flesso, questo è estremo di un ramo appartenente alla configurazione identico alla configurazione arborescente corrispondente al parametro ellittico iniziale* $\frac{\omega}{3 \cdot 2^\nu}$.

5. — Si chiami generalmente di nuovo $\frac{\omega}{3t}$ il parametro ellittico del punto iniziale della configurazione: quando $t > 4$ la configurazione contiene almeno 4 punti distinti, tangenziali ciascuno del precedente. Siano $A\left(\frac{\omega}{3t}\right)$, $A_1\left(-\frac{2\omega}{3t}\right)$, $A_2\left(\frac{4\omega}{3t}\right)$, $A_3\left(-\frac{8\omega}{3t}\right)$. Assoggettando al più la cubica ad una trasformazione di coordinate a coefficienti razionali (questi punti essendo razionali), si può supporre che essi siano i tre punti fondamentali e il punto unità del triangolo di riferimento. E precisamente, essendo $x\,y\,z$ le coordinate omogenee, sia

$$A \equiv (1\ 0\ 0) \quad A_1 \equiv (0\ 0\ 1) \quad A_2 \equiv (0\ 1\ 0) \quad A_3 \equiv (1\ 1\ 1).$$

L'equazione della cubica diverrà

$$y^2(x-z) - yx[ax-(a+b)z] - bxz^2 = 0, \tag{1}$$

ovvero, in coordinate non omogenee (ponendo $z = 1$),

$$y^2(x-1) - yx[ax-(a+b)] - bx = 0. \tag{1'}$$

I coefficienti a e b saranno da scegliersi arbitrariamente razionali, e sempre si avrà una cubica razionale in cui i punti $A A_1 A_2 A_3$ sono ciascuno tangenziale del precedente: ma ad essi non corrisponderanno in generale i parametri ellittici indicati. Perchè ciò sia occorre che, proseguendo (ove occorra) nella costruzione di tangenziali successivi, a partire da essi, si giunga,

dopo un numero di operazioni determinato in funzione di t, all'arresto o per incontro di un flesso o perchè si ripassi per un punto precedente [ed il valore di t determina pure quale dei due casi si verifichi e nel secondo qual sia il punto per cui si ripassa (n. 1)]; esprimendo questi fatti analiticamente si ottiene così fra a e b una equazione determinata per ogni valore di t. Il problema nostro si riconduce così a sapere quando tale equazione ammetta soluzioni razionali, e quali esse siano. Noi passeremo ad esaminarlo pei primi valori di t.

Per quanto seguirà è utile intanto osservare che coi punti $AA_1A_2A_3$ si presenteranno sempre altri due punti razionali, nelle intersezioni della cubica colle rette AA_2 e A_1A_3. Hanno per coordinate: quello sulla AA_2

$$y = ax \quad z = 0; \tag{2}$$

quello sulla A_1A_3

$$x = y = \frac{b}{a-1} z. \tag{3}$$

Sistemi finiti di punti razionali a configurazione arborescente.

6. $t = 2^0 = 1$. - *Il punto* A *di coordinata ellittica* $\frac{\omega}{3}$ *è un flesso*: da esso non si deduce razionalmente alcun altro punto della cubica.

Esistono cubiche che hanno un solo punto razionale, necessariamente flesso. La più semplice è la cubica $x^3 + y^3 = 5z^3$ col flesso razionale $x = -y$, $z = 0$; essa è il primo elemento di una serie infinita di cubiche della forma $x^3 + y^3 = az^3$ che fornisce un teorema del P. Pepin (*).

Chiameremo *configurazione* $\mathfrak{A}(0)$ quella qui ottenuta, costituita da un flesso razionale d'una cubica, non tangenziale di altri punti razionali.

(*) Pepin. *Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de deux cubes rationnels.* Journal de Liouville, 1870.

7. $t = 2$. - *Il punto A di coordinata ellittica $\frac{\omega}{6}$ ha per tangenziale il flesso $-\frac{\omega}{3}$*: è questo l'unico punto dedotto razionalmente da A.

Esistono cubiche che hanno due soli punti razionali, un punto A *e il suo tangenziale, flesso.* Tale è la cubica $z^2x + \mu^2 zy^2 - 8x^3 = 0$ (μ intero) col punto razionale $x = y = 0$ e il suo tangenziale $x = z = 0$ (tangente di flesso $z = 0$). Se infatti si risolve l'equazione rispetto a z si ha:

$$z = \frac{-\mu^2 y^2 \pm \sqrt{\mu^4 y^4 + 32x^4}}{2x}.$$

Il radicando $(\mu y)^4 + 2(2x)^4$ non può esser quadrato per nessun valore intero di x, y per cui $x \neq 0$ (*).

Chiameremo $\mathfrak{C}(1)$ la configurazione di punti razionali ora descritta.

8. $t = 4$. - *Dal punto* A *di coordinata ellittica $\frac{\omega}{12}$ si deducono razionalmente i tangenziali successivi* $A_1 \left(-\frac{\omega}{6}\right)$, $A_2 \left(\frac{\omega}{3}\right.$ — *flesso*$\left.\right)$ *e il punto* $A' \left(-\frac{5\omega}{12}\right)$ *sulla retta* AA_2 *il cui tangenziale è ancora* A_1 (cfr. n. 3).

Esistono cubiche con 4 e 4 soli punti razionali formanti la configurazione ora descritta; tal configurazione si chiamerà $\mathfrak{C}(2)$.

Che esistano cubiche a coefficienti razionali su cui 4 punti razionali abbiano la distribuzione nominata, è evidente, ove si osservi che l'assegnare i punti AA_1A_2 colla condizione che ciascuno abbia come tangenziale il punto successivo e l'ultimo sia flesso, assegnando pure, volendo, la tangente in questo, equivale ad imporre alla cubica 7 sole condizioni. La razionalità di A' è conseguenza di quella dei punti assegnati.

Ma *esistono cubiche che non posseggono altri punti razionali che i 4 nominati*, come mostra l'esempio

$$xz^2 - 2(x^2 - y^2)z + 2x(x^2 - y^2) = 0.$$

(*) Eulero. El. d'algèbre. Vol. 2, Chap. 13. — Legendre. Th. d. nombres. IV Partie, § 1, p. 343.

Per questa cubica i punti indicati sopra con $A\,A'\,A_1\,A_2$ sono rispettivamente i punti $(1\,1\,0)$ $(1\,-1\,0)$ $(0\,0\,1)$ $(0\,1\,0)$; e su di essa non esistono altri punti razionali; si risolva infatti l'equazione rispetto a z; si ottiene

$$z = \frac{x^2 - y^2 \pm \sqrt{y^4 - x^4}}{x}.$$

Ora è noto (*) che non esistono interi che rendano $y^4 - x^4$ quadrato esatto, altro che quelli per cui $x = 0$ ovvero $x = \pm y$ (cui corrispondono i punti $A\,A'\,A_1\,A_2$ sopra indicati).

9. $t = 8$. - *Dal punto* A *di coordinata ellittica* $\frac{\omega}{24}$ *si deducono razionalmente i tangenziali successivi* $A_1\left(-\frac{\omega}{12}\right)$, $A_2\left(\frac{\omega}{6}\right)$, $A_3\left(-\frac{\omega}{3}\text{: flesso}\right)$ *ed i punti* $A'\left(\frac{7\omega}{24}\right)$ *sulla retta* AA_3, $A'''\left(-\frac{5\omega}{24}\right)$ *sulla retta* AA_2, $A'_1\left(\frac{5\omega}{12}\right)$ *sulla retta* A_1A_3, $A''\left(-\frac{11\omega}{24}\right)$ *sulla retta* AA'. A' *e* A''' *hanno per tangenziale* A'_1, *e questo ha per tangenziale* A_2: A'' *ha per tangenziale* A_1. *Ciascuno dei punti* A', A'', A''' *è quindi origine d'una poligonale di tangenziali simile a quella che incomincia in* A *e tutte terminano al medesimo flesso* A_3 (cfr. n. 3).

Esistono cubiche a coefficienti razionali su cui una tal configurazione è costituita da punti razionali.

Invero è condizione necessaria e sufficiente pel presentarsi di tal configurazione che in una cubica (1) (n. 5) il punto $A_3 = (1, 1, 1)$ sia un flesso (cfr. n[i] 1. 3). Ora esprimendo che $(1, 1, 1)$ soddisfa all'equazione dell'hessiano di (1) si ha l'equazione

$$b\,(b + a^2 - 3a + 2) = 0.$$

Dovendosi escludere la soluzione $b = 0$ cui corrisponde la cubica degenere $y\,(x - z)\,(y - ax) = 0$, si ottiene

$$b = -(a-1)(a-2) \qquad (a \neq 1, 2), \tag{4}$$

(*) LEGENDRE. Th. des nombres. — Encyklopädie d. math. W. I C 1. Bd 1_2 - p. 573.

condizione che si soddisfa evidentemente in numeri razionali, assumendo arbitrariamente (razionale) la a.

Chiameremo $\mathfrak{C}(3)$ la configurazione di punti razionali ora analizzata.

10. $t = 16$. - Se ad un punto della cubica appartiene il parametro $\frac{\omega}{48}$, i tangenziali successivi dedotti da esso hanno per parametri rispettivi $-\frac{\omega}{24}$, $\frac{\omega}{12}$, $-\frac{\omega}{6}$, $\frac{\omega}{3}$ e quest' ultimo è un flesso. Dimostreremo che *una tal successione di punti sulla cubica razionale non può essere razionale.* Attenendoci strettamente alla rappresentazione adottata nel n. 5, l'ipotesi presente equivarrebbe a questa che il tangenziale del punto A_3 sia un flesso. Ma se la successione nominata di tangenziali, potesse essere costituita di punti razionali, mediante una trasformazione di coordinate a coefficienti razionali si potrebbe portare i punti (1 0 0) (0 0 1) (0 1 0) (1 1 1) rispettivamente nei punti di coordinate ellittiche $-\frac{\omega}{24}$, $\frac{\omega}{12}$, $-\frac{\omega}{6}$, $\frac{\omega}{3}$, l'ultimo dei quali è un flesso. L'equazione della cubica assumerebbe allora la forma (1) colla condizione (4) (n. 9) e, conservando pei punti nominati le notazioni dei n[i] 5, 9, l'ipotesi presente equivarrebbe a supporre che il primo di essi, A, sia tangenziale di un punto razionale P.

Dalle considerazioni generali del n. 3 risulta che A e A_1 sono allora tangenziali rispettivamente di altri punti razionali P' e A'' allineati col punto P. Si osservi che per lo stesso punto A'' passerà pure la congiungente gli altri due punti di contatto della cubica colle tangenti da A (diversi dai punti P e P' e non necessariamente razionali); questa retta insieme colla PA'' costituisce quindi una conica degenere appartenente al fascio di coniche avente per punti base i punti di contatto delle tangenti alla cubica da A. E se, come qui si vorrebbe supporre, P e P' sono razionali, una e quindi entrambe le rette di cui si compone questa conica debbono essere razionali. Così, affinchè esista la configurazione di punti razionali che qui si suppone, è necessario: 1° che nel nominato fascio la conica (degenere) passante per A'' (e che lo avrà come punto doppio) si componga di due rette razionali; 2° che una di queste due rette tagli ulteriormente la cubica in due punti razionali.

Al nominato fascio di coniche appartiene la conica polare del punto $A \equiv (1\ 0\ 0)$ rispetto alla cubica (1); cioè [a causa della (4)] la

$$(5) \qquad y^2 - y\,[2ax + (a^2 - 4a + 2)\,z] + (a-1)\,(a-2)\,z^2 = 0$$

ed appartiene pure la conica che si ottiene sottraendo da (1) la (5) moltiplicata per x, e sopprimendo quindi il fattor y che viene a comparire nel 1° membro della differenza; cioè la

$$(6) \qquad yz - ax^2 = 0\,.$$

Per ottenere le coordinate del punto A'' basta ricordare le coordinate di A'_1 già ottenute al n. 5, che, tenendo conto della condizione (4), divengono $[1, 1, -(a-2)]$, e tener presente l'allineamento dei punti $A\,A'_1\,A''$: la retta che li contiene ha per equazione $y + (a-2)\,z = 0$. Tenendo sempre presente la (4) si trova come terza sua intersezione colla cubica (dopo A, A'_1) il punto $A'' \equiv (1, -a\,(a-2), a)$. L'equazione della conica del fascio (5) (6) passante A'' risulta allora

$$y^2 - 2axy + 2\,(a-1)\,yz - a^2\,(a-2)\,x^2 + (a-1)\,(a-2)\,z^2 = 0$$

ossia

$$[y - a\,(1 + \sqrt{a-1})\,x + (a - 1 + \sqrt{a-1})\,z]$$
$$[y - a\,(1 - \sqrt{a-1})\,x + (a - 1 - \sqrt{a-1})\,z] = 0\,.$$

Le due rette che la compongono saranno razionali quando sia razionale $\sqrt{a-1}$. Per la nostra cubica sarà dunque

$$a - 1 = c^2 \qquad a = c^2 + 1 \qquad b = -\,c^2\,(c^2 - 1)$$

e le due rette nominate diverranno

$$(7) \qquad y - (c^2 + 1)\,(1 \pm c)\,x + (c^2 \pm c)\,z = 0\,.$$

Ammettendo che c possa essere positivo o negativo si potrà sopprimere il doppio segno in questa equazione, e dall'equazione risultante considerar rappresentata una qualunque delle due

rette: noi fisseremo di scegliere il segno inferiore. Le intersezioni della retta (7) colla cubica, fuori di A'' saranno allora determinate dall'equazione

$$(c^2+1)\,x^2+(c^2+1)\,(c-1)\,xz+c\,(c-1)\,z^2=0$$

e saran punti razionali se sarà quadrato il discriminante di questa:

$$\Delta=(c^2+1)\,(c-1)\,[(c^2+1)\,(c-1)-4c]=$$
$$=(c^2+1)\,(c-1)\,(c^3-c^2-3c-1).$$

Si ponga $c=\frac{d}{e}$, d ed e primi fra loro, $e>0$; dovrà risultare quadrato esatto il prodotto

$$(d^2+e^2)\,(d-e)\,(d^3-d^2e-3de^2-e^3)=$$
$$=(d^2+e^2)\,(d-e)\,(d+e)\,(d^2-2de-e^2).$$

Ora, si vede tosto che, dovendo essere primi fra loro d ed e, saranno pur tali a due a due i quattro fattori di questo prodotto, oppure avranno il comune divisore 2. Nella prima ipotesi debbono essere essi stessi, individualmente quadrati; nella seconda ipotesi, d ed e dovranno essere dispari e quindi $d^2+e^2\equiv d^2-e^2-2de\equiv 2 \pmod{4}$, cosicchè saranno quadrati $\frac{d^2+e^2}{2}$, $\frac{d^2-e^2-2de}{2}$, d^2-e^2: i primi due dispari, l'ultimo pari.

Nella prima ipotesi dovrebbe essere quadrato $d^4-e^4=(d^2+e^2)\,(d+e)\,(d-e)$; ora è noto che non esistono numeri interi di cui la differenza delle quarte potenze sia un quadrato (la soluzione $e=0$ essendo già esclusa per ipotesi); tale ipotesi è dunque assurda.

Nella seconda ipotesi, indicando con i l m numeri interi, dovrà essere

$$(8)\qquad d+e=2i^2\qquad d-e=2l^2\qquad d^2-2de-e^2=2m^2;$$

i, l, m saranno primi fra loro a due a due e con d ed e. L'ultima equazione può scriversi:

$$2d^2-(d+e)^2=2d^2-4i^4=2m^2$$

onde

$$d^2-m^2=2i^4.$$

$d-m$ e $d+m$ debbono quindi esser pari, e 2 sarà il loro m.c.d.: per soddisfare a questa equazione dovrà dunque porsi (ammettendo per m valori negativi)

$$d-m=2\alpha^4 \qquad d+m=16\beta^4 \qquad i=2\alpha\beta$$

$$\alpha,\ \beta \text{ primi fra loro;} \qquad \alpha\equiv 1 \ (\text{mod. } 2)$$

onde

$$d=\alpha^4+8\beta^4 \qquad d+e=2i^2=8\alpha^2\beta^2 \qquad e=8\alpha^2\beta^2-\alpha^4-8\beta^4$$

$$d-e=2\alpha^4+16\beta^4-8\alpha^2\beta^2$$

Per la seconda delle equazioni (8) dovrà quindi porsi

$$\alpha^4+8\beta^4-4\alpha^2\beta^2=l^2 \tag{9}$$

da cui, successivamente

$$4\beta^2(2\beta^2-\alpha^2)=l^2-\alpha^4$$

$$l,\ \alpha \text{ primi fra loro,} \qquad l\equiv\alpha\equiv 1 \ (\text{mod. } 2)$$

$$l-\alpha^2=2p^2q \qquad l+\alpha^2=2r^2s \qquad \beta=pr \qquad 2\beta^2-\alpha^2=qs$$

$$p,\ q,\ r,\ s \text{ primi fra loro a due a due, con } l \text{ e con } \alpha$$

$$\alpha^2=r^2s-p^2q=2p^2r^2-qs \tag{10}$$

$$q(s-p^2)=r^2(2p^2-s).$$

q ed r^2 son primi fra loro e così pure, per esser primi fra loro p ed s, $s-p^2$ e $2p^2-s$; quest'uguaglianza potrà dunque solo soddisfarsi per

$$q=2p^2-s\,, \qquad r^2=s-p^2$$

da cui

$$s=r^2+p^2 \qquad q=p^2-r^2$$

e, per la (10),

$$\alpha^2=r^4+2p^2r^2-p^4\,.$$

Ora, se p è dispari, il secondo membro di questa equazione è $\equiv -1$ o 2 (mod. 4) secondochè r è pari o dispari; non potrà dunque mai rappresentare un quadrato. Si supponga dunque $p=2t$; l'equazione diviene

$$\alpha^2=r^4+8t^2r^2-16t^4$$

da cui successivamente, ammettendo per α, χ, σ valori negativi, e ricordando che α, r e p sono primi fra loro a due a due, e quindi son pure tali α, r, t e r è dispari,

$$\alpha^2 - r^4 = 8t^2(r^2 - 2t^2)$$

$$\alpha - r^2 = 2\pi^2\chi \qquad \alpha + r^2 = 4\rho^2\sigma \qquad t = \pi\rho \qquad r^2 - 2t^2 = \chi\sigma$$

π, χ, ρ, σ primi fra loro a due a due; χ, σ dispari

$$r^2 = 2\rho^2\sigma - \pi^2\chi = 2\pi^2\rho^2 + \chi\sigma$$

$$2\rho^2(\sigma - \pi^2) = \chi(\sigma + \pi^2).$$

Dovendo χ essere dispari, sarà pari $\sigma + \pi^2$ e quindi anche $\sigma - \pi^2$; allora il primo membro possiede il fattor 4 e per 4 deve esser divisibile $\sigma + \pi^2$, onde $\sigma - \pi^2$ non è divisibile per 4. Segue

$$4\rho^2 = \sigma + \pi^2 \qquad 2\chi = \sigma - \pi^2$$

$$\sigma = 4\rho^2 - \pi^2 \qquad \chi = 2\rho^2 - \pi^2$$

$$r^2 = \pi^4 - 4\pi^2\rho^2 + 8\rho^4$$

equazione della medesima forma della (9), ove β tiene il posto di ρ e α di π. Dalle posizioni:

$$\beta = pr \qquad p = 2t = 2\pi\rho$$

si rileva ora che

$$|\beta| \geq |p| > |\rho|.$$

Se dunque la (9) potesse essere soddisfatta per un certo valore di β, sarebbe pure per un altro minore in valore assoluto (*), e così dovrebbe esser soddisfatta per valori assoluti di β interi, indefinitamente decrescenti; assurdo.

Ne segue l'impossibilità annunciata al principio del numero.

11. — Riassumendo: *le sole configurazioni arborescenti di punti razionali, razionalmente deducibili tutti da uno di essi, che*

(*) Si noti d'altronde che β, p, ρ possono sempre supporsi essi medesimi positivi.

possono esistere sopra una cubica [*a coefficienti razionali* (*)] *sono quelle che corrispondono ai valori di* t (n. 2):

$$t = 2^{\nu}, \qquad \nu < 4.$$

Esse contengono rispettivamente: per $\nu = 0$, *1 punto; per* $\nu = 1$, *2 punti; per* $\nu = 2$, *4 punti; per* $\nu = 3$, *8 punti.*

12. — Ma una configurazione arborescente potrebbe possedere punti razionali per così dire *accidentali*, oltre quelli enumerati nella descrizione generale del n. 3 e in quelle particolari dei n[i] 6-9, in quanto potrebbe uno dei punti razionali già incontrati essere tangenziale di altri punti razionali oltre quelli già riconosciuti in detti numeri. *Se tal fatto si verifica per un punto di una successione di tangenziali (che non potrà essere l'origine della catena), tutti i punti della successione, tolta sempre l'origine, sono essi stessi tangenziali di quattro differenti punti razionali (uno dei quali, in particolare, coincidente col punto medesimo, quando questo è il flesso).*

Dal n. 3 risultava infatti già che ogni punto della successione, esclusa l'origine, è tangenziale di due punti razionali: se allora esso è tangenziale di un terzo punto razionale, anche il quarto punto di contatto delle tangenti da esso alla cubica sarà razionale. Si supponga inoltre che un punto A_{μ} $(\nu \geq \mu \geq 1)$ di una delle successioni di tangenziali descritte al n. 3, sia tangenziale, oltrechè dei punti razionali $A_{\mu-1}$, $A'_{\mu-1}$, ancora dei punti $B_{\mu-1}$, $B'_{\mu-1}$: per una proposizione già ricordata al n. 3, ciascuna delle congiungenti $A_{\mu-1}$ coi punti $A'_{\mu-1}$, $B_{\mu-1}$, $B'_{\mu-1}$ taglia ulteriormente la cubica in un punto razionale, diverso da A_{μ} ed avente lo stesso tangenziale $A_{\mu+1}$ di A_{μ}. Se $\mu < \nu$, per modo che A_{μ} non sia flesso, i tre punti così ottenuti sono distinti fra loro e dai punti da cui furono dedotti. Così ogni punto seguente A_{μ} nella successione è tangenziale di 4 punti razionali. Si supponga poi che $A_{\mu-1}$ sia a sua volta tangenziale di un punto razionale $A_{\mu-2}$ (cioè che $\mu > 1$): ciascuna delle

(*) Si noti che tosto che il numero dei punti della configurazione è > 4, la cubica ne è completamente determinata e la razionalità dei suoi coefficienti è conseguenza della razionalità dei punti medesimi.

rette $A_{\mu-2} A_{\mu-1}^{(1)}$, $A_{\mu-2} B_{\mu-1}$, $A_{\mu-2} B'_{\mu-1}$ taglia ulteriormente la cubica in un punto razionale avente per tangenziale $A_{\mu-1}$, cosicchè ogni punto della successione di tangenziali che preceda A_{μ}, senza essere il primo punto, è ancora tangenziale di 4 punti razionali.

Si tenga ancora presente la costituzione generale delle configurazioni arborescenti, per cui in esse esistono precisamente ν successioni di tangenziali facenti capo a ν origini diverse, ma confluenti gradualmente fino a concorrere nell'unico flesso A_{ν}; la proposizione ora dimostrata, applicata discendendo lungo una catena di tangenziali fino ad A_{ν}, e risalendo da esso lungo tutte le catene, ci permette d'affermare che *tutti i punti di una stessa configurazione arborescente, tolte le* ν *origini, sono o non sono insieme tangenziali di quattro differenti punti razionali. Ma si noti che la stessa proprietà non può più competere ai nuovi punti razionali che per tal modo s'incontrano sulla cubica.*

Si ricordi infatti che se per un punto d'una cubica reale passano quattro tangenti reali alla cubica, la cubica si compone di 2 rami, il punto considerato appartiene al ramo dispari (il ramo pari non potendo contenere tangenziali di punti reali) e due dei punti di contatto delle tangenti da esso appartengono al ramo pari. Questi non sono tangenziali di punti reali e quindi, *a fortiori*, non di punti razionali. Se in particolare il punto considerato è un flesso, uno solo dei punti di cui esso è tangenziale può, a sua volta, esser tangenziale d'un punto razionale.

13. — Una configurazione arborescente non può evidentemente presentare punti razionali accidentali che quando essa appartenga ai tipi $\mathfrak{C}(1, 2, 3)$. È chiaro inoltre da quanto precede che ogni cubica in cui questa particolarità si presenti ha birapporto razionale e rientra quindi nello studio contenuto nei n[i] 15 e seg. della Nota I. Possiamo allora scrivere l'equazione della cubica nella forma [(2) della Nota I, n. 16]:

$$a_1 x z^2 + a_2 y (y - k_1 x)(y - k_2 x) = 0 : \tag{11}$$

la cubica possiede i punti razionali $(0\ 0\ 1)$ flesso, $(1\ 0\ 0)$, $(1\ k_1\ 0)$ $(1,\ k_2\ 0)$ di cui esso è tangenziale.

Si ponga $a_1 = a_2 = k_1 = -k_2 = 1$; l'equazione [(18), n. 17, Nota I] a cui si riconduce la risoluzione in numeri interi della (11) diviene allora

$$\varphi^2 = \pm (\theta^4 - \xi^4)$$

e, come già fu ricordato più volte, questa equazione non ammette soluzioni che per $\theta = 0$ o $\xi = 0$ o $\theta = \pm \xi$; riesaminando le notazioni del citato n. 17, nota I, si vede che a tali soluzioni corrispondono i punti razionali già enumerati. Segue che *esistono cubiche, per es. la*

$$xz^2 + y(y - x)(y + x) = 0$$

che posseggono un flesso razionale, tangenziale di 4 punti razionali e non posseggono altri punti razionali.

14. — Si chiede però se nella cubica (11) uno dei punti di contatto delle tangenti dal flesso possa essere tangenziale di un punto razionale, per una conveniente scelta dei coefficienti. Già nel n. 12 si è mostrato che esiste al più un tal punto, e si può fissare (previo, occorrendo, un cambiamento di coordinate) ch'esso sia il punto (1 0 0). I punti di contatto delle tangenti da questo punto alla cubica (11) sono determinati dalle soluzioni comuni alle due equazioni

$$a_1 z^2 - a_2 y \left[(k_1 + k_2)\, y - 2k_1 k_2 x\right] = 0$$

$$y^2 = k_1 k_2 x^2 .$$

Occorre adunque che il prodotto $k_1 k_2$ *sia un quadrato e sia quindi quadrato il birapporto* $k = \frac{k_1}{k_2}$ *della cubica* (*). Quando a questa condizione si sia soddisfatto, fissato arbitrariamente un valore intero alla x, la 2ª equazione determina, a meno del segno, un valore intero di y; e se quindi si fissa arbitrariamente un valore intero di z, la 1ª equazione permette di determinare

(*) Come caso particolare in una cubica armonica se un flesso razionale è tangenziale di 4 punti razionali, ciascuno di questi non può, a sua volta, essere tangenziale di punti razionali.

di conseguenza a_1 e a_2 per modo che il sistema ammetta la soluzione razionale (intera) costituita da quei valori di x, y, z. Ne segue (tenendo sempre presente il n. 12) *l'esistenza di cubiche razionali su cui una configurazione del tipo* $\mathcal{C}(2)$ *si trova accresciuta per l'aggiunta di 4 punti razionali aventi per tangenziali, due il punto* A_1 *e due il punto* A_2 *(del n. 8).*

15. — Punti razionali accidentali possono pure presentarsi con una configurazione $\mathcal{C}(3)$.

Si consideri infatti la cubica

$$(12)\quad y^2(x-z)-y[ax^2+(a^2-4a+2)xz]+(a-1)(a-2)xz^2=0,$$

forma generale a cui, secondo il n. 9, si può ridurre ciascuna cubica che possegga la configurazione $\mathcal{C}(3)$ di punti razionali. I punti di contatto delle tangenti da $A_2 \equiv (0\ 1\ 0)$ alla cubica sono i punti $(0\ 0\ 1)$, $(a-2,\ a-2,\ -1)$ ed altri due le cui coordinate x e z sono date dalla equazione

$$a^2x^2+a\,(a^2-6a+4)\,xz+4\,(a-1)\,z^2=0\,;$$

il discriminante di questa può scriversi

$$a^2\,[(a^2-6a+6)^2-4\,(a-1)^2]\,.$$

Si ponga $a=\frac{m}{n}$ (m, n interi, primi fra loro): questo discriminante sarà un quadrato quando sia quadrato $(m^2-6mn+$ $+6n^2)^2-4n^2(m-n)^2$: chiamando u^2 tal quadrato e ponendo $m-n=p$ si dovrà allora avere

$$(p^2-4pn+n^2)^2=u^2+4p^2n^2.$$

Si soddisfa a questa equazione ponendo

$$p^2-4pn+n^2=\alpha^2+\beta^2 \qquad pn=\alpha\beta \qquad u=\alpha^2-\beta^2$$

da cui, ammettendo per α e β valori interi, positivi o negativi,

$$p-n=\alpha+\beta \qquad (p+n)^2=\alpha^2+\beta^2+6\alpha\beta=(\alpha+3\beta)^2-8\beta^2,$$
$$(\alpha+3\beta)^2=(p+n)^2+8\beta^2.$$

Per soddisfare a questa equazione si deve porre

$$\alpha + 3\beta = \lambda^2 + 2\mu^2 \qquad p + n = \lambda^2 - 2\mu^2 \qquad \beta = \lambda\mu$$

da cui

$$p - n = \alpha + \beta = \lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu$$

onde

$$p = \lambda(\lambda - \mu) \qquad n = \mu(\lambda - 2\mu) \qquad m = p + n = \lambda^2 - 2\mu^2.$$

Basterà dunque assumere nella cubica (12)

$$a = \frac{\lambda^2 - 2\mu^2}{\mu(\lambda - 2\mu)}$$

dove λ *e* μ *sono interi quali siansi, perchè essa venga a possedere una configurazione* $\mathfrak{A}(3)$ *tale che i punti* A_1, A_2, A_3, A'_1 *siano tangenziali, oltrechè dei punti imposti dalla configurazione, ciascuno di altri 2 punti razionali.* Si otterrà così un sistema totale di 16 punti razionali.

Viene con ciò totalmente esaurita la ricerca e la classificazione delle configurazioni finite arborescenti di punti razionali sopra le cubiche a coefficienti razionali.

In una prossima Nota III tratterò dei sistemi finiti di punti che dipendono da configurazioni poligonali e dal simultaneo presentarsi su una cubica di varie configurazioni di punti razionali.

Dal punto di vista puramente aritmetico rileverò la dimostrazione, contenuta in questa Nota (n. 10), della non risolubilità in numeri interi, con $y \neq 0$, dell'equazione

$$x^4 - 4x^2y^2 + 8y^4 = z^2.$$

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza dell'8 Dicembre 1907.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Carle, Brusa, Allievo, Carutti, Renier, Pizzi, Chironi, Ruffini, Stampini, Sforza e De Sanctis, Segretario.

Scusa la sua assenza il Socio D'Ercole.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 24 novembre 1907.

Su proposta del Presidente si conviene d'invitare il Vice-Presidente Boselli a tenere la commemorazione del compianto Socio nazionale non residente Conte Costantino Nigra.

Sono presentati dal Presidente i seguenti scritti pervenuti in omaggio all'Accademia:

1° Sforza, *Labindo*. Discorso letto nel teatro di Fivizzano la sera del 29 settembre 1907 (estratto dalla *Rassegna Nazionale*).

2° *Lavori eseguiti dalla Missione Archeologica italiana in Creta dal 2 aprile al 12 settembre 1906*. Relazione del Dott. Luigi Pernier al Prof. Ettore De Ruggiero (estratto dai *Rendiconti dei Lincei*, Classe di Scienze morali, vol. XVI).

Il Socio De Sanctis prendendo la parola a proposito di questa Relazione mette in rilievo la severità di metodo con cui furono eseguite le indagini che ne formano il tema e l'importanza dei loro risultati.

Il Socio Chironi presenta con parole di vivo encomio il saggio del Prof. Igino Petrone, intitolato: *Il diritto nel sistema*

della filosofia dello spirito (Napoli, 1906). Offrendo poi gli *Scritti editi ed inediti di diritto civile* del Prof. Oreste Regnoli (Bologna, Zanichelli, 1900), raccolti e pubblicati per cura dell'On. Avv. Attilio Loero e il discorso del Prof. Giuseppe Brini, intitolato: *Di Oreste Regnoli e del momento odierno del diritto civile* (Bologna, Tip. Monti, 1898), rievoca la grande figura del Regnoli e si trattiene sull'importanza dell'opera del Loero con le parole che sono registrate negli *Atti*. Presenta inoltre facendone l'elogio il libro del Prof. Avv. Giuseppe Ottolenghi, intitolato: *Il rapporto di neutralità* (Torino, Unione tipografico-editrice, 1903).

Il Socio Stampini fa omaggio all'Accademia del primo esemplare pervenutogli del suo libro: *La metrica di Orazio comparata con la greca e illustrata su liriche scelte del poeta, con un appendice di carmi di Catullo studiati nei loro diversi metri* (Torino, Loescher, 1908).

Per l'inserzione negli *Atti* vengono presentati:

1° dal Socio Allievo un suo saggio dal titolo: *In cerca della scienza*;

2° dal Socio Chironi una nota del Prof. Alessandro Lattes, intitolata: *L'interinazione degli editti. Studio di storia del diritto pubblico piemontese*;

3° dal Socio Sforza una sua nota su *Alessandro Manzoni ed una baruffa tra l'Annotatore piemontese ed i Romantici lombardi*;

4° dal Socio De Sanctis uno studio del Dott. Umberto Mago su *La regina Antiochide di Cappadocia e la cronaca regia degli Ariaratidi*.

Il Socio De Sanctis presenta la riproduzione fototipica di due facciate dell'*Evangeliario* designato con la lettera *k*, che sarà quanto prima pubblicato a cura della nostra Accademia. Questo importantissimo codice, di cui l'Accademia deliberò la riproduzione integrale, dopo aver provveduto alla pubblicazione fototipica del famoso *Messale* Roselli, era rimasto assai danneggiato dall'acqua e dal fuoco nell'incendio della Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino, ma fu poi restaurato egregiamente dal

Marrè ed è stato ora per intero fotografato, sicchè, presumibilmente, entro il primo semestre 1908, la Commissione incaricata dall'Accademia potrà darne alla luce la riproduzione, che sarà senza dubbio bene accetta, sia agli studiosi di paleografia, sia a tutti coloro che si occupano di studi sul testo delle antichissime versioni del Nuovo Testamento.

Il Socio Renier rileva a questo proposito come sulla iniziativa presa dall'Accademia di far riprodurre antichi testi a penna di Torino e delle altre Biblioteche piemontesi siano comparse recentemente nei giornali notizie non esatte; rileva in particolare come siasi diffuso il dubbio se quella deliberazione abbia mai avuto attuazione pratica, mentre della pratica attuazione fa testimonianza il volume dedicato al *Messale* Roselli. Accenna all'opportunità di iniziare quanto prima, non appena sarà pubblicato il codice *k*, la riproduzione del *Codice Teodosiano d'Ivrea*, conforme a ciò che fu proposto già altre volte all'Accademia.

Il Socio Stampini notando che recentemente si è messa in dubbio anche la pratica attuazione per parte della Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino della proposta che fu fatta dopo l'incendio della Biblioteca, d'iniziarvi una raccolta di tutte le riproduzioni fototipiche di codici che esistano, osserva che tale raccolta, nonostante la relativa scarsezza di mezzi disponibili, si è iniziata, e comprende un gran numero delle più importanti di tali riproduzioni che siano state pubblicate sino ad ora. E rileva che a Torino, l'Accademia con le sue pubblicazioni di Codici, e la Biblioteca Nazionale Universitaria con gli acquisti di riproduzioni fototipiche hanno gareggiato nel fare quanto era in loro per rimediare ai danni cagionati dall'incendio del 25-26 gennaio 1904.

LETTURE

La formazione del Codice civile italiano e i lavori di Oreste Regnoli.

Nota di G. P. CHIRONI.

Or che la pietosa e grata opera di un congiunto, cultore saggio pur esso degli studî giuridici, s'è accinta a raccogliere e consegnare agli antichi estimatori ed alla storia del diritto i molti e sparsi documenti della insigne attività di Oreste Regnoli: nell'ora presente, che i rivolgimenti onde il paese vien scosso e turbato, mostrano incominciato un periodo nuovo dell'azione eccitata nelle coscienze dalle idee onde già scaturì il rinnovamento politico nostro, è utile e opportuno ricordare in che modo queste grandi idee di libertà si componessero nel pensiero di un uomo che religiosamente le instaurò, le insegnò, e per molta parte concorse a formarle in legge. Specialmente opportuno. Perchè nella mente di quanti studiosi, di quanti agitatori prepararono, iniziarono e fortunatamente compirono il riscatto della patria, bandire la riscossa significava aspirazione e rivendicazione di un diritto, esprimeva la coscienza sociale formatasi nella coscienza personale giunta al maggiore sviluppo dell'idealità, e riassumente in sè la visione netta della generalizzazione, della universalità dei rapporti: visione che attinge la forma più elevata nel diritto della nazionalità, escito dal concetto della personalità, diritto individuale. Onde avvenne che per tale formazione e contenuto della coscienza, la idea della libertà intesa qual fondamento di ogni ordine e motore di ogni progresso, ebbe in se stessa la propria misura imposta e determinata da questo incontro e penetrazione reciproca dell'individuo e della società: misura che è il fenomeno giuridico, il diritto: e mai come in tempi che di poco precedettero e seguirono il risorgimento della patria, fu norma di condotta più rigida, e preoccupazione costante al legislatore nell'opera sua.

E s'intende che non altrimenti dovesse accadere. La coscienza che s'era nell'evoluzione sua elevata all'universale, non poteva considerare e meno poi dar posto a rapporti, od utilità che con questa visione della generalità entrassero in conflitto: la coscienza che nella piena normalità sua si esprimeva con magnifico vigore nella lotta fierissima per la collettività uscendone incoronata di vittoria, non poteva senza oscurarsi accogliere nella purezza del pensiero intendimenti che contrastassero con l'armonia e l'equilibrio voluto tra l'elemento individuale ed il sociale, prementisi e compenetrantisi in ogni maniera di relazioni. Pressione ch'è antitesi, compenetrazione ch'è la uguaglianza in cui il conflitto si risolve, derivandone ad ognuno dei due fattori la giusta interezza del proprio essere. Ma nei rivolgimenti che agitano la società attuale, e in particolar modo il paese nostro, questa normalità di coscienza s'è indebolita, quella nettezza di visione s'è offuscata: e della libertà, del diritto in ognuno di svolgere la propria attitudine a fin di conseguire un migliore stato di benessere, s'è inteso la sola parte, il solo fattore individuale. Certo, è questa una crisi significante lo stato di acutezza dell'antitesi segnalata, e che pur essendo lunga e travagliata, si risolverà: certo, ad accrescerne la intensità nuovi elementi conferiscono, varî di qualità e di entità secondo il variar continuo degli atteggiamenti sociali; e non v'è estraneo il modo stesso di formarsi delle maggioranze nei governi parlamentari, che spesse volte oscura il concetto limpido dei diritti e degli obblighi ch'escono dalla collettività: ma i nuovi perturbamenti finiranno ancor essi nella compenetrazione, nell'equilibrio rispettivo dei due fattori, l'individuale ed il sociale, ch'è per natura sua il prevalente.

Come i tempi, pur fortunosi, ma raggianti pei civili entusiasmi che ad anime elette ed alle spregiate plebi consigliarono la virtù del sacrifizio; come i tempi in cui visse ed operò Oreste Regnoli paiono altri da quelli in cui il procacciamento bramoso dell'utilità dei singoli, del benessere materiale immediato degli individui, s'afferma e s'impone, così da diventare ragion di lotta, e si consolida in apparente socialità nei "*sindacati!*": tempi che sono i nostri. Nè con questo si vuol dire che gli urti, le lotte determinate da interessi in conflitto siano fatto nuovo, quando invece è antico da quanto la società stessa: si vuol dire

soltanto, che rade volte si manifestò con tanta violenza, e con così crudo dispregio della socialità vera, rappresentata nell'impero della legge.

Altri tempi quelli che viddero la generazione di pensatori e di eroi, combattenti per la libertà e pel diritto, proclamare per bocca di Oreste Regnoli " l'Italia risorta sarà per la giustizia „: e ben degno era egli di pronunziare così nobile e superiore norma di condotta, egli che il culto di ogni libertà unì devotamente al culto del diritto di cui fu maestro degnissimo. E come la proclamò, la osservò poi nei molti uffici che la Romagna e la patria italiana gli commisero: deputato di Orvieto alla Costituente romana, ministro di grazia e giustizia nel governo romagnolo che procurò l'annessione, inviato al parlamento italiano dalla sua Romagna per molte legislature, maestro insigne di ragion privata nella scuola e nel fôro, mai mancò di fede al principio di grande idealità e moralità civile ch'egli avea formulato, e che sintetizzava l'opera rinnovatrice dello spirito italiano.

Ai rapporti fra lo Stato e la Chiesa dette Oreste Regnoli non piccola parte dei suoi studi e del suo lavoro parlamentare. Cosa ne pensasse avea già nettamente detto in occasion della riforma del matrimonio fatta dalla nuova legge civile: più tardi, scrivendo dell'autorità spirituale del pontefice, dichiarava che unica soluzione razionale e degna della civiltà e dell'Italia era " l'applicazione dei semplici ed eterni principî della libertà politica e religiosa; libertà nella giustizia „. E ancor al presente, nella discussione viva che si fa intorno a questi rapporti, e degenerante talvolta in comizî che mal si dicono di popolo, fino ad intendere il giusto diritto dello Stato come poter di abolire e bandir dalle coscienze ogni purezza di sentimento religioso, non si dovrebbe mai nè perdere nè oscurare la visione della grande idea di libertà nel cui nome il nuovo Stato italiano venne composto. Libertà sì, senza licenza nessuna che contradica all'autorità del potere civile, ma anche libertà senza oppressione: licenza e oppressione son vizî che negano con la libertà il diritto, e la giustizia sua natural misura.

Ma più che alle questioni di diritto pubblico, volse egli la mente a quelle di diritto privato, e nello studio che ne fece, e nel discuterne gli ordinamenti onde poi si compose il nuovo

codice civile, fu l'opera sua commendevolissima. Già come ministro avea dato alla Romagna i provvedimenti che ponevan fine ad una legislazione mal conveniente a tempi civili, e tolto i privilegi di famiglia e l'ampio poter di testare ch'erano offesa alle ragioni della personalità; come deputato, seguendo i criterî che avea esposto in una scrittura intorno la formazione di un nuovo codice italiano, fortemente contribuì a che nell'Università bolognese non più il codice francese, come avveniva per decreto dittatoriale, ma il codice civile albertino venisse insegnato.

E di questo codice, pure pei tempi sapientemente condotto, scrisse con la profondità e lucidità consuete quante fossero le manchevolezze, e avvertì il grande bisogno ch'era all'Italia un codice che alle condizioni nuove degli spiriti, ed alle contingenze economiche mutate rispondesse in maniera più conveniente. E con antiveggenza di scienziato e di uomo di governo, segnalò i concetti formatori di un miglior ordinamento della proprietà e dei diritti reali: in special modo del diritto ipotecario a tutela del giusto interesse del pubblico, e perchè il credito ne avesse quel maggiore sviluppo che meglio favorisse le industrie ed i commerci. Con egual criterio, e preoccupato sempre della necessità assoluta per il legislatore che voglia far opera saggia e durevole, di comporre la utilità dell'individuo col vantaggio della comunità, additò i gravi difetti della legge nella parte dei contratti relativi al lavoro; e quasi presentisse le nuove idee di legislazione sociale, fermò molti dei concetti che determinarono poi la condizione giuridica riconosciuta ai lavoratori: idee di giustizia che pure riprese nelle proposte sue intorno a taluni istituti di diritto famigliare.

Che veramente fu la parte di studio in cui l'acuto e sereno spirito scientifico del giurista s'incontrò e si fuse mirabilmente con le doti nobilissime dell'uomo : onde rimarranno documenti di profonda e saggia ricerca, e di affetto umano, le pagine scritte da Oreste Regnoli sulla condizione giuridica dei figli naturali, sul governo della famiglia e sul dovere che alla società incombe di protezione e difesa all'infanzia moralmente abbandonata: dovere che dai legislatori, e in particolar modo dal nostro, vuol provvedimenti bastevoli, per cui apparisca, come veramente è, e dovrebbe essere, che a questa prole disgraziata la società è famiglia. Ch'è il nobile intento di quelle ottime leggi formate

ora negli Stati americani e nell'Ungheria a difesa della povera infanzia, che nell'abbandono dei genitori è tristamente votata al vizio, educata al delitto.

Ma in special modo nello studio dedicato ad una questione delicatissima, che tocca il fondamento della famiglia e dà materia fra i giuristi e gli uomini politici a disputa grave, irreducibile, le nobili qualità di Oreste Regnoli rifulgono. Perchè a lui che dell'istituto del matrimonio civile fu sostenitore validissimo, parve non potersi compiere la riforma senza tenere per giusto il divorzio qual causa di scioglimento del vincolo: e, con tutta la riverenza ch'è dovuta all'illustre uomo, da questa opinione si può e si deve dissentire: la forma del matrimonio non è tal fattore da produrre conseguenze che ne sconvolgano la intima essenza. E pure, quanta onestà scientifica, quanto rispetto vero alla libertà degli individui, e al diritto scaturente dalla socialità, si avvertono nella dottrina pensata dal Regnoli! Quanta differenza dalle declamazioni molte che or si fanno e condotte sull'affetto qual ragion d'essere del consorzio coniugale, per inferirne che quand'esso manchi finisce ogni ragion buona, civile, di mantenere un vincolo ch'è peso agli obbligati, e grave spinta per essi al crimine! Quanta diversità dalle relazioni che si leggono intorno a progetti di legge di cui s'occupa il Parlamento di un paese a noi prossimo di razza e per educazione e costumi, dove ogni nuova facilitazione all'istituto del divorzio è giustificata con la idea del matrimonio-consenso! (1).

Non è per verità possibile una concezione dove il piccolo individualismo, l'egoistico e brutto sentimento della racchiusa e gretta utilità personale trionfino con più ostentata sicurezza. Nei paesi dove il divorzio è istituto da lungo tempo penetrato nella legge e nelle convinzioni etiche del popolo, è tenuto non per diritto che derivi dalla *essenza* stessa del matrimonio, ma come un male ch'è pur necessario a fin d'evitare

(1) V. Relazione della Commissione sulla proposta del deputato MARTIN (rel. VILLETTE) favorevole al divorzio per mutuo consenso ("Journ. off.", doc. part., 1907, ann. n° 749): petizione MAGNAUD per la concessione del divorzio a domanda di uno solo dei coniugi ("Rev. de dr. civ.", 1907, p. 434); proposta di legge del dep. VILLETTE ("Journ. off.", 1907, doc. part., ann. n° 770), in egual senso, con l'aggiunta della determinazione dei motivi.

altro male maggiore: onde la conseguenza, che, non solo non è favorito col rendere più facile l'ottenerlo a chi voglia ed anche a chi non voglia, come avvien col tenerlo per avvenuto di diritto dopo un certo tempo di separazione durata: ma o non lo si estende, o si cerca di ristringerne i casi in cui è lecito di farne domanda. Così vien giudicato il divorzio in rispetto alla collettività, all'elemento sociale nella composizione del diritto, parendo pericoloso alla famiglia ed al pubblico interesse il mantenere come ancor vivente un consorzio già finito in riguardo al suo special fine: si può, è vero, ben discutere la dottrina, e mostrare che appunto per quest'elemento la consistenza del vincolo vuol maggiore e più efficace difesa: ma certo la diversità segnalata fra l'un modo e l'altro di giustificare l'istituto è profonda, e separa chi vuole libertà con licenza da chi la vuole con la giustizia e per la giustizia. Nè paia qui fuor di luogo, e meno conveniente a questa comunicazione ch'è omaggio reso allo scienziato ed al cittadino onorando, se brevemente s'insiste nel dire che appunto l'azione esercitata dal diritto della società nell'ordinamento famigliare è l'argomento più grave onde gli Stati che hanno per legge il divorzio, eccezion fatta per la Francia (1), son mossi a non estenderlo nè a facilitarlo, e quelli che ancor non l'hanno dovrebbero tenersi paghi a meglio regolare la formazione e l'esistenza del vincolo matrimoniale. Già la nuova ondata che in favor del divorzio percosse in Francia la famiglia, mosse dai romantici che nulla vedevano oltre la ragion dell'individuo, e della passione proclamavano l'assoluta superiorità sul dovere: e " la catena coniugale „ fu ai letterati argomento inesauribile e prezioso di romanzi, di drammi, di polemiche. E così con la dichiarazione di guerra allo stato di " asservimento coniugale „ s'arrivò alla legge dell'84: e mai, mai si pensò alla condizione dei figli, alla prole disgraziatissima che nella nuova famiglia dei genitori rimaneva essa sola senza famiglia, senza affetti. E pure, era così necessario, e così facile pensare che quell'elemento sociale male invocato a favor del divorzio, si manifesta invece con luminosa virtù nei rapporti della filiazione: e se conforta il veder come la nuova letteratura drammatica francese consideri ora questo grave lato, e veramente e altamente umano della questione, e

(1) V. la n. precedente.

se ne preoccupi così da determinare nel pubblico un sentimento di salutare reazione, è pur confortevole sperare che alle nazioni dove l'istituto non è ancor legge, giovi il riflettere meglio su di una riforma gravissima: che dove non è sorretta da saldezza di convinzioni morali, è alla società danno irreparabile.

Ma Oreste Regnoli pur acconsentendo al divorzio limitato a casi la cui gravità fosse determinata dalla legge, asseriva tutto alla ragion giuridica questo convincimento suo: pensava che al consorzio coniugale il voto di natura dà la perpetuità, e lo constituisce in duraturo per sempre: e così la morale: onde perfetta e santa e appieno civile egli estimava l'unione non sciolta che dalla morte (1). Verità grandi queste, e più notevoli quando dette da chi sinceramente teneva il divorzio per necessità giuridica: verità esprimenti in modo incisivo la essenza del matrimonio, che il diritto non può alterare o contrastare senza venir meno al proprio significato, alla propria funzione: concetti che mostrano tutta l'onestà dell'espediente pensato per coordinare con prudenza la ragion collettiva ed il privato interesse.

Non altro occorre a illustrare la figura e onorare la memoria di Oreste Regnoli maestro insigne di diritto e di liberi sensi alla gioventù italiana, nell'occorrenza che la parte or pubblicata dei suoi studi è offerta all'Accademia delle Scienze da chi con affettuosa cura pensò a comporla in volume. E suggelli questo ricordo il voto che la preziosa raccolta sia in breve termine compiuta, e rimanga monumento perenne all'uomo dottissimo, che ricco di ogni privata e pubblica virtù ben potè dire: " bugiardo il patriottismo non fondato sulla più schietta e pura " moralità „.

(1) V. il discorso commemorativo di G. Brini: *Di Oreste Regnoli*. Bologna 1898, pag. 30 e 31.

In cerca della scienza.

Nota del Socio GIUSEPPE ALLIEVO

I.

La scienza dov'è?

La scienza dov'è? Verso la metà del secolo scorso il mondo dell'umano sapere soggiacque ad un radicale rivolgimento, che andò propagandosi con rapidità meravigliosa. Il concetto della scienza fu sostanzialmente mutato da quello di prima, e conforme a quel concetto essa venne integralmente rifatta nella sua origine, nel suo oggetto, ne' suoi limiti, nel suo processo, nel suo organismo. Da prima la metafisica regnava sovrana nel dominio del sapere filosofico, avendo per oggetto delle sue indagini l'Essere assoluto realmente sussistente in sè, autore e reggitore dell'universo, e le sostanze finite nelle loro attinenze coll'Essere assoluto. Alla metafisica faceva corona la filosofia della natura e la filosofia dell'umanità, e di questa faceva parte principalissima la psicologia, la quale muovendo dal concetto, che l'anima umana è sostanza individua fornita di una personalità sua propria, studia primamente mediante l'esperienza interiore i fenomeni psichici e le potenze, in cui essa si manifesta, poi si eleva mediante il ragionamento, a contemplare gli attributi costitutivi della sua intima natura, mai non perdendo di vista le attinenze, che la collegano col suo corporeo organismo. Dalla psicologia si diramano la filosofia morale e la logica: quella si attiene alla natura morale dell'anima umana, e riposa sulla libertà del volere in ordine alla legge etica, questa riguarda la natura intelligente dell'anima stessa nel suo processo alla verità e si fonda sul pronunciato che l'umana conoscenza origina da due fonti supreme, l'esperienza sensibile, che apprende l'esteriorità di un essere, ossia le sue manifestazioni, i suoi fenomeni, le sue

continue modificazioni, e la ragione speculativa, che scruta l'interiorità delle sostanze, ossia i costitutivi essenziali della sua natura.

Contro questo edifizio filosofico, intorno a cui lavorarono potenti pensatori, da Platone ed Aristotele sino a Gioberti e Rosmini, insorsero i novatori a demolirlo sin dalle fondamenta. *Nous avons changé tout cela.* Non più metafisica, non più psicologia filosofica. La personalita dell'*io* umano e la libertà del volere sono un'illusione. I sensi sono l'unica fonte dell'umano sapere: la ragione speculativa, che scruta la sostanzialità degli esseri, non ha valore scientifico. La scienza si muove dentro la cerchia esclusiva dei fenomeni sensibili, mutabili, relativi, che hanno la loro causa in sè, e non in esseri sostanzialmente distinti. Tutto ciò, che trascende la sfera dei sensi, o il dominio della natura, o l'apprensiva dell'intelligenza, vale a dire il soprasensibile, il soprannaturale, il sovrintelligibile, va rigettato siccome antiscientifico.

Tali sono i supremi pronunciati posti a fondamento della scienza nuova, appellata positivismo, poichè i fatti, che sono l'unico ed esclusivo oggetto delle sue indagini, hanno un carattere positivo. Sin dal suo primo apparire essa fu accolta con vive simpatie e fu poi levata a cielo come se fosse il verbo dell'umanità. Quando la scienza ha parlato, ogni discussione è finita, perchè la sua parola è la verità; e chi pensasse in contrario, è vittima di illusioni metafisiche o di pregiudizi scolastici. È certamente ammirevole l'intenso e fervido lavorio di poderosi ingegni, che tentarono di aprire nuovi orizzonti alla mente umana e si adoprarono ad illustrare le pagine della scienza con pensieri originali, con ingegnose ipotesi, con ampie e nuove indagini sperimentali.

Pur tuttavia in nome di quella libertà, a cui ha diritto ogni studioso ricercatore del vero, io dimando: Dov'è la scienza? La verità ricercata dov'è? Ogni nuova dottrina non ha ragione di essere se non a condizione, che dimostri insussistente la sua opposta, che la precede. Ora il positivismo ha esso sottoposto alla critica le dottrine metafisiche, prima di respingerle? (1).

(1) Il Comte giudicò della metafisica muovendo dal criterio preconcetto del suo positivismo, epperò la sua non è una critica oggettiva e sussistente. Lo Spencer, ignaro affatto della storia della filosofia, non se ne diede pensiero.

Contro di esse ha dogmaticamente asserito senza discussione di sorta, che l'esperienza è la madre unica e suprema della scienza, che ogni conoscenza origina dai sensi, che il sapere scientifico si arresta ai soli fenomeni: che l'al di là dell'esperienza, dei sensi, dei fatti, quali sarebbero le nature specifiche degli esseri, la sostanzialità delle cose, lo spirito e la materia, le cagioni efficienti e finali, tutto questo va relegato fuori dell'àmbito della scienza, che la ragione speculativa è una facoltà chimerica ed illusoria. Questi cànoni fondamentali il positivismo oppose a quelli della metafisica, ma non furono una sua scoperta, sono vecchi da secoli, ed esso non fa che ripeterli senza dimostrarli nè punto. nè poco: siamo ancora all'empirismo di Francesco Bacone, al sensismo di Giovanni Locke, allo scetticismo di David Hume, all'agnosticismo della Scuola scozzese, per ristringerci alla storia della filosofia moderna.

Muovendo da questi cànoni il positivismo ha ricostrutto in forma vasta e nuova l'edifizio dell'umano sapere, allargando le sue indagini a tutto il mondo dei fenomeni e ricercandone le leggi. Ma qui appunto io ripeto la mia dimanda: La scienza dov'è? Nessuno vorrà mettere in forse, che scienza non si dà se non a condizione, che i suoi molteplici e diversi elementi concordino fra di loro per guisa da comporre un solo tutto organico ed omogeneo in ogni suo punto. Poichè la verità è concorde con sè stessa, e dove regna contraddizione e dissidio, là non vi può essere verità. Ciò posto, il positivismo è desso concorde ed armonico ne' suoi pronunciati sostanziali?

Volgiamo il pensiero ai due corifei del positivismo contemporaneo, Augusto Comte in Francia, Herbert Spencer in Inghilterra, raffrontiamo i loro pronunciati, e sin dalle prime essi ci appariscono divisi da uno stridente antagonismo. Il Comte pubblicava tra il 1830 ed il 1842 i cinque ampii volumi del suo *Corso di filosofia positiva*. Alcuni anni dopo lo Spencer faceva di pubblica ragione i suoi primi lavori filosofici; ma la loro comparsa suscitò forti dissensioni e vive polemiche fra i seguaci delle nuove dottrine, tantochè si pose in discussione a quale di essi convenisse l'appellativo di positivista. Fu allora che lo Spencer, tenero oltremodo dell'originalità del suo pensiero, egli, che rigettava poi come una illusione la personalità propria dell'*io* individuale, altamente dichiarava che non era positivista nel

senso, in cui prendevasi allora siffatto vocabolo, ma che dissentiva dal Comte in tutti i punti del suo proprio sistema, conveniva con lui soltanto in quei punti, che non erano suoi originali, ma che aveva attinto dalle dottrine precedenti. Ecco dunque i due antesignani del positivismo contemporaneo mostrarsi in perfetto antagonismo fra di loro. Ma giova discendere ai particolari.

Se havvi un punto, che sommamente importi al progressivo sviluppo di ogni scienza, quello è certamente che riguarda il processo metodico, che essa deve seguire nello studio del proprio oggetto. Quando si tiene il retto cammino, tosto o tardi si raggiunge la meta, mentre se la via è sbagliata, ogni tentativo è disperato. Ora su questo capitalissimo punto i nostri due filosofi si trovano in perfetto dissidio. Augusto Comte rigetta la sentenza di coloro, i quali ripongono il metodo psicologico nell'osservazione interiore, ossia nella coscienza, che l'*io* ha di sè stesso, e nella riflessione sui proprii atti. Ecco le sue parole: " In questi ultimi tempi si è immaginato di distinguere con una singolarissima sottigliezza due guise di osservazione egualmente importanti, esteriore l'una, l'altra interiore unicamente rivolta allo studio dei fenomeni intellettuali. Questa pretesa contemplazione diretta dello spirito umano mediante se stesso è una pura illusione. È necessità invincibile, che lo spirito umano possa direttamente osservare tutti i fenomeni, tranne i suoi proprii. Infatti da chi sarebbe fatta l'osservazione?... L'individuo pensante non potrebbe dividersi in due, di cui l'uno ragionasse, l'altro osservasse a ragionare. L'organo osservato e l'organo osservatore essendo in questo caso identici, come mai potrebbe aver luogo l'osservazione? Questo preteso metodo psicologico è dunque radicalmente nullo nel suo principio. Ora consideriamo a quali procedimenti profondamente contraddittori esso immediatamente conduce „ (1). Lo Spencer è di avviso diametralmente opposto: egli ritiene impossibile la costruzione della psicologia senza l'osservazione psicologica propriamente detta, la coscienza interna. Tra il sì ed il no non si dà mezzo. Quale dei due dice il vero su questo importantissimo punto?

(1) *Principii di filosofia positiva*, Parigi, 1868, pag. 120 e seg.

Passiamo ad un altro punto non meno capitale. È comune pronunciato dei positivisti, che la psicologia ha per oggetto i fenomeni interni, e non va più in là a contemplare la sostanza a cui appartengono: e questi fenomeni interni vengono comunemente distribuiti in due classi, cioè in fenomeni psichici propriamente detti, ed in fisiologici, secondochè si riferiscono alla vita mentale, od alla vita animale. Ciò posto, sorge la dimanda: Tra queste due specie di fenomeni interni vi corre egli una semplice differenza di grado, di forma, oppure un divario di essenza, di natura? Anche qui il sì ed il no tenzonano fra di loro nel campo del positivismo. Il Comte, chiamando a rassegna i fatti umani, ammette sei ordini di fenomeni essenzialmente distinti ed irreducibili, i quali non si svolgono gli uni dagli altri, ma si succedono soltanto esteriormente, e sopra di essi fonda la sua classificazione delle scienze. Anche lo Stuart-Mill, riducendo il principio di causalità ad una successione di fenomeni meramente esteriori è logicamente condotto a rigettare ogni interiore connessione evolutiva tra i fenomeni. Per lo contrario lo Spencer, ardito sostenitore dell'evoluzionismo, ammette tra i fenomeni psichici ed i fisiologici un semplice divario di forma o di grado, e non una differenza di natura o di essenza. Tutti sono convertibili fra di loro, perchè sono fondati sull'unità di composizione. Dalle più umili funzioni dell'organismo fisiologico sino al più sublime pensiero della mente tutti i fenomeni interni hanno una comune ed identica natura, perchè sono tutti una progressiva e moltiforme manifestazione della vita. Anche qui il dissidio tra i due capiscuola del positivismo non potrebb'essere più profondo e stridente. La scienza psicologica è lacerata nel suo seno da una intrinseca contraddizione. Qui io non discuto, ma espongo: non giudico, ma narro, e dimando ancora: La scienza dov'è?

La scienza tiene un determinato processo metodico nello studio dei fatti, che sono il suo proprio ed esclusivo oggetto, e mira ad uno scopo supremo, come a risultato finale delle sue indagini. Qual'è questo scopo? Sentiamo come rispondono alla dimanda i nostri due illustri positivisti. Augusto Comte, pur mentre si propone per iscopo di coordinare in un sistema unico tutto l'immenso insieme delle conoscenze acquistate, relativamente ai differenti ordini di fenomeni naturali ricisamente di-

chiara di non avere punto in animo di procedere allo studio generale di questi fenomeni riguardandoli tutti come effetti diversi di un principio unico, come soggetti ad una sola e medesima legge. Egli mostrasi personalmeate convinto, che ogni tentativo di spiegare l'universalità dei fenomeni mediante una legge unica, anche fatto dalle più competenti intelligenze, riesce a vuoto. Secondo lui, basta l'unità di metodo, e non è punto necessaria l'unità di dottrina, la quale presenti tutti i fenomeni naturali siccome in fondo identici, salva la varietà delle circostanze (1). Il positivista inglese la pensa tutt'all'opposto. Egli assegna alla scienza siccome suo còmpito finale la ricerca e la scoperta di una legge unica ed assolutamente suprema, la quale spieghi essa sola tutta l'infinita moltiplicità dei fenomeni e nella quale vadano a risolversi tutte le altre leggi sempre più generali. Dato un primo gruppo di fenomeni, la mente fa astrazione dalle note proprie e distintive di ciascuno, e raccoglie il loro elemento comune sotto una legge generale: date più leggi speciali, astrae dagli elementi concreti di ciascuna e si solleva a ciò, che è comune a tutte, cioè ad una legge più generale; da più leggi generali riguardate in ciò, che presentano di omogeneo e di uniforme, s'innalza ad un'altra più generale e così va ripetendo il lavoro dell'astrarre e del generalizzare finchè sia pervenuta ad un concetto il più astratto ed il più generale, spoglio di ogni concretezza ed assolutamente indeterminato, che è l'inconoscibile assoluto. Chi dei due è nel vero? Affermeremo noi col Comte, che il pensiero umano deve rinunciare al sublime intento di ricercare un principio unico e supremo, il quale spieghi tutto l'essere e tutto il sapere, oppure seguiremo lo Spencer, il quale ripone questo principio supremo nella più trascendentale astrattezza possibile, identica coll'inconoscibile assoluto? Non è qui luogo di discutere la questione; a me basta aver messo in chiaro, che anche su questo punto il positivismo, quale è professato dai suoi più illustri rappresentanti, non mostra omogeneità di dottrina.

Quest'ultimo punto, che abbiamo toccato, strettamente si collega con quello che riguarda la classificazione delle scienze.

---

(1) Opera citata, pagg. 139-142.

Augusto Comte fonda la sistematica coordinazione dello scibile sulla decrescente generalità ed astrattezza degli oggetti, intorno a cui esso si travaglia, ossia sulla indipendenza della scienza superiore dalla inferiore e sulla dipendenza logica di questa da quella. Egli riduce tutte quante le scienze a queste sei: matematiche, astronomia, fisica, chimica, biologia, sociologia. La legge della decrescente generalità ed astrattezza degli oggetti conoscibili richiede che le più semplici siano poste alla base, la più complicata alla cima del sistema enciclopedico. Quindi il primo posto va occupato dalle matematiche, perchè sono talmente astratte, che per essere apprese e coltivate non abbisognano delle nozioni di verun'altra scienza. Il secondo posto va assegnato all'astronomia, perchè meno semplice delle matematiche per una parte, e per l'altra meno complicata delle susseguenti. Per consimile ragione il terzo posto va occupato dalla fisica, dalla chimica il quarto, il quinto dalla biologia, il sesto ed ultimo dalla sociologia. Lo Spencer ha dettato una classificazione delle scienze, esposta nel suo volume, che porta appunto questo titolo, ma egli non ammette sei scienze fondamentali, collegate fra di loro da un vincolo di figliazione, bensì tre categorie di scienze, cioè le astratte, quali sono la matematica e la logica: le astratte concrete, cioè la meccanica, la fisica, la chimica, ecc.: le concrete, come la geologia, la biologia, la psicologia, ecc.; e non hanno fra di loro nessun ordine di figliazione. Quell'opuscolo dello Spencer contiene un lungo capitolo, in cui egli non solo rigetta come insussistente la classificazione delle scienze proposta dal Comte, ma chiamando a rassegna le proposizioni fondamentali comprese nella dottrina del filosofo francese, si mostra ricisamente contrario alle medesime; e pur mentre confessa che conviene con lui su alcuni punti di poca importanza, si affretta a soggiungere: " Che importa l'andare d'accordo sui punti secondari allorchè si è discordi sui principî fondamentali? „ (1).

A compiere il nostro breve parallelo occorre toccare un ultimo punto non poco notevole, che riguarda il discorde pensare dei nostri due filosofi intorno il concetto religioso. Secondo il Comte, l'oggetto della religione, il Grand'Essere supremo non

(1) Opuscolo citato, pag. 125.

è Dio, ma l'Umanità. Il carattere essenziale della religione è l'antropolatria: essa è l'uomo che adora se stesso. Anch'essa, la nuova religione positiva ha il suo culto, quindi le sue preghiere, i suoi sacramenti, la sua triade, le sue feste, i suoi sacerdoti, il suo sommo Pontefice. Il culto religioso va riposto nell'amore dell'umanità, ossia nell'onoranza riconoscente dei benefattori trapassati e nella beneficenza verso i contemporanei. Mentre il pensatore francese fa l'uomo Dio a se stesso e ripone la religiosità nell'antropolatria, il positivista inglese rigetta l'antropomorfismo, in cui l'uomo si foggia Dio a sua immagine e somiglianza, lo ripudia siccome l'elemento fattore e superstizioso, che giace in fondo a tutte le religioni particolari, la radice ed il germe del feticismo, del politeismo, di tutte le credenze contrarie al giusto concetto religioso. Il Dio dello Spencer è assolutamente innominabile, impensabile, inconoscibile. Esso non ha nè pensiero, nè conoscenza, nè attività volontaria, nè bontà morale, nè coscienza di sè, nè vita. Ogni parola umana a lui rivolta sarebbe una parola irriverente, che turberebbe l'eterno silenzio della sua solitudine infinita. Se osiamo pronunciare, che egli è il Principio, di cui l'universo è una manifestazione, guardiamoci bene dal ricercare il senso di queste parole. La pura, la vera religione non ha credenze, non preghiere, non riti, non timori, nè speranze. Il suo tempio è il vuoto, il suo Dio è l'Ignoto. Qual profondo dissidio tra i due pensatori in un punto capitalissimo, che riguarda la più sublime manifestazione della vita umana, qual'è la religiosità!

Qui viene a proposito di notare, che questa teoria della nescienza assoluta intorno a Dio ed alla vita futura ha logicamente condotto alcuni positivisti, specialmente inglesi, ad un risultato pratico, che con recente vocabolo venne appellato *secolarismo*. È questo una tendenza o disposizione di spirito, che circoscrive nei limiti della vita presente tutto quanto l'oggetto, il cômpito, lo scopo dell'esistenza umana. " Gli Inglesi (scrive a questo riguardo Ernesto Naville) con quel senso pratico che li caratterizza, hanno svolto le conseguenze del positivismo per la condotta della vita. Dacchè non ci è dato di sapere alcunchè intorno a quanto può esistere al di sopra ed al di là del mondo della nostra esperienza, dacchè ogni ricerca a questo riguardo fallisce all'intento, un uomo di senno si ristringe a regolare la

sua condotta in vista della vita presente e delle condizioni di esistenza del secolo, dove si trova collocato „ (1).

E. Caro pubblicava nella *Revue des deux mondes* di Parigi, anno 1886, un articolo intitolato: “ Comment les dogmes finissent et comme ils renaissent „, nel quale avverte che il secolarista non ha che un dogma solo, quello della vita presente, della vita nel secolo e dei doveri, che essa richiede pel nostro miglioramento. “ È, posso dire, l'agnosticismo pratico convertito in massime di condotta e medesimamente in una sorta di religione „. Egli cita alcuni dei principi, sù cui si fonda la *British seculier Union*. 1. La vita presente essendo la sola, di cui abbiamo una conoscenza certa, esige la nostra costante attenzione: 2. Il tener dietro alla nostra felicità personale, come alla felicità generale in questo mondo, rappresenta il più alto grado di saggezza e del supremo dovere; 3. Il solo mezzo di raggiungere quest'oggetto è lo sforzo umano fondato sulla scienza e sull'esperienza.

Giacchè mi si presenta qui l'occasione, farò una breve osservazione intorno l'umanismo in generale. Esso si fonda sopra un doppio errore, cioè sopra un falso concetto dell'uomo, e sopra un falso concetto della ragione e della conoscenza umana.

Secondo l'umanista, l'uomo è tutto e non può ammettere al di sopra di sè un altro essere, che gli sovrasti. È chiaro che egli non può parlare dell'umanità in astratto, la quale naturalmente non esiste in natura, bensì de' singoli individui umani, che vivono in realtà. Ora l'uomo vivente è una persona, che ha delle aspirazioni incessanti ad una vita futura oltremondana, ha il sentimento dell'immenso e dell'infinito, di cui non è che piccolissima parte, ha una coscienza religiosa, che gli rivela un essere infinitamente a lui superiore, autore e reggitore dell'universo. Ora queste aspirazioni, questo sentimento, questa coscienza religiosa, che fanno parte essenziale della natura umana, e che si mostrano sempre e da per tutto, l'umanista le rigetta, e si forma dell'uomo un concetto mutilato e tutto suo proprio, che non è il vero.

L'umanista afferma ancora che non solo nessun essere vi è

(1) *Le filosofie negative*, pagg. 78, 79.

al di sopra dell'uomo, ma altresì che la ragione umana deve rigettare quanto sovrasta alla sua apprensiva, e ciò solo accogliere per vero che è sgombro di ogni oscurità. Anche questo concetto intorno la ragione e la conoscenza umana poggia sul falso. L'universo conoscibile non è nè tutto luce limpida e pura, nè tutto tenebra fitta e buia, ma un chiaroscuro. Non vi è dogma anche di quelli, che appartengono alla religione rivelata, che non abbia il suo lato intelligibile, non vi ha teorema anche dimostrato, che non abbia il suo punto oscuro, che suscita il dubbio; quindi la frase di Dante:

“ *Sorge appiè del vero il dubbio* ”.

Io ho esordito con questa dimanda: La scienza dov'è? Ho messo a raffronto fra di loro i pronunciati dei due più illustri rappresentanti del positivismo intorno i punti fondamentali della scienza, ed essi si mostrarono fra di loro in perfetto antagonismo. La risposta viene da sè: il positivismo non è la scienza, perchè questa è verità, e la verità non può contraddire a sè stessa. Ciò non vuol dire, che nei lavori dei filosofi positivisti non vi si trovino belle e splendide verità, concetti nuovi ed originali, di cui la scienza può far tesoro, ma il vero vi è frammisto coll'erroneo, il certo coll'incerto, col probabile, coll'ipotetico, ed è còmpito della critica il sincerare gli uni dagli altri elementi. Il positivismo è un sistema, e sotto questo riguardo va messo alla pari con tutti gli altri sistemi: tutti hanno alcunchè di soggettivo, di parziale, di esclusivo, perchè sono il portato di ingegni individuali, non della ragione universale dell'umanità: accanto a verità dimostrate e luminose contengono asserzioni gratuite, ipotesi insussistenti. Si ha una grande, una immensa fede nella potenza della ragione: da lei si attende la creazione della scienza, ed essa si propone i grandi problemi dell'essere e del sapere, e lavora intorno il loro scioglimento, creando sistemi sopra sistemi. Ma che? Viene la critica e li rovescia l'un sull'altro, cercando la verità a briciole in mezzo alle loro ruine, tantochè la scienza ricercata ci ricorda l'araba fenice, “ che vi sia ciascun lo dice, dove sia nessun lo sa ”. Certo è cosa, che sommamente sconforta il vedere il campo dello scibile umano scompigliato dalla lotta di tante contrarie

dottrine, il vedere il profondo, eterno dissidio fra i lavoratori del pensiero intorno i problemi più capitali della vita professare le opinioni più discrepanti circa il medesimo punto. Ma non ci cada mai dalla mente, che la scienza, come la verità, vive e si muove entro una sfera serena, superiore alla lotta ed alle contraddizioni de' sistemi e dei pensamenti esclusivi, e ci conforti il ricordare che, se le discussioni della ragione disuniscono i nostri intelletti, possiamo, anzi dobbiamo serbarci uniti di cuore nell'amore comune della verità e nel rispetto vicendevole delle persone.

II.

Il culto della scienza ed il giovane pensatore.

Nel cielo della scienza non si nasce, ma occorre conquistarlo colla virtù del pensare speculativo, che dall'umile sfera naturale del pensare comune si solleva alla ricerca delle ragioni recondite delle cose. Il trapasso dal pensare comune al pensare speculativo ci porta sulla soglia della scienza, e qui tosto ci si presenta un problema di capitale importanza, che va discusso e risolto anzi ogni altro, siccome quello, da cui pendono le sorti ed il felice culto della medesima. Il pensiero umano non esordisce dalla speculazione, ma dalla intuizione naturale, epperò la scienza non ispunta dal nulla quasi per incanto, ma è preceduta dal sapere comune e da esso inizia il suo esplicamento. La verità non è privilegio di pochi pensatori, bensì è luce che illumina tutto il mondo dell'umanità.

Ciò posto, sorge la domanda: In che dimora il vincolo di continuità, che allaccia il pensare comune col pensare speculativo? Qual è il giusto rapporto di coerenza logica tra il sapere ordinario e la scienza? Ecco il primo e fondamentale problema, che si presenta spontaneo, imperioso, indeclinabile; da esso occorre pigliare le mosse per segnare alla scienza il suo giusto indirizzo, per determinare il suo contenuto ed il suo organismo, per posare sopra un saldo pronunciato l'alzata dell'edificio speculativo. Io non veggo che alcun pensatore non che discutere questo problema, ne abbia tampoco avuto qualche sentore. Tutti hanno cercato e proposto, ciascuno a modo suo, un primo prin-

cipio, ponendolo siccome fondamento di tutto l'essere e di tutto il sapere: ma non ci hanno saputo dare che pronunciati esclusivi, parziali, tal fiata arbitrari, in aperto conflitto gli uni cogli altri, perchè si sono di botto lanciati nel cielo immenso della speculazione senza aver preso le mosse dal fondamento, che natura pone.

Vittorio Cousin fu, ch'io mi sappia, il solo, che abbia mostrato di avere una vaga e confusa intuizione del problema, ma non ebbe coscienza del suo alto significato. Tenendo per fermo che la filosofia deve esordire dal fatto fondamentale della coscienza, e che la riflessione psicologica, alla quale spetta lo studio scientifico di questo fatto, suppone anteriore a sè la conoscenza naturale del medesimo, fu logicamente condotto a distinguere nella vita intellettuale dell'*io* umano due successivi periodi, che sono lo sviluppo spontaneo e lo sviluppo riflesso, l'uno che precede ed è l'opera della natura, l'altro, che sussegue ed ha i suoi gradi ed i suoi progressi (1). Egli divisa i caratteri, che differenziano la conoscenza primitiva, la quale è spontanea, positiva, indistinta, oscura, dalla conoscenza sviluppata, che è riflessa, negativa, distinta e chiara. Ma distinguere non basta; occorre altresì segnare il punto di contatto tra i due termini, chiarire il vincolo di continuità tra il pensare comune e lo speculativo, determinare il rapporto di coerenza logica tra il sapere ordinario e la scienza, e questo, che è appunto il problema fondamentale, sfuggì alla mente dell'autore. Egli non ha avvertito, che anche il pensare comune ammette un certo qual grado di riflessione, e che perciò si dà un sapere riflesso, che non è ancora filosofico. Quindi erroneamente asserisce, che " altro è il punto di mossa, ed altro il fondamento della filosofia „ (2), riponendo quello nella riflessione, questo nel fatto primitivo della coscienza, mentre avrebbe dovuto stabilir bene il punto di contatto tra questi due termini.

Cartesio aveva riposto il primo principio filosofico nell'affermazione che l'*io* fa della propria esistenza mediante il pen-

---

(1) *Premiers essais de philosophie.* Paris, 1862, pag. 305. — *Histoire générale de la philosophie.* Paris, 1864, pagg. 6, 7.

(2) *Premiers essais de philosophie.* Paris, 1862, pagg. 305-307.

siero; ma fu grande errore il suo, riducendo tutto l'essere dell'*io* ad un soggetto meramente pensante. Per lo contrario saggiamente avvisò il Cousin scrivendo che " la conoscenza naturale ha per proprio di essere complessa; perchè non vuolsi credere che le facoltà nostre si svolgano isolate e successivamente: la natura le mette in moto tutte insieme, lo spirito, il cuore, i sensi, l'immaginazione, l'attenzione, la volontà, la memoria, ecc. „ (1).

La storia della filosofia moderna segnala i nomi di due pensatori, celebrati siccome grandi riformatori della scienza speculativa, Renato Cartesio ed Emanuele Kant; ma essa ci apprende ad un tempo che la loro riforma non regge alla critica, perchè posa sopra un fondamento insussistente. Cartesio, cercando una verità prima, che resista incrollabile ad ogni assalto del dubbio, ed in sè racchiuda tutte le altre, s'immaginò di averla trovata nel suo *Cogito, ergo sum*. Cogito; ma *che cosa* io penso? Erroneamente egli suppose, che possa darsi in realtà un pensiero puro senza oggetto e senza contenuto. Dunque sono! ma *che cosa* sono? Forsechè tutto il mio essere si assomma in un soggetto meramente pensante, o non anche sensitivo e volente? Kant pose per primo problema: Che cosa posso io sapere? Ma perchè non dimandar anzitutto *che cosa so* già di fatto? Amendue posano per primo principio il nulla, perchè un pensiero puro senza oggetto è un mero nulla, come è un nulla una mera potenza di sapere, che non sa niente.

Ora io immagino un giovane studioso, serio, riflessivo, conscio del suo ingegno, fermo nel proposito di consacrare al culto del sapere tutta la potenza del suo pensiero. Pigliando le mosse dalla sfera del senso comune, dove la natura ci ha tutti originariamente collocati, egli sta per elevarsi verso le regioni della scienza e vede affacciarglisi l'eterno problema dell'essere o non essere, dell'essere fenomenico, che continuamente muta e passa, e dell'essere sostanziale, che permane nella sua essenza e sta, dell'essere incorporeo, intelligente, libero di sè, e dell'essere inconscio di sè, implicato nei vincoli della cieca materia, legato al tempo ed allo spazio. Di fronte a questo problema il nostro

---

(1) *Histoire générale de la philosophie*. Paris, 1864, pagg. 7, 8.

giovane esamina se medesimo, sa che tutto il suo essere risiede in una facoltà intelligente, che pensa e conosce la realtà, in una potenza affettiva, che sente la vita, in una attività libera, che opera volendo, e chiede a se medesimo: Dell'immensa realtà che cosa posso io conoscere con verità? Quanta e quale felicità posso io attingere dal senso della vita? Fin dove si stende il mio operare in ossequio al dovere? Alla scienza egli dimandava la risposta a questi tre capitali problemi, ma non ignora che anteriormente alla scienza, la quale è privilegio di pochi, esiste la sapienza universale del genere umano, che appartiene a tutti, quale si rivela nella coscienza naturale di ciascun individuo e nelle credenze morali e religiose di tutte le genti.

Ora questa comune sapienza afferma l'esistenza di un Essere assoluto, principio intelligente e termine finale di quanto sussiste; il mondo dello spirito ed il mondo della materia essenzialmente distinti e composti ad armonia; la santità del dovere imposto dalla legge morale e la libertà del volere; la felicità, termine obbiettivo e finale della nostra sensitiva natura; l'esistenza di una vita oltremondana, in cui va a risolversi la lotta della vita presente tra la verità e l'errore, tra l'onesto ed il turpe, tra la voluttà ed il dolore: infine la personalità finita dell'essere umano, che si regge sulla personalità infinita dell'essere divino, e su cui posa tutta la dignità della vita. Da queste solenni affermazioni, che illuminano della loro luce i proposti problemi e ne additano lo scioglimento, il giovane fa passo nel campo della scienza, e consultando la storia del pensiero filosofico chiama a critica rassegna le speculazioni dei pensatori, che scrutarono que' problemi e ne proposero la soluzione. Qui la sua mente rimane turbata, confusa, attonita davanti ad una folla di dottrine tanto contrarie ed opposte, di sistemi tanto disparati, di teorie tanto incerte, insussistenti e chimeriche. Della realtà universale che cosa posso io sapere? Nulla, gli risponde lo scettico, proprio un bel nulla. Tutto, contrappone l'idealista trascendentale; tu puoi saper tutto; il tuo pensiero si stende quanto l'essere universo; niente esiste che non sia pensato, e ciò solo esiste, che è conosciuto. Il mondo corporeo, sottentra il materialista, esso solo è conoscibile e sussistente; lo spirito divino, le sostanze spirituali ed immateriali sono chimere dell'immaginazione. No, ribatte lo spiritualista psicologo; l'anima,

che informa il mio corporeo organismo, è una realtà sostanziale, vivente, conscia di ciò che è, di ciò che fa, di ciò che può e debb'essere. Così non è, ripiglia il psicologista sperimentale; della psiche umana conosciamo soltanto i fenomeni, che cadono sotto i sensi e sono sperimentabili per mezzo di macchine e di acconci strumenti: ciò, che voi chiamate vita intima dell'anima, inaccessibile al dominio de' nostri laboratorî, è una vana astruseria. No, no, insorgono qui i cultori degli studi spiritici: i fenomeni dello spiritismo, che vi stanno davanti incontrastabili, indistruttibili, danno una smentita alla vostra teoria de' fenomeni psichici, ai pronunciati della vostra psicologia esclusivamente sperimentale. Così il nostro giovane se ne sta perplesso e confuso in mezzo al contrasto di tante contrarie dottrine intorno al valore ed alla virtù dell'umano conoscere.

Io sento la vita, la voglio prospera e beata; quale e quanta felicità (egli dimanda passando al secondo problema) è riservata alla mia esistenza? La felicità è una ingannevole menzogna, risponde il pessimista; il dolore, e dopo il dolore il nulla, ecco tutta la vita umana: il tempo colla sua forza irresistibile, inesorabile, tutto distrugge, si porta via le nostre illusioni, le nostre speranze, ed accumula ruine sopra ruine dentro di noi e fuori di noi. No, afferma il filosofo spiritualista, la vita non è tutta quanta infelice, come non è tutta lieta e felice, ma un intreccio di piaceri e dolori, che si alternano inseparabili: il problema della felicità va a metter capo nella vita oltremondana. Qui sottentra lo stoico, il quale pigliando posto tra i due contradditori, sentenzia: vuoi tu essere veramente saggio e beato? Schianta dalla tua anima perfin la radice del sentimento, dell'affetto: sii inaccessibile al piacere, al dolore, ad ogni passione, che ti possa commuovere: la vita non debb'essere sentita, ma governata dalla fredda e pura ragione.

Che cosa debbo io operare per rispondere alla dignità della persona umana? Quali sono i limiti, che la legge morale segna alla mia libera volontà siccome termini del giusto e dell'onesto, al di là dei quali la moralità scompare? Anche questo terzo problema fu risolto in sensi diversi ed opposti. Insegna la filosofia tradizionale, che il dovere ripugna agli esseri corporei dominati dalle cieche ed ineluttabili forze della materia, bensì compete soltanto agli esseri personali, che hanno coscienza del

loro *io* sostanziale ed il libero dominio del proprio operare. Il dovere non istà senza il libero volere, e la libertà del soggetto operante genera in lui la responsabilità morale, il merito ed il demerito. Il positivista contrappone una dottrina diametralmente opposta. La libertà del volere non esiste: l'*io* personale è una illusione. L'uomo non è una persona fornita di una individualità sostanziale sua propria, che abbia sentimenti, desideri, pensieri veramente suoi: le azioni, che in me si compiono, non sono nè mie, nè di nessuno: tutta la vita psichica non è la manifestazione di un'attività libera e conscia di sè, bensì un perpetuo flusso e riflusso di fenomeni, che non appartengono a nessuno. Così se l'*io* non esiste, riesce vano il dimandare, che cosa io *debbo* operare: se la libertà del volere è un'illusione, non vi è più ragione di operare in un modo anzichè in un altro: checchè si faccia, tutto è buono ad un modo, perchè tutto è necessario, o a dir meglio, non vi è più nè onesto, nè disonesto, ogni moralità è scomparsa.

Or che farà il nostro giovane, il quale ha interrogati i pensatori di tutti i tempi e di tutti i luoghi intorno ai grandi problemi del sapere, del vivere e dell'operare e si trova di fronte ad innumerevoli sistemi, che sono in urto fra di loro e si distruggono l'un l'altro? Non crederà più a nulla e si abbandonerà allo scetticismo? No, certo: egli possiede ancora quella vigoria d'ingegno, che è propria dell'età giovanile, e non può avere già perduta la speranza di conquistare la verità sospirata. Pur troppo, un vecchio pensatore, che ha consumato tutta la vita nello scrutare i grandi problemi della scienza e che coll'anima inaridita dal lungo e freddo speculare scorge che le verità conquistate rispondono rare e scarse alle incessanti fatiche del suo pensiero, ben può abbandonarsi a certo quale sconforto vedendo il profondo dissidio di tanti intelletti intorno i più gravi punti della scienza, e quel non so che di oscuro, di misterioso, di imperscrutabile, che giace in fondo ad ogni questione. Ma in ogni caso il serio pensatore, in mezzo al variare delle dottrine contrarie ed opposte, possiede in sè un principio saldo ed incrollabile, che lo agguerrisce contro lo scetticismo, ed è il concetto ed il sentimento della personalità umana, per cui l'uomo eccelle per dignità di natura su tutto l'universo corporeo, dove non esistono *persone*, ma *cose*. Il soggetto umano non è un puro

pensante e niente più, ma accanto al pensatore della scienza esiste in lui la persona individua, che vive la vita ordinaria della famiglia e della società, che sente il fremito della passione e lotta per il trionfo del dovere, che aspira ad un ideale infinito e lo persegue esercitando la sua attività nel campo immensurabile della vita operativa. Ora la scienza non può, non deve mettere in antagonismo fra di loro il pensatore e la persona vivente: deve non distruggere, ma rispettare le fondamenta naturali, su cui posa la vita della persona umana. La vera scienza nobilita, eleva, sublima l'uomo sino al suo ideale infinito; quella, che lo degrada e lo abbassa sino al fango della materia, non è verità, ma menzogna.

Io sono persona umana: ecco il massimo pronunciato della sapienza universale, che è ad un tempo la prima parola della scienza. L'affermazione del nostro essere personale mediante la coscienza è il supremo fatto psicologico, che avvolge nell'unità sua tutti gli altri; la verità prima, salda, inconcussa, superiore ad ogni dubbio, nella quale convengono l'universale degli uomini ed il ceto dei pensatori, poichè la coscienza personale ci accompagna in tutto il corso ordinario della nostra vita comune, egualmente che in tutti i lavori mentali della più elevata e trascendente speculazione.

Il pronunciato ora formolato segna il punto di contatto ed il vincolo di continuità tra il pensare comune ed il pensare speculativo, tra il sapere ordinario ed il sapere scientifico. Il nostro giovane pensatore, pigliando le mosse dal concetto della persona umana, che è mente informante un organismo corporeo, e sviscerandone il contenuto mediante la riflessione speculativa, ne trae a filo di logica un compiuto sistema di antropologia (1) e di psicologia, il quale è un commento continuo e razionale di quel concetto. A mano a mano che lo va progressivamente esplicando, egli può alla luce del medesimo giudicare della verità o della falsità dei tanti e diversi sistemi, che incontra per via, sincerando quelli, che riconoscono la personalità dell'umano soggetto, dagli altri che o la esaltano oltre misura sino a con-

(1) Su questo concetto io ho abbozzato un sistema di scienza antropologica nella mia opera pubblicata a Torino nel 1891 col titolo *Studi antropologici, l'uomo ed il cosmo.*

fonderla coll'essere divino, come l'idealismo assoluto ed il panteismo, o la abbassano sino a confonderla colla natura fisica come il materialismo, o disconoscono l'unità integrale del suo essere, come il positivismo fenomenico. Il principio, di cui facciamo parola, non esaurisce la fecondità sua nel campo della scienza antropologica e psicologica, ma informa altresì della sua virtù tutte le discipline particolari, che hanno per oggetto il mondo sociale ed illumina della sua luce anche quelle altre, che hanno per còmpito loro proprio lo studio della natura fisica, poichè la scienza tutta quanta, come l'arte, come tutto il mondo civile e sociale è una manifestazione delle due facoltà proprie della persona umana, l'intelligenza conoscitiva e l'attività volontaria.

Il Cousin, come ho notato testè, censurò il *Cogito* di Cartesio, che scinde il pensiero da tutte le altre attività, che costituiscono la vita del soggetto conoscente, come se esso pensiero potesse svolgersi e compiere il suo processo da sè solo, disgiuntamente dalle altre potenze. Da siffatta censura non può menomamente scolparsi la formola cartesiana, ma essa non tocca in verun modo la dottrina che ripone il supremo principio della scienza nella persona, la quale affermando se medesima pone se stessa come un soggetto, che non solo pensa, ma sente, vuole, opera, e nell'unità dell'*io* armonizza le forme molteplici della sua vita (1).

La storia narra di un giovane studioso della Germania, che visse nel secolo XVI, e compiuto il corso de' suoi studi venne proclamato dottore e maestro in filosofia e teologia, Giovanni Faust. La fantasia popolare avvolse la sua esistenza storica in avventurose e strane leggende, e l'immaginazione del poeta ritrasse in forma drammatica la sua vita rappresentandolo siccome il genio umano, che combatte la lotta tra la scienza e lo scetticismo, tra il bene ed il male, tra la felicità ed il nulla. Egli ama d'immenso amore la scienza, perchè in essa vagheggia

(1) Già nella Prolusione letta all'Università di Torino il 4 dicembre 1873 io proponevo la definizione *L'uomo è persona organata* siccome il principio supremo informatore della nuova antropologia, ed in esso principio io ravvisava lo spirito fecondatore di tutte le scienze egualmente che l'anima di tutto il mondo sociale.

l'ideale della felicità. Passa i suoi anni giovanili in un solitario ed affumicato gabinetto di fisica, dove in mezzo alle storte ed ai lambicchi studia e sperimenta la natura, ed a strapparle i suoi secreti ricorre ai poteri occulti della magia, dello spiritismo, dell'alchimia, della chimica trascendentale. Egli volle tutto conoscere, scrutò tutti i problemi, tentò di penetrare tutti gli arcani della natura; ma dopo di avere meditato su tutto, dopo di avere esplorato tutto quanto la natura presenta alla nostra osservazione, egli intravede che al di là di tutto il mondo conoscibile della natura e dell'umanità evvi ancora alcunchè di ignoto, che sfugge alle sue indagini, evvi il vuoto infinito, l'abisso immensurabile, lo spazio interminato e buio, dove il nostro pensiero non discerne più nulla, dove la natura non trova più luogo per le sue creazioni. Alla vista dell'ignoto impenetrabile e tenebroso egli si sente oppresso dal dubbio, ed un profondo disgusto invade la sua anima inaridita. " Ohimè (egli esclama), io ho oramai studiato filosofia, giurisprudenza, medicina, e, lasso, anche la grama teologia! e d'ogni cosa sono andato al fondo con cocente fatica. Ed ecco, povero pazzo! ch'io ne so quanto dianzi. Mi chiamano maestro, mi chiamano anche dottore, e già da dieci anni io meno di su e di giù e per lungo e per traverso, i miei scolari pel naso; e veggo manifesto che non sapremo mai nulla. Ahi, io ne avrò rapidamente consumato il cuore! Per verità, io passo di dottrina tutti quanti i ciancia-tori, dottori, maestri, scrivani e preti, ma io sono tormentato da dubbi e da scrupoli: nè l'inferno, nè il diavolo mi dà paura. Ma, e ogni gioia si è pure partita da me: non più io presumo di conoscere alcuna cosa di vero: non più presumo d'insegnare alcuna cosa, che mai valga a ravviare e condurre gli uomini al bene. Oltre di che, io non ho nè poderi, nè oro, nè onori, nè dignità nel mondo. Un cane non potrebbe lungamente durare simil vita. E però io mi sono gettato nella magia per tentare se mai gli spiriti volessero di lor bocca rivelarmi alcuni segreti, tal ch'io cessassi una volta quest'angoscia d'insegnare quello che io non so; conoscessi pur una volta ciò, che più intimamente feconda o tiene insieme questo universo, le operose sue forze, e le sementi di tutte le cose, e non facessi più un vergognoso mercato di parole ".

Così il povero Faust, scoraggiato, deluso, vorrebbe piombare

nell'eterno oblio e nel riposo del nulla, troncando anzi tempo la sua esistenza (1). Però un subitaneo risveglio del suo giovanile sentimento religioso gli fa cadere di mano il nappo letale già preparato. Ma quel momento di lucido intervallo passò come lampo. La lotta, che in lui si dibatte tra il suo spirito, che vorrebbe sfondare il mistero dell'universo, e la natura, che ostinatamente gli rifiuta i suoi segreti, tra la sua anima sitibonda di felicità ed il profondo disgusto della vita, che lo opprime, lo porta al disperato partito di vendere la sua anima allo spirito infernale a patto che lo aiuti a rompere i cancelli, che lo tengono schiavo della natura e dell'umanità, che gli riveli tutti i segreti dell'universo, che immerga la sua anima nelle fervide correnti della felicità e dell'amore, che lo renda onnipotente su tutte le forze della natura. Il patto infernale è conchiuso e suggellato collo stesso suo sangue.

Qui mi arresto, non essendovi cagione di seguire il povero Faust nella corsa vertiginosa col suo compagno infernale attraverso gli spazi immaginari. Ma non debbo tacere, che anche lasciando da banda la parte leggendaria, che avvolge la sua vita, e la parte fantastica, che costituisce la concezione poetica del dramma, un concetto altamente filosofico sta nascosto in tutta questa splendida creazione drammatica e leggendaria, ed è che anche la scienza ha i suoi recessi misteriosi ed imperscrutabili, i quali si rivelano soltanto ad una intelligenza sovrumana; che siccome vi ha un al di là della vita, ed un al di là della natura, così vi ha un al di là della scienza, l'ignoto; e che l'esistenza dell'ignoto non va rigettata, per quantunque non si riesca a comprenderlo. Chi seriamente attende alle indagini della scienza, non può non riconoscere che certa qual'ombra di mistero si stende su tutta l'immensità delle cose; ma se l'universale de' pensatori ammette alcunchè di ignoto, non tutti concordano nel determinarlo.

(1) Io so di un illustre filosofo positivista italiano, che moriva esclamando: *Sia maledetta la scienza!*

L'interinazione degli editti.
Studio di storia del diritto pubblico piemontese.

Nota del Prof. ALESSANDRO LATTES

§ 1. — Pochi ammaestramenti storici possono riuscire più efficaci di quelli che dimostrano come la forza delle cose s'imponga all'azione volontaria anche dispotica degli uomini e prevalga a questa nel risultato finale, quantunque in modo lento ed in ciascun caso singolare insufficiente. Le monarchie assolute ce ne offrono un bell'esempio, quando di fronte al succedersi dei principi più fieri difensori d'un arbitrio infrenato ed infrenabile, insieme colle resistenze individuali di qualche suddito che più fortemente rifiuta d'obbedire ad una volontà che non conosce limiti, vediamo sorgere dei freni giuridici e morali collettivi, i quali s'impongono a tutti ed a cui i principi stessi non sanno o non possono sempre sottrarsi: così si vien provando una volta di più che la libertà si consegue più efficacemente col libero volere, anche quando le leggi non siano ottime. Fra questi freni merita di esser considerata per la sua importanza l'interinazione dei decreti sovrani, di cui troviamo quasi l'unico esempio in Italia nella monarchia sabaudo-piemontese e di cui possiamo seguire lo svolgimento successivo in molti documenti editi ed inediti.

§ 2. — L'istituto dell'interinazione consiste in ciò che ogni provvedimento legislativo del principe deve venir presentato a qualche collegio supremo dello stato per essere esaminato ed approvato e non ha senza tale formalità piena forza obbligatoria: il collegio ha facoltà di esporre le sue osservazioni al principe e sospende intanto l'interinazione.

Varie etimologie furono proposte per la parola, l'una strana secondo le leggi della filologia da *iterum*, perchè il sovrano,

quando incontra difficoltà e resistenze, ripete l'ordine ed il magistrato rinnova l'esame del provvedimento (1) l'altra meno strana da *interim*, non accettabile, perchè l'interinazione non è la sospensione dell'atto, ma il complemento di esso che fa cessare lo stato provvisorio (2) l'ultima certa ed inattaccabile, dalla voce francese antica *enterin*, figlia del latino *integer* e sorella dell'italiano *intero* (3), per cui *entériner* significa completare e perfezionare, *pour ainsi dire rendre entier* l'atto a cui si riferisce, ed il Boutillier nel suo *Somme rural* (sec. XIV) potè dare il nome di *restitution enterine* alla restituzione in intiero.

§ 3. Nella monarchia sabaudo-piemontese si parla generalmente dell'interinazione come facoltà spettante ai senati ed alle camere dei conti: questi furono veramente i collegi che l'esercitarono più a lungo e pei quali si ebbero speciali decreti, ma anche altre magistrature vi furono talora chiamate e l'origine e le prime tracce di tal facoltà risalgono a tempi nei quali i senati non ancora esistevano e la camera non aveva autorità sufficiente. Non si può attribuire all'interinazione il posto conveniente nella storia del diritto pubblico senza esaminare brevemente a chi apparteneva il potere legislativo e come veniva esercitato.

Nel nostro principato, come negli altri d'Italia, la potestà di dare ordinamenti obbligatorii per tutti i sudditi fu sempre riservata al sovrano, conte, duca o re, sia in via di fatto, perchè egli era investito del potere supremo ed aveva la forza per farsi obbedire, sia in via di diritto, poichè sino dal sec. XIV gli imperatori, fonte prima d'ogni podestà, concessero ai principi

(1) Dionisotti, *Storia della magistratura piemontese*, I, 148.

(2) Sola, *Commentaria ad universa Sabaudiae ducum decreta, De interinatione*, gl. I, p. 621. — V. in Larousse, *Grand dictionnaire universel*, VII, 633 s. v. *entérinement*, un'altra strana spiegazione data da un grammatico francese, nelle annotazioni al Vaugelas, *Remarques sur la langue franç.*, che farebbe derivare *entériner* dalla concessione provvisoria che Carlo V accordò ai protestanti nel 1548 per l'esercizio della loro religione, finchè un concilio od una dieta avesse ottenuta la pace religiosa tra gli avversari.

(3) Menagio ricordato ap. Larousse, l. cit. — Ragueau e De Laurière, *Gloss. du droit françois*, s. v. *entériner*. — Godefroy, *Dict. de l'anc. langue franç.*, s. v. *enterin* e suoi derivati. — Koerting, *Lateinisch-romanisches Wörterbuch*[2], n. 5060.

di Savoia almeno parzialmente la facoltà di dare leggi negli stessi diplomi, con cui conferirono loro la dignità ed ufficio di vicari imperiali (1). Non esisteva quindi all'inizio nessuna distinzione di tali ordinamenti in varie specie, fossero essi generali per tutto lo stato e per tutti i sudditi, o per una parte di quello o per una classe di questi, o particolarmente stabiliti a beneficio di alcuna persona determinata. Nel sec. XIV si chiamarono *ordinamenta*, *ordonnances*, *statuti* e conservarono quest'ultimo nome sino ad Emanuele Filiberto (2); più tardi per influenza romana e francese si usò più volentieri il nome di *editti* e *lettere patenti*, per la forma in cui si rivolgevano *a tutti coloro che le presenti vedranno* o *ai nostri fedeli e leali magistrati* e perchè si trasmettevano, almeno in Francia, aperte a chi doveva farle eseguire (3). Nel sec. XVII si mantenne il nome di *editti* pei provvedimenti generali, si dissero *costituzioni* quelli che riguardavano una materia determinata in ogni sua parte, *lettere patenti* i provvedimenti personali o particolari, *decreti* o *viglietti* gli ordini di minor importanza (4). La voce *rescritto* è piuttosto di origine dottrinale, tratta dalle fonti romane si diffuse per opera dei giureconsulti e passò dalle sentenze giudiziarie alle RR. Costituzioni (5).

§ 4. — Nella formazione di quegli atti legislativi anche i principi di Savoia usarono sempre ricorrere al consiglio di coloro che vivevano attorno ad essi. Furono dapprincipio i baroni

---

(1) Diploma di concessione del vicariato imperiale per Amed. VI (1365): " Mandata, statuta et precepta, ne excessus seu delicta in antea perpetrentur, statuere et facere ", e diploma corrispondente per Lodov. di Savoia (1412): " Decreta, statuta et provisiones in predictis omnibus faciendi de novo, corrigendi, tollendi iam facta semel et pluries ". — Guichenon, *Hist. de la maison de Savoie*, IV, 131, 208. Cfr. Heineccius, *Responsa iuris super feudis Langharum*, quaest. IV.

(2) Cfr. i documenti pubblicati dal Nani ne' suoi lavori *Stat. di Amed. VI. I primi statuti sopra la camera dei conti*; cfr. gli *Statuta generalia Sabaudiae reformationis*, titolo ufficiale della riforma di Amedeo VIII, e i titoli delle edizioni posteriori degli statuti ducali ap. Manno e Promis, *Bibliogr. storica della Monarchia di S.*, I, 199 e segg.

(3) Cfr. Esmein, *Cours élément. d'hist. du dr. franç.*, 438.

(4) V. passim nelle note raccolte del Borelli e del Duboin, p. es. le costituzioni di Vittorio Amedeo I e di Maria Giovanna Battista.

(5) RR. CC., 1729, l. 2. tit. 3, c. 1, § 8.

e grandi vassalli riuniti per dovere feudale alla loro presenza, che conferivano solennità agli atti cui assistevano e ne promettevano l'obbedienza (1); furono poi i nobili e gli ecclesiastici che si trovavano per caso in ciascun momento alla corte del principe nel luogo di sua residenza o momentanea dimora, per cui molti ordini si chiudono colla formula *per dominum N. comitem relatione dominorum N. N.* (2); fu più tardi il consiglio regolarmente costituito che seguiva il principe col titolo di *consilium nobiscum residens*, finchè dopo Emanuele Filiberto assunse qualità e nome di consiglio di stato (3). Tutti questi consiglieri potevano aver molta efficacia sull'animo del principe per autorità personale durante la preparazione dei provvedimenti legislativi, ma non avevano alcun diritto d'intervenire, dopochè quelli fossero stati emanati ed imposti ai sudditi.

Usarono pure le assemblee degli stati, generali o regionali, presentar domande e proposte di riforme da tradurre in legge per le varie parti della amministrazione dello stato, nel momento in cui deliberavano d'accordare i sussidi chiesti pei bisogni della corona, parlando tanto più forte quanto più era pesante il sussidio e più frequente la richiesta (4). Ma delle loro suppliche in forma di memoriale alcuni capitoli si concedevano, altri si negavano liberamente dal principe, e tale proposta non aveva quindi un'azione diretta e certa sopra di lui: un solo esempio mi è noto, del ducato d'Aosta nel 1551, in cui i comuni recisamente e ripetutamente rifiutarono di decidere intorno al sussidio, finchè non ottennero quanto domandavano per la revisione delle consuetudini (5).

(1) Cfr. Carutti, *Regesta comitum Sabaudiae*, passim.

(2) Statuti di Edoardo (1325) ap. Nani, *Stat. di Am. VI*, 48. — Mon. hist. patr. Legg. municip. I, Statuta Taurini, nei documenti pubblicati ad illustrazione degli statuti, dove in quelli del sec. XIV si legge quasi sempre la formula indicata, mentre in quelli del sec. XV s'incontra sempre l'altra *per dominum praesentibus dominis N. N.*

(3) Stat. di Aimone (1329) e di Am. VI (1355) ap. Nani, l. cit. — Stat. di Am. VI (1351) e di Bona di Borbone (1389), ap. Nani *I primi stat.*, cit. pp. 41, 48, 53. — Peverelli, *Il Consiglio di Stato fino ad Eman. Filib.*

(4) Sclopis, *Consideraz. storiche intorno alle antiche assemblee rappresentative*, nei Mon. hist. patr. Comitiorum II, Append., p. 87 e segg.

(5) Bollati, *Congregaz. dei tre stati della valle d'Aosta*, I, 300, 303.

§ 5. — Alquanto diversa fu o potè essere secondo gli statuti di Amedeo VIII l'opera del cancelliere di Savoia e del presidente del consiglio residente a Chambéry. Al primo era affidata in modo esclusivo la custodia dei sigilli del principe, *sigilla nostra*, da apporsi in tutti gli atti, lettere, sentenze, scritture *que procedent a nobis et dicta curia nostra*, cioè dal consiglio residente col principe e con lui moventesi da una residenza all'altra: al secondo spettava la custodia dei sigilli del consiglio di Chambéry per tutti gli atti emanati da quest'altra *curia nostra*. Entrambi dovevano esaminare tali atti e, con una formula che si ripete quasi identica, *sigillare que sigillari debebunt et videbit sigillanda, que autem videbit rescribenda, rescribi faciat in formam debitam et que arbitrabitur canzelanda, canzelet et annullet* (1).

L'aggiunta dei sigilli dello stato, vari di numero e di forma secondo i tempi e la specie degli atti (2), era necessaria per provare l'autenticità e la validità di essi (3): non potrebbe essere espressa più chiaramente la facoltà di esaminare ogni provvedimento, di sospendere l'apposizione dei sigilli e fare osservazioni al principe, di modificare gli atti stessi secondo la propria coscienza e senza limiti, facoltà che contiene veramente una delegazione parziale del potere legislativo a quei grandi ufficiali, grandi nella piccola corte. Non sappiamo se la cura dei sigilli e un tale potere discrezionale rappresentino una novità introdotta da Amedeo VIII od appartenessero già ad essi anche nel secolo XIV, poichè la serie quasi completa dei cancellieri comincia nel 1323, pur avendosene notizia almeno dal 1189 (4), e le prime tracce del consiglio residente a Chambéry risalgono ai conti Edoardo ed Aimone, intorno al 1329 (5): probabilmente quella funzione, sorta per via di consuetudine, fu accettata dal duca nei suoi statuti, perchè già saldamente fondata nella tradi-

(1) Statuti di Amedeo VIII, l. III, c. 4, 34.

(2) CIBRARIO e PROMIS, *Sigilli dei principi di Savoia*, pp. 6, 19 e segg.

(3) Cfr. FRISCH, *Die Verantwortlichkeit der Monarchen und höchsten Magistrate*, pp. 13, 14.

(4) GALLI, *Cariche del Piemonte*, I, 2. Cfr. Mon. hist. patr. Chart. I, n. 624: " Mauritii cancellarii nostri " (del conte Tommaso I). — Cfr. CIBRARIO, *Origine e progressi delle istituz.*, parte II, *Specchio cronologico* 101.

(5) Stat. di Edoardo e d'Aimone citt.

zione forse per imitazione d'esempi francesi (v. § 14), forse senza vederne la grande importanza, poichè nessun cancelliere o presidente ne aveva ancora abusato o s'era opposto ai voleri del principe.

Non si ricorda alcun esempio di resistenza ostinata di alcuno di quei magistrati, che sia stata vinta solo dall'espresso e rinnovato comando del sovrano: probabilmente quella funzione fu sempre esercitata per mezzo di osservazioni anteriori alla formazione definitiva degli editti. A conferma di ciò può esser ricordato un parere compilato dal senato di Savoia nel 1561 per incarico di Emanuele Filiberto intorno alle attribuzioni del gran cancelliere, redatto probabilmente da Luigi Milliet che fu poi chiamato all'alto ufficio sotto il principato successivo (1), nel quale si legge che per l'importanza dell'opera del cancelliere il senato raccomanda al principe di consultarlo prima per assicurarsene il consenso posteriore, al cancelliere stesso di presentare tutte le sue obbiezioni durante la discussione dei provvedimenti proposti. Manifestamente la facoltà di modificare e cancellare parte di questi viene sempre riconosciuta in astratto, quantunque nel memoriale non se ne faccia esplicita menzione tra le funzioni di quel magistrato, ma in pratica l'opera sua è consultiva e precedente alla formazione completa delle leggi. La formula surriferita venne trascritta senza mutamenti nelle RR. CC. del 1723: nelle successive del '29 e del '70 si parla solo di sigillare gli atti, quando il cancelliere giudica che debbano venir sigillati, ma si omette la facoltà di cancellazione (Lib. II, tit. II, c. I).

§ 6. — Il fondamento dell'interinazione si trova precisamente in alcuni editti per la tutela dei beni demaniali che incontriamo nello stesso sec. XV (2). Nel 1433 fu proibito di eseguire qualsiasi lettera che arrecasse diminuzione del patrimonio del principe, se non fosse stata veduta e diligentemente verificata dalla camera dei conti e l'attestazione di tale verifica non fosse stata scritta sul documento medesimo. Il noto statuto del 1445, che sancì solennemente l'inalienabilità dei beni demaniali lasciati sino allora in balia del principe, si chiude col divieto al can-

(1) Burnier, *Hist. du Sénat de Savoie*, I, 395.

(2) Duboin, *Raccolta delle leggi*, XXIV, 26, 1, 5, 201, 6, 10, 13, 14.

celliere d'apporre i sigilli, ai maestri dei conti di far ragione a qualunque concessione od alienazione fatta dal principe e dai suoi successori. Nel 1449 si ordina alla camera di respingere ogni alienazione di tali beni, *donec super eis expressum habueritis mandatum a nobis*. Nello statuto di Jolanda del 1475, ove si riconferma solennemente quello del 1445, si dichiara ch'esso venne comunicato al consiglio del principe e questo dopo uditane pubblica lettura ne promise solenne osservanza. La reggente Bianca di Monferrato ritorna nel 1490 alla formula antica ed interdice ai presidenti e maestri dei conti d'ammettere qualsiasi alienazione e d'*interinare* qualsiasi lettera del principe che venga a scemarne il patrimonio. Infine Filiberto nel 1497, rinnovando le consuete proibizioni, impone agli uditori della camera uno speciale giuramento ed anche qui il consiglio residente col principe e la camera, dopo aver veduto e lette siffatte lettere, si dichiarano pronti all'osservanza di esse, *parati obedire ut tenemur*.

§ 7. — Questi statuti ci offrono nell'editto 1490 il primo esempio a me noto della voce *interinazione* nei documenti piemontesi. Secondo un giureconsulto del sec. XVI, Amedeo da Ponte (1), essa si legge anche in un decreto più antico del 1484, relativo alla stessa materia, ma nel testo pubblicatone dal Duboin (2) la parola non s'incontra e forse quegli confuse il nome col fatto già ripetuto di frequente a' suoi tempi. D'altra parte quello statuto del 1484 ha anche una forma speciale, che si trova spesso negli ordinamenti dei principi sabaudi; poichè il duca Carlo I, invece di proibire le alienazioni dei beni demaniali, promette che non ne compierà mai, con un vero contratto che egli conferma mediante una stipulazione solenne obbligando tutti i suoi beni, e la promessa è ricevuta dal segretario ducale a nome di tutti gli interessati assenti e futuri e dei successori del principe. L'*interinatio gratiarum*, di cui si fa menzione in un decreto poco posteriore (1493) della duchessa d'Orléans, signora d'Asti (3), è affatto diversa dall'interinazione degli editti, come si dirà più innanzi (Cfr. § 8).

---

(1) Am. A Ponte, *Qui feudum dare possunt*, n. 91.

(2) Duboin, XXIV, 8. — Borelli, *Editti antichi e nuovi*, 273.

(3) *Statuta civitatis Ast.*, p. 97 (ed. 1534).

Gli statuti citati presentano inoltre tutti gli elementi che costituiscono più tardi la facoltà d'interinazione. La camera dei conti ha l'autorità, anzi il dovere, rafforzato con uno speciale sacramento, di verificare gli atti del principe e respingerli, se contraddicono all'inalienabilità dei beni demaniali: il duca può assolverla dall'osservanza di tale precetto con suoi ordini speciali: gli statuti si comunicano anche al consiglio del principe e si leggono in pubblico, perchè i membri di esso ne abbiano notizia ed i provvedimenti vengano promulgati e pubblicati: il collegio si dichiara pronto ad osservarli e farli osservare. Certamente dalla lettura e visione dei provvedimenti sovrani derivò la consuetudine d'esaminarli, di presentare qualche obbiezione, di resistere quando apparissero contrari agli interessi del principe e dello stato: questo confermano le parole stesse delle formule d'accettazione, che si ripetono uguali anche in atti posteriori (1), e qualche fatto che prova come i magistrati non fossero sempre disposti alla cieca obbedienza. Un decreto del 1509, respinto la prima volta dal consiglio residente in Chambéry, fu ripresentato due mesi dopo quando esso era riunito *iudicialiter* in udienza solenne, ed il consiglio ne promise l'osservanza, *ut tenemur*, soltanto *attentis signatis multiplicatis mandatis per dominum ducem etiam per suas missivas nobis factis*, dopo ripetuti messaggi verbali e scritti (2). E quando lo stesso duca Carlo III volle dar in feudo al gran mastro della sua casa la contea di Pont de Vaux, non potè aver ragione del rifiuto opposto dagli uditori dei conti all'interinazione e si valse d'un espediente estremo (caso unico nella storia sabaudo-piemontese), privarli d'ogni ufficio e stato e far gridare i loro nomi per le contrade della città, con grande onor loro presso gli abitanti (3).

Da questi fatti e da quelle parole apparisce manifesto a parer mio che i principi considerarono necessaria la dichiarazione d'obbedienza ed il riconoscimento dei loro statuti, non procedevano all'applicazione di essi per autorità propria, ma ordinavano al collegio d'apporre la formula e d'obbligarvisi. L'effetto era il medesimo, ma diversa la forma, e vari elementi

(1) Duboin, XVIII, 116, 120, 123 (in nota), (an. 1544, '45, '48).

(2) Ibid., XXIV, 15.

(3) Cibrario, *Origine e progressi delle Istituz. della Mon. di Savoia*, 144.

concorsero a spingere i duchi verso siffatto modo d'agire, la reminiscenza degli antichi *conseils* de' baroni da cui derivano direttamente quei consigli, il bisogno di vincere le resistenze dei sudditi, tanto più quanto più fossero collocati in alto presso il sovrano, il timore che i sudditi stessi vedessero di malo occhio decreti non approvati dalle persone più prossime al principe e che queste male ne curassero l'esecuzione, se non ne avessero promessa l'osservanza (1).

L'istituto dell'interinazione ci si presenta dunque pienamente applicato alla fine del sec. XV e nei primi anni del successivo, ed il Pertile afferma a torto (2) ch'esso fu introdotto durante la prima occupazione francese. Esso potè costituirsi in quel tempo sopra una base solida, perchè i collegi, a cui ne venne affidata la cura, divennero allora consapevoli della loro importanza e ben ordinati, appunto per gli statuti di Amedeo VIII e pei decreti che attribuirono alla camera le funzioni di vigile custode del pubblico demanio.

§ 8. — Gli statuti suaccennati si riferiscono a due specie di provvedimenti, gli ordini generali che si comunicano ai due collegi e le disposizioni particolari intorno ai beni demaniali che devono esser verificate dalla camera dei conti. E per queste ultime giova ricordare come si abbia il consueto circolo vizioso di rinnovati divieti e di deroghe ai medesimi, come siano altrettanto frequenti i severi comandi di non tener conto di qualsiasi lettera o statuto che contenga alienazione di quei beni, sebbene concessi per importunità di supplicanti (3), quanto gli ordini precisi di osservare ed eseguire le disposizioni a beneficio d'alcuna persona in rimunerazione dei servigi prestati, nonostante ogni decreto o statuto contrario ed ogni clausola d'invalidazione preventiva che in questo fosse inserita.

Un altro decreto del duca Carlo III (1513) riguarda una terza specie di atti e concessioni personali. I delinquenti, che ottengono grazie e indulti dal principe, devono presentarle entro un mese al consiglio di Chambéry, costituirsi prigionieri per

(1) Cfr. Bodin ap. Lemaire, *Les lois fondament. de la Monarchie franç.*, 119.

(2) Pertile, *St. del diritto italiano*², II, 194.

(3) V. qualche esempio di questa espressione: *ad importunas nonnullorum instantias*, e d'altre simili ap. Duboin. XXIV. 8. 21, 26, VIII, 271 (an. 1484. 1564, 1578, 1623).

attenderne le decisioni e dar la prova della verità dei fatti allegati: il consiglio, quando avrà riconosciuto che tali lettere non sono surrettizie nè ottenute con occultamento della verità, udito il procuratore fiscale e la parte lesa, procederà all'interinazione di quelle e ne ordinerà l'esecuzione (1). Il principe, depositario supremo della podestà giudiziaria, può intervenire nell'esercizio di questa, anche dopochè l'autorità, a cui egli la delegò, ha compiuto l'opera sua, liberando i condannati dalla pena: ma poichè egli può venir indotto a concedere tale beneficio personale o con false informazioni (surrezione) o col nascondergli parte della verità (orrezione), il supremo consiglio è chiamato ad investigare intorno a questi punti, e l'interinazione delle lettere di grazia dimostra che furono riconosciute inoppugnabili, che la buona fede del principe non fu sorpresa in alcun modo e che il delinquente non è indegno della concessione largitagli. Questa specie d'interinazione non esce dai confini del potere giudiziario ed il consiglio interviene per assicurare la retta applicazione del diritto di grazia, non contro la volontà del principe, ma contro i sotterfugi di coloro che vorrebbero trarlo in errore: tuttavia può ammettersi che la libertà d'esaminare questa categoria di provvedimenti ducali e d'applicarli solo quando sono fondati sulla verità e sul diritto, abbia esercitato qualche influenza indiretta anche su altre specie di quelli, p. es., sull'investigazione intorno agli statuti generali, i quali pur emanavano dallo stesso sovrano, avevano la stessa natura, si presentavano allo stesso collegio per venir applicati.

§ 9. — Dopochè Emanuele Filiberto ebbe riordinati i magistrati supremi dello stato sostituendo in modo definitivo i due senati di Savoia e di Piemonte ai consigli di Chambéry e cismontano ed istituendo le due camere dei conti con giurisdizione esclusiva di grado pari a quella dei senati (2), si promulgarono da lui e dal suo successore alcuni decreti molto importanti nella nostra materia, in cui sono chiaramente accettati e riconosciuti tutti gli elementi che formano il vero carattere dell'interinazione (3).

(1) Borelli, 168, 170 (1513, conferm. 1632).

(2) Ricotti, *St. della monarchia piemont.*, II, 144. — Borelli, 456.

(3) Editti 1560, 16 ottobre, Borelli, 456. — 1564, 7 giugno, Duboin, XXIV, 21. — 1571, 31 ottobre, Duboin, VIII, 253. — 1577, 5 ottobre, Borelli,

a) I provvedimenti del principe si presentano al collegio che deve esaminarli, quando sono già compiuti, muniti del sigillo ed usciti dalla cancelleria;

b) il collegio deve ricercare se l'atto è viziato per orrezione, surrezione od *incivilité*, cioè se è non conforme a verità o contrario al diritto, o se non sembra *ragionevole* di passare all'interinazione;

c) il collegio ha il diritto di comunicare le sue osservazioni al principe, sospendendo l'interinazione, e di modificare l'atto, se lo crede necessario;

d) le voci *interinazione* ed *approvazione* sono in tutto equivalenti, la formalità è necessaria perchè l'atto abbia valore e possa esser eseguito e deve compiersi entro un termine fissato sotto pena di nullità;

e) l'atto interinato e reso completo viene trascritto nei registri speciali tenuti presso il collegio, affinchè se ne conservi memoria e si possa ricorrervi in caso di bisogno;

f) il senato esercita quest'ufficio per gli editti e decreti perpetui, le lettere di nobiltà, le grazie d'ordine giudiziario, tutti gli atti relativi a materie comprese nella sua giurisdizione: alla camera dei conti spettano invece le immunità ed esenzioni, le concessioni d'uffici e pensioni, le infeudazioni ed alienazioni, le donazioni e remissioni di pene, tutti gli atti che si riferiscono al patrimonio del principe ed al pubblico erario.

§ 10. — Notizie assai minute intorno al modo in cui veramente si compieva l'interinazione dai magistrati che vi erano chiamati, si ritraggono dai documenti, cioè specialmente dalle formule apposte in fine degli editti che narrano in particolare per ciascuno la storia della sua approvazione.

Gli atti si presentavano in originale, colle firme del principe, del cancelliere, dei segretari e muniti del sigillo dello stato. Fu già accennato alla separazione delle attribuzioni fra i senati e le camere: la competenza territoriale era determinata dal luogo in cui l'atto doveva esser eseguito, e gli editti

---

458. — 1578, 1 maggio, Duboin, XXIV, 26. — 1579, 6 dicembre, Jolly, *Compilation des anciens édits*, 58, per la Camera di Savoia. — 1583, 15 novembre, Borelli, 427. — 1584, 8 settembre, Duboin, XX, 27. — 1598, 20 giugno, Duboin, III, 327.

generali dovevano esser interinati sia in Savoia che in Piemonte. Talvolta i più importanti in materia patrimoniale e finanziaria si presentavano ad entrambi i collegi, senza regola di precedenza, con piena libertà per ognuno di modificarli o di sospendere, qualunque fosse stata la deliberazione dell'altro.

Le grazie pei colpevoli di qualche reato dovevano essere esaminate dal senato a classi riunite, secondo una regola introdotta nel sec. XVII e mantenuta nelle RR. Costituzioni (1). Nel periodo più recente i collegi chiamati all'interinazione ebbero diritto a riscuotere alcune regalie per gli atti e concessioni relative a persone particolari (2).

La trasmissione degli atti si faceva dal magistrato fiscale esistente presso il collegio, con nome d'avvocato fiscale o generale pel senato, di procuratore patrimoniale o patrimoniale semplicemente per la camera o con altri nomi secondo i tempi; rescritti e lettere particolari si presentavano umilmente dai supplicanti i quali richiedevano l'interinazione *per poterne godere il beneficio*. Il magistrato fiscale deve sempre dare il suo parere intorno al provvedimento, ma il collegio non è obbligato a seguirlo e si ha qualche raro esempio d'interinazione accordata contro l'opinione di quello (3).

Mentre qualche editto prefigge un termine entro il quale la formalità doveva essere compiuta sotto pena di nullità (tre mesi nel 1578), si accenna talvolta alla subannalità, cioè alla decorrenza di un anno compiuto senza interinazione, cosicchè (conforme al diritto romano imperiale) (4) sarebbe perduto il diritto di impetrarla, se non si fosse concessa la restituzione in intiero contro quel difetto, permettendo ciononostante la presentazione dell'atto (5).

---

(1) Costituz. del 1632, art. 3; Borelli, 156. — RR. CC., 1723 e 1729, l. II, t. III, c. 10.

(2) Duboin, IV passim, nelle diverse tariffe per gli uffici del senato e della camera dei conti.

(3) Cfr. p. es. Duboin, VIII, 455 (an. 1594) e Registro delle interinaz. della camera al 7 novembre 1580.

(4) Cod. Just. I, 23, 2. — Corpus Jur. Canon. Decretal., I, 3, 23.

(5) Es. Duboin, XVIII, 51 not. (1660). — Jolly, 669, 682 (1674). — Ricotti, op. cit., VI, 245. Anche nell'interinaz. del 1580, citata nella nota precedente, il procuratore fiscale diede parere contrario perchè era passato l'anno.

Quando il collegio non credeva opportuno d'interinare subito, mandava le sue rimostranze, o rappresentanze, come si dissero piuttosto in Piemonte, per lo più in iscritto. Nessuna formula imperativa trattenne mai il senato o la camera dal presentare le loro osservazioni, nè la clausola in cui il principe decreta di certa scienza e piena possanza, nè l'espressione della precisa volontà che l'atto venga interinato senza opposizione, od il precetto che l'editto si consideri come prima, seconda, terza e perentoria giussione da non rinnovarsi in alcun modo, nè la dichiarazione di derogare ad ogni editto precedente, od il proscioglimento dei consiglieri da qualsiasi giuramento che avessero prestato d'opporsi a provvedimenti illegali o nocivi. Tutti questi espedienti si trovano adoperati qualche volta dai principi di Savoia e gli editti offrono tuttavia esempi della resistenza dei collegi o di modificazioni introdotte da essi (1).

Se il principe non vuol far ragione alle rappresentanze dei magistrati, rinnova l'ordine d'interinare ed il suo comando assume il nome di *giussione*; talvolta discute e contrappone alle obbiezioni altri argomenti, tal'altra dichiara d'aver gradite le osservazioni, conoscere le difficoltà e domandare ugualmente l'interinazione, e talora afferma soltanto che tale è la sua volontà pel bene dello stato.

I collegi cedono in qualche caso al primo comando, più spesso resistono, ripetono le rappresentanze finchè l'ordine viene rinnovato, o vengono ad accordi col signore: talvolta eseguiscono l'interinazione con correzioni che vanno dai semplici schiarimenti interpretativi a modificazioni assai importanti. Per esempio nel 1603 la camera dei conti aggiunse che in ogni alienazione di beni demaniali si considerasse sempre apposta e sottointesa la riserva del diritto di ricupero *selon la commune observance* e nel 1680 insistè perchè se ne facesse menzione esplicita nei bandi di vendita (2); nel 1650 e 1665, mentre il principe voleva conservare agli appaltatori della zecca l'ampia esenzione da ogni specie d'imposte di cui godevano, la camera stessa la ridusse entro limiti precisi e non esagerati (3).

(1) Es. DUBOIN, II, 373, 381, 389, 396, 405, 414 (an. 1652, '72, '82, '93, 1701, '15).

(2) CIBRARIO, op. cit., 284. — DUBOIN, XXIV, 63.

(3) DUBOIN, XVIII, 49, 52.

V'ha chi afferma che l'interinazione non potesse più rifiutarsi dopo tre giussioni, ed Emanuele Filiberto minacciò lo sdegno del principe al senato che resistesse alla terza, e Vittorio Amedeo I dichiarò ai delegati del senato di Savoia che voleva esser obbedito dopo uno o due avvisi (1): ma d'altra parte si hanno esempi d'intimazioni rinnovate fino a sei volte (2), ed anche quando si aggiungeva la clausola precisa, che il primo comando, contenuto nell'editto unico, fosse considerato come prima, seconda, terza e perentoria giussione, questa formula rimase spesso inefficace e probabilmente non era che un'imitazione tralaticia di quella che si usava contro i contumaci in giudizio, invece di rinnovare veramente la citazione per tre volte (3).

Raramente usarono i duchi modi troppo imperiosi: per esempio, Emanuele Filiberto ai maestri de' conti restii ad interinare certe lettere patenti (1575), colle quali cedeva alla marchesa d'Urfé la contea di Rivoli ed il marchesato di Baugé in cambio della contea di Tenda col valico alpino importantissimo, rispose ch'egli sapeva benissimo quello che faceva, voleva esser obbedito da tutti i suoi sudditi ed avrebbe saputo costringervi chi avesse osato resistergli. Così Carlo Emanuele I nel 1610 minacciò ai consiglieri della camera la sua disgrazia in generale e la privazione degli uffici in particolare, perchè rifiutavano di interinare l'infeudazione del feudo di Verzuolo (4). I duchi di Savoia non si recarono mai personalmente alle udienze del senato o della camera per comandare l'interinazione e vincere le resistenze indomabili, in una forma uguale a quella che in Francia fu detta *lit de justice*: ogni affermazione contraria sembra inesatta, poichè tale comparsa solenne alle adunanze, una sol volta sotto Emanuele Filiberto, due sotto Carlo Emanuele I, fu fatta

---

(1) Burnier, op. cit., I, 271, II, 9. — Cfr. Pertile, op. cit.², II, 195. — Brissaud, *Cours d'hist. générale du dr. franç.*, I, 373 not.

(2) Galli, *Cariche del Piem.*, I, 290, 299, 732. — Ricotti, op. cit., VI, 245. — Cibrario, *Specchio cronologico* (op. cit., II), 321, 331 (an. 1612, '39, '52, '77, 1722). — Registro delle interinaz. della camera, an. 1603, 1660 passim.

(3) Bethmann Hollweg, *Der römische Civilprozess*, II, 775. — Pertile, op. cit.², VI, parte II, 36.

(4) Cibrario, *Origine delle istituzioni* (I), 144; *Specchio* (II), 300. — Ricotti, op. cit., II, 426, non ne parla.

soltanto per rendere al collegio onore e reverenza, non per imporre l'esecuzione della volontà sovrana (1).

La formula dell'interinazione contiene la dichiarazione che presentato l'atto, udito il parere del magistrato fiscale a cui fu comunicato come doveva, il collegio dopo averlo maturamente esaminato (talvolta avendolo trovato *ragionevole*) lo ha interinato, ammesso ed approvato (o deliberò d'int. amm. app.), come per le presenti lettere testimoniali interina, ammette ed approva, secondo sua forma, mente e tenore, ordina che venga pubblicato nei modi legali ed osservato da tutti, che sia trascritto nei registri del collegio per avervi ricorso in caso di bisogno. Spesso fu aggiunta la clausola *salva la ragione d'ogni terzo*, massime ne' provvedimenti particolari a beneficio di privati (2). Fu affermato che, quando i collegi dovevano interinare in seguito a giussioni, omettevano la parola speciale ed ogni altra equivalente, e prescrivevano soltanto l'osservanza e la registrazione dell'atto (3): il senato veramente deliberò nel 1588 di mantenere simile differenza tra i due casi (4), ma nel fatto essa non fu conservata e se in alcune interinazioni s'incontra la formula più concisa, in molte si usa la consueta, facendo però menzione della giussione e dichiarando di obbedire alla volontà espressa dal principe per tutelare la dignità del collegio (5).

Il senato e la camera di Savoia preferiscono quasi sempre una formula più semplice, *lecta*, *pubblicata et registrata* e più tardi *lu*, *vu et enregistré* in calce dell'editto, indicandosi così la lettura, registrazione e pubblicazione senz'accennare all'approvazione del provvedimento stesso (6).

---

(1) Cibrario, *Specchio* (II), 287. — Burnier, op. cit., I, 324, 450, 382.

(2) Es. Borelli, 1093. — Sola, *Comment. ad universa ducum Sabaudiae decreta*, 681. — Jolly, 604 (an. 1582, 1624, 1634).

(3) Rezasco, *Dizion. del ling. ital. storico*, s. v. *interinare*.

(4) Sola, op. cit., *De interin.*, gl. 2, p. 624.

(5) P. es. in una lunga scrittura del 1756 sulla bannalità dei molini di Torino (Duboin, XXIV, 1481 e segg.), si citano moltissimi editti, indicando precisamente per ognuno se fu interinato senza opposizione o sopra giussione.

(6) Bally, *Recueil des édits et reglemens de Savoie* e Jolly, *op. cit.*, passim. — Burnier, *op. cit.*, I, 278. — Cfr. Fabro, *Codex Fabrianus*, I. XII, 13: " Serenissimi principis nostri litteras adprobare et, ut pragmatici loquuntur, verificare (non *interinare*) Senatus noster (cioè quello di Savoia) debet ".

§ 11. — I registri in cui si trascrissero gli atti interinati dal senato e dalla camera di Piemonte si conservano nell'archivio di stato in Torino (sez. III camerale). La serie non è completa e molti se ne perdettero per cause diverse, specialmente pel saccheggio del 1798, cosicchè della camera ne manca circa un centinaio (1). Questi registri cominciano pel senato dal 1573 (interinaz. 10 gennaio di un atto 8 novembre 1572), per la camera dal 1568 (7 gennaio), ma in un altro volume fra parecchie interinazioni staccate della camera ve n'ha una del gennaio 1564 (2). L'obbligo preciso di tener propri registri non fu imposto al Senato se non coll'editto 1583, alla camera invece negli statuti di Bona di Borbone (1389) confermati in un decreto del 1522 (3); giova credere perciò che il numero dei registri antichi eventualmente perduti sia assai limitato, poichè anche nelle raccolte degli editti sabaudi compilati sotto Maria Giovanna Battista le prime interinazioni citate sono del 1560 e 1566 (4).

Quei volumi non comprendono solo gli editti ducali interinati, ma tutti i privilegi e provvedimenti che i collegi erano chiamati ad esaminare ed approvare, gli atti direttamente emanati da essi (p. es. ordini della camera intorno al corso delle monete), gli atti privati pei quali è richiesta l'interinazione senza intervento dell' autorità sovrana (nomina di tutori, di sindaci pei comuni, ecc.). Restano esclusi soltanto gli atti che appartengono strettamente alla giurisdizione contenziosa del magistrato, rescritti di grazia e giustizia, sentenze, ecc. Una differenza notevole di forma tra i registri del senato e della camera: nei primi il segretario trascrive successivamente gli atti, colla domanda d'interinazione e la deliberazione nella formula suaccennata senz'alcuna firma originale: i secondi sono invece composti di fogli legati insieme, ciascuno dei quali contiene una deliberazione od arresto della camera coll'atto compendiosamente riassunto e le sottoscrizioni originali de' consi-

(1) Bianchi, *Le carte degli archivi piemontesi*, 47.

(2) Cfr. Dionisotti, *op. cit.*, I, 153.

(3) Nani, *I primi statuti sopra la camera dei conti*, 50, art. 13. — Borelli, 450, art. 10, 16.

(4) Bally, pp. 42, 48. — Jolly, p. 44.

glieri, cosicchè ad intervalli s'incontrano pure in ciascun volume i fogli bianchi che corrispondono a quelli scritti. Del parere del magistrato fiscale è fatta, come fu detto, menzione nella formula e solo nei più recenti registri del senato (sec. XVIII) si trascrive distintamente l'ordine di rinvio dal senato al fiscale ed il voto di lui.

§ 12. — Il periodo, nel quale l'interinazione ebbe il massimo svolgimento, la più larga ed efficace applicazione, fu la seconda metà del sec. XVI ed il XVII, cioè dalla rinnovazione dei senati e delle camere dei conti per opera di Emanuele Filiberto, fino alle RR. Costituzioni, che introdussero nello spirito dell'istituto mutamenti radicali. Man mano che la monarchia tende a divenire assoluta, il potere d'opposizione cresce negli individui e nei corpi collegiali e molte cause certamente vi cooperarono. Ogni azione genera reazione e il fiero carattere dei nobili piemontesi era specialmente adatto alla resistenza: gli stretti vincoli sorti e mantenuti per ragioni storiche fra casa Savoia e le famiglie nobili, che le stavano a lato e che più anticamente erano pari ad essa, aiutarono il formarsi d'una tradizione, che apparve inattaccabile, quando il principe avrebbe avuto l'autorità di combatterla (1); anche se i consiglieri dovevano cedere alle giussioni ripetute, nessuno può negare la forza morale delle rimostranze, poichè i principi erano pur consapevoli del fiero colpo che il poter loro riceveva ad ogni atto di sovranità rivolto contro i collegi supremi, tanto più grave quanto maggiore fosse l'importanza del provvedimento e più ragionevole il rifiuto. Furono precisamente i due principi, sotto i quali la tendenza all'assolutismo si manifesta più spiccata per le qualità del loro carattere, che riconobbero l'esistenza del freno imposto al voler loro dalla formalità dell'interinazione, ed esso spiega appunto durante l'età loro la massima efficacia.

Un fatto assai singolare e per me inesplicabile si è che i diplomatici veneziani, tanto acuti osservatori, facciano menzione

---

(1) SEYSSEL, *La grant monarchie de France*, parte I, c. X. " Et veritablement cesty frein et retenail (della giustizia considerata come uno dei freni del potere assoluto, esercitata dai parlamenti sia per la verità, *obreption et subreption*, sia per la legalità, *civilité et incivilité*) a été si longuement entretenu qu'a peine se pourrait plus rompre, encore qu'il se puisse plier ".

soltanto della funzione giudiziaria pel senato e dell'interinazione in materia finanziaria per la camera non prima della seconda metà del sec. XVII (1), e non si siano accorti di tale azione frenatrice dei senati, ma li abbiano sempre considerati servi devoti del principe, che può metterli e levarli a suo piacere e se ne vale come pretesto di non poter fare le cose che non vuole. Era forse questa l'opinione prevalente fra i sudditi? forse p. es. le resistenze e giussioni restavano ignote alla parte più numerosa ma più bassa della popolazione, e la notizia non ne uscì fuori della cerchia dei dignitari di corte e dei nobili, finchè la curiosità dei posteri non li spinse tra la polvere dei registri e dei documenti negli archivi?

L'interinazione costituisce un vero esercizio del potere legislativo da parte del senato e della camera? Chi voglia considerare il senso letterale di quell'espressione, sulle traccie dell'art. 3 del nostro Statuto, risponderà negativamente, poichè le rimostranze non avevano alcuna sanzione e l'autorità assoluta del sovrano vinceva alla fine ogni resistenza: così rispondevano in fatto gli scrittori monarchisti, ed altri meno assolutisti pensavano che quei collegi agissero soltanto per delegazione e mandato del principe (2). Ma nella pratica chi ben consideri il nome, la formola, il modo, non può negare che la distanza fu sempre minima: interinare significa approvare e completare l'atto a cui si applica — il collegio ne fa dichiarazione esplicita colle parole *interina*, *ammette ed approva* e la camera dei conti, quando sospende, dichiara senz' altro di *depellire* il richiedente dall'interinazione — i duchi giudicarono sempre l'interinazione indispensabile, se non dal punto giuridico, almeno per l'efficacia morale, e per ottenerla esposero i motivi dei loro provvedimenti, accolsero le modificazioni, permisero la discussione, nonostante le formule più imperative. Una sol volta, per quanto mi è noto, fu ordinata l'esecuzione dell'editto *anche se le pre-*

(1) *Relaz. degli ambasciat. veneti*, ser. II, t. V. Relaz. Barbaro, 1581, p. 76; relaz. Contarini, 1601, pp. 273 e 291. — *Relaz. dello Stato di Savoia* (edit. Cibrario) relaz. Bellegno, 1670, p. 66.

(2) Cfr. p. es. Grozio e Puffendorf, ap. Verri, *De ortu et progressu iuris Mediolanensis*, c. 3, § 26. — Treumann, *Die Monarchomachen*, in Jellinek-Meyer, *Staats- und völkerrechtliche Abhandlungen*, vol. I.

senti non siano presentate al senato e da questo interinate (1), ma l'urgenza del tempo dà ragione di questa eccezione, poichè quelle patenti davano all'auditore militare di guerra piena autorità nelle cause militari in tempo di guerra, dichiarandone esecutorie le sentenze, anche le capitali, senza bisogno della consueta autorizzazione del senato. In tutti gli altri casi non si può negare l'importanza del fatto che il principe non ordina da sè solo la pubblicazione degli editti e la loro osservanza, ma riconosce necessario ch'essa venga eseguita e curata dai collegi supremi, almeno con una parvenza di consenso. Sia pure che la volontà del principe debba prevalere, abbiamo un freno che agisce sempre, anche se non perfettissimo, un ingranaggio della macchina dello stato che non si può spostare con alcuna leva e far girare a vuoto.

Sarebbe facile presentare qui una lunga lista di resistenze e di registrazioni comandate, aggiungendo alle notizie già pubblicate nelle opere del Burnier e del Dionisotti (2) le altre molte che si possono raccogliere dai volumi della collezione Duboin e dai registri manoscritti. La semplice enumerazione avrebbe tuttavia un'utilità assai dubbia, specialmente per la storia del diritto: la ricerca dei motivi che trassero i collegi a rifiutare l'interinazione, sarebbe efficace ed istruttiva, ma nei registri si hanno soltanto le prove delle giussioni caso per caso e mancano nella maggiore parte le lettere mandate al principe colle rimostranze e le repliche di questo, le quali saranno disperse in molte classi e filze di documenti. Qui basterà dunque notare che il senato e la camera mediante l'uso conveniente della facoltà d'interinazione, ora provvidero a tutelare il decoro e l'onore dello stato, p. es. contro l'infeudazione di terre datesi ai principi sabaudi col patto di restar sempre soggette immediatamente ad essi, ora curarono la saldezza dell'erario, p. es. contro la coniazione di monete scadenti, certe esenzioni eccessive d'imposte, la moltiplicazione degli uffici, ora assicurarono l'inviolabilità del demanio, p. es. contro le alienazioni di terre che formavano il patrimonio antico della corona, e non dimenticarono mai le poco liete condizioni economiche delle popolazioni.

(1) Duboin, III, 887, an. 1616.

(2) Burnier, *op. cit.*, I, 272 e passim. — Dionisotti, *op. cit.*, I, 152 e segg.

§ 13. — Noi possiamo affermare che non v'è alcun altro esempio importante dell'interinazione nella storia del diritto italiano, oltre questo che ci offre la monarchia sabaudo-piemontese, poichè nè il Pertile nè il Rezasco (1) ne citano alcun altro nonostante le loro estese e minute ricerche, salva una breve e limitata applicazione nel ducato di Milano. Era bensì prescritta la registrazione dei decreti relativi al demanio in Sicilia e nella camera apostolica; nel regno di Sicilia si diè pur licenza ai magistrati, cui era commessa la custodia di quello, di *consultare* col re intorno ai provvedimenti che giudicassero pregiudizievoli e sospenderne intanto l'esecuzione, ma non si va mai oltre una materiale annotazione od un ufficio consultivo (2).

Il senato di Milano ebbe veramente da Luigi XII re di Francia facoltà d'interinare tanto gli editti generali quanto le grazie e privilegi particolari, ma se la conservò per questa seconda categoria di atti sino alla sua abolizione, la perdette assai presto per la prima. Il re promulgò poco dopo la conquista del ducato l'editto 11 novembre 1499, che per alcuni storici è la prima legge costitutiva, per altri più giustamente la prima legge organica del senato stesso, colla quale furono riordinati i consigli ducali preesistenti e fusi in un solo, che ebbe definitivamente il nome di senato, usato sin allora soltanto in modo incerto e sporadico (3). A tal collegio fu attribuita sia la facoltà di concedere esso medesimo ogni dispensa dall'osservanza di statuti e decreti in materia di giustizia, sia quella di verificare le lettere regie di donazioni, remissioni, privilegi, grazie *et edictorum tam justiciam quam policiam concernentium*, colla sanzione di nullità ed inefficacia per le lettere non presentate al senato o non interinate da esso (4). Questa è veramente facoltà corrispondente a quella del senato nella nostra monarchia, e nella formula finale di alcuni editti si conserva la prova di tale interinazione, mentre in altri è detto che furono promulgati dal re *ad relationem se-*

(1) Pertile, *op. cit.*[2], II, par. 2, 193, not. 41 e segg.; 209, not. 60, 61.

(2) Pertile, *ibid.*, not. 60, 61.

(3) Del Giudice, *I consigli ducali e il Senato di Milano* (Rendic. Istit. Lombardo, 1898, 317 e segg., 384 e segg.) contro Crespi, *Del Senato di Milano*, 38.

(4) V. il testo dell'editto, p. es. ap. Pélissier, *Documents pour l'hist. de la domination franç. dans le Milanais*, p. 17.

natus e quindi in pieno accordo con esso, di altri ancora si nota soltanto che vennero pubblicati dal banditore regio nei luoghi e modi consueti (1).

Le attribuzioni del senato furono diminuite d'assai nell'editto 11 marzo 1522, con cui Francesco Sforza, rientrato in Milano dopo la sconfitta dei Francesi, diè nuovo assetto a quel magistrato: il Verri vi accenna inesattamente e non senza errori nella data, considerandolo come fondamento del diritto d'interinazione e tacendo del precedente (2). In questo nuovo ordine la prima parte dell'articolo succitato passò quasi inalterata, la seconda parla della conferma ed approvazione entro l'anno delle lettere ducali, portanti doni, remissioni, favori e privilegi, editti e grazie, senza far più menzione degli editti generali. Nella stessa forma ristretta la facoltà d'interinazione è mantenuta nei provvedimenti successivi, quali sono l'editto 1527 del Connestabile di Borbone, le costituzioni di Carlo V del 1541, l'editto imperiale di Worms del 1545, e non altrimenti essa venne esercitata dal senato nei secoli successivi sino alla sua abolizione sotto Giuseppe II (1786) (3). È sempre mantenuto il periodo annuale di decadenza delle concessioni non interinate: si riconosce talora la facoltà d'esaminare, modificare o respingere le lettere, *prout e re principis aut publica esse cognoverint*, e si permette di presentare osservazioni e rimostranze, sospendendo l'interinazione sino alla seconda giussione (1616), ma non si accenna mai agli editti generali. Inoltre nelle poche interinazioni che esaminai si ha una formula particolare in cui la promulgazione apparisce compiuta dal principe dopo l'approvazione del senato; il principe stesso con sua personale dichiarazione dà notizia della deliberazione di questo, dopo udito il magistrato fiscale, e comanda a tutti d'osservare e far osservare il provvedimento interinato. Nella monarchia sabaudo-pie-

(1) Formentini, *Il ducato di Milano*, p. 247, 257, 696, doc. n. 45, 47, 45, an. 1516, '31. — Frisi, *Mem. stor. di Monza*, II, 239, an. 1531. — Manca invece ogni formula d'interinaz. nei docum. editi ap. Pelissier, *op. cit.*

(2) Verri, loc. cit. — Formentini, op. cit.

(3) Landi, *Senatus Mediolanensis*, pp. 155, 157. — *Constitutiones dominii Mediolanensis*, l. I rubr. *De Senatoribus*, §§ *Habeatque cognoscet etiam*, *Cum autem criminales* (ultimo periodo); l. IV rubr. *De iure et privil. fisci*, § *Literae donorum*. — *Ordines Senatus Mediolani* (ediz. 1743), pp. 26, 28. — *Collectanea decisionum Senatus ad constitutiones*, passim. — Cfr. Crespi, *op. cit.*, 91, 109, 119, 130 e per l'aboliz. Verri, *Storia di Milano*, cap. 23.

montese si ha qualche raro esempio d'una formula analoga fino ai primi decenni del sec. XVII (1), ma nella massima parte dei casi prevale l'altra, in cui il magistrato supremo interina e promulga direttamente.

Gli storici parlano della fiera dignità del senato milanese e della valida resistenza opposta alcuna volta alle pretese del governatore straniero, specialmente in materia giudiziaria civile (2), e possiamo credere alle loro parole, quantunque non citino alcun caso particolare, ma altre volte il senato fu invece forzato alla cieca obbedienza, non solo verso il sovrano, ma anche verso il suo rappresentante in Milano (3), ed ogni entusiasmo ci sembra sprecato di fronte agli esempi piemontesi, sia per la rigidità dei nostri magistrati, sia per la brevissima durata della facoltà d'interinazione a Milano, almeno nella parte più importante di legislazione generale, dove essa sarebbe stata più efficace.

§ 14. — Vi ha invece nella storia del diritto francese un altro esempio molto più importante e completo e tale anzi, che per la grande rassomiglianza tra gli istituti e per la vicinanza dei due stati si può anche dubitare se i principi sabaudi non abbiano imitato il modello che era loro offerto dalla monarchia, con cui ebbero sempre così strette relazioni.

Anche in Francia tra le attribuzioni del gran cancelliere vi era l'apposizione dei sigilli dello stato, colla facoltà d'esaminare se gli atti presentati non fossero contrari agli interessi del principe od alle leggi, e col diritto di rifiutare la sigillazione, *si elle n'est de justice et de raison*. Se ne fa menzione precisa nel giuramento di quell'ufficiale (1514), il quale perciò vien chiamato controllore e correttore di tutti i negozi di Francia, e già una celebre ordinanza del 1302, più volte confermata nello stesso secolo, prescriveva a tutti i pubblici impiegati d'astenersi dall'eseguire i comandi regi, quando avessero giusto e legittimo motivo per farlo conforme al giuramento da essi prestato (4).

---

(1) Duboin, XVIII, 34, an. 1570. — Borelli, 463, an. 1578. — Jolly, 683, an. 1674.

(2) Formentini, *op. cit.*, 114, 124. — Crespi, *op. cit.*, pp. 39, 87.

(3) *Ordines* citt., pp. 111, 193.

(4) Esmein, *Cours élém. d'hist. du dr. fr.* 442, 525. — Brissaud, *Cours génér. d'hist. du dr. fr.* 830. — Viollet, *Hist. des institut. polit. et administr.*

Anche in Francia la presentazione delle regie ordinanze ai parlamenti e la lettura solenne, cominciata nella prima metà del sec. XIV affinchè i provvedimenti fossero eseguiti, se ne conservasse memoria e si notificassero ai giudici inferiori, eccitò quelle assemblee ad esporre osservazioni che si dissero *remontrances*, sospendendo la registrazione fino alla risposta del principe: il primo esempio notevole di resistenza risale almeno al 1392. I mezzi di cui si valsero i re per imporre la registrazione furono la rinnovazione espressa del comando e nei casi più gravi il *lit de justice*, di cui si hanno esempi fino dai primi anni del sec. XV, cioè l'intervento in forma solenne alle sedute del parlamento, colle regali insegne e coi dignitari di corte, sopra un sedile a forma di letto o divano sotto un baldacchino; il re veniva in tal modo a ritogliere colla sua presenza ogni autorità al collegio supremo, a cui egli l'aveva delegata, e la riconcentrava nuovamente in sè per poter ordinare come voleva, ed i membri di quello divenivano semplicemente suoi consiglieri, come erano stati un tempo (1).

Anche in Francia in fine la camera dei conti era chiamata a registrare le lettere di nobilitazione, gli atti relativi al demanio ed alle cariche pubbliche; però essa non fece mai uso, a quanto apparisce, del suo diritto di rimostranza (2).

Di fronte a questi punti di rassomiglianza tra la registrazione in Francia e l'interinazione in Piemonte, stanno parecchie differenze essenziali.

I Francesi distinguono chiaramente l'*entérinement* dall'*enregistrement* ed usano la prima voce per i provvedimenti particolari di grazia e giustizia, che si esaminano dai giudici presidiali ed ordinari a cui spetta sentenziare sopra di quelli, e per i mandati di pagamento che devono esser controllati dai tesorieri, la seconda voce per le ordinanze regie che vengono sottoposte al parlamento di Parigi ed ai parlamenti minori, ciascuno nella sua

---

de la France, II, 133. — HITIER, *La doctrine de l'absolutisme*, 145. — FRISCH, *Die Verantwortlichkeit*, cit., 41, 42.

(1) ESMEIN, 521 e segg., 527. — BRISSAUD, 774, 794, 881 e segg. — VIOLLET, II, 196, III, 333. — GLASSON, *Hist. du dr. franç.*, VI, 275, 277; *Le roi grand justicier* in Nouv. Revue histor. du dr. franç. et étranger, 1902, 723. — BURNIER, *op. cit.*, I, 324.

(2) ESMEIN, 522. — BRISSAUD, 957. — VIOLLET, II, 167, 231.

circoscrizione (1). Invece in Piemonte si parla d'interinazione per tutti, e la registrazione è una formalità accessoria, perchè si conservi memoria e prova dell'atto. A questa differenza di nome corrisponde un divario di fatto, poichè i collegi piemontesi vogliono veramente approvare e completare il provvedimento del sovrano e mettono in evidenza il carattere complementare dell'opera loro nella formula di cui fanno uso, i parlamenti francesi attestano soltanto d'aver udito la lettura e registrato, ed il pensiero di un loro diritto d'esaminare ed approvare gli atti ebbe poca radice sia nella mente dei monarchi, sia in quella dei membri di essi e dei giureconsulti. Alcuni negarono ogni diritto al parlamento contro il re ed ammisero le rimostranze come semplici osservazioni modestamente fatte, conforme al dovere dei pubblici ufficiali di ogni grado di consigliare il principe pel bene dello stato; altri consideravano la verifica delle ordinanze come requisito necessario per la validità di esse, fondandosi sopra ragioni storiche, sull'origine di quelle assemblee derivanti in parte dalle corti regie e dalle corti dei pari, senza ammettere una vera divisione del potere legislativo: ben pochi, specialmente prima del sec. XVIII, attribuirono alle facoltà d'interinazione, registrazione e promulgazione il valore di leggi fondamentali della monarchia, a cui il re avrebbe dovuto sottomettersi, che avrebbero dovuto esser fissate in modo assoluto ed inoppugnabile, cosicchè i soli Stati generali avessero potestà di modificarle (2).

In secondo luogo i parlamenti francesi, e specialmente quello di Parigi, esercitarono sempre il poter loro con mire politiche, coll'intento di elevare l'autorità propria sopra e contro quella del re, più teneri assai di essa che del pubblico interesse, eccedettero talora nella resistenza in questioni di poco

(1) Brissaud, 952, 1421. — Viollet, III, 428.

(2) Hitier, *op. cit.*, 113, 138 e segg. — Lemaire, *Les lois fondament. de la Monarchie franç.*, 85, 86, 159, 166, 279 e segg., 311. Cfr. p. es. Pasquier, *Les recherches de la France*, l. II, c. 4 (p. 83): " Grande chose véritablement est et digne de la Majesté d'un Prince, que nos Rois auxquels Dieu a donné la puissance absolue, aient d'ancienne institution voulu réduire leurs volontés sous la civilité de la loi „. — Glasson, *Le roi grand justicier*, cit. 715, 716; *Le Parlement de Paris*, I, 434; *Parlement*, nella Grande Encyclopédie, XXV, p. 1121 e segg.

conto e provocarono colle violente agitazioni le notissime perturbazioni nello stato. I corpi sabaudi intesero sempre all'utilità della corona e del paese, resistettero soltanto a provvedimenti veramente nocivi, procurarono di scemarne i danni colle modificazioni introdotte, quando le giussioni li costringevano ad interinare. Tale diversità è prodotta dalle vicende storiche e probabilmente dal carattere speciale dei due popoli, e per essa fu certamente eccitata nell'animo degli stessi principi di Savoia la persuasione costante, per quanto inconscia, che le opposizioni dei collegi erano sempre giuste e fondate, così da formare non lieve freno al loro arbitrio: la qualità dei mezzi usati per far prevalere la volontà sovrana n'è a parer mio la miglior prova.

I re francesi agirono spesso con molta energia contro i loro parlamenti, sia con espedienti personali che potrebbero dirsi esecutivi, sia con altri che sarebbero piuttosto legislativi. Frequenti *lits de iustice*, trasferimento dell'assemblea da una città all'altra per gastigo, esilii ed imprigionamento dei membri sarebbero i primi: i secondi comprendono le ordinanze limitative della facoltà d'*enregistrement*. Fu prescritto di registrare subito dopo le prime rimostranze, se non avessero effetto (1566, ord. di Moulins), fu fissato un termine per la registrazione, dopo il quale gli atti si avevano per registrati e pubblicati senz'altro (1641, 1667), fu negato ogni diritto di modificare il provvedimento e quello di sospendere la registrazione, permettendo le rimostranze soltanto dopo di essa per una sol volta (1673). Anche quando il duca d'Orléans, per ricompensare il parlamento della reggenza confermatagli contro il testamento di Luigi XIV, gli restituì il potere antico, di cui era stato privato coll'ultimo editto citato, poco dopo egli fece nuovamente un passo indietro coll'accordare un brevissimo termine di otto giorni, trascorsi i quali si avevano per registrati gli atti nonostante qualunque opposizione (1).

Nella monarchia sabaudo-piemontese manca ogni esempio di violenza, salvo quello di Carlo III (v. § 7), nè i duchi usa-

(1) Esmein, 526. — Glasson, *Le roi*, ecc., 727; *Le Parlement*, ecc., I. 434, II, 15; *Précis d'hist. du droit franç.*, 319. — Hitier, *op. cit.*, 147, 148. — Flammermont, *Remontrances du Parl. de Paris au XVIII siècle*. Introd. p. I-VI. XXXI, nella Collection dei documents inédits sur l'hist. de France.

rono mai il mezzo estremo di destituire senatori e consiglieri, quantunque dipendessero dal loro beneplacito, essendo da loro nominati: anche Vittorio Amedeo II, il quale disciolse il senato e mandò a confine i membri pertinacemente insistenti nell'interpretare un editto in modo da lui giudicato illegale e nocivo (1), non ricorse mai a simile espediente pei rifiuti d'interinazione. Gli editti ducali non vennero mai a limitare tale facoltà del senato o della camera, primachè le RR. CC. togliessero gran parte dell'importanza che essa ebbe nei secoli precedenti, e le rinnovate giussioni miravano soltanto ad ottenere quell'approvazione dei magistrati supremi che si reputò sempre indispensabile. Che se per la Francia il Glasson considera la soppressione del diritto di rimostranza necessaria ed inevitabile per quell'unificazione legislativa, a cui si rivolgevano gli ardenti voti di tutti i sudditi (2), e se pure anche in Piemonte l'opera unificatrice di Vittorio Amedeo produsse una grave restrizione di quel diritto, il modo elevato in cui senato e camera dei conti ne fecero sempre uso provano che essi non sarebbero stati d'ostacolo alla grande impresa.

Da questo confronto si può concludere che l'istituto non fu introdotto in Savoia per imitazione diretta di Francia, sia per le rilevanti differenze, sia perchè al tempo in cui se ne incontrano colà le prime traccie, esso era già ben progredito in Francia ed i principi imitatori avrebbero certamente provveduto con norme precise ad impedire alcuni abusi già riconosciuti oltre le Alpi. Appare piuttosto probabile che per gli stessi bisogni si siano adoperati mezzi simili, che i collegi supremi abbiano acquistato un'autorità uguale per consuetudine, senza escludere che durante la vita dell'istituto e nella evoluzione di esso gli esempi francesi abbiano avuto qualche influenza sui nostri.

§ 15. — Giova ora esaminare l'istituto dell'interinazione sotto l'aspetto dottrinale e considerare la teoria che si formò intorno ad esso fra i giureconsulti piemontesi alla fine del sec. XVI e nel successivo. Il punto di vista è duplice, non solo giuridico, ma anche politico, perchè si collega alla massima controversia sull'autorità del principe e sui limiti di questa.

---

(1) Carutti, *Storia di Vitt. Amedeo II*[3], 470. — Burnier, *op. cit.*, II, 203.
(2) Glasson, *Le parlement*, cit., II, 225. — Hitier, *op. cit.*, 144.

Siamo appunto nel periodo, in cui si compie tanto in Francia quanto in Italia, la trasformazione delle signorie temperate, originate dallo sminuzzamento feudale e comunale, nelle assolute e la disparizione dei freni e delle garanzie derivanti dallo stesso sminuzzamento, che rallentarono quel moto progressivo. Il mutamento avvenne anche nello stato piemontese, in cui prevalevano le forme feudali tra i monti dove si formò e prese vigore, al di là delle Alpi e nel ducato d'Aosta, — le comunali al di qua nelle regioni che vennero a poco a poco aggregandovisi, man mano che quello stato, compresso e schiacciato contro le Alpi per condizioni geografiche e vicende storiche, dovette provvedere a trasferirsi in Italia per conservare la propria esistenza: la fusione delle une colle altre produsse il principato assoluto per opera delle grandi menti d'Emanuele Filiberto e di suo figlio. Senza rifare intorno ad un argomento speciale tutta la storia delle teorie politiche, giova ricordare che la lotta dei parlamenti francesi contro il potere regio per i diritti di *vérification* e d'*enregistrement* fu uno dei fenomeni di quella evoluzione e fu sempre giudicata per tale da tutti gli scrittori politici (1).

Di questi manca però ogni esempio in Piemonte, la cui condizione intellettuale era in quei secoli assai depressa (2), e se il massimo dei pensatori e scrittori di cose politiche nel sec. XVI nacque e fu educato nella nostra regione, non può esser considerato piemontese nel periodo migliore e più fruttifero della sua vita. Fra il Ferrari, che vorrebbe fare di Giovanni Botero l'antesignano dell'italianità di casa Savoia, ed il Gioda che lo reputa affatto estraneo al movimento che trasse questa a partecipare alla vita italiana (3), la seconda opinione è più conforme alla verità storica, poichè non solo il Botero rimase oltre trent'anni assente dalla sua patria senz'alcuna relazione coi suoi principi; ma nelle opere maggiori non si cura del Piemonte e dei duchi, non ne fa mai parola, ritraendo ogni esempio dall'antichità e dagli altri stati d'Italia, anche nella materia militare di cui

(1) Lemaire, *op. cit.*, 79, 80, 144, 148.

(2) Ferrari, *Corso sugli scrittori politici italiani*, 364. “ Era lo Stato il meno letterario, il meno incivilito, forse il meno italiano „.

(3) Ferrari, *ibid.*, 364 e segg. fino alla p. 382. — Gioda, *La vita e le opere di G. Botero*, I, 124 e seg.

pure conti e duchi sabaudi fecero lo studio principale. Solo dopo che fu chiamato a Torino nel 1599 a sopraintendere all'educazione dei figli di Carlo Emanuele I ed acquistò con lui grandissima dimestichezza, il Botero riconobbe l'importanza della casa di Savoia, previde qual parte essa voleva rappresentare, potè convincersi che in quei principi e nei loro stati erano veramente molte delle qualità lodate e pregiate nella sua *Ragione di Stato*: solo negli ultimi anni della sua vita egli pensò a scrivere la minutissima *Relatione del Piemonte e della contea di Nizza* e una buona storia biografica *dei principi di Savoia* (1).

Alle relazioni fra il sovrano ed i suoi consiglieri il Botero dedica del resto poche parole anche nella *Ragion di Stato*, dove accenna alla necessità che quegli si mostri indipendente dal consiglio e dall'opera di chicchessia, non comunichi con alcuno quello che appartiene veramente alla sua grandezza ed alla sua maestà, come l'autorità di far leggi e privilegi, il far grazia della vita, dell'onore, dei beni a chi ne sia stato legalmente privato. Queste parole possono farci supporre che lo scrittore fosse contrario alla concessione di qualsiasi facoltà analoga a quella d'interinazione (2).

Nulla troviamo intorno a tale argomento nella famosa relazione di Nicolò Balbo ad Emanuele Filiberto sulle condizioni economiche e sui bisogni amministrativi de' suoi stati (3), ben poco in quella dei fratelli Ozasco sull'ordinamento del consiglio di stato (4), dove si nota che la legge divina e l'umana vogliono che il principe deliberi col consiglio dei maturi, dotti ed esperti uomini e questi debbono stimolarlo a far leggi giuste, sante ed immutabili, e si propone che il Consiglio abbia autorità di ordinare cose contrarie alla legge comune o concessioni in danno di terzi solo in presenza del principe, e non lo possa quando egli non interviene alle sedute. Anche in un'altra scrittura di natura politica, l'accennata relazione del senato di Savoia sugli uffici del gran

---

(1) Gioda, *op. cit.*, I, 124 e segg., 135 e segg., 265; II, 603, 611, 698 e segg.

(2) Botero, *Ragion di Stato*, Lib. II, § Capi di prudenza.

(3) Ricotti, *op. cit.*, I, 291 e segg.

(4) Duboin, III, 222, 224, 225 (in nota).

cancelliere (1), si dichiara soltanto che le leggi devono esser sottoposte all'esame dei consiglieri e senatori prima di esser presentate all'interinazione per evitare che debbano revocarsi come dannose poco dopo promulgate, il che sarebbe indegno dell'onore del sovrano. Infine può certamente affermarsi che le lotte dei supremi collegi coi duchi di Savoia per l'interinazione degli editti non furono mai considerate un atto politico, non uscirono mai dai confini del diritto pubblico, sia per la forma delle rimostranze che pel contenuto: senatori e consiglieri dei conti non si curarono mai di altro che del pubblico bene, del mantenimento delle promesse del principe, dei vantaggi per l'erario e pei sudditi; i duchi, pur esponendo la loro volontà e dichiarando *tal è la nostra mente*, non miravano, a quanto apparisce, oltre il momento attuale, oltre l'esecuzione e l'obbedienza dell'editto particolare.

§ 16. — Discorrono invece largamente sui poteri del principe e sull'autorità dei magistrati i giureconsulti piemontesi, e ne discorrono nelle opere giuridiche, da figli, quali sono, dei grandi maestri del diritto romano, con argomenti fondati sempre sui testi del *Corpus juris* (2). Il più sicuro appoggio era offerto dai titoli XIV, XIX, XXII del primo libro del Codice giustinianeo: se vale da una parte la notissima *quicquid principi placuit legis habet rigorem* e vale per qualsiasi atto del principe, che ha ugual forza obbligatoria in qualunque forma, si richiede però l'approvazione dei membri del consiglio e del senato prima della promulgazione, si dichiara sempre sottointesa la condizione assoluta *si preces veritate nitantur*, coll'obbligo pei giudici di verificarne l'adempimento, si sancisce la nullità d'ogni provvedimento contrario al diritto od all'utilità pubblica (3).

---

(1) BURNIER, *op. cit.*, I, 395.

(2) DA NEVIZZANO GIOV., *Consilia*, 36, 99. — NATTA M. Ant., *Consilia*, I, 179, II, 340, 402, III, 507, 636. — OZASCO DI CACHERANO Ottaviano, *Consilia*, 26, 31, 42, 68; *Decisiones Senatus*, n. 38, 90, 102, 139. — A VALLE Rolando, *Consilia*, I, p. 26, II, 250, III, 49, 75, 273, IV, 340. — CRAVETTA, *Consilia*, 592, 999: *Tractatus de antiquitatibus temporum*, p. 1, c. 2 vers. Non omitto. — THESAURO, *Novae decisiones*, 91. — A PONTE Amedeo, *Quaestt. laudimiales*, 4, IV: *Qui feudum dare possunt*, n. 47, 57. — FABRO Antonio, *Codex Fabrianus*, I, tit. XI, XII. — AB ECCLESIA, *Observ. forenses sacri Senatus*, 176.

(3) *Cod. Just.*, I, XIV, 8; XIX, 3, 7; XXII, 2, 3, 4, 5, 6.

I giureconsulti piemontesi si studiarono sempre, come tutti gli altri, d'introdurre qualche freno all'arbitrio del sovrano, che non potevano in alcun modo escludere o negare. Due sono i poteri del principe, l'ordinario per provvedere alle leggi, supplire ai difetti di esse, procurarne l'applicazione *secundum* o *praeter legem*, con facoltà di modificarne gli effetti anche a beneficio di qualche persona senza offendere gravemente i terzi, secondo il precetto romano *alterum non laedere* — l'assoluto prosciolto da ogni vincolo col quale il principe può agire a sua voglia anche *contra legem* (1). Questa *lex* evidentemente comprende tanto l'eterna legge comune, la romana, quanto la speciale emanata dal principe per i bisogni de' suoi sudditi, che dee valere anche per lui finchè egli stesso non la abroga o modifica. Però l'opera sua deve esser conforme a quella *lex*, alla *ratio naturalis*, alla giustizia: egli deve sempre voler cose buone e rette e si presume sempre che le voglia, *nec principem voluisse credendum est quod iuste velle non potuit* (2): in caso contrario egli deve esprimere chiaramente la sua volontà e dimostrarsi ben conscio dell'atto compiuto.

Talvolta la sua sete innata di giustizia viene traviata da forze estranee ed i fatti, secondo i quali delibererà, gli sono presentati sotto una luce falsa od insufficiente, coll'esporgli cose non vere (*obreptio*) o tacergli parte di ciò che avrebbe dovuto sapere (*subreptio*) per comandare secondo giustizia. Le gravi occupazioni pubbliche gli tolgono il tempo d'esaminare accuratamente ogni supplica e perciò egli delega ai magistrati l'autorità di riconoscere se i fatti narrati sono conformi a verità: essi operano quindi per mandato espresso o tacito del principe, per potere da lui ricevuto, ed egli stesso apparisce autore della deliberazione, poichè fa da sè chi *per alium facit* (3). La distinzione tra *obreptio* e *subreptio* apparisce introdotta dai giureconsulti medievali ed estranea alla lingua latina classica e al diritto romano,

---

(1) Molinaeus (Dumoulin), *Comment. Cod. Just.*, ad Cod. I, 19, 7: " Quod princeps ex certa scientia est supra ius et contra et extra ius, sunt deliria in adulationem tyrannorum confecta ".

(2) Fabro, *op. cit.*, I, XI, 1.

(3) Cfr. Burnier, *op. cit.*, I, 353, sull'importanza di questo principio nel pensiero politico di Emanuele Filiberto.

in cui le due voci si usano promiscuamente e la seconda prevale nelle fonti giuridiche (1).

I principi avviati sulla strada dell'assolutismo andarono a gara nell'accumulare le clausole imperative ed un nuovo campo si aperse all'acuto ingegno dei giureconsulti. Era impossibile negare che tali clausole esprimessero la volontà più assoluta, che fosse quasi un sacrilegio disputare o dubitare che potesse mai un inferiore revocare clausole esplicitamente apposte da un superiore: come contestare che la clausola *motu proprio* togliesse ogni vizio d'orrezione o surrezione, rendendo inutile l'esame delle *preces*, se il principe operava da sè senza alcuna supplica? che la clausola *ex certa scientia* comprendesse l'affermazione di aver diligentemente esaminato prima di decretare? o che l'espressione *non obstantibus legibus, statutis, constitutionibus* derogasse a qualunque atto sovrano precedente, come il principe può sempre fare? o che infine la clausola più ampia *de plenitudine potestatis* avesse la massima estensione e fosse inoppugnabile ed irresistibile pel carattere assoluto della sovranità, almeno quando fosse usata da un signore che non ha superiori nè giudici d'appello sopra di lui? (2) Eppure i giuristi seppero introdurre qualche limitazione. Ogni clausola vale a distruggere un ostacolo solo e soltanto l'unione di esse rappresenta la podestà superiore ad ogni resistenza: esse vengono spesso aggiunte dai notai ad arbitrio senza interrogare il principe e non esprimono allora veramente il pensiero di lui: la cognizione di causa è sempre necessaria per accertare la verità dei fatti e la *certa scientia* del sovrano deve apparire non soltanto dall'uso della parola ma da tutto il contenuto del rescritto e dal modo con cui vi sono esposte le condizioni del fatto: se la concessione è viziata d'orrezione o surrezione, anche la clausola ottenuta a conferma di essa è affetta dallo stesso vizio; il pieno potere vale soltanto nelle ma-

(1) Forcellini, *Lexic. totius latinitatis.* — Heumann, *Handlexic. zu den Quellen des röm. Rechts.*

(2) Cfr. Natta, *Consilia*, dove si ripete parecchie volte (p. es. cons. 179) e si critica l'affermazione di Baldo (*Consilia*, I, 267): " Omnes domini Lombardiae de consuetudine usuali et quasi de quadam theorica et practica ponunt verba de plenitudine potestatis et sunt in quasi possessione verbi et facti; puto, salva substantia veritatis credendum sit eorum sermoni quia non est verisimile quod falsa voce uterentur „.

terie di diritto, che si devono presumer conosciute dal principe, non per quelle di fatto, *in iis quae in facto consistunt*, che si possono presumere a lui ignote. Infine è questione gravissima se debba in ogni comando ritenersi sottintesa la clausola *salvo iure tertii* (1), quale ne sia l'estensione rispetto a privilegi già concessi ad altri dal principe o dai suoi predecessori, come debba questi esprimere la sua precisa volontà di trascurare i diritti acquisiti e come debba esserne consapevole per poterli offendere con piena conoscenza di causa.

Quando poi il principe rinnova i suoi comandi, se ne accresce teoricamente l'effetto, poichè la *geminatio* d'ogni atto dimostra la volontà decisa e la deliberazione matura, praticamente si trasforma il magistrato in semplice esecutore senza diritto d'esaminare e di discutere (2). Anche qui soccorre il diritto romano con una costituzione che vidi citata solo da Baldo (3), dove si ordina ai magistrati d'eseguire le *iussiones* imperiali senza indugio, sospendendone l'esecuzione se siano reputate lesive pel fisco, informandone subito l'imperatore ed attendendo la *secunda iussio* a cui devono obbedire senza opposizione (nov. 134, c. 6).

§ 17. — Tutte queste osservazioni si leggono nei consigli di giureconsulti e nelle annotazioni alle decisioni del senato di Piemonte nella seconda metà del sec. XVI e si fondano sui commentari dei dottori più antichi, specialmente postglossatori, intorno ai testi romani sopraccitati ed a pochi passi delle Decretali (4). Ma poichè quegli scritti si riferiscono sempre all'applicazione dei rescritti e privilegi particolari che si presentavano in giudizio e si esaminavano dai collegi per l'autorità giudiziaria di cui erano investiti, le affermazioni sono più o meno precise secondo la special controversia a cui si riferiscono, e l'estensione data alla potestà del principe ed alle clausole inserite nei rescritti varia secondo l'interesse della parte per la quale viene scritto il parere.

(1) Cfr. in particolare Fabro, *De erroribus pragmaticorum*, decad. XXV, error. 1, 2, 3. V. pure il decr. ducale milanese del 1423 in Antiqua ducum Mediol. decreta, p. 258.

(2) V. lo speciale trattato *De verbis geminatis* di Antonio Corseto, Siciliano professore a Padova nei Tract. illustr. iurisconsultorum, XVIII, 266.

(3) Baldo, *Comment. ad Cod.*, I, 19, 3.

(4) Decretal. Sext., l. V, tit. ult. 72; l. III, tit. IV, 23. — Clement. III, 3. 4.

Il primo che trasse da queste fonti una teoria generale sulla facoltà d'interinazione spettante ai senati ed alla camera dei conti nella monarchia di Savoia, considerandola in relazione alle leggi ed alle ordinanze dei principi, fu Antonio Sola (fine del sec. XVI) nei suoi commentari ai decreti ducali (1): la teoria è tanto compiuta, che i posteriori scrittori non seppero aggiungervi nulla di essenziale, e merita di esser esposta, perchè singolarmente onorevole pel giureconsulto che la elaborò a freno dell'autorità del principe, già avanzato sulla via che mena all'assolutismo.

Interinatio est approbatio eius quod princeps disposuit in vim legis aut gratiae, ecco la definizione che determina chiaramente la portata dell'interinazione, comprendente una vera approvazione dell'atto, e distingue le ordinanze generali dalle particolari concessioni graziose: *textus aureus* in questa materia è la costituzione *Humanum* (Cod. I, 14, 8) in cui Teodosio e Valentiniano prescrissero che le leggi fossero esaminate dal loro consiglio ed accolte con parere favorevole prima di essere promulgate. L'interinazione dev'esser sempre *laudabilis* e *ratione congrua*; quantunque si reputi assurdo che un collegio possa riprovare o correggere gli atti del principe, esso ha piena facoltà di esaminare i provvedimenti prima d'approvarli e di fare delle rimostranze sospendendo l'interinazione finchè giunga la risposta: esso deve pure salvaguardare i diritti dei terzi, quando l'atto stesso non dia prova che il principe li conosce o vuole scientemente offenderli, e tale *ius tertii* comprende con un'interpretazione molto larga anche gli interessi del demanio e dell'utilità pubblica, poichè dalla violazione di questi derivano le offese alle ragioni dei terzi. Le clausole aggiunte hanno grande efficacia, salve le limitazioni sopraccennate: tanto per esse quanto per le ripetute giussioni il senato diviene un esecutore materiale degli ordini: il Sola raccomanda in tal caso ad entrambe le parti di considerare le cose con calma e maturità, al principe di non turbarsi per la resistenza, poichè egli può essere stato mal consigliato, al collegio di tollerare con reverenza che egli perseveri nel suo pensiero pei mali consigli ricevuti. Assai notevole la conclusione

(1) *Comment. ad universa Sabaudiae decreta*, De interinat., gl. I e II; prooem. gl. II, n. 27, 43; tit. De indulgentiis, n. 12; tit. Decr. abusus, gl. I, n. 8 (p. 621 e segg. 6, 7, 277, 280, 282, 492).

ultima a cui si spinge l'autore, sulle tracce d'un altro giureconsulto piemontese, Rolando della Valle (1), che se i magistrati giudichino veramente non poter eseguire il provvedimento, avranno contro ogni più assoluto comando l'estremo rimedio della rinuncia all'ufficio, per non partecipare alla responsabilità da cui la più cieca obbedienza non potrebbe liberarli. La giurisprudenza posteriore giunse fino ad ammettere che gli atti interinati per giussione legassero i sudditi solo durante la vita del principe che li promulgò e non avessero più alcun vigore dopo la sua morte, essendo cessato ogni dovere di sudditanza verso di lui: il principio fu accettato dallo stesso duca Vittorio Amedeo I nel 1635 (2).

§ 18. — Sotto il principato di Vittorio Amedeo II l'interinazione perdette gran parte della sua importanza, perchè egli si affermava sovrano assoluto per diritto proprio e per ragione di principato (escluso pure ogni titolo d'eredità) (3) e non volle tollerare al suo fianco un collegio che esercitasse veramente una parte del potere legislativo ed avesse autorità di compiere verso di lui un atto di coazione, non solo sostanziale ma neppur formale. Sino dai primi anni del suo regno si presentarono due occasioni di gravissimi conflitti colla camera dei conti di Torino per le alienazioni di terre avite e demaniali (contea del Genevese e baronia del Faucigny) a supplire alle gravi spese del matrimonio progettato del duca coll'infanta di Portogallo (1680), col senato di Savoia per l'introduzione dell'insinuazione di tutti gli atti pubblici e privati (1698-1701) (4). Nel primo caso le rimostranze della camera e le repliche del duca si riferiscono soprattutto ai pericoli dell'alienazione illegale ed ai suoi vantaggi, nel secondo invece il duca ed il gran cancelliere, il marchese di Bellegarde, parlano specialmente del potere sovrano, dello assoluto arbitrio del principe, il quale non comunica a ministri e consiglieri parte alcuna dell'autorità sua, anche quando ne richiede il parere. Già apparisce qui una differenza notevole

---

(1) Sola, *ibid.*, p. 624, giudica il Della Valle *inter consulentes modernos veridicus ac causidicis non mediocriter utilis.*

(2) Duboin, XX, 1250 not. — Dionisotti, *op. cit.*, I, 150.

(3) Ibid., III, 1008, riferito anche ap. Sclopis, *Antica legislaz. Piemont.*, 79.

(4) Ibid., XXIV, 61 e segg. — Burnier, I, 277; II, 119.

rispetto ai tempi in cui si parlava solo dell'utilità pubblica o dei gravi motivi che traevano il sovrano ad insistere pel pubblico bene. Inoltre Vittorio Amedeo cominciò a trasmettere senz'altro gli editti al senato ed alla camera coll'ordine di registrarli, riservate le interinazioni ai privilegi personali, alle esenzioni ed immunità; se ne hanno esempi nei registri della camera sino dal 1701 (per l'editto 14 gennaio) e da quel tempo s'introduce la distinzione usata in Francia tra *enregistrement* ed *entérinement* senza una regola precisa, cosicchè troviamo usata l'una o l'altra forma ad arbitrio del principe, sia per gli editti generali che pei provvedimenti particolari, e nei registri si avvicendano le interinazioni colle *osservatorie*, dichiarazioni di registrazione compiuta e precetto d'osservare l'atto registrato. Degli editti più importanti emanati da Vittorio Amedeo nel riordinamento finanziario della monarchia (1717-1720), sulle imposte dei tabacchi e della carta bollata, sulle aziende, sulla riunione dei beni demaniali, sulle poste, sull'università fu ordinata la registrazione per escludere ogni rimostranza.

§ 19. — La regia volontà venne poi a manifestarsi in modo pieno nelle Costituzioni e le norme sull'interinazione subirono parecchi mutamenti rilevanti durante la elaborazione di esse. Non è facile però ricavare la storia esatta dei lavori preparatori dalle molte carte che si conservano nell'archivio di stato in ventitre mazzi per le due compilazioni del 1723 e 1729, ed ordinare cronologicamente tutti i pareri, osservazioni e controsservazioni che si raccolsero, poichè nelle singole scritture manca talora la data e il nome dell'autore.

I compilatori dei primi progetti per le RR. CC. si limitarono a distribuire i capitoli degli editti anteriori letteralmente trascritti per ordine di data in parecchi titoli, aggiungendo in fine d'ogni titolo una dichiarazione, *autentica*, per fissare le correzioni introdottevi (1). Il capo dell'editto 1583 sull'interinazione del senato venne omesso in alcuni progetti (mazzo 11, 13), mantenuto in altri (m. 20): taluno voleva esplicitamente notare che il senato non avrebbe avuto autorità d'interinare gli editti, se non quando il re la concedesse espressamente (m. 14, 16, 18), altri propose dichiarare soltanto che il senato dovesse sospen-

(1) Dionisotti, *op. cit.*, I, 219, 220.

dere l'esecuzione dei rescritti sospetti di orrezione o surrezione e ne riferisse immediatamente al guardasigilli e al re (m. 12).

Più tardi per suggerimento del segretario di stato per la guerra Platzaert (m. 20) si sostituì a questo metodo confuso un ordinamento sistematico, in cui si diede a tutti i capitoli, antichi o nuovi, il carattere di norme nuove, conservata solo pei primi una traccia dell'origine nell'indicazione marginale del sovrano che li aveva promulgati. Anche allora voleva taluno mantenere l'interinazione per ogni atto del principe, compresi gli editti generali e perpetui, colla clausola che senza quella non avrebbero avuto effetto (m. 19), altri voleva invece ripetere che il senato non doveva interinare senza un regio comando di volta in volta: ad un certo momento (m. 19, 21) apparisce l'annotazione marginale che l'argomento restava in sospeso, perchè il re aveva mutato avviso e provvederebbe da sè. La materia si presentava dubbia solo pel senato; per la camera fu riconosciuta in tutti i progetti dell'una e dell'altra forma la funzione dell'interinazione per gli atti relativi al patrimonio del principe, alla costituzione di uffici e pensioni, alle concessioni di nobiltà e privilegio, e si ripete sempre una formula quasi uguale a quella dell'editto 7 gennaio 1720 (1), in cui fu dato alla camera il nuovo assetto allo scopo di renderla più pronta ai voleri del re in occasione della riunione dei beni demaniali alienati.

Nessuna teoria politica si espone nelle varie scritture, salvo il concetto fondamentale che il potere del re è illimitato, e si riguardano soltanto le condizioni presenti di tempo e di luogo. I consultori (2) sono concordi nell'ammettere l'interinazione pei rescritti di grazia, privilegi e concessioni, ma la respingono per gli editti in modo assoluto: nessun magistrato può esser chiamato a limitare l'autorità regia colla sua approvazione, nè conosce i motivi delle leggi nè può domandarli al principe. La fermezza di queste non deriva da una conferma estrinseca, ma

---

(1) Duboin, III, 604.

(2) Cfr. i pareri del conte Mellarède (maz. 6, fasc. VII, n. 3; m. 8, f. V, p. 85; m. 8, f. VIII, p. 297), dell'avv. Leggio (m. 6, f. VII, n. 5), del presidente Zoppi (m. 8, f. V, p. 83 e f. IX, p. 307), del presidente Riccardi (m. 8, f. XIV) ed una lunga scrittura senza firma (m. 22, f. VII).

dalla loro bontà, ed esse si presumono sempre giuste e dirette al pubblico bene. ma l'esame ne appartiene al gran cancelliere prima d'apporre i sigilli ed il presidente Zoppi lo chiama il proprio consultore del re. L'interinazione non fu mai richiesta come requisito essenziale di validità degli editti sovrani nè dal diritto comune (const. *Humanum*, v. § 17) nè dall'editto 1583, inteso nel suo vero significato, e si reputava necessaria soltanto per l'uso introdotto dai duchi di ordinarne l'aggiunta in ciascun caso; v'ha chi ricorda pel senato (m. 22) la nov. 152 sulla nullità dei rescritti non presentati al prefetto del pretorio e sulla facoltà di far rimostranze per gli atti che fossero *ad detrimentum publicum*. Si ricorda pure l'esempio dei parlamenti di Francia, i quali secondo i Piemontesi non tentarono mai di attribuire alla registrazione simile forza per la validità delle ordinanze e videro poi limitato questo loro ufficio da Luigi XIII e dal XIV. Al re dunque appartiene ordinare a suo arbitrio la interinazione o la registrazione, nè si richiede una dichiarazione espressa di tale facoltà nelle costituzioni: per determinare di volta in volta quale formalità sia comandata dal principe, basta la formula di cancelleria aggiunta in fine dell'atto con cui egli prescrive l'una o l'altra; l'editto 1583 resta abrogato per la norma generale inserita nelle RR. CC. intorno agli editti non trascritti o non compresi nelle medesime.

Fu fatta questione per gli editti passati, poichè specialmente contro il famoso editto 7 gennaio 1720 sulla riunione dei beni alienati alla Corona, gli avvocati dei nobili tanto danneggiati e stremati da esso opponevano la nullità, per esser stato soltanto registrato e non interinato. Chi considerava la facoltà d'interinazione fondata sul diritto comune e sulla consuetudine, credeva necessaria una solenne dichiarazione sanatoria per togliere ogni vizio dei provvedimenti anteriori; altri la giudicava invece pericolosa, perchè avrebbe dato nuove armi alle resistenze degli avvocati e del senato ed all'opinione favorevole alla nullità di quell'editto e d'ogni altro non interinato, con grave pregiudizio delle utili riforme introdotte negli ultimi anni. Nessun dubbio invece quanto alla camera dei conti, la quale per mezzo dell'interinazione aveva potuto impedire la dilapidazione del patrimonio, riprendere quanto era stato alienato senza urgente bisogno o senza utilità dello stato, ed avrebbe rassicurato i

compratori futuri contro ogni molestia ed ogni rivendicazione, se fosse sorta nuovamente in avvenire la necessità di alienare altri beni demaniali.

Mi sia lecito aggiungere che non trovai nei mazzi da me esaminati il passo riferito dallo Sclopis (1) e che a parer mio l'opinione attribuitavi al presidente Zoppi non è esatta, poichè egli non mi appare energico difensore dell'interinazione in ogni sua forma, accetta solo la camerale ed ammette pel senato soltanto quella delle grazie, senza parlare dell'editto 1583 e considerando gli editti generali come emanati dal moto proprio e dalla certa scienza del principe (2).

Dalle annotazioni e postille sul pensiero del re (m. 6, 8 num. 5, 21, num. 4, 23) si rileva che egli voleva mantenere la distinzione tra interinare e registrare da lui introdotta a difesa della sua sovranità nel campo legislativo, accettava la registrazione di tutti gli atti per conservarne memoria, l'interinazione solo pei rescritti in cui può introdursi inganno o frode, e per gli atti relativi al demanio ed alle concessioni d'ogni specie, in cui si richiede la rigorosa osservanza delle leggi sull'inalienabilità. E veramente egli avrebbe desiderato il silenzio completo, silenzio sul passato per togliere ogni arma di contestazione, silenzio sul futuro per mantenere il pieno arbitrio del principe nella scelta tra le due formalità, per poter fissare di volta in volta i limiti dell'intervento del senato o della camera, essendo sufficiente l'abrogazione generale di ogni editto o consuetudine ad escludere qualsiasi pretesa dei collegi supremi per l'avvenire. Può esser qui riferita una breve nota che porta l'intestazione: " Risoluzione di proprio pugno di S. M. ", altrettanto chiara e concisa quanto deficiente sotto l'aspetto grammaticale ed ortografico (m. 8, fasc. 5, fog. 96):

" Ill più aciertato è di preciendere (probabilmente prescindere, lasciar da parte) e toliere non sollo ledito di Carllo Emanuelle ma anche quello di Emanuelle Filiberto come pure tuti quelli che potrebero parlare delle interinationi mentre che li editi che fanno forza di lege auendo prouisto contro le alienationi

(1) Sclopis, *Consideraz. stor.*, cit. Mon. hist. patr. Comitiorum, II, 164, 165. Cfr. pure Dionisotti, *op. cit.*, I, 159.

(2) Cfr. il suo parere citato (m. 8, f. V, p. 83).

dell demanio le allienationi che sarebero contrarie alle lege restavano nulle e perciò inutilli e quanto alla lapidatione (cioè dilapidazione) de fruti che un prencipe trascurato o inganato potrebe fare ui sono tuti li oficii che anno ill uisa (cioè diritto di mettere il *visto*) che li pono impedire. Regollare le secretarie per ciò che si debi metere la clausula dell interinatione o registratione (in fine dell'atto) come pure lobligo a magistrati di rapresentare „.

§ 20. — Quale fu il risultato di così lunga e varia disamina, prova manifesta dell'importanza riconosciuta nell'esercizio di tale facoltà da parte del senato, fosse pure per semplice consuetudine?

Nelle RR. CC. del 1723 (l. II, tit. III, c. 1) manca ogni accenno agli editti ed ogni regola generale: si fa menzione di due specie di atti, i rescritti, le concessioni e grazie, per le quali il senato ha obbligo di sospendere l'interinazione e riferire al gran cancelliere, quando abbia sospetti di surrezione o d'orrezione — le lettere di cancelleria relative a persone e cose comprese nella giurisdizione del senato, per le quali esso può fare le rappresentazioni necessarie *pel servizio nostro* prima d'interinare o registrare, attendendo le deliberazioni del principe. Si ammette però una sola rappresentanza, con facoltà di replicare solo quando si trattasse di materie giurisdizionali che riguardano i diritti della corona e che stavano tanto profondamente a cuore a Vittorio Amedeo.

Nelle RR. CC. del 1729 (l. II, tit. III, c. 1) la formula si presenta alquanto più larga. Gli editti, rescritti e patenti, sia di grazia che di giustizia, per materie appartenenti alla giurisdizione del senato saranno interinati o registrati secondochè sarà ordinato: quando siano sospetti di orrezione o surrezione o contengano cosa *contraria al nostro servizio o al pubblico bene o pregiudiziale al terzo*, il senato dovrà soprassedere e fare al re le rappresentazioni opportune. Giova ritenere che fossero sempre esclusi gli editti generali che avevano carattere di decreti perpetui, poichè sarebbe stato troppo contrario alla ferma volontà del re l'ammetterli: si conferma in via indiretta il diritto regio di scegliere liberamente fra l'interinazione e la registrazione, ed in relazione a questo fu prescritto che il guardasigilli richiederà al principe qual sia la sua volontà per ciascun

atto prima d'apporre i sigilli (l. II, tit. II, c. 1): coll'accennare ai diritti dei terzi si risolve una questione assai discussa (cfr. § 17) e si riconosce lodevole la via seguita dal senato pel rispetto dovuto a quelli, anche senza espressa riserva del rescritto: infine il silenzio intorno al numero delle rimostranze va inteso nel senso più ristretto che una sola ne fosse permessa, specialmente per esser omai avvenuto l'accordo (1727) tra il re ed il papa nelle materie giurisdizionali, cosicchè la rigidezza di Vittorio Amedeo II si era attenuata.

Alla camera dei conti si diede autorità d'interinare editti ed ordini in materia economica o relativi alle cose del demanio, lettere e concessioni in qualsiasi modo attinenti alle finanze, e si riconosce espressamente la facoltà di esaminare e giudicare della sussistenza e validità loro. Del diritto di rimostranza, conservato nell'editto 1720 almeno per chiedere l'interpretazione autentica degli editti, non si fa più menzione (1). Il re volle pur sempre conservare il suo libero arbitrio nella scelta, poichè nel 1732, quando la camera presentò alcune osservazioni intorno ad un editto trasmesso con precetto di registrazione e fece notare che secondo le RR. CC. avrebbe dovuto essere interinato, le fu risposto che le ragioni addotte non bastavano a persuadere il sovrano e *che è sempre in nostra facoltà far interinare o puramente registrare questa sorta di editti* (2). Tale editto si riferiva alla creazione di 264 piazze nuove di speziale nelle varie città e borghi del Piemonte.

Fu pure aggiunto nelle RR. CC. che tutte le provvisioni relative all'amministrazione della giustizia od aventi forza di legge in materia giuridica ed economica dovessero essere spedite per lettere patenti e non per semplice biglietto o decreto, cosicchè non fossero mai sottratte alla registrazione od a qualche esame del senato o della camera — uno di quei freni minori che i principi assoluti impongono a sè ed ai loro ministri, frutto di singolare illusione, poichè la stessa autorità che li introduce può gettarli da banda, eppure non sempre privi d'alcuna efficacia temporanea, e prova manifesta nel nostro caso che l'in-

(1) RR. CC., 1723, l. II, t. IV, c. 1; 1729, l. VI, t. 1, c. 1. Per l'editto 1720, v. Duboin, III, 606.

(2) Duboin, X, 132 e 134.

tervento della magistratura suprema si reputava giovevole al pubblico bene (1). Fu infine prescritto che gli editti spediti dalla cancelleria dovessero, per cura del generale delle finanze, venir trasmessi all'avvocato generale od al procurator generale, perchè ne curassero l'interinazione o registrazione, il primo innanzi al senato per gli affari giuridici e politici, il secondo innanzi alla camera per gli affari economici e camerali (2).

Dopo la promulgazione delle RR. CC. si nota una differenza rilevante tra i registri d'interinazione del senato e della camera. Per questa si continuano a trascrivere i regi editti colla formula d'interinazione o di registrazione secondo il volere del re, insieme coi provvedimenti personali, pel senato non vi si trascrivono più gli editti generali, ma soltanto gli altri atti che il collegio era chiamato ad interinare per autorità propria (bandi campestri di comuni e di feudatari, nomine d'ufficiali, immunità d'imposte per chi aveva dodici figli, ecc.). Anche nei registri delle patenti presentate al senato si copiano gli editti senza indicare l'interinazione o la registrazione, e l'attestazione d'aver compiuta l'una e l'altra formalità si unisce all'atto originale in un foglietto sciolto e si conserva con esso.

§ 21. — La teoria che il Richeri nuovamente espose intorno all'interinazione durante il regno di Vittorio Amedeo II, più brevemente nel *Codex*, più diffusamente nell'*Universa jurisprudentia* (3), non è diversa da quella dei giureconsulti precedenti e s'appoggia egualmente sui testi romani e sulle decisioni del senato. L'autorità del principe è limitata solo dalla giustizia e dalla pubblica utilità a cui deve esser conforme e si presume sempre che sia: i rescritti devono corrispondere alla verità ed esser esenti da vizi ed il principe può commetterne l'esame ai magistrati prima dell'esecuzione: essi saranno interpretati in guisa da non offendere le norme generali di diritto, il bene dello stato e i diritti altrui, eccettochè il principe manifesti una vo-

(1) RR. CC., 1723, l. II, t. II, c. 3, § 13; 1729, l. II, t. II, c. 2, § 9; 1770, id. § 10.

(2) RR. CC., 1723, l. II, t. X, c. 2, § 2; 1729, l. II, t. XVIII, § 2; 1770, l. II, t. XVII, § 2.

(3) Richeri, *Codex rerum in Senatu Pedemont. iudicatarum*, I, 1 defin. 2 3, 12, 15, 17, 18. — *Universa civilis et criminalis jurispr.*, lib. I, § 50 e segg., § 146 e segg.

lontà precisa anche a danno di questi, come può per giusta causa: ma le sole clausole aggiuntive non bastano a far prova di tale intenzione. L'interinazione non appartiene all'essenza della legge, la forza di questa dipendendo solo dalla volontà del principe; solo le ordinanze relative al patrimonio furono dichiarate inefficaci senza l'approvazione della camera, a cui sono sottoposte per esplicito precetto delle RR. CC.

§ 22. — Omai può ben dirsi svanita l'importanza del nostro istituto per la legislazione generale della monarchia, quantunque la tradizione storica abbia avuto tanto vigore da conservare la parola e la formula sino alla promulgazione dello Statuto (1). Carlo Emanuele III introdusse la prudente consuetudine di chiamar seco a consiglio insieme col gran cancelliere anche i presidenti dei due senati e della camera, prima di promulgare i suoi editti, per togliere ogni occasione di resistenza all'interinazione (2). Non trovò quindi, p. es., alcun ostacolo presso quei collegi la registrazione del grosso appannaggio concesso al suo secondogenito, duca del Chiablese, nonostante la grave opposizione fatta alla proposta di esso (3).

Nessuna novità fu introdotta in questa parte delle RR. CC. nella riforma del 1770, salva la facoltà al guardasigilli di decidere da sè nei casi ordinari, se le provvisioni dovessero esser interinate o registrate, ricorrendosi al principe solo quando sorgesse alcun dubbio e difficoltà coi collegi chiamati ad aggiungere quella formalità complementare (4).

Dopo la restaurazione, richiamate in vigore le RR. CC., la camera ed il senato continuarono ad esercitare la loro funzione nello stesso modo e le teorie esposte nelle loro decisioni non sono diverse dalle suindicate (5). Dalla raccolta stampata dei regi

(1) Cfr. Gualterio, *Gli ultimi rivolgimenti italiani*, I, par. I, 510, e lettera di Neri Corsini sulle trattative segrete del congresso di Lubiana, ivi I, Doc. 373, 374.

(2) Botton de Castellamonte, *Piémont*, § 1, in Merlin, *Répert. universel de jurisprud.*, ediz. IV e V. — Carutti, *St. del regno di Carlo Emanuele III*, I, 163.

(3) Duboin, XXIV, 737, e cfr. Carutti, *op. cit.*, II, 183.

(4) RR. CC. 1770, l. II, t. III, c. 1, § 5 e t. III, c. 1, § 15.

(5) Sclopis, *St. della legislaz. ital.*, III, 202. Cfr. p. es. Duboin, *Collez. delle decis. dei supremi magistr.*, IX, 361, 399 (an. 1833, 1779).

editti si rileva che alcuni vennero solo registrati, altri interinati e si annota sempre la data in cui la formalità fu compiuta, ma non si può determinare se il principe seguisse alcuna regola nell'ordinare l'una o l'altra: non è però esatto che l'interinazione si usasse in tutti i provvedimenti che riguardavano direttamente od in via principale la generalità dei cittadini (1). Probabilmente il senato fece ogni sforzo per mantener viva la memoria dell'antica autorità anche nel modo in cui esercitava nel fatto lo scarso residuo tuttora posseduto. Nel congresso di Lubiana (1821) fu proposto di concedere il diritto di rimostranza anche nel regno di Napoli, e fu risposto che si poteva conservarlo in Piemonte, dove si manteneva per antica tradizione e non aveva mai prodotto cattivi effetti, ma sarebbe stato pericoloso dopo gli ultimi avvenimenti ammetterlo nel Napoletano, dove avrebbe dato origine ad un focolare permanente di ribellione (2).

Sotto Carlo Felice la camera ebbe occasione ancora una volta di resistere all'interinazione d'un editto per l'appannaggio d'una principessa e non cedette se non dopo ripetute giussioni colla menzione dell'ordine preciso del re (3).

Durante la preparazione del codice Albertino risorsero le discussioni, quantunque in forma molto mite, dopo un secolo di moderato uso di tale facoltà (4). I membri della commissione di legislazione mantennero al principe la scelta fra la registrazione per conservare memoria dei suoi atti e l'interinazione, quando volesse obbligare il magistrato ad un più minuto esame, ammisero il diritto di rappresentanza, per dare ai sudditi la certezza che il principe ha la coscienza dell'importanza di quanto ordina e la piena fermezza del volere. Essi considerano l'interinazione come un principio d'esecuzione, non come facoltà spettante all'essenza della legge, poichè il sovrano trasmette i suoi editti al magistrato dopo averli pienamente formati, anche quando giudica opportuno di farli interinare. Non è a dimenticare che le

(1) Vigna ed Aliberti, *Dizion. di dir. amministrat.*, s. v. *interinazione.*

(2) Gualterio, *op. cit.*, I, Doc. 374, 375. Lett. citata del Corsini al consiglier Frullani. — Cfr. pure Burnier, *op. cit.*, I, 273.

(3) Gualterio, *op. cit.*, I, par. I, p. 511 e Dionisotti, *op. cit.*, I, 161.

(4) *Motivi dei codici per gli st. sardi*, 5, 20. — Pinelli, *Notizie intorno ai lavori della commissione di legislaz.*, negli stessi *Motivi* in appendice al volume II, p. XIX.

resistenze dei senati di Torino e di Genova furono provocate non soltanto dalla difesa del loro diritto d'interinare e far rappresentanze, ma anche dal rammarico, perchè la parte principale nella formazione dei nuovi codici era stata affidata ad una commissione speciale, anzichè a loro medesimi, e dal pericolo di perdere quel sommo privilegio riconosciuto dalle RR. CC., che le decisioni delle corti supreme fossero obbligatorie per tutti e costituissero una vera fonte di diritto dopo le costituzioni e gli statuti prima del diritto comune (1).

La formula accolta nel codice Albertino (art. 7) non è essenzialmente diversa da quella delle RR. CC.: l'ultima legge assoggettata all'interinazione fu quella del 17 febbraio 1848 per ammettere i Valdesi al pieno godimento dei diritti civili. Appena il potere legislativo cessa d'appartenere esclusivamente al principe e la divisione dei poteri diviene regola fondamentale della monarchia nuova, la facoltà d'esaminare le leggi non conviene più ai supremi magistrati d'ordine esecutivo e giudiziario: lo Statuto e il codice civile sanciscono i requisiti essenziali per la validità e per l'applicazione delle leggi, queste alla lor volta li determinano pei provvedimenti regolamentari emanati dalle autorità centrali e locali. I corpi collegiali dello stato non intervengono se non come consultivi prima della formazione completa delle leggi, come giudicanti dopo l'attuazione. L'arbitrio del principe non ha più bisogno di freni, perchè non esiste più: per gli arbitrii degli altri i freni sono scritti e preordinati ..... la natura umana si esplica nei suoi effetti, al presente come nei tempi passati.

§ 23. — A completare questo studio rimane soltanto da ricordare che nella monarchia sabaudo-piemontese altri collegi ebbero in tempi diversi una facoltà analoga d'interinazione e di rappresentanza, in limiti assai ristretti di luogo e d'attribuzioni, spesso per un periodo assai breve.

Tali furono il consiglio dell'ordine dei SS. Maurizio e Lazzaro (2), il magistrato straordinario (3), il magistrato dell'abbon-

---

(1) Sclopis, *St. della legislaz. negli Stati del re di Sardegna dal 1814 al 1847*, pp. 56 e 93, dove pubblica le *Observations sur le conseil d'état*, attribuite al conte Balbo (p. 47 not.).

(2) Borelli, 250 (an. 1649). — *Raccolta dei regi editti*, II, 19 (an. 1814).

(3) Borelli, 481, 508. — Duboin, X, 758 (an. 1623, '24, '27).

danza (1), il consiglio ordinato dal principe sugli occorrenti di guerra (2), il consiglio supremo dell'ammiragliato (3).

Tali furono altresì il consiglio ordinario della reggente Maria Cristina durante l'assedio di Torino, perchè rappresentava il senato, i gruppi minori costituiti entro il senato di Piemonte per le singole regioni annesse, cioè il presidente e giudici delle ultime appellazioni pel contado d'Asti e marchesato di Ceva, pel marchesato del Monferrato e per quello di Saluzzo, i senati di Nizza e di Genova (4).

Nel ducato d'Aosta afferma senz'altro quel diligente storico delle istituzioni locali che fu il De Tillier, che i decreti relativi a tale parte dello stato erano prosciolti da ogni interinazione (5); alcuni editti dispongono in questo senso, ma non è certo nè evidente se essi si riferiscano a tutte le norme in generale, o soltanto alla materia speciale di cui trattano (l'inappellabilità di certe cause) (6). Nel 1629 gli Stati del ducato domandarono al duca che ordinasse alla camera dei conti d'interinare un editto relativo alla competenza del *conseil des commis* per ragione di valore (7); nuovi esempi troviamo alla fine del secolo XVII (8), poichè fu ordinato alla camera di Torino d'interinare l'editto sull'insinuazione, quantunque redatto in lingua francese, nonostante qualsiasi editto od uso contrario, e si ricorda almeno una patente di cui il duca non potè ottener l'interinazione senza la giussione solenne.

(1) Duboin, XI, 314, 321, 336 (an. 1592, '93, '96).

(2) Duboin, XXI, 35, 747, 751 (an. 1649, '50, '51).

(3) *Raccolta dei regi editti*, 1837, 1840.

(4) Borelli, 435, 1170. — Duboin, II, 629, III, 837, VIII, 70, 71, 83, 85. — Dionisotti, *op. cit.*, I, 161, pel Senato di Genova.

(5) De Tillier, *Historique de la Vallée d'Aoste* [2], 324.

(6) Duboin, III, 1308.

(7) Bollati, *Congregaz. citt.*, II, 790, 799.

(8) Duboin, III, 1322, XXV, 186 (an. 1689, '97).

Alessandro Manzoni *e una baruffa tra* L'Annotatore Piemontese *ed i Romantici lombardi.*

Nota del socio GIOVANNI SFORZA

Della lingua d'Italia — la lingua, ben inteso, de' pedanti e de' morti — fin dal 1829 s'era fatto campione e custode don Michele Ponza; e per dieci anni nel suo *Annotatore Piemontese*, giornale che pubblicava a Torino, scrivendolo in grandissima parte da sè (1), menò giù la frusta, a diritto e a rovescio, senza misericordia.

Il Ponza, asciutto, sottile, nero di carnagione, tutto anima e nervi, pronto ad accendersi, a schizzar faville, ad arrotar la lingua, era uno di quegli uomini che, visti una volta, non si scordano più; soprattutto per i suoi occhietti, neri e vivacissimi, un de' quali guardava a levante, l'altro a tramontana; e per il lungo naso, pieno zeppo di tabacco; e gli abiti, trasandati, lerci, bisunti (2). Le sue bestie nere erano gli errori di lingua e i

(1) Venne per la prima volta alla luce nel 1829, ed era intitolato: *L'Annotatore degli errori di lingua*; prese a pubblicarsi, prima a Torino co' torchi della Stamperia Reale, poi a Susa nella tipografia di Girolamo Gatti. A incominciare dal 1832 si chiamò *L'Annotatore Piemontese, ossia Giornale della Lingua e Letteratura Italiana, per* Michele Ponza *sacerdote*; rimase in vita fino a tutto il 1839, e fu stampato successivamente co' tipi Cassone, Marzorati e Vercellotti, co' torchi del Fodratti, e dalla Stamperia Reale, a Torino sempre.

(2) Era nato a Cavour. Visse dal settembre del 1772 al 18 novembre del 1846, e fu maestro di grammatica italiana e latina, prefetto e visitatore delle Scuole di Torino. Cfr. Cibrario L., *Necrologia di don Michele Ponza*, nel *Museo scientifico, letterario ed artistico*, di Torino, ann. VII [1846], n. 47, p. 380. — Bersezio V., *Visioni del passato*, in *La Vita Italiana*, anno I, n. 1-2, pp. 42-44.

Romantici. Per errori di lingua, già si capisce, intendeva tutte le voci, le frasi, le parole che non avessero l'esempio d'un classico. In quanto al romanticismo (1) si doleva e accorava che " uomini " dotti, poeti nati, pensatori robusti „ avessero " spontaneamente " eletto di tentare il peggiore cammino „; se ne doleva e accorava per la paura che " le lettere italiane „ finissero col restare " oppresse ed annientate „ dalle " pericolosissime innovazioni „; ed esclamava con accento disperato: " Quanta vergogna è ri- " servata ai tempi nostri. È la grande sventura! „

La *Gazzetta di Milano* chiamò l'*Annotatore* " l'Attila della " letteratura „; e il Ponza fu pronto a rispondere: " è l'Attila " ingentilito, perchè vuol portar battaglia e sterminio sugli " errori, ma non ammazzare nessuno „; parole che rispecchiano l'indole bizzarra di quel paladino del classicismo, che con pienissima buona fede e indomito ardore stava imperterrito sulla breccia, temperando a quando a quando gli acri umori, i facili sdegni, le sùbite sfuriate con qualche scatto di cuore.

Quando nel '34 uscì fuori a Milano il *Marco Visconti* di Tommaso Grossi, aspettato con desiderio vivo e impaziente, Achille Mauri, che fu de' primi a parlarne, ebbe a scrivere: " Quanto alla lingua ci possono essere dei dispareri: ma tutti " gli spassionati concederanno ch'essa v'è sempre ricca, tersa e " schietta. Tutti sanno che all'apparire dei *Promessi Sposi* molti " si scandalizzarono in vedere che il Manzoni vi avesse intro- " dotti tanti modi della lingua parlata, e gridarono agli idio- " tismi, ai lombardismi. Se non che i più avvisati, datasi cura " di esaminar la cosa un po' pel sottile, non furon poco sorpresi

---

(1) La definizione del Classicismo e del Romanticismo data dall'*Annotatore* è la più amena del mondo. " Io reputo classico „ (scrive) " tutto ciò " che in sè non ammette confusione di genere. Il giardino italiano è clas- " sico, e l'inglese è romantico; la pianta ed il fabbricato di Torino è clas- " sico, quello di Milano romantico; l'abito nero, con pantaloni bianchi, è " romantico, l'abito tutto nero, con calzoni corti, è classico; la musica di " Cimarosa è classica, quella di Rossini romantica; le commedie di Des- " touches, di Regnard e di Goldoni sono classiche, quelle di Kotzebue e " di altri scrittori nordofili, gallofili, stranofili sono romantiche; le tragedie " d'Alfieri sono classiche, quelle del Manzoni romantiche. Dunque, dove è " ordine, armonia, regolarità è classicismo: dove mancano queste condizioni " è romanticismo „.

“ di trovar tutti que' modi, tutti quegli idiotismi e lombardismi “ registrati nel Dizionario, o usati da scrittori toscani e da quelli “ di cui si tiene l'autorità più sicura. Quindi lo scandalo e le “ grida cessarono, e tranne alcuni pochi propugnatori della lingua “ antica e illustre, tutti fecero lieta accoglienza a quei modi, “ che, rimessi, a così dire, in circolazione, veggonsi oggidì sparsi “ per le opere di tutti gli scrittori d'Italia. Vorrei sperare che “ lo stesso, a un bel circa, debba accadere di molti fra quei “ modi che trovansi usati dal Grossi „ (1). Faceva i conti senza l'abate Ponza, che nel suo *Annotatore* (2) prese “ a cardassare “ ben bene la lana „ al *Marco Visconti*, “ per la parte dello stile “ e della lingua „, protestando a muso duro: “ Dove va in mezzo “ l'onore delle comuni lettere, dee tacere ogni rispetto privato „. Tirò giù “ un elenco delle maniere „ adoperate nel romanzo, che gli parvero peccare “ di grammatica e di purezza „; e lo fece con tale bile, da passare addirittura ogni segno. Se ne accorse lui stesso, e nel posare la penna gli scappò detto: “ Vedo che ho preso caldo; quasi quasi divento Attila, che “ corre spaventoso sul cavallo infernale. Grossi mi perdoni; ma “ se ha carità della sua patria, si metta una mano alla co- “ scienza e mi condanni; sappia che io sono uno de' suoi più “ grandi ammiratori „. Fortuna che era uno de' suoi “ ammiratori „ e de' “ più grandi „ per giunta; altrimenti, Dio ce ne scampi, chi sa mai che cosa diavolo avrebbe detto e fatto!

Quell'elenco di maniere peccatrici è un utile studio, e merita di essere disumato. Eccolo qui:

Pag. 18. “ C'eran testimonj che per una buccia di fico giurerebbero ogni falsità, *il quale* sono tutti Ghibellini scorticati „. *Il quale* zoppica di gramatica: è maniera lombarda, usata sempre dal volgo: perchè

(1) *L'Indicatore, ossia raccolta periodica di scelti articoli, così tradotti, come originali, intorno alle letterature italiana e straniera, alla storia, alle scienze fisiche ed economiche*, ecc.; serie IV, tomo I, fasc. 2-3, febbraio e marzo 1835, pp. 307-308.

(2) *L'Annotatore*, vol. I, fasc. 4, aprile 1835, pp. 225-229, per bocca d'uno de' suoi collaboratori, che si nasconde sotto le iniziali G. P., aveva già discorso del *Marco Visconti*, togliendone occasione dalla ristampa che subito ne fece a Torino Carlo Schiepatti. È un giudizio severo, ma non manca di osservazioni assennate.

porla in un libro? Allora si santificheranno tutti gli spropositi gramaticali dei dialetti.

Pag. 19. “ Il nostro Avvocato mise fuori *anche lui* i suoi testimonj „. E più abbasso: “ Allora tutto parea definito n'è vero? *il quale* se c'era la descrizione è tanto chiara „. Questo *il quale* è fratello del superiore: *anche lui* non può correre.

Pag. 21. “ Il messo che era di *balla* con lui ha detto di sì „. I dizionarj, per quei che non sono lombardi, non spiegheranno mai più che voglia dire questo *esser di balla*, e non s'è mai usato, e non si userà mai per *esser inteso, esser d'accordo*: è lombardismo.

Pag. 23. “ Non si potrebbe cercare un campione *anche noi*? „ Pag. 31. “ *Fa di bisogno?* che è sempre stato eretico „. Il primo zoppica di gramatica; il secondo è un lombardismo imperdonabile, ed una specie d'esclamazione, che in italiano e col senso delle parole che seguono varrebbe *sì certamente, non è a dubitarne*, e simili, o qualche maniera più elegante, che si poteva trovare in tutti i buoni scrittori.

Pag. 32. Parla dello stesso briccone e continua: “ E sotto vi era un cartello con su, dicono, il suo nome, cognome *e tutto*: *e noi*, mandarcelo qui a noi questa cara gioja „. Veramente bisognerebbe gridare un po' con queste maniere, che proprio tendono a far barbara la lingua.

Pag. 45. “ Per lo che, cheton chetone, mogi mogi, come cani *scottati*, con la coda fra le gambe, l'un di qua, l'altro di là, per la china, per l'erta, *se la fumaron via*, e in poco tempo fu tutta solitudine e silenzio „. Vedete un bel brano di prosa veramente pittoresca; se non fosse guasta da due lombardismi; ma passi ancora sui cani *scottati*, sebbene vi sarebbe a dire se vadano via *cheton chetone* o guajendo; ma perchè quel *se la fumaron via*? avesse detto *sfumarono*! E poi è il modo più spiccio, più proprio per dir che una moltitudine si scioglie? La lingua che ha descritte tante storie e tante rivoluzioni manca del modo di esprimere questo fatto? Converrà egli ricorrere ad una frase lombarda? Ma vedo che il fumo invece d'andar via, mi va alla testa: tiriamo innanzi.

Pag. 51. Dice che Bice somigliava alla madre. “ La stessa grazia ne' lineamenti, *sua* l'aria del viso, *suo* il muover degli occhi, *tutto suo* „. Quel *suo* per *di lei* va bene in Meneghino, ma non in italiano.

Pag. 63. “ È un segnale d'onore *accordato* solamente a chi, ecc. „. *Accordare* per *concedere* non è proprio.

Pag. 82. “ *Sentire la messa* „ è modo di dialetto: la messa si ode, si ascolta, alla messa si assiste.

Pag. 87. “ Stava aspettando il fine di quella *scenata* „. Parola non registrata nè nei dizionarj italiani, nè dal Cherubini; però usata da alcuni guatteri milanesi: non si poteva dire *commedia, scena*? Abbisogna la nostra lingua di queste novità?

Pag. 88. Si parla di uno che beve. " Un altro *colpetto* non farà male „. E più abbasso: " *Sorseggiando* con divozione „. Quel *colpetto*, per un *nuovo assaggio* dato alla bottiglia, è maniera lombarda: il *sorseggiare* non è italiano, ma *sorsare.*

Pag. 96. " Colpì lo scudo nel bel mezzo e glielo fracassò di *pianta* „.

Pag. 145. " Iscrivendo a Marco dovette pur venire a dichiarargli *perchè e per come* „. Pag. 153 e 154. " Il domani, ecc. fu destinato dal Conte alla caccia del falco, e Bice *era già inteso* che non vi doveva mancare „. Tutti modi sgraziati: *intendere* per *accordare* è lombardo, e poi non è bene svolto il periodo.

Pag. 157. " Io non temo, *perchè cosa ho* da temere „. *Perchè*, invece di *per qual cosa*, è modo lombardo.

Pag. 188. " Aspetterò dimani *di ragione* qualch'uno ci capiterà „. E più abbasso: " Figurati *noi* che spavento „. *Di ragione* vale *giustamente* e non s'accorda con questo modo: *de rason* è un intercalare milanese.

Pag. 194. " La padrona pareva, ecc. *tanto era data giù*, e diventata brutta da non parer più quella „. *Dar giù* vale per *venire al basso*, ma non per *dimagrare:* anche *quella* manca di qualche cosa, forse, un *di prima*: concedo che la fattora che parla se la intenderà massime a Limonta; ma non a Torino, a Firenze, non a Napoli: i comici italiani, senza imbrattare la lingua, fecero parlare massaje e gente del volgo e con uno stile popolare che è una gioja.

Pag. 195. " Guardate un po' che impostore. *Scapò su* Lauretta. È proprio stato lui a rifiutarla „. *Scapò su* per *interruppe*, per *disse improvvisamente*, non corre: almeno vi andava *scapò su a dire*: però che eleganza!

Pag. 120. " Basta s'egli verrà *Dio con bene*, se no non ti dico altro „. Non dico altro anch'io: so che a Milano si dice *ben con ben.*

Pag. 120. Parla di un uomo che s'arrampica fra un bosco. " Quando frastagliato dal verde delle frondi, di mezzo alle quali *s'intravedeva* „. *Intravedere* non è parola italiana.

Pag. 138. Un predicatore grida a un mascalzone, questi gli dà un tempione e risponde: " Ed io in nome di questa *autorità che qui* ti comando di lasciarmi andare innanzi „. Lombardismo sgraziato.

Pag. 252. " Marco mi fa *troppo più* onore che non meriti „. E più abbasso: " Ed anche Ermelinda, *vedete anche lei*, vi do parola che ha da levarne le mani al cielo „. Anche questi modi non corrono.

Qui fece punto, ma con la promessa, non mantenuta, di notare gli errori anche degli altri volumi. E concludeva: " Si " vede che il Grossi si è proprio studiato, non già di scegliere

" i bei modi italiani, ma i modi lombardi o milanesi, che po-
" tranno gustar coloro che bevono nell'Olona, ma non tutti quegli
" Italiani che, bamboleggiando o trescando col volgo, parlano, è
" vero, il dialetto della loro contrada, ma quando scrivono, quando
" esprimono sentimenti concordi alla dignità dell'animo, quando
" intendono ricreare i loro fratelli, dalla valle d'Usseglio fino
" all'ultimo sasso di Lilibeo, parlano una sola lingua, il solo pa-
" trimonio comune che ne sia restato. E sarà opera di buon Ita-
" liano l'insozzare anche questo? So che Grossi e prima di lui
" Manzoni, e tutti i loro seguaci, rispondono che questa è na-
" tura, è far parlare gli uomini secondo la loro indole ed edu-
" cazione: deliri! Allora si scrive addirittura in dialetto, allora
" si rinuncia all'onore di appartenere all'intera letteratura ita-
" liana, allora si nasce e si muore sullo stesso trivio; ma quando
" si ha ingegno da porsi nella sacra famiglia degli scrittori ita-
" liani, è un reato contra la patria comune di macchiarli colla
" barbarie dei dialetti, è un corrompere la gioventù, che crede
" e giura sull'autorità di alcuni nomi, insomma è vituperare
" crudelmente la patria „ (1).

Questi colpi, scagliati con tanta fierezza, misero a rumore Milano; tanto più che il Ponza aveva tirato in ballo anche il Manzoni e fatto un mazzo di lui, del Grossi e di " tutti i loro " seguaci „, venendo, per conseguenza, a ferire l'intero drappello de' romantici lombardi; i quali si sentirono venire " un brivido per l'ossa „ a vedersi far " l'uomo addosso „ a quel modo e " senza un riguardo al mondo „, col battesimo, per giunta, di " barbari „, di " corruttori „, di " disamorati della patria „. Un di loro scese in campo a difesa della causa comune, e rimbeccò il Ponza, dicendogli, tra l'altre cose: " Il tempo di
" ingojar altri colle parole è passato: e per quanto alcuni fac-
" ciano per rimandarlo a scuola da prete Pero, che insegnava
" a dimenticare, questo secolo, benedetto, per non dir altro, si
" arroga il diritto di ragionare, di pensare, di sentenziar di sua
" testa, anche in cose di troppo più rilievo, che non siano la
" grammatica e gli idiotismi. Ben o male che ciò sia, noi pure
" abbiamo contratto l'abitudine di riflettere prima di credere,

(1) *Annotatore Piemontese,* vol. 2°, fasc. 2°, agosto 1835, pp. 75-80.

“ e distinguer l'accusa dalla condanna. Avversi però anche alle
“ apoteosi, per quanto amici del Grossi, del Manzoni e di pa-
“ recchi de' loro seguaci, confessiamo, senza aspettar la fune,
“ che possono aver le loro mende di lingua e di stile: non ve
“ li do per angeli. Ben di questo v'assicuro, che, esaminati gli
“ errori apposti al Grossi dall'anonimo (1), neppur uno trovai
“ che mancasse di ottime ragioni od esempi. I lombardismi son
“ pretti fiorentini: le sgrammaticature stanno nei classici più
“ reputati; quel ch'egli, con una franchezza, che rinego il mondo
“ se si può dar la maggiore, asserisce che non s'usa, che non
“ si trova, che non fu mai scritto, s'usa sì, lo troviamo spesso,
“ fu scritto da' migliori: e son per noi affatto le armi ch'egli
“ stesso trasceglie, grammatiche, dizionari, que' comici italiani,
“ il cui stile popolare è (come dic'egli e come non direbbero
“ essi) una gioja. Signori no, non dovete star a detta nostra;
“ ma chiederci le prove. E appunto per questo avevamo noi
“ cominciato questa cicalata: ma la fortuna delle buone lettere
“ volle che si inducesse un campione di ben altra valentìa a
“ buttar giù la buffa, ed assumer una lite, che alla prima può
“ sembrare speciale, ma, ben vede, riguarda un punto generale:
“ lite ove chi vince acquista onore e gloria, e chi perde, dottrina
“ e sapere. Ad un libro dunque, che non può star molto ad
“ uscire, lasciamo l'impresa di difender il Grossi „ (2).

Il “ campione di ben altra valentìa „ era Alessandro Manzoni, il difensore degli oltraggiati romantici Cesare Cantù; il quale (3), ventisette anni dopo, così rievocava que' tempi, quelle

(1) Il Ponza stampò le sue *Osservazioni filologiche su* “ Marco Visconti „ *di Tommaso Grossi* senza il proprio nome, che non metteva mai ai suoi articoli, eccetto qualche raro caso, e anche allora si limitava a scriverci sotto: *Del Compil.*, cioè del Compilatore. Del resto, il suo nome figurava nel frontespizio del giornale, quasi tutto farina del suo sacco.

(2) Cantù C., *Degli idiotismi, cicalata*, nell'*Indicatore*, serie IV, tomo IV, fasc. 9-10, ottobre e novembre 1835, pp. 133-188.

(3) Anche nel *Ricoglitore italiano e straniero*, anno II, parte II, fasc. del novembre 1835, pp. 686-718, il Cantù andava allora propugnando le dottrine manzoniane sulla lingua. Ne spigolerò qualche brano. “ Converrebbe “ toccar uno de' difetti più capitali de' nostri dizionari. Voglio dirvi bravo “ se colla scorta di quelli voi riuscite a sapere se la tale o tal altra voce “ sia ancora viva. E la ragione è che gli accademici „ [della Crusca] “ e i “ loro seguaci non hanno voluto riconoscer l'autorità prima e somma ed

lotte, quelle memorie: " Il Manzoni dapprima opinava che in " fondo a tutti i dialetti esista una ricchezza comune, che può " adoperarsi per le scritture; e lo provava dal riscontrare quante " dizioni del milanese si trovino o vive sulle bocche dei toscani, " o scritte nei loro libri antichi. Dappoi modificò capitalmente " quell'opinione, riducendola più pratica, col sostenere che bi- " sogna interamente riportarsi al Fiorentino: cioè non obbligarsi " a studiar tutti i dialetti per riconoscere quel che abbiamo di " comune, ma impossessarsi d'uno solo, e a quello pienamente " e confidentemente attenersi. Son le due maniere che impron- " tarono le due lezioni de' *Promessi Sposi* „. E qui, toccato del Ponza, che " non cessava di buttarci in faccia di lombardeggiare „, e che " appuntò una serie di modi e parole ne' nostri

" unica legittima in fatto di lingue, l'*uso*. Che importa a me se Dante, se " Boccaccio, se Sacchetti usano una parola? Se oggi non si dice più là dove " si parla bene, a Firenze, essa non è della lingua. Si tralasci dunque dal " dizionario, direi io; altri diranno: si noti col marchio di V. A. „ [p. 705]. „ " E in Italia ancora si è sentito il bisogno d'una lingua comune ... e quindi " trovata la necessità di pigliare a tipo uno di questi dialetti e procurare negli " scritti di tenersi a quello e farlo comune. Questo dialetto conveniva esser " quello più colto, più adoperato fin ora dagli scrittori, e più intatto dalla " mistura barbarica. Poteva egli cader dubbio se questo fosse il toscano? " Giriamo quel beato paese, e sulla bocca del volgo e tra le imprecazioni " del facchino e nella querimonia del paltoniero, sentiamo i modi più effi- " caci, i più gentili, quelli che cinque secoli fa dalle bocche dei loro paesani " trasportarono nello scritto Dante, Boccaccio, Sacchetti, Villani. Ma perchè " il nostro non voleasi culto cieco, ma ragionato rispetto, abbiamo veduto " che in quel dialetto, come in qualunque altro, v'ha maniere troppo esclu- " sivamente proprie, ve n'ha di triviali, di fantastiche; le quali certo non " poteano essere intese, o intese al modo stesso fuor del recinto di quel " paese: sarebbe stato affettazione l'usarle, sarebbe stato precisamente un " far contro precisamente a quello che ci eravamo proposto d'ottenere, cioè " d'essere intesi da un capo all'altro dell'Italia, d'essere intesi dal popolo " — capite? non dai letterati, che intendono tutto; ma intesi dal popolo, " l'elemento più importante della società ed il più trascurato „ [pp. 710-711]. Fin dall'agosto aveva scritto nello stesso giornale: " A nessuno è caduto " mai in mente che tutta la lingua di un popolo trovisi nei libri, e che " quindi dai soli libri, anzi dai soli libri dei classici, abbiano da attingersi " le voci da registrare nel dizionario ..... Penso che il dizionario italiano " sia opera da doversi fare nuova di pianta e con tutt'altre norme, e norme " tali che portano la necessità di non poterlo fare altrove che a Firenze „ [p. 242].

scritti „, prosegue: “ Io ebbi a durar poca fatica per rinfrancar
“ con esempii classici quei modi *tutti*, ed allargando il campo ne
“ feci un lavoretto, che uscì col titolo: *Sugli idiotismi, cicalata*.
“ Prima di stamparlo il portai al Grossi, che ne lodò il concetto,
“ mi indicò avrebbe potuto accrescer a mille doppi quella litania
“ di testi, ma che volea mostrarlo al Manzoni. L'idea garbò a
“ questo. Ma come ad uomo alla cui intelligenza non vi son
“ problemi piccoli, da un pezzo egli lavora ad un'opera sulla
“ lingua: vi cambiò forma venti volte; se ne pentì, l'abban-
“ donò, la riprese, l'ampliò. Era allora un momento, che natogli
“ sotto la penna il problema dell'origine del linguaggio, prese
“ ad esaminare e discutere le varie opinioni; parendo lungo per
“ una parentesi, lo ridusse in una nota; poi quest'essa crebbe
“ in un trattato (1), sicchè bisognava rimetter a lontano termine
“ una soluzione, che pur lo sollecitavamo di dare. Or qui gli parve
“ un bel destro di premettere e soggiungere poche linee a quel
“ lavoruccio, e così gettar fuori le idee capitali, e abbandonarle
“ alla discussione; press'a poco come fece più tardi in occasione
“ del *Prontuario* del Carena (2). *Non ti rimando il tuo lavoro* (mi
“ scriveva il Grossi) *perchè Alessandro l'ha per le mani. Vuol*
“ *metterci un po' di testa e un po' di coda, e così, senza pretensione,*
“ *dic'egli, pubblicherà le sue idee sulla lingua e n'avrà fatto una*
“ *specie di* bluette, *con aria leggera, ma serrando gli avversari fra*
“ *l'uscio e il muro, e tagliando la testa al toro. Chi avrebbe mai*
“ *detto al povero abate Ponza che sarebbe andato alla posterità!*
“ Ma era lungi dal becco l'erba. Il lavoro crebbe di nuovo nelle
“ mani del Manzoni: riflettendo ad un'idea annettè l'altra; mentre
“ io e Grossi non avremmo che difeso le produzioni nostre contro
“ i pedanti, egli difendea la ragione umana contro il sofisma:
“ poco dopo, insistendo noi perchè ei desse alfine questa coda e
“ questo capo, rispose che della sua teoria era così intimamente

(1) Fu pubblicato da R. Bonghi a pp. 52-93 del tomo V delle *Opere inedite o rare*, col titolo: *Esame della dottrina del Locke e del Condillac sull'origine del linguaggio*.

(2) Cfr. *Sulla lingua italiana, lettera al sig. cavaliere consigliere Giacinto Carena, membro dell'Accademia delle Scienze di Torino, corrispondente dell'Accademia della Crusca, ecc.*; in *Opere varie di* Alessandro Manzoni. *Edizione riveduta dall'autore*, Milano, dalla tipografia di Giuseppe Redaelli, 1845, pp. 585-608.

" convinto, che sentiva il dovere di esporla al pubblico. Rammentatogli questo dovere dopo altri mesi, disse non v'avea prefisso tempo. Alcuni anni dopo mi restituì il fascicoletto del Ponza che v'avea dato occasione, e l'opera s'aspetta tutt'ora „ (1).

Il manoscritto, che il Grossi presentò al Manzoni, conteneva tutta quanta la *Cicalata*, o soltanto la " filatessa „ degli idiotismi lombardi e degli esempi classici a difesa delle parole e delle frasi adoperate dal Grossi e scomunicate dal Ponza? Ritengo che si trattasse addirittura della " filatessa „ soltanto; la quale delle 56 pagine della *Cicalata* ne abbraccia la bellezza di 32 e ne forma la parte veramente sostanziale. È vero però che le *Osservazioni* del Ponza comparvero il 1° d'agosto e che la *Cicalata*, sebbene si pubblicasse al principio di decembre, porta scritto in fine: " Di Brianza, 27 agosto 1835 „. Ma bisogna però considerare che le altre 24 pagine della *Cicalata* contengono la testa e la coda della " filatessa „: quella testa e quella coda che il Grossi si riprometteva e si lusingava uscissero dalla penna del Manzoni, e che il Cantù finì con lo scriver lui.

Nella *Cicalata* ci son due brani che fanno a' pugni tra loro con una contradizione così aperta, che il secondo non solo distrugge di sana pianta quello che afferma il primo, ma viene a far dire al Manzoni l'opposto di quello che pensava e che propugnava con tanto convincimento e con tanto calore. Il primo de' due brani è questo: " Or volendo noi ridurre anche la nostra „ (parla della lingua italiana) " all'indispensabile unità, a qual fra i vari dialetti d'Italia daremo la preferenza? S'io pongo la quistione in questi termini, alcuno nicchierà, perchè vi saranno di mezzo pregiudizi radicati. Ma facciamo un caso che dobbiate nominar in iscrittura pulita un ferro d'alcun mestiere; lo nominerete col vocabolo che gli dà l'artigiano milanese, o il genovese? Credo di no; ma cercherete come lo chiamano i fiorentini, ovvero come stia nel dizionario, che è poi tutt'uno. Se voleste che i nostri figliuoli imparassero a

(1) Cantù C., *Tommaso Grossi*, Torino, dall'Unione tipografico-editrice, 1862, pp. 37-40. Cfr. *Italiani illustri ritratti da* Cesare Cantù [3ª edizione], III, 15-16.

" parlar corretto, da che paese chiamereste l'aja o il precet-
" tore? Se bramaste acquistare nel parlar bene, in che paese
" andreste se non in Toscana? E come vi parrebbe profittarne!
" nè già sui libri, cosa che potete aver dappertutto, ma dalla
" voce viva, anzi men da quella dei colti signori, che dalla plebe.
" La conseguenza? Non se ne esce „. E poi, scordatosi di quanto
ha scritto, salta fuori a dire, che " il glorioso intento di Man-
" zoni, di Grossi e de' seguaci loro „ è quello di " dissotterrare
" la lingua sepolta in iscritture non più lette, e di cercare in
" ciascun dialetto quel che v'ha di comune a tutta Italia, di
" conformar la lingua scritta con la viva e parlata, per piacere
" con essa e farsi intendere al maggior numero; e così con libri
" letti da tutti, nel mentre si diffondono piacevoli ed utili ve-
" rità, diffondere anche un tesoro di parlare mal conosciuto e
" venirsi vieppiù accostando all'ambita unità d'idioma „ (1).

Il Manzoni, nel 1835, era proprio sempre incaponito nel credere che la lingua bisognasse disseppellirla " in iscritture " non più lette „, e che per formar questa lingua conveniva " cercare in ciascun dialetto quel che v'ha di comune a tutta " Italia „? Il Cantù, come s'è visto, lo afferma; e torna ad affermarlo anche in modo più reciso nella dissertazione che intitolò: *Manzoni e la lingua* (2), letta da lui all'Istituto Lombardo nell'aprile del '75. Stando a quest'ultimo scritto, la testa e la coda, che asserisce promessa e di fatto incominciata e poi non finita, fu occasione al Manzoni, che da più tempo meditava sulla lingua, di pigliarne a trattare di proposito. In una parola, è dalla *Cicalata* del Cantù che ha l'ispirazione e l'origine il trattato del Manzoni sulla lingua italiana. Questo è quello che dice, sebbene un tantino velatamente, il Cantù stesso nella dissertazione. " Manzoni „ (così scrive) " erasi assunto di farvi una " prefazione e una conclusione, ma, come soleva, il tema gli " crebbe in mano, e tessendo e scomponendo quella tela, si sa

(1) Cantù C., *Degli idiotismi, cicalata*, pp. 140-141 e 182.

(2) Cantù C., *Manzoni e la lingua, memoria*; in *Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti*, serie II, vol. VIII, pp. 299-316, 339, 351. — Negli esemplari tirati a parte modificò il titolo così: *Manzoni e la lingua milanese, memoria di* Cesare Cantù, *accademico della Crusca, letta nelle adunanze del 15 e 29 aprile 1875 del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere*, Milano, tip. Bernardoni, 1875; in-8° di pp. 24.

" come mai non riempisse l'ordito. Nè allora aveva ancora ele-
" vata la vista a quell'unità, di cui sempre fu innamorato; non
" piegata del tutto la fronte a quell'autorità, che credette ne-
" cessaria in tutto, necessaria qui per arrivare all'intima comu-
" nanza della parola: a una lingua unica, convenuta, diffusa,
" adoperata generalmente e in tutti i casi da tutti gli Italiani;
" insomma a dir tutti in una maniera quel che diciamo ciascuno
" in maniera diversa. Ma già vedeva come non bisognasse ricor-
" rere a stromenti artifiziali, i classici, i trecentisti, le gram-
" matiche, il vocabolario, bensì ad un canone naturale; onde a
" Ranieri Sbragia scriveva: *Il vocabolo* lingua *quando significa*
" *un complesso di segni verbali è una metafora presa da quell'istru-*
" *mento che il Creatore ha messo in bocca agli uomini, e non nel loro*
" *calamaio* „ (1).

Il Cantù torna a raccontare questo episodio anche nelle *Reminiscenze* (2); e in una nota poi soggiunge: " Giulia, sua madre,
" scriveva l'11 ottobre 1835: *Alessandro e Grossi fanno i loro*
" *più cordiali saluti; ma, a proposito di loro, ti dico in confidenza*
" *e solo fra noi, perchè i lavori dei letterati non si devono pale-*
" *sare che con la stampa, che essi lavorano indefessamente senza*
" *riposo tutto il giorno ad un lavoro pressante, che non può esser*
" *così breve. Essi contano finirlo a Gessate* (3), *che Dio voglia.*
" Ma poi Manzoni scriveva: *Nel lavorare mi vien fatto contro quel*
" *che dice il proverbio, di un nottolino una trave. Dico mi vien*
" *fatto, perchè, vedendo che la cosa, col crescer di mole richiedeva*
" *anche più unità di composizione, abbiam deliberato che la farei*
" *io solo* „ (4).

Il biglietto di donna Giulia è diretto alla cognata Antonietta Curioni, moglie di Giulio Beccaria, suo fratello; l'altro è il frammento d'una lettera a Gaetano Cioni dell'8 febbraio 1836. Al Cioni però Alessandro aveva scritto il 25 ottobre dell'anno prima: " Dell'*Assedio di Firenze* del Grossi e de' miei *Untori* le

---

(1) È il brano d'una lettera scritta il 12 ottobre 1853 e per conseguenza non ha niente che vedere con le opinioni manzoniane d'allora sulla lingua: le quali, del resto, erano identiche a quelle del 1853, come provo più avanti.

(2) Lo racconta però con particolarità affatto diverse. Io, com'è naturale, mi attengo a quello che scrisse e stampò nel 1862, vivente il Manzoni.

(3) Nella villa di Giulio Beccaria.

(4) CANTÙ C., *Alessandro Manzoni, reminiscenze*; I, 240.

“ son tutte favole. Ben vi dirò in confidenza..... che si sta “ appunto lavorando insieme noi due a una bubbola da finirsi “ e da darsi fuora presto..... Sarà un libretto o un mezzo libro “ che tratterà di lingua „. Non era dunque il capo e la coda della *Cicalata*: era l'opera sulla lingua nel suo primo embrione (1). Che poi il Manzoni nel '35 non avesse “ ancora elevata la vista a “ quell'unità, di cui sempre fu innamorato; non piegata del tutto “ la fronte a quell'autorità che credette necessaria in tutto, ne- “ cessaria qui per arrivare all'intima comunanza della parola; “ a una lingua unica, convenuta, diffusa, adoperata generalmente “ e in tutti i casi da tutti gli Italiani „, come asserisce il Cantù, non ha fondamento nel vero. Tutti i manoscritti lasciati dal Manzoni intorno alla questione della lingua provano invece che fin dal '27 la sua fede nel Fiorentino era divenuta incrollabile, e già nelle acque dell'Arno incominciava a risciacquare il Romanzo (2). E che la luce di questa fede balenasse anche prima alla sua mente, ne fa testimonianza la madre. Il 3 marzo del '24 donna Giulia scrive al Fauriel: “ Mio figlio..... ha tut- “ tavia sempre in capo il *Mercato Vecchio*..... fra tanto egli “ ci strazia gli orecchi con tutti i suoi toscanismi „. Gli torna a scrivere poco dopo: “ Voi parlerete ad Alessandro del *Mer-* “ *cato Vecchio*; è là per lui tutta la Toscana! „

Della “ testa „ e della “ coda „ della *Cicalata*, che il Cantù afferma incominciate e poi rimaste in tronco, non ce n'è traccia nelle carte manzoniane. Può darsi benissimo che abbia distrutto

(1) Il Tommaseo scriveva da Parigi il 24 maggio 1836 al Cantù: “ Mi “ dispiace vivamente che il Manzoni voglia foggiare a confutazione il suo “ libro. E confutazione dell'*Annotatore Piemontese*! Ma se il lavoro in questa “ nuova forma è già innanzi, non lo stornate: pur che finisca. Che s'egli “ ascolterà tutti quanti i consigliatori, non lo finirà mai di certo. Fate ch'ei “ non butti via nulla di quel ch'ha scritto già, e stampi presto „. Il Tommaseo non fa che rispondere al Cantù, per conseguenza ripete quello che il Cantù gli aveva scritto intorno al Manzoni e al suo lavoro, e vi fa degli apprezzamenti propri. Questo brano non fu riprodotto da E. Verga nel suo libro: *Il primo esilio di Nicolò Tommaseo, 1834-1839, lettere di lui a Cesare Cantù, edite e illustrate*, Milano, Cogliati. 1904; ma lo stampò il Cantù stesso, col resto della lettera, nelle *Reminiscenze*; II, 69.

(2) Cfr. Sforza G., *La risciacquatura in Arno dei* “ Promessi Sposi „; in *Scritti postumi di* Alessandro Manzoni, Milano, Rechiedei, 1900; I, 111-180.

ogni cosa (1); può anche darsi che non ne abbia scritto neppure una riga, e che tutto questo gran poema della " testa „ e della " coda „, in fin de' conti si riduca a uno scatto di stizza nel sentirsi così malmenato dal Ponza, a un desiderio di far cosa grata al Grossi, a una promessa sfuggitagli di bocca lì per lì e poi non potuta o non voluta mantenere. Del resto, non so capire come il Cantù si sia tanto fermato sulla *Cicalata* e sulla " testa „ e la " coda „ che avrebbe dovuto farci il Manzoni; il Cantù che lo giudica " più grande pensatore che grande artista „; e non sa darsi pace che negli ultimi anni gli amici " lo ingol-" fassero a biascicar dispute di lingua „; e sente venirsi i brividi nel vederlo " impacciato nella minuzia di cercar col fuscellino " le parole sulle labbra, come il Cesari le razzolava negli scrit-" tori „ (2); il Cantù che scrive a Gino Capponi (3): " Come vi " son parsi i cambiamenti fatti da Manzoni agli *Inni*? E giacchè " ritoccava la *Morale Cattolica*, non potea rifarne la lingua, con " maggiore utilità de' *Promessi Sposi*? „ Questa lettera è del 21 maggio '55; l'anno in cui restò finalmente compita l'edizione delle *Opere varie*, incominciata fin dal '45 e " riveduta dall'autore „: edizione che usciva fuori a fascicoli, gli ultimi de' quali

---

(1) Che il Manzoni abbruciasse delle carte riguardanti i suoi studi sulla lingua, lo afferma STEFANO STAMPA [*Alessandro Manzoni, la sua famiglia, i suoi amici, appunti e memorie*; I, 88]. Ecco quello che scrive: " Il Manzoni " aveva cominciato un lavoro sulla lingua in un senso diverso da quello " che poi adottò e che non ha più variato. E ne aveva anche scritto molto, " quando accorgendosi dopo nuovi studi e nuove meditazioni di esser nel " falso, bruciò inesorabilmente tutto il suo lavoro fino all'ultima pagina. " Tutto ciò me lo disse lui stesso. E lo riprese poi daccapo nel senso in " cui ne parlava con tanto interesse dal 1837 a quando morì „. Il lavoro a cui accenna lo Stampa è quello che fece in compagnia del Grossi; del quale infatti non si trova nessunissima traccia tra le carte del Manzoni. Lo dovevano fare insieme e lo incominciarono a fare insieme; ma, " col " crescer della mole „, vedendo poi (come il Manzoni stesso scrisse al Cioni) " che richiedeva anche più unità di composizione „, deliberarono di comune accordo che lo farebbe il Manzoni solo; e il Manzoni si affrettò a bruciare tutto quello che avevano scritto, e ricominciò da capo il lavoro. Che si accorgesse " di esser nel falso „ e mutasse allora opinione, è fuori del vero; e nell'affermarlo, lo Stampa s'inganna: cosa, del resto, che gli accade più d'una volta in quel suo infelicissimo libro.

(2) CANTÙ C., *Alessandro Manzoni, reminiscenze*; I, 39 e 258.

(3) CAPPONI G., *Lettere*; III, 144.

contenevano appunto le *Osservazioni sulla Morale Cattolica*, gl'*Inni sacri* e il *Cinque Maggio*.

Il Manzoni non risciacquò in Arno le poesie, e non poteva nè doveva farlo, perchè la poesia, che ha ragione e criteri diversi dalla prosa, ha anche un linguaggio a sè e per sè, che ne differisce sostanzialmente; linguaggio composto di vocaboli accozzati insieme a bello studio, per esprimere le cose comuni con termini che non sono punto comuni; linguaggio, che quando non ha, nè trova questi termini insoliti, sforza la lingua a furia di ripieghi, di giri, di rigiri a dire indirettamente quello che direttamente non potrebbe nè saprebbe esprimere che col suo termine vero e col suo nome comune. Di più: (l'osservazione è del Manzoni) " la poesia vuole esprimere anche dell'idee che l'uso comune " non ha bisogno d'esprimere; e che non meritano meno per " questo d'essere espresse, quando uno l'abbia trovate..... E " questo non lo fa o lo fa ben di rado, e ancor più di rado feli" cemente, con l'inventar vocaboli novi, come fanno, e devono " fare, i trovatori di verità scientifiche; ma con accozzi inusitati " di vocaboli usitati; appunto perchè il proprio dell'arte sua è, " non tanto d'insegnar cose nove, quanto di rivelare aspetti novi " di cose note; e il mezzo più naturale a ciò è di mettere in " relazioni nove i vocaboli significanti cose note " (1). Il linguaggio poi che l'Italia adopera nella poesia è di una tale varietà e ricchezza, e riesce a dar rilievo, colorito, espressione, sfumatura al pensiero in modo così efficace e potente e con tanta finezza d'arte, che ha il vanto meritato e incontrastato d'essere il più poetico delle lingue moderne. Il Manzoni, sia con gl'*Inni*, sia con l'ode: *Soffermàti*, sia col *Cinque Maggio* e le tragedie, non intese di dare una forma nuova alla poesia, ma soltanto un genere nuovo di poesia; ed è riuscito nuovo per la delicatezza e la profondità dell'affetto; per la sublimità, la forza e l'originalità del pensiero (2). " Osò alzare un canto nuovo ", nota Cesare

(1) Manzoni A., *Del Romanzo storico e, in genere, de' componimenti misti di storia e d'invenzione*; in *Opere varie*, p. 503.

(2) Il Manzoni è originale nelle stesse sue poesie giovanili, da lui poi rifiutate, ma per ragioni nelle quali l'arte non ha punto che fare nè che vedere. Negli sciolti in morte dell'Imbonati e nel poemetto *Urania* le rimembranze de' classici latini abbondano: " ma son più le parole che ten" dono al latinismo, che non le frasi con originalità trasportate dal gusto

Guasti, " un canto nuovo, quale dopo gli orrori della Rivoluzione " francese, le guerre napoleoniche, i disinganni del '13 e gl'in- " ganni del '15, era desiderato dalle giovani generazioni del se- " colo XIX, o sia che alle antiche credenze domandassero pace, " o sia che nella fede in Dio sentissero avvalorata la speranza " delle cose umane, prima delle quali è la Patria; un canto nuovo, " pel quale, se la modestia gli avesse lasciato pensare a tanto, " avrebbe Alessandro Manzoni prescelto di prendere il *cappello* " poetico sul fonte del suo battesimo „ (1). Fu nella prosa, unicamente nella prosa, che portò la rivoluzione; una doppia rivoluzione, che abbraccia a un tempo la lingua e lo stile.

Lo stile, che è " la maniera di mettere insieme i materiali " d'una lingua „ (2), il Manzoni già se l'era formato quando prese a scrivere i *Promessi Sposi* (3); e nel correggerli si occupò di dare ad essi una forma perfettamente fiorentina; non altro. Nel risciacquare in Arno le *Osservazioni sulla Morale Cattolica* (giacchè, per quanto il Cantù non se ne sia accorto, e lo neghi, ce le tuffò e rituffò per bene) dette qualche ritocco anche allo stile (4). Di

" antico al moderno, e da un'idea materiale o semplice ad una spirituale " e profonda „. L'osservazione è del Tommaseo, che soggiunge: " Il Man- " zoni era ancora sulla via vecchia: sebbene già mostrasse anche in quelle " imitazioni uno spirito d'originalità, che indarno cercheresti in certe " poesie del Parini e del Monti „. Cfr. Tommaseo N., *Delle poesie giovenili d'Alessandro Manzoni e quindi del suo modo d'imitare gli antichi*; in *Opere di* A. M. *milanese, con aggiunte e osservazioni critiche. Prima edizione completa*, Firenze, presso i fratelli Batelli, 1829, III, 68.

(1) Guasti C., *Opere*; III, 412.

(2) Manzoni A., *Epistolario*; II, 232.

(3) Il D'Ovidio [*Le correzioni ai* " Promessi Sposi „ *e la questione della lingua. Terza edizione interamente rifusa*, Napoli, Morano, 1893, p. 33] osserva: " Fin da che lo compose „ [il Romanzo] " la prima volta gli brillava già " limpido nella mente l'ideale dello stile „.

(4) L'A. dette quest'opera alle stampe nel 1819, col titolo: *Sulla* | *Morale Cattolica* | *osservazioni* | *di* Alessandro Manzoni | *Parte prima.* | — | Unum gestit interdum ne ignorata damnetur. | Tertull. *Apol.*, Cap. I. | Milano. | Dalla Stamperia di Antonio Lamperti | Porta Vercellina, Nirone S. Francesco N. 2797. | 1819.: in-8°. Senza il suo consenso fu ristampata a Torino nel 1824, a Roma nel 1826, a Firenze, co' torchi de' Batelli, nel 1829, a pp. 145-374 del tomo III della " prima edizione completa „ delle *Opere* del Manzoni, con una " nota „ di Niccolò Tommaseo. La successiva ristampa uscì fuori a Pavia dalla tipografia Bizzoni nel 1830. L'editore dichiara nell'avvertenza che " questa nuova edizione „ (la quale, per verità, non è la " quarta „,

questi ritocchi il Cantù se ne accorse, ma non ne fu contento. " Le ristampò con molte e non tutte felici variazioni di stile „, scrive dell'edizione riveduta: e di quella del '19, l'edizione principe: " Tu senti l'uomo avvezzo a muover le idee per proprio

come afferma, ma la quinta) " si deve alle cure di uno zelante Prelato, il " quale considerando la benefica influenza che una più estesa diffusione di " un libro sì utile può esercitare sul trionfo delle auguste verità morali e " religiose, ottenne dall'amicizia dell'autore il consenso a che venisse ripro- " dotta „. Lo " zelante Prelato „ era monsig. Luigi Tosi, il quale affidò l'incarico di curare quella ristampa all'ab. Giovanni Finazzi di Bergamo, allora maestro di belle lettere e di eloquenza sacra nel Seminario di Pavia. Non ebbero, invece, il consenso del Manzoni le posteriori edizioni fatte a Milano nel '30, a Torino nel '32, a Firenze, a Montepulciano, a Prato e a Milano nel '34, a Sanminiato, a Imola e a Napoli nel '35, a Parma nel '36, a Napoli nel '38, a Torino nel '39 e a Prato nel '41. Col suo consenso fu tradotta in francese dall'ab. De la Couture, e stampata a Parigi nel '35, " chez Gaume frères „. La " seconda „ sua edizione è quella che si legge a pp. 609-813 delle *Opere varie* e restò ultimata nel 1855; nel qual anno ne fece anche un'edizione a parte in-16°, che porta scritto nel frontispizio: " Terza edizione dell'autore, riveduta e corretta „.

Al Rosmini scriveva il Manzoni fin dal 12 gennaio del '51: " Avendo " dovuto metter mano alla correzione della *Morale Cattolica*, ho dovuto av- " vedermi subito, che la correzione non poteva essere semplicemente tipo- " grafica; ed eccomi ingolfato in un continuo e minuto lavoro „. Gli tornò a scrivere il 18 febbraio del '54: " Sono a un di presso ai due terzi della " dispensa, che uscirà probabilmente nella quaresima, e che sarà a un di " presso i due terzi del libro. Quell'aggiunta sulla dottrina luterana e cal- " viniana della giustificazione per la sola fede, e la quale mi pareva costì „ [a Lesa] " non dover richiedere che un cenno e poche nude citazioni, mi " s'è allungata terribilmente, non tanto per quello che m'è riuscito di scri- " vere, quanto per quello che ho dovuto leggere, cioè mi s'è allungata in " quanto al tempo da spenderci, molto più che in quanto alla sua esten- " sione ..... Ho dovuto fare una gran conoscenza principalmente con Cal- " vino, il quale m'è parso bensì quel sofista, ma non quel sofista così sot- " tile che si dice comunemente. I suoi errori, almeno quelli che ho dovuto " esaminare più di proposito, non mi paiono distanti dall'assurdo mani- " festo, che per l'intermezzo di leggieri equivoci e cavillazioni „. Lesse infatti quasi tutte le opere di Calvino, e confidava al suo intimo amico don Paolo Pecchio, curato di Brusuglio, il quale me l'ha poi raccontato, che il tedio di quella pesante lettura era però addolcito dalla bontà del latino con cui sono scritte. Al Rosmini riscriveva il 14 d'aprile: " Ricevo in questo " momento dal torchio il fascicolo ..... L'aggiunte di qualche estensione " sono alle pagine 646-53, 681-688, 719-20 „. Nel successivo fascicolo, col quale il lavoro ebbe il suo termine, vi aggiunse di nuovo un' " appendice al

" conto, ma foggiarle alla carlona, come era la moda „ (1). Non tutti però la pensano come lui. Quell'ingegno colto e gentile di Luigi Venturi dice che nell'edizione riveduta " ha inteso di " accostarsi ai più schietti modi della lingua parlata „; ma soggiunge: " e se non sempre è riuscito così felicemente come nella " ristampa del suo Romanzo, vuolsi forse trovare alcuna cagione " nella natura di ciò che forma il soggetto di queste due prose, " così diverse tra loro per intendimento e maniera di tratta- " zione „ (2). Il Venturi ha intraveduta la verità; non l'ha colta però nella sua pienezza, come ha fatto G. I. Ascoli, che scrive: " Tra l'intonazione della *Morale Cattolica* e l'intonazione gene- " rale d'altre prose d'Alessandro Manzoni, c'è molto semplice- " mente la differenza che passa tra il linguaggio ch'egli mette " in bocca a Federigo Borromeo e quello ch'egli fa parlare a " don Abbondio e Perpetua. Il linguaggio e lo stile del Cardi- " nale è più solenne, più severo, più letterario di quello degli " altri personaggi dei *Promessi Sposi*, perchè era naturale che " fosse così; e il linguaggio e lo stile della *Morale Cattolica*, " confrontato con quello d'altre prose del medesimo autore, ha " un'andatura più compassata, più raccolta, men biricchina, men " toscana, meno disforme da quello che si potrebbe dire il tipo " letterario dell'Europa addottrinata e pensante, per questa pri- " missima ragione, che il Manzoni qui parla solennemente, di- " nanzi all'Europa, da campione palese della fede e della gente " sua „ (3). Ha scritto come ha scritto, non perchè non gli sia

" capitolo terzo „ [pp. 771-813], in cui tratta *Del sistema che fonda la morale sull'utilità*; mirabile scritto, che fu ristampato il medesimo anno nella *Poliantea Cattolica*, di Milano, anno IV, pp. 104-165.

Tra le carte del Manzoni c'è una copia a pulito, tutta di sua mano, di quella da lui chiamata *Parte prima*, e che poi rimase l'unica che approvasse. Invece del passo di Tertulliano: " Unum gestit interdum ne ignorata " damnetur „, ha il seguente, che poi cancellò: " Je n'ai pas plus d'envie " de lui déplaire, que lui de nous nuire. J. J. Rousseau, Préf. de la lettre " à M.r d'Alembert „.

(1) Cantù C., *Alessandro Manzoni, Reminiscenze*; I, 88-89 e 232.

(2) Manzoni A., *Osservazioni sulla Morale Cattolica, dichiarate e illustrate da* Luigi Venturi. Firenze. Felice Paggi, libraio-editore [Tipografia Moder], 1877; in-16°, di pp. viii-248.

(3) Ascoli G. I., *Brano d'una lettera inedita concernente la doppia questione della lingua e dello stile*; nella *Perseveranza*, anno XXI, n. 7355, del

riuscito di far meglio, ma perchè voleva scriver così. E non poteva far che così, anche perchè " se nei *Promessi Sposi* la qua-" lità del genere letterario, a cui il romanzo appartiene, dà luogo " a molto maggiore varietà e ricchezza di vocaboli e di frasi o " modi di dire; nella *Morale Cattolica* la difficoltà del soggetto " richiede che i vocaboli e le frasi segnino efficacemente e spic-" catamente ogni piega, per sottile che sia, del pensiero d'una " mente acuta e arguta „ (1). L'osservazione è del Bonghi; il quale poi giudicava non meno giovevole lo studiare le correzioni di lingua fatte dal Manzoni alla *Morale Cattolica*, di quello che le correzioni fatte ai *Promessi Sposi*.

Questo studio, che anch'io mi auguro si faccia, chiarirà se il tentativo d'accostarsi ai più schietti modi della lingua parlata è in realtà riuscito " non sempre così felicemente „, come crede il Venturi; proverà anche quanto siano lontani dal vero quelli che si sognano che il Manzoni, con lo scegliere per unica lingua d'Italia la lingua di Firenze, intendesse che si abbia a scrivere in maniche di camicia. Quando la natura del soggetto lo vuole, si hanno da usare le voci, le frasi, i modi che suonano in bocca al popolino; come, quando la natura del soggetto lo vuole, si deve adoperare la lingua che parla la gente colta a Firenze. In questo avvicendarsi di scelte consiste l'arte dello scrivere. L'ha mostrato alla stregua de' fatti, l'ha insegnato con l'esempio, anzi con più generi d'esempi, il Manzoni: grande pensatore e al tempo stesso grande artista.

E il Manzoni neppur s'è sognato, come gli fa dire chi non l'intende, di non dar quartiere agli scrittori e volere che siano tutti banditi (2). In quanto alla lingua non riconosce altra au-

12 aprile 1880. — Di questo brano il D'Ovidio ha formato la terza appendice al suo libro: *La lingua dei* " Promessi Sposi „ *nella prima e nella seconda edizione*.

(1) Manzoni A., *Opere inedite o rare*; III, 239.

(2) Il Manzoni, messa che ebbe alle stampe, nel marzo del 1868, la sua relazione: *Dell'unità della lingua e dei mezzi di diffonderla*, per testimonianza del Broglio, si trovò addirittura " in una fase effervescente „: e " contro un'antica abitudine „, prese a leggere e leggeva " volentieri „ quello che in Italia si andava pubblicando sulla sua proposta. Un'accusa soprattutto lo colpì: cioè che negasse agli scrittori " ogni parte, ogni utile azione, nelle lingue „; accusa senza fondamento al mondo, giacchè " una simile strava-

torità che quella dell'Uso, perchè l'Uso soltanto, e non altro che l'Uso, non già il capriccio degli scrittori, fa e disfà le lingue e n'è il padrone e il regolatore. In quanto agli scrittori distingue quelli che sanno tenere in mano la penna, da quelli che non ce la sanno tenere; e dà anche un'occhiata un po' maliziosetta al loro calamaio, per sincerarsi se adoperano l'inchiostro con cui si parla ai morti, o quello con cui si manifesta il proprio pensiero ai vivi.

---

ganza „ non gli " era mai passata per la mente „. Si accinse a ribatterla con lo scritto: *Della parte che possa competere agli scrittori nelle lingue*, che disgraziatamente non condusse a fine e che fu da me pubblicato a pp. 371-382 del V volume delle sue *Opere inedite o rare*.

La regina Antiochide di Cappadocia e la cronaca regia degli Ariaratidi.

Nota del Dott. UMBERTO MAGO

Al frammento 19 del libro XXXI della Biblioteca di Diodoro si legge un riassunto della storia della casa reale di Cappadocia, che potrebbe chiamarsi compendio della cronaca di quella dinastia. Fino ai tempi di Seleuco I, re di Siria, offre non lievi difficoltà dal lato della credibilità storica; noi però ne esamineremo soltanto la parte che si riferisce ad Ariarate V Filopatore (n. 7-8).

Vi si narra che Ariarate, IV secondo le nostre liste, sposò Antiochide, figlia di Antioco III di Siria, πανοῦργον μάλιστα. Si raccontava, dice la cronaca, che costei, essendo sterile, avesse supposto ad insaputa del marito due figli, Ariarate ed Oroferne, ma poi, cessata dopo qualche tempo la sterilità, avesse avuto due figlie ed un figlio, Mitridate (1): allora la regina avrebbe rivelato tutto al marito, il quale si sarebbe indotto a mandare Ariarate a Roma ed Oroferne in Ionia, affinchè non potessero disputare il trono al figlio legittimo. Mitridate poi, fatto adulto,

(1) Diodoro, XXXI, 19, 7. Ad un tratto il discorso, cominciando dalle parole ταύτην δὲ μὴ γινομένων κτλ., passa all'accusativo coll'infinito, ciò che fa supporre che qui in origine, probabilissimamente già in Diodoro, si trovasse un φασί od altro verbo di analogo significato. Si noti che poco dopo, a proposito del nome di Ariarate assunto da Mitridate, si trova un φασί. Forse nell'estratto che possediamo il φασί è stato spostato e nell'originale era riferito a tutto il racconto della supposizione dei due figli di Ariarate IV, oppure se ne trovava un altro in principio del racconto stesso. Si confrontino in questo frammento altre espressioni dello stesso genere: p. es. λέγουσι αὐτοὺς κτλ. Un altro punto dove certo è da Fozio omesso il φασί o altro verbo di senso analogo, è al n. 3 del frammento di cui ci occupiamo: ὃν καὶ Πέρσαις κτλ.

fu chiamato Ariarate, venne educato alla greca e si mostrò adorno d'ogni virtù: il padre, che lo amava teneramente, volle perfino spogliarsi del regno per cederglielo, ma il giovine ricusò d'accettare tal dono mentre vivevano i genitori. Morto Ariarate (IV), Mitridate col nome di Ariarate (V) salì al trono, e si mostrò nella sua condotta d'indole preclara. S'occupò con amore anche di filosofia, e d'allora la Cappadocia fu aperta ai dotti greci, mentre prima era quasi sconosciuta. Questo re rinnovò pure l'amicizia e l'alleanza coi Romani.

Fin qui la cronaca. Ora ciò che colpisce immediatamente il lettore è la supposizione dei due primi figli; si comprende, dato l'assoluto bisogno di provvedere alla successione, che si supponga un erede, ma si riman perplessi quando si pensi che un secondo figlio sarebbe stato supposto, vivente il primo e quindi senza necessità per detto scopo, tanto più che i sovrani di Cappadocia erano in età da far presumere che potessero avere altra prole, come di fatto ne ebbero pochi anni dopo (1). Nato poi quello che, secondo la cronaca, sarebbe stato l'unico rampollo legittimo, non gli fu imposto il nome di Ariarate, come a tutti i principi ereditari, ma quello di Mitridate.

Certo è che i due primi figli furono allontanati da corte: uno, Ariarate, fu mandato a Roma sotto il pretesto di compiere la propria educazione, ma realmente per dare al Senato una prova indiscutibile di fedeltà in momenti in cui i Romani diffidavano di tutte le potenze orientali; l'altro, Oroferne, nella Ionia, dove, lasciati i patriarcali costumi della sua nazione, si

(1) Che Ariarate, primogenito di Ariarate IV, vivesse ancora quando, secondo la cronaca, fu supposto Oroferne, risulta dal fatto che nel 172 a. C. egli fu mandato dal padre a Roma per completarvi la sua educazione e vi fu accolto dal Senato come prole legittima del re di Cappadocia (Livio, XLII, 19, 3). Il giovane principe, come par risultare dal racconto liviano, non doveva avere molto di più di 16 o 18 anni; sarebbe quindi nato verso il 194 od il 192; nel 195-3 Ariarate IV aveva sposato Antiochide. Mitridate nacque senza dubbio prima del 172, altrimenti nel 163, in cui salì al trono, non avrebbe avuto al più che 10 anni, contando gli estremi, ciò che ripugna alla verità dei fatti, perchè Ariarate V, quando assunse il potere, era già maggiorenne. Secondo la cronaca, Mitridate era il terzo dei figli legittimi, avendo avanti a sè due sorelle; quindi Oroferne, nato prima di queste ultime, era di qualche anno almeno maggiore di Mitridate, epperciò nacque parecchi anni prima del 172.

diede a quella vita lussuosa e lussuriosa comune nel gran mondo ellenistico (1). Il solo Mitridate sembra sia rimasto in Cappadocia od almeno, se se n'assentò per attendere agli studi, vi fece ritorno ben presto.

Ariarate IV nulla sapeva, secondo la cronaca, della supposizione dei due primi figli, e soltanto quando nacque Mitridate fu avvertito della cosa: quindi, se la moglie non gli avesse svelato la verità, il re a sua insaputa avrebbe introdotto nella sua famiglia l'un dopo l'altro due rampolli supposti. Tutto ciò pare straordinario: ad ogni modo la colpa figura tutta della regina.

Dalle notizie della cronaca, in parte rettificate in uno od in altro modo secondo i critici, è derivata la tendenza a credere che Antiochide abbia dominato l'animo del marito ed abbia favorito in ogni modo Mitridate, fino a procurargli la successione al trono. Ora, esaminando i motivi fondamentali della formazione del racconto che c'interessa, mi pare che vi siano argomenti in contrario a questa tradizione.

Se osserviamo la responsabilità del re e della regina nella assunzione di Mitridate a principe ereditario, vediamo che il sovrano nella versione regia nulla sa, fino alla nascita dell'ultimo figlio, della supposizione dei due primi e li alleva come suoi, anzi deve considerare Ariarate come legittimo successore, dato lo strettissimo diritto di primogenitura vigente alla corte di Cappadocia e confermato da tutta la cronaca. Questa ignoranza del re notiamo che poteva benissimo servire a scusarlo alla meglio, se in seguito avesse cessato di considerare suo erede Ariarate e in seconda linea Oroferne, a cui dopo la morte del primogenito di diritto, secondo le consuetudini cappadoci, sarebbe toccato il diadema.

Con questa versione dei fatti Ariarate IV, stato sorpreso nella sua colossale buona fede, doveva necessariamente, appena avvertito, disdirsi riguardo ai diritti già accordati ai primi due figli. Quindi la colpa, od almeno la causa di questo mutamento di decisione del re, sarebbe della regina, sulla quale la cronaca tende evidentemente a rovesciare tutta la responsabilità a proposito di queste questioni di successione. Riconosciuta la legittimità del solo Mitridate, dice il nostro racconto, il padre prese

(1) Polibio, XXXII, 11.

ad amarlo teneramente ed il figlio lo ricambiava di pari affetto. Quanto ad Antiochide sappiamo, all'infuori delle notizie più o meno sospette della cronaca, ch'essa negli ultimi anni della sua vita si ritirò alla corte d'Antiochia, dove poi, nell'autunno 164 a. C. al più presto e non più tardi della fine del 163, fu uccisa da Lisia, tutore d'Antioco V (1).

Questo fatto dimostra che alla corte di Mazaca all'ultimo essa non doveva godere di molte simpatie; l'essere πανοῦργος μάλιστα, se pure non fu esagerata ad arte la sua tendenza all'intrigo, parrebbe che accreditasse le dicerie sulla supposizione dei due primi figli. Ora sembra naturale che se veramente Antiochide avesse lottato per far riconoscere principe ereditario Mitridate e vi fosse riuscita sul debole consorte malgrado un partito avverso a corte, non solo sarebbe stata da una susseguente vittoria di quest'ultima fazione costretta a ritirarsi lei, ma anche i suoi piani sarebbero stati combattuti; inoltre colla sconfitta della madre anche il figlio preferito, che agli intrighi di lei doveva il suo grado, avrebbe dovuto ritirarsi davanti ai due fratelli maggiori. E qui occorre aggiungere che riguardo alla genuinità di questi ultimi, non tutti in Cappadocia e fuori credevano a versioni del genere della nostra cronaca, chè nel paese si manifestò più tardi un partito in favore di Oroferne e gli stranieri, p. es. Polibio, credevano e chiamavano Oroferne ἀδελφός di Ariarate V: questa era pure l'opinione accettata dai Romani (2).

Da tutto ciò pare che Ariarate IV mai abbia sconfessato pubblicamente Oroferne. Lo strano sarebbe che, quando appunto pareva trionfassero i pretesi suoi disegni e Mitridate sembrava ed era ormai di fatto considerato erede del trono, Antiochide si fosse ritirata alla corte d'Antiochia, dove poco di poi fu uccisa; sappiamo per giunta che dal governo di Cappadocia non si richiesero neppure le sue ossa, le quali solo più tardi vennero riscattate da Ariarate V, divenuto re.

Considerando tutti questi elementi, mi pare che le cose siano andate in modo molto diverso da quello che pretende la cronaca ed è ammesso, almeno in parte, da alcuni critici mo-

---

(1) Polibio, XXXI, 7.

(2) Diodoro, XXXI, 32 (derivato da Polibio); Giustino, XXXV, 1.

derni. E come si sia formata questa versione dei fatti si può forse senza troppa difficoltà spiegare. Ariarate avrebbe per motivi a noi insindacabili scelto per suo successore il terzo figlio, Mitridate, legittimo al par degli altri due: vi si opponeva però una gravissima difficoltà: il diritto di primogenitura, rigidissimo in Cappadocia. Eppure questo diritto occorreva assolutamente procurarselo in ogni modo. Poco dopo la morte di Ariarate IV e la successione di Mitridate, Oroferne, poichè il fratello maggiore molto probabilmente era già morto, non facendosene più cenno nei testi che trattano della guerra civile in Cappadocia, Oroferne adunque, riputato generalmente fratello legittimo di Ariarate V, reclamò il diadema in virtù delle consuetudini nazionali. Contro di lui e del suo diritto indiscutibile si appuntavano gli sforzi di Ariarate V e del suo partito che non trovarono nulla di meglio che dichiararlo spurio e, siccome ammettere la genuinità del primogenito e poi la supposizione di Oroferne, vivente ancora il primo fratello, non pareva verisimile, pensarono per manco male di farli spurii tutti e due. Quanto alle sorelle nulla importava, anzi era meglio ritenerle legittime, potendo essere utili alla politica di Ariarate V. Così si venivano ad assicurare i diritti di quest'ultimo ed a mettere al coperto il procedere di suo padre.

Non mi pare necessario per correggere la cronaca ammettere, come inclinerebbe a creder possibile il Niese (1), che Ariarate seniore ed Oroferne fossero figli di Ariarate IV e di una concubina, anzi ciò mi sembrerebbe inverisimile, perchè in questo caso essi non avrebbero potuto elevar pretese contro Mitridate e non avrebbero costretto il racconto ch'esaminiamo ad una tradizione così strana, come quella da esso riferita, sulla loro origine; anche in Cappadocia, come ci fa capire esplicitamente la cronaca, i figli illegittimi non avevano diritto alla successione (Diod., l. c., 4). Ma per Ariarate V il male era che molti non credevano alla supposizione di Oroferne; questo era il punto debole nei suoi diritti al trono, eppure doveva in ogni modo sconfiggere su questo campo il fratello: era questione di vita o di morte.

---

(1) Niese, *Geschichte der griechischen und makedonischen Staaten*, III, p. 248, n. 3.

Ariarate poi, trovandosi dal lato delle consuetudini nazionali sur un terreno molto sdrucciolevole, mentre da una parte cercava di sostenere alla meno peggio la sua primogenitura, tentava dall'altra d'appoggiarsi ad un diverso ordine di diritti, cioè all'espressa volontà del padre. Questi, secondo la cronaca, amava straordinariamente il figlio Mitridate e già gli aveva voluto cedere, lui vivente, tutta l'autorità: ὁ μὲν πατὴρ ἐξίστασθαι τῆς ὅλης ἀρχῆς ἠγωνίζετο τῷ παιδί, ὁ δὲ ἀδύνατον ἐδείκνυ δέξασθαι αὐτὸν παρὰ γονέων ἔτι ζώντων τὴν τοιαύτην χάριτα. Probabilissimamente Mitridate era già stato associato al trono; era questo il mezzo più praticato per far passare la successione fuori della linea consuetudinaria. Circa l'associazione nella dinastia cappadoce c'era già un precedente: Ariaramne ὑπάρχων φιλότεκνος διαφερόντως, dice il nostro racconto, aveva ciò fatto verso il figlio, Ariarate III. Ma ora, stando al passo citato, non si trattava più di associazione, ma di completa abdicazione da parte di Ariarate IV (τῆς ὅλης ἀρχῆς ἐξίστασθαι), dal che naturalmente derivava che *a fortiori* volesse lasciar alla sua morte il trono al preferito. Specialmente con questo fatto la cronaca insiste sullo straordinario amore del re pel figlio Mitridate, che teneramente lo riamava. Ed anche Ariarate V nei fatti per parte sua vi insistette sempre, onorando con venerazione tutta speciale la memoria del padre e chiamandosi Εὐσεβής Φιλοπάτωρ, appellativi che hanno pure qualche valore per la nostra indagine, quando si pensi che nel secondo secolo a. C. i cognomi reali diventano spesso vere armi o mezzi per affermare diritti discussi. Oroferne per contro prese invece l'appellativo di Νικηφόρος, allusivo probabilmente alla cacciata del fratello dal regno (1). Questa della volontà paterna era la parte sicura, se non legale in via assoluta, dei diritti di Ariarate V e su di essa egli potè insistere con maggior fortuna. Il fatto dei solenni funerali ad Antiochide non può provare nulla di decisivo: senz'altri gravi motivi, potevano bastare le convenienze che s'imponevano al giovane principe appena salito al trono, già da altri disputatogli.

Questi sono, a parer mio, i motivi principali che ispirarono

(1) Head, *Historia numorum*, Oxford, 1887, pag. 632. — Diodoro, XXXI, 19; 21.

la formazione di quella parte della cronaca che c'interessa, il cui racconto ha evidentemente carattere tendenzioso. Ecco ora come ricostrurrei i fatti in quella che a me sembra la loro verità storica.

Ariarate IV avrebbe avuto da Antiochide tre figli: Ariarate, principe ereditario secondo il diritto cappadoce, Oroferne e Mitridate oltre a due figlie. Il re avrebbe per ragioni ignote calpestato i diritti dei primi due per lasciar suo erede l'ultimo, nato non lontano dal 182 a. C. Adulto Mitridate, s'accentuarono, se pur non si formarono soltanto allora, i propositi del re e per natural conseguenza l'opposizione di chi era di parer contrario. S'era appunto ai tempi della decadenza d'Antioco IV, il potente fratello d'Antiochide, che avrebbe potuto sostenere efficacemente la sorella. La regina non era forse punto soddisfatta che si violassero i diritti dei due primi figli, od almeno di Oroferne, che certo sopravviveva, ma col decadere dell'Epifane perdette anch'essa gran parte della sua forza e Mitridate, tutto dedito ai Romani, riuscì a trionfare, fors'anche coll'aiuto dell'influenza della grande repubblica (1): fu associato al trono e prese verisimilmente in quest'occasione il nome dinastico di Ariarate. Antiochide, che condivideva forse le idee del fratello sulla politica riguardo ai Romani, fu costretta dalla fazione favorevole a Mitridate ed a lei avversa a lasciare la reggia ed a ritirarsi ad Antiochia. Sarebbe quindi da vedersi in tutto ciò anche uno scacco della politica antiromana adottata dall'Epifane.

Se la ricostruzione degli avvenimenti è vera, i colpevoli in questo intrigo sarebbero Ariarate IV, che per parte sua violò le consuetudini del paese, ed Ariarate V che usurpò il diadema a danno del fratello. Antiochide, malvista all'ultimo e combattuta, diventò la vittima: il suo carattere intrigante ed irrequieto, di cui forse a bella posta furono caricate le tinte, potè contribuire alla formazion della leggenda. E probabilmente al suo carattere dovette la morte per opera di Lisia, tentando di prender il potere a nome del nipote Antioco Eupatore.

In conclusione non Ariarate IV sarebbe colla sua buona

(1) Che Mitridate godesse le simpatie dei Romani ce lo provano le referenze che ne davano gli ambasciatori della Repubblica al Senato (cfr. Polibio, XXXI, 3).

fede meravigliosa stato raggirato dalla moglie astuta ed intrigante, ma Antiochide e la sua fama sarebbero state sacrificate dagl'intrighi del marito e dell'ultimo figlio, incoraggiati forse tacitamente dai Romani (1). Purgare dunque d'ogni colpa Ariarate IV nella violazione dei diritti di Oroferne, proclamare e spiegare come incontestabili i diritti di Mitridate al trono, basandoli sulla primogenitura, perchè l'unico figlio legittimo, e sulla dichiarata volontà paterna, erano gli scopi che si prefiggeva l'autore della cronaca nella parte che c'interessa; il quale sempre allo stesso fine mirava a gettar su Antiochide la colpa della supposizione dei due figli maggiori, insciente il marito, e quindi indirettamente quella delle mutate disposizioni del re circa la successione ed in certo modo anche la responsabilità delle conseguenti guerre civili in Cappadocia.

Abbiam veduto come possa essersi formata questa versione degli avvenimenti. Ora chi probabilmente ha pubblicato questa versione e quando? Cominciamo dal quando. È noto che, appena Ariarate V fu salito al trono, Oroferne protestò in forza delle consuetudini cappadoci che davano a lui la preferenza. Qualche anno dopo egli trovò un protettore in Demetrio Sotere, re di Siria, che lo pose sul trono di Cappadocia colle armi, a patto però che pagasse una grossa somma. Ariarate V fu costretto a fuggire ed a richiamarsi a Roma, la quale divise il regno in due parti, una ad Oroferne e l'altra ad Ariarate.

Quest'ultimo, sfuggito a due attentati di emissari del rivale a Corcira ed a Corinto, arrivò a Pergamo ed Attalo II lo insediò nella sua porzione di regno. Qualche tempo dopo Oroferne, resosi odioso per le sue esazioni, perdette la popolarità, fu cacciato dal fratello dalla sua parte di dominio e dovette rifugiarsi

---

(1) Che i Romani in seguito abbiano decretato la divisione della Cappadocia fra Ariarate V ed Oroferne non infirma per nulla questa supposizione: negl'intrighi per escludere Oroferne dal diadema i Romani agirono naturalmente dietro le quinte od incoraggiarono con tacita o segreta approvazione: era loro interesse avere sul trono di Cappadocia un principe loro devoto. Più tardi, modificatesi le condizioni della politica romana in Oriente, i Romani, come ben nota il Niese, o. c., III, p. 251, credevano loro utile indebolire la monarchia degli Ariarati e, potremmo aggiungere, senza provocare troppo gravemente Demetrio Sotere.

in Siria, dove poco di poi gli venne meno anche il favore di Demetrio, e morì oscuramente (1).

Il compendio della cronaca in Diodoro termina coll'assunzione di Mitridate al trono e colle lodi di questo principe. Non si può affermare assolutamente che il documento nella sua estensione originaria si fermasse lì, perchè ci troviamo davanti ad un estratto dalla Biblioteca Diodorea, che trascriveva già forse più o meno compendiando; tuttavia, dato il carattere evidentemente tendenzioso della narrazione che c'interessa, e dato anche che poco dopo la morte di Ariarate V termina l'antica dinastia di Cappadocia, pare che veramente questa cronaca si fermasse al regno di quest'ultimo, narrandone al più le prime vicende. Inclinerei dunque a credere che sia stata composta fra l'allontanamento di Antiochide dalla corte di Mazaca o più verisimilmente ancora fra l'assunzione al trono di Ariarate V e la morte di Oroferne od almeno la sua caduta; e ciò perchè in sostanza vi si volevan combattere appunto le pretese di Oroferne (2).

Sappiamo che Mitridate era stato allevato alla greca, s'era occupato di filosofia ed aveva anzi accolto nella sua capitale dei dotti greci (3). Pare probabilissimo che qualcuno di questi letterati abbia avuto più o meno esplicitamente l' incarico dal sovrano di pubblicare la versione ufficiale dei diritti di Ariarate V al trono e ciò coll'intento di diffonderla anche fuori di Cappadocia contro i partigiani di Oroferne all'estero.

Il resto della cronaca doveva servire di naturale introduzione a narrare ciò che volevasi dal re, e per essa l'autore si valse di materiali più o meno infidi fornitigli dalla corte, materiali ch'egli accettò senz'altro, trattandosi di far cosa grata al sovrano che l'ospitava. Con ciò s'accorda l'idealizzazione

---

(1) Per queste vicende cfr. Niese, o. c., III, pp. 250-252 ed i testi ivi citati.

(2) A questo intervallo di tempo accennerebbero dunque le parole (Diodoro, l. c., 8) τῶν μέχρι τοῦδε τῆς Καππαδοκίας βασιλευσάντων, se esse, come parrebbe, derivano dalla cronaca regia che servì di fonte indiretta, come vedremo, a Diodoro.

(3) Diodoro, XXXI, 19, 7-8. — Diogene Laerzio, IV, 65. — Cfr. Niese, o. c., III, p. 249, n. 4.

della storia della dinastia, dove, degno di nota, è più volte messo in rilievo l'amore paterno e figliale nella casa degli Ariaratidi, cosa che forse serviva in certo modo a preparare il lettore al procedere di Ariarate IV verso Mitridate. Naturalmente, date le consuetudini rigidissime in proposito, vi era sempre affermato il diritto di primogenitura, ma per Ariarate V si cercò di girar la difficoltà nel modo già noto ed a pensarci bene non c'era altra via.

Colla nostra ipotesi si accordano pure le lodi alla virtù, alla coltura ed all'amor del sapere del re, che aperse ai dotti greci la Cappadocia, prima quasi sconosciuta: lode forse questa esagerata, perchè già prima, specie per mezzo delle principesse sire entrate nella casa di Cappadocia, la civiltà ellenistica era almeno in qualche parte penetrata in quel paese e già qualche città era ordinata alla greca (1). Qui pare evidente si cerchi, elogiando con maggiore o minore disinteresse e veracità i pregi del re, di conciliargli le simpatie del mondo greco e per riflesso di tutto il mondo civile. Cose tutte che si spiegano nell'opera di un letterato di corte, che in servigio del sovrano che l'ospitava tentò di sostenere quella che per parecchi anni fu la preoccupazione costante di Ariarate V: combattere i diritti di Oroferne.

Diodoro però è verisimile che non abbia usato direttamente questa cronaca. Abbiamo osservato che si doveva trovare, ove si narra della supposizione dei due primi figli di Ariarate IV, un φασί od altro verbo di significato analogo, verbo che fu tralasciato da chi fece l'estratto che c'è pervenuto. Gli storici regi dovevano invece affermare in modo risoluto il fatto. Il φασί difficilmente può essere attribuito a Diodoro, che si limita in generale a trascrivere le sue fonti e non ha grandi velleità critiche, e tanto meno a Fozio. È molto verisimile quindi che questo verbo si trovasse già nello scrittore a cui attingeva Diodoro, scrittore che direttamente od indirettamente conosceva la cronaca regia. Questo autore o qualcuno dei suoi predecessori, che si valse immediatamente di quell'opera, o perchè a lui stesso pareva strano il racconto o perchè esso ripugnava a quanto generalmente dagli storici si credeva sulla genuinità di Oroferne,

(1) Cfr. Niese, o. c., p. 249, n. 6.

volle, riportando questi fatti, attenuare la sua responsabilità trincerandosi dietro quel φασί. Chi fosse questo scrittore non si può con sicurezza dire. La sua circospezione soltanto ci prova che non solo ai tempi di Ariarate, ma anche poi, non si dava molto credito alla versione divulgata dalla corte di Mazaca.

In conclusione noi nella cronaca regia troviamo un libro di propaganda che Ariarate V, educato alla greca, ha lanciato per impressionare in suo favore l'opinione pubblica del mondo ellenistico, libro contenente gravi falsità e che ottenne dai contemporanei e dai posteri la fiducia che si meritava.

Torino, Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e de' RR. Principi.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Dicembre 1907.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: NACCARI, SPEZIA, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, MORERA, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio GUARESCHI presenta in omaggio all'Accademia un suo lavoro: *Sui colori degli antichi*, Parte II; in esso è fatta una nuova edizione del *Plichto* di G. V. ROSSETTI, pubblicato nel 1540, su una bellissima copia esistente nella Biblioteca Comunale di Ferrara, opera ora estremamente rara e di notevole interesse storico. L'ultima edizione del *Plichto* è in francese del 1716.

Il Socio GUIDI fa omaggio della Parte III della 3ª edizione delle sue *Lezioni sulla scienza delle costruzioni*.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° G. VITALI: *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, dal Socio D'OVIDIO;

2° Dott. P. VOGLINO: *De quibusdam fungis novis pedemontanis*, dal Socio MATTIROLO.

Il Socio Segre, anche a nome del Socio Somigliana, legge la relazione intorno alla Memoria del Dott. Umberto Perazzo, intitolata: *Sopra alcune varietà di rette ed in particolare su vari tipi di complessi cubici*. La relazione, che conchiude favorevolmente per la stampa, è approvata all'unanimità. La Classe, con votazione segreta, approva la stampa del lavoro del Dott. Perazzo nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Naccari presenta per l'inserzione nelle *Memorie* il lavoro del Dott. B. Boddaert, intitolato: *Misure magnetiche nei dintorni di Torino*. Memoria II.

Il Presidente delega i Soci Naccari e Jadanza per esaminare la Memoria del Dott. B. Boddaert e riferirne alla Classe.

Raccoltasi poscia la Classe in seduta privata procede alla elezione del Direttore della Classe.

Riesce eletto il Socio Prof. Andrea Naccari, salvo l'approvazione Sovrana.

LETTURE

Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali.

Nota di G. VITALI, a Genova.

Nella presente memoria io do (Cap. I) un teorema sui gruppi di punti che può essere usato con molto vantaggio nell'analisi delle funzioni. Per mettere in evidenza questa sua importanza io lo farò appunto seguire da alcune applicazioni (Cap. II).

Per farsi un'idea sommaria del contenuto del presente lavoro basterà leggere le introduzioni ai due capitoli che lo costituiscono.

Capitolo I.

Chiamo **corpo** di un gruppo Σ di segmenti di una retta r il gruppo di punti che appartengono (magari come estremi) a qualche segmento di Σ.

Il corpo di un gruppo Σ di segmenti di una retta r è certamente misurabile. ed invero i punti di r che non sono interni ad alcun segmento di Σ formano un gruppo chiuso e quindi certamente misurabile.

Indichiamo con σ un segmento piccolo a piacere e con Σ_σ il gruppo di segmenti di Σ che sono minori di σ. Il corpo di Σ_σ varierà in generale col variare di σ. I punti comuni ai corpi di tutti i Σ_σ formano un gruppo G che chiameremo il **nucleo** di Σ.

Risulta subito che il nucleo di un gruppo di segmenti è sempre misurabile.

Io voglio dimostrare che: *se Σ è un gruppo di segmenti il cui nucleo abbia una misura* **finita** m_1, *esiste un gruppo finito o numerabile di segmenti di Σ a due a due distinti, le cui lunghezze hanno una somma non minore di m_1.*

Questo teorema ha il suo analogo negli spazi a due o più dimensioni. Nel piano, p. es., si potrebbe sostituire la considerazione dei segmenti con quella dei quadrati aventi i lati paralleli agli assi coordinati.

§ 1. — È necessario premettere il seguente teorema.

Se Σ è un gruppo di segmenti il cui corpo abbia una misura μ **finita** *e se ϵ è un numero maggiore di zero, esiste un numero finito di segmenti di Σ a due a due distinti le cui lunghezze hanno una somma maggiore di $\frac{\mu}{3} - \epsilon$.*

Cominciamo col fissare una successione

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \ldots\ldots \epsilon_n \ldots\ldots$$

di numeri tutti maggiori di zero e tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sia l_1 il limite superiore delle lunghezze dei segmenti di Σ. Esiste in Σ un segmento s_1 di lunghezza maggiore di l_1-ϵ_1. Indichiamo con Σ_1 i segmenti di Σ che hanno dei punti in comune con s_1. I punti del corpo di Σ_1 che non appartengono ad s_1 formano un gruppo G_1 la cui misura non supera $2l_1$. Sia l_2 il limite superiore delle lunghezze dei segmenti di Σ-Σ_1. Esiste in Σ-Σ_1 un segmento s_2, necessariamente del tutto distinto da s_1, di lunghezza maggiore di l_2-ϵ_2. Indichiamo con Σ_2 i segmenti di Σ-Σ_1 che hanno dei punti in comune con s_2. I punti del corpo di Σ_2 che non appartengono ad s_2 formano un gruppo G_2 la cui misura non supera $2l_2$. Sia l_3 il limite superiore delle lunghezze dei segmenti di Σ-Σ_1-Σ_2, ecc., ecc.

Manifestamente la somma delle lunghezze dei segmenti

$$s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots$$

non supera μ e quindi certamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (l_n - \epsilon_n) < \mu,$$

e poichè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \epsilon_n$$

converge, converge anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n ,$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} l_n = 0 .$$

Ciò prova che

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \Sigma_n ,$$

ed invero se esistesse un segmento di Σ non appartenente ad alcun Σ_n, ogni l_n sarebbe almeno uguale alla lunghezza di questo segmento e perciò non potrebbe essere

$$\lim_{n=\infty} l_n = 0 .$$

Allora il corpo del gruppo Σ risulta costituito dal corpo del gruppo Σ_0 dei segmenti

$$s_1, \; s_2 \; . \; . \; . \; . \; . \quad s_n \; . \; . \; . \; . \; .$$

e dal gruppo G dei punti appartenenti ai gruppi

$$G_1, \; G_2 \; . \; . \; . \; . \; . \quad G_n \; . \; . \; . \; . \; .$$

Indicando con m la misura di G e con μ_0 la misura del corpo di Σ_0, è:

$$\mu \leq m + \mu_0 .$$

Ma

$$m \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} l_n ,$$

e

$$\mu_0 < \sum_{n=1}^{\infty} l_n ,$$

dunque

$$\mu < 3 \sum_{n=1}^{\infty} l_n .$$

Inoltre è

$$\mu_0 > \sum_{n=1}^{\infty} (l_n - \epsilon_n),$$

e quindi

$$\mu_0 > \sum_{n=1}^{\infty} l_n - \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n .$$

Dunque

$$\mu_0 > \frac{\mu}{3} - \frac{\epsilon}{2} .$$

Indichiamo ora con un λ_n la lunghezza del segmento s_n. È

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \mu_0 > \frac{\mu}{3} - \frac{\epsilon}{2} .$$

Ma noi possiamo trovare un numero intero N per cui

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n < \frac{\epsilon}{2} .$$

Per tale N

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n > \frac{\mu}{3} - \epsilon .$$

I segmenti

$$s_1 , \quad s_2 , \quad . \; . \; . \; . \; . \quad s_N$$

sono dunque a due a due distinti ed hanno la somma delle loro lunghezze maggiore di $\frac{\mu}{3} - \epsilon$. Il teorema è dunque dimostrato.

§ 2. — La proposizione del § precedente ha la sua analoga negli spazi a più dimensioni. Nel piano, p. es., si può enunciare così:

Se Σ è un gruppo di quadrati il cui corpo abbia una misura **finita** μ *e se ϵ è un numero maggiore di zero, esiste un numero finito di quadrati di Σ a due a due distinti le cui aree hanno una somma maggiore di* $\frac{\mu}{9} - \epsilon$.

L'espressione $\frac{\mu}{3} - \epsilon$ diventa dunque $\frac{\mu}{9} - \epsilon$ quando si passa al piano, nello spazio ordinario diventerebbe $\frac{\mu}{27} - \epsilon$ e in generale, nello spazio ad n dimensioni, diventerebbe $\frac{\mu}{3^n} - \epsilon$.

La dimostrazione della proposizione in uno spazio qualunque è del tutto analoga a quella data per la retta.

§ 3. — Ora passiamo a dimostrare il teorema enunciato nella introduzione.

Esiste manifestamente un sottogruppo Σ_1 di Σ che ha lo stesso nucleo di Σ e il cui corpo ha misura μ_1 finita.

Sia:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 \ldots\ldots + \epsilon_n + \ldots\ldots$$

una serie convergente di termini tutti maggiori di zero.

Noi possiamo pel teorema del § precedente trovare un numero finito di segmenti di Σ_1 a due a due distinti

$$s_1, s_2 \ldots\ldots s_{N1} \tag{1}$$

tali che la somma σ_1 delle loro lunghezze sia maggiore di

$$\frac{\mu_1}{3} - \epsilon_1,$$

e quindi di

$$\frac{m_1}{3} - \epsilon_1 .$$

Consideriamo il gruppo Σ_2 dei segmenti di Σ_1 che non hanno punti comuni coi segmenti (1).

Se m_2 è la misura del nucleo di Σ_2 è certamente

$$m_2 \geq m_1 - \sigma_1 .$$

In Σ_2 possiamo trovare un numero finito di segmenti a due a due distinti

$$s_{N_1+1}, \quad s_{N_1+2}, \quad \ldots\ldots \quad s_{N_2} \qquad (2)$$

tali che la somma σ_2 delle loro lunghezze sia maggiore di

$$\frac{m_2}{3} - \epsilon_2 .$$

I segmenti

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots\ldots \quad s_{N_1}, \quad s_{N_1+1}, \quad s_{N_1+2}, \quad \ldots\ldots \quad s_{N_2}$$

sono a due a due distinti.

Consideriamo il gruppo Σ_3 dei segmenti di Σ_2 che non hanno punti comuni coi segmenti (2). Se m_3 è la misúra del nucleo di Σ_3, è certamente

$$m_3 \geq m_2 - \sigma_2 \geq m_1 - \sigma_1 - \sigma_2 .$$

In Σ_3 possiamo trovare un numero finito di segmenti a due a due distinti

$$s_{N_2+1}, \quad s_{N_2+2}, \quad \ldots\ldots \quad s_{N_3}$$

tali che la somma σ_3 delle loro lunghezze sia maggiore di

$$\frac{m_3}{3} - \epsilon_3 ,$$

e così via di seguito.

I segmenti

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots \quad s_{N_1}, \quad \ldots \quad s_{N_2}, \quad \ldots \quad s_{N_3}, \quad \ldots \qquad (\alpha)$$

sono a due a due distinti.

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

è certamente convergente, poichè la sua somma non supera μ_1.

È dunque convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m_n}{3} - \epsilon_n\right),$$

ed infine è pure convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n .$$

Dunque

$$\lim_{n=\infty} m_n = 0 .$$

Ma

$$m_n \geq m_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i ,$$

e, al limite,

$$0 \geq m_1 - \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i ,$$

ossia

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \geq m_1 .$$

Si vede così che la somma delle lunghezze dei segmenti (α) non è minore della misura del nucleo di Σ ed il teorema è dimostrato.

È evidente che la stessa dimostrazione vale per il teorema analogo negli spazi a due e più dimensioni.

§ 4. — Dai risultati precedenti si traggono delle conseguenze interessanti dal punto di vista dell'analisi dei gruppi di punti.

Sia A un gruppo di gruppi misurabili di punti e G il gruppo dei punti che appartengono a qualche gruppo di A.

Se A è numerabile o finito, G è misurabile, e se la misura di G è maggiore di zero, esiste un gruppo di A che ha misura maggiore di zero. Se A ha potenza maggiore del numerabile,

può darsi che G non sia misurabile e, dato che G sia misurabile ed abbia misura maggiore di zero, può darsi che tutti i gruppi di A siano di misura nulla.

Sia ora Γ un gruppo misurabile di punti di misura μ maggiore di zero e Σ un gruppo di segmenti tale che ogni punto di Γ appartenga a qualche segmento di Σ.

Se Σ è numerabile o finito esiste certamente in Σ un segmento ché contiene un sottogruppo di Γ di misura maggiore di zero.

Che cosa accadrà se Σ ha potenza maggiore del numerabile? Benchè quanto ho premesso faccia sospettare che possa darsi che nessun segmento di Σ contenga un sottogruppo di Γ di misura maggiore di zero, io posso, in virtù dei precedenti teoremi, dimostrare che ciò non capita mai e che anzi esiste sempre un gruppo numerabile di segmenti di Σ che ricoprono un sottogruppo di Γ di misura μ.

Indichiamo con Σ_0 il gruppo di tutti i segmenti i cui estremi appartengono ad un medesimo segmento di Σ.

Il nucleo e il corpo di Σ_0 coincidono col corpo K di Σ. Γ è un sottogruppo di K.

Noi possiamo trovare un' infinità numerabile di segmenti di Σ_0 a due a due distinti

$$s_1,\ s_2\ .\ .\ .\ .\ .\ \ s_n\ .\ .\ .\ .\ . \tag{1}$$

tali che la somma σ delle loro lunghezze non sia minore della misura ω di K (nucleo di Σ_0). Ma σ non può superare la misura del corpo di Σ, dunque $\sigma = \omega$. Dunque i punti di K che non appartengono a qualche segmento (1) formano un gruppo di misura nulla e perciò anche i punti di Γ che non appartengono a qualche segmento (1) formano un gruppo di misura nulla.

Indichiamo con S_1 un segmento di Σ che contenga s_1, con S_2 un segmento di Σ che contenga s_2, ecc., ecc. I segmenti

$$S_1,\ S_2\ .\ .\ .\ .\ .$$

appartengono tutti a Σ e ricoprono un sottogruppo di Γ di misura μ. c. d. d.

CAPITOLO II.

Nella mia nota " Sulle funzioni integrali ", pubblicata nel 1905 dall'Accademia reale delle Scienze di Torino io ho dato *la condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione di una variabile reale sia un integrale.* I metodi di dimostrazione da me usati in quella nota non si possono estendere ai casi di due o più variabili.

In questo capitolo io modifico quei metodi in modo da renderli applicabili anche a questi casi. Mi riescono utili a tal fine i risultati del capitolo precedente.

Perchè si intenda facilmente in che senso si debba estendere il risultato della mia nota citata alle funzioni di più variabili, indicherò tale estensione per le funzioni di due variabili nell'ultimo § di questo capitolo.

Rimando alla introduzione della mia nota citata per le nozioni di *funzione integrale* e di *funzione assolutamente continua* ad una variabile.

§ 1. — Nel § 4 della mia nota citata ho dimostrato che:

I punti in cui un numero derivato di una funzione continua è finito formano un gruppo misurabile.

Io conservo intatta quella dimostrazione e passo a dimostrare che:

I punti in cui un numero derivato di una funzione continua e a variazione limitata non è finito formano un gruppo di misura nulla.

Sia $F(x)$ una funzione a variazione limitata in un intervallo (a, b) e P il valore della variazione totale di $F(x)$ nel tratto (a, b).

Sia inoltre $\Lambda(x)$ un numero derivato di $F(x)$ e μ la misura del gruppo Γ in cui $\Lambda(x)$ è infinito. Supponiamo che sia $\mu > 0$.

Se Σ è il gruppo dei segmenti (α, β) in cui

$$\left| \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| > \frac{2P}{\mu},$$

Γ è un sottogruppo del nucleo di Σ e quindi esiste un gruppo Σ_0 numerabile di segmenti di Σ a due a due distinti le cui lunghezze hanno una somma non minore di μ. Fra i segmenti di Σ_0 ve ne sarà un numero finito le cui lunghezze hanno una somma maggiore di $\frac{\mu}{2}$.

Siano dessi

$$(\alpha_i, \beta_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n).$$

Sarà

$$\left| \frac{F(\beta_i) - F(\alpha_i)}{\beta_i - \alpha_i} \right| > \frac{2P}{\mu},$$

ossia

$$\left| F(\beta_i) - F(\alpha_i) \right| > \frac{2P}{\mu} \left| \beta_i - \alpha_i \right|,$$

e sommando

$$\sum_{i=1}^{n} \left| F(\beta_i) - F(\alpha_i) \right| > \frac{2P}{\mu} \frac{\mu}{2},$$

ossia

$$\sum_{i=1}^{n} \left| F(\beta_i) - F(\alpha_i) \right| > P$$

ciò non può essere, e quindi è $\mu = 0$. c. d. d.

§ 2. Ora andiamo a dimostrare che:

Un numero derivato di una funzione a variazione limitata è sommabile e che *se la funzione è assolutamente continua l'integrale indefinito del numero derivato coincide colla funzione all'infuori di una costante additiva.*

Sia $F(x)$ una funzione a variazione limitata e P il valore della sua variazione totale nel tratto (a, b).

Sia inoltre $\Lambda(x)$ un numero derivato di $F(x)$:

Indichiamo con h un numero maggiore di zero e con n un numero intero qualunque.

I punti in cui

$$nh \leq \Lambda(x) < (n+1)h$$

formano un gruppo G_n misurabile.

Ordiniamo i gruppi che hanno misura maggiore di zero in una successione:

$$G_{n_1}, \ G_{n_2}, \ \ldots\ldots \ G_{n_i}, \ \ldots\ldots \qquad (1)$$

e indichiamo con

$$\mu_1, \ \mu_2, \ \ldots\ldots \ \mu_i, \ \ldots\ldots$$

le rispettive misure.

Poichè la successione (1) è qualunque, noi potremo affermare che $\Lambda(x)$ è sommabile dimostrando che, per ogni intero positivo N, si ha

$$h \sum_{i=1}^{N} n_i \, \mu_i < P + h(b-a).$$

Sia ϵ un numero maggiore di zero e minore di ciascuno dei numeri

$$\mu_1, \ \mu_2, \ \ldots\ldots \ \mu_N.$$

Sia inoltre

$$\Omega = \sum_{i=1}^{N} |in_i|.$$

e si ponga

$$\eta = \frac{\epsilon}{\Omega}.$$

Noi possiamo trovare un gruppo finito Σ_1 di segmenti parziali di (ab) a due a due distinti che racchiudono un sottogruppo di G_{n_1} di misura maggiore di $\mu_1 - \eta$, le cui lunghezze abbiano una somma minore di μ_1.

I punti di G_{n_2} esterni ad ogni segmento di Σ_1 formano un gruppo di misura maggiore di $\mu_2 - \eta$, e quindi noi possiamo trovare un gruppo finito Σ_2 di segmenti parziali di (a, b) a due a due distinti e del tutto esterni ai segmenti di Σ_1 che racchiudano un sottogruppo di G_{n_2} di misura maggiore di $\mu_2 - 2\eta$ e le cui lunghezze abbiano una somma minore di $\mu_2 - \eta$.

I punti di G_{n_3} esterni ad ogni segmento di Σ_1 e di Σ_2 formano un gruppo di misura maggiore di $\mu_3 - 2\eta$, e quindi noi

possiamo trovare un gruppo finito Σ_2 di segmenti parziali di (a, b) a due a due distinti e del tutto esterni a segmenti di Σ_1 e di Σ_2 che racchiudano un sottogruppo di G_{n_2} di misura maggiore di $\mu_2 - 3\eta$, e le cui lunghezze abbiano una somma minore di $\mu_2 - 2\eta$, ecc., ecc.

Indico con Σ_i' il gruppo dei segmenti parziali di (a, b) che cadono dentro completamente a qualche segmento di Σ_i e tali che, essendo α e β gli estremi di uno qualunque di essi, si abbia:

$$\left| \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} - n_i h \right| < h .$$

La misura del nucleo di Σ'_i è certamente maggiore di $\mu_i - i\eta$ e minore di $\mu_i - (i - 1)\eta$. Noi possiamo quindi trovare un gruppo numerabile Σ''_i di segmenti di Σ'_i a due a due distinti tali che la somma delle loro lunghezze sia maggiore di $\mu_i - i\eta$ e minore di $\mu_i - (i - 1)\eta$.

Indico con

$$(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) \quad (j = 1, 2, \ldots\ldots \lambda_i), \quad (\beta_{ij} > \alpha_{ij}) \quad (2)$$

un numero finito di segmenti di Σ''_i le cui lunghezze abbiano una somma s_i compresa fra $\mu_i - i\eta$ e $\mu_i - (i - 1)\eta$.

I segmenti

$$(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots N, j = 1, 2, \ldots\ldots \lambda_i)$$

sono a due a due distinti.

È

$$\frac{F(\beta_{ij}) - F(\alpha_{ij})}{\beta_{ij} - \alpha_{ij}} = n_i h + \Theta_{ij} h ,$$

dove

$$|\Theta_{ij}| < 1 ;$$

quindi

$$\sum_{j=1}^{\lambda_i} \left\{ F(\beta_{ij}) - F(\alpha_{ij}) \right\} = n_i h s_i + \Theta_i h s_i ,$$

dove

$$|\Theta_i| < 1 ,$$

e infine

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{\lambda_i} \left\{ F(\beta_{ij}) - F(\alpha_{ij}) \right\} = h \sum_{i=1}^{N} n_i s_i + h \sum_{i=1}^{N} \Theta_i s_i .$$

Ma è chiaro che

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \Theta_i s_i \right| < b - a ,$$

e che

$$\left| \sum_{i=1}^{N} n_i s_i - \sum_{i=1}^{N} n_i \mu_i \right| < \sum_{i=1}^{N} \left| i n_i \right| ,$$

ossia

$$\left| \sum_{i=1}^{N} n_i s_i - \sum_{i=1}^{N} n_i \mu_i \right| < \Omega ,$$

dunque

$$(\alpha) \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{\lambda_i} \left\{ F(\beta_{ij}) - F(\alpha_{ij}) \right\} = h \sum_{i=1}^{N} n_i \mu_i + \delta h \Omega + \Theta h (b - a)$$

dove

$$| \delta | < 1 \qquad \text{e} \qquad | \Theta | < 1 .$$

Il valore assoluto del 1° membro della (α) non supera P, inoltre $h\Omega = \epsilon$, ed ϵ può essere scelto piccolo a piacere, dunque

$$\left| h \sum_{i=1}^{N} n_i \mu_i \right| \leq P + h (b - a) .$$

Dunque $\Lambda(x)$ è sommabile.

Supponiamo ora che $F(x)$ sia assolutamente continua. Fissato un $\sigma > 0$ piccolo a piacere si può trovare un numero μ tale che il modulo dell'incremento di $F(x)$ in ogni gruppo di segmenti di ampiezza minore di μ di intervalli parziali (a, b) distinti sia minore di σ.

Possiamo inoltre scegliere N così grande che

$$(b-a)-\sum_{i=1}^{N}\mu_i<\mu .$$

I punti di (a, b) che non sono interni a qualche segmento (2) formano un numero finito di segmenti distinti

$$(\alpha_r,\ \beta_r) \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots\ldots q)$$

e sarà

$$\left|\sum_{r=1}^{q}\left\{F(\beta_r)-F(\alpha_r)\right\}\right|<\sigma .$$

Ora

$$\sum_{r=1}^{q}\left\{F(\beta_r)-F(\alpha_r)\right\}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}\left\{F(\beta_{ij})-F(\alpha_{ij})\right\}=F(b)-F(a).$$

dunque per la (α)

$$\left|F(b)-F(a)-h\sum_{i=1}^{N}n_i\,\mu_i\right|<\sigma+\epsilon h+h\,(b-a).$$

Ora scegliendo h abbastanza piccolo ed N abbastanza grande si può fare in modo che

$$\left|h\sum_{i=1}^{N}n_i\,\mu_i-\int_a^b\Lambda\,(x)\;dx\right|<\sigma ,$$

e che sia pure

$$h\,(\epsilon+b-a)<\sigma .$$

Allora risulta

$$\left|F(b)-F(a)-\int_a^b\Lambda\,(x)\,dx\right|<3\sigma ,$$

e poichè σ è piccolo a piacere

$$\int_a^b\Lambda\,(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Analogamente, se

$$a < x \leq b,$$

si troverebbe

$$\int_a^x \Lambda(x)\, dx = F(x) - F(a).$$

È dunque dimostrata anche la seconda parte del nostro teorema.

§ 3. — Sia $f(x)$ una funzione ad integrale nullo (*) e supponiamo che i punti in cui $f(x) \neq 0$ formino un gruppo di misura maggiore di zero. Allora certamente i punti cui $f(x) > 0$ formano un gruppo di misura maggiore di zero, e posso trovare un numero $h > 0$ per cui il gruppo G dei punti in cui $f(x) > 0$ abbia una misura μ maggiore di zero.

Fissato un numero $\sigma > 0$ e minore di $h.m$, esiste un numero $\mu > 0$ tale che per ogni gruppo Γ di punti di misura minore di μ sia

$$\left| \int_\Gamma f(x)\, dx \right| < \sigma.$$

Ora racchiudiamo G in un gruppo numerabile Σ di segmenti a due a due distinti, le cui lunghezze abbiano una somma minore di $m + \mu$. I punti di questi segmenti che non appartengono a G formano un gruppo G_1 di misura minore di μ, e quindi

$$\left| \int_{G_1} f(x)\, dx \right| < \sigma.$$

Inoltre è

$$\int_G f(x)\, dx > mh$$

e perciò

$$\int_{G+G_1} f(x)\, dx > mh - \sigma.$$

(*) V. la mia nota "*Sulle funzioni ad integrale nullo*". R. del Circolo Mat. di Palermo, 1905, t. XX.

Ma

$$\int_{G+G_1} f(x)\,dx$$

è l'incremento di

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

esteso al gruppo Σ di segmenti e quindi

$$\int_{G+G_1} f(x)\,dx = 0\,,$$

ossia

$$0 > mh - \sigma$$

ed

$$mh < \sigma\,.$$

Ciò è contro l'ipotesi e quindi si deve concludere che i punti in cui $f(x) \neq o$ formano un gruppo di misura nullo.

Dunque:

Una funzione ad integrale nullo è nulla dappertutto fuori che in un gruppo di punti di misura nulla.

§ 4. — Dal teorema precedente consegue che:

Due funzioni aventi lo stesso integrale non possono differire che in gruppo di punti di misura nulla.

Due numeri derivati della medesima funzione assolutamente continua non possono differire che in un gruppo di punti di misura nulla.

Una funzione sommabile non può differire da un numero derivato del suo integrale che in un gruppo di punti di misura nulla.

§ 5. — Come ho accennato, i risultati precedenti si possono estendere alle funzioni a due o più variabili senza mutarne la dimostrazione. Perchè ben si intenda in che senso va fatta questa estensione, io mi fermerò, come ho promesso, a dare qualche indicazione nel caso delle due variabili.

In un piano coordinato (x, y) chiamo rettangolo coordinato un rettangolo i cui lati sono paralleli agli assi coordinati. Il vertice di un rettangolo coordinato che ha coordinate minori lo chiamo *vertice minore*, quello che ha coordinate maggiori lo chiamo *vertice maggiore*.

I vertici maggiore e minore di un rettangolo coordinato li chiamo *vertici principali*, gli altri due *vertici secondari*.

Chiamo *estensione* di un gruppo di rettangoli la somma delle aree dei singoli rettangoli e dico che ho un *gruppo di rettangoli distinti* quando due qualunque dei rettangoli del gruppo non hanno punti interni comuni.

Sia $F(x, y)$ una funzione finita delle variabili reali x, y nel rettangolo coordinato R che ha il vertice minore nell'origine e il maggiore nel punto (a, b).

Chiamo *incremento di* $F(x, y)$ *in un rettangolo coordinato* ρ *interno ad* R la somma dei valori di $F(xy)$ nei vertici principali di ρ diminuita della somma dei valori di $F(xy)$ nei vertici secondari di ρ.

Chiamo poi *incremento di* $F(x, y)$ *in un gruppo di rettangoli coordinati distinti* contenuti in R la somma, se è determinata e finita, degli incrementi di $F(x, y)$ nei singoli rettangoli del gruppo.

Se per ogni numero $\sigma > 0$ esiste un numero $\mu > 0$ tale che sia minore di σ il modulo dell'incremento di $F(xy)$ in ogni gruppo di estensione minore di μ di rettangoli coordinati distinti, si dirà che $F(x, y)$ è *assolutamente continua*.

Diremo che una funzione $F(x, y)$ è in R una *funzione integrale* se e soltanto se esiste in R una funzione finita e sommabile superficialmente $f(xy)$, tale che

$$F(xy) + F(oo) - F(x, o) - F(o, y) = \iint\limits_{\rho(x,y)} f(xy)d\rho$$

dove $\rho(xy)$ indica il rettangolo coordinato che ha il vertice minore nell'origine e l'opposto nel punto P di coordinate x, y, e ciò comunque sia scelto P in R.

Dico che una funzione $F(xy)$ è a variazione limitata quando, in qualunque modo si divida R in un numero finito di rettangoli coordinati, la somma dei moduli degli incrementi di $F(xy)$ in tali rettangoli rimane minore di un numero fisso.

Chiamo *rapporto incrementale* di $F(xy)$ in un rettangolo coordinato il rapporto dell'incremento di $F(xy)$ in quel rettangolo all'area del rettangolo.

Chiamo *numeri derivati destri* (sinistri) di $F(x, y)$ in un punto P i limiti di indeterminazione del rapporto incrementale di $F(xy)$ in un quadrato coordinato che ha il vertice minore (maggiore) in P, col tendere a zero del lato di questo quadrato.

Con questi elementi, l'estensione delle proposizioni precedenti, e relativa dimostrazione, alle funzioni di due variabili è immediata.

De quibusdam fungis novis pedemontanis.

Nota del Dott. PIETRO VOGLINO

Novas species descripturus quibus hoc anno studui, descriptionem fungorum quos annis 1905, 1906, collegi, itero, cum in his novas invenerim notas.

* ***Sphaerella Cydoniae*** (*) VOGLINO. — Maculis exaridis, 2-5 mm. latis, subrotundis, epiphyllis, rarissime hypophyllis; peritheciis nigris (6-8-10), sparsis vel gregariis, immersis, inde epidermidem perforantibus, prominulis, sphaeroideis, plus vel minus conoideo-attenuatis, ostiolo lato hyantibus, 100-120 μ latis; ascis oblongo- vel ovoideo-clavatis, brevissime pedicellatis, medio irregulariter incrassatis, 60-70 ⌣ 12-14; ascosporis ovoideo-ellipsoideis vel fusoideis, leniter incurvatis, rar. ad sepimentum leniter constrictis, loculis subaequalibus, chlorino-hyalinis, 20-22, rar. 20-26 ⌣ 5-7, rar. 8, 4 -guttulatis.

HAB., in foliis siccis *Cydoniae* (Chiomonte, Susa, Ciriè); Italiae borealis (aprile 1905, marzo 1907); Proxima *Sph. Bellonae* Sacc., *Sph. Pyri* Au., *Sph. sentinae* et *Sph. rodophilae* Pass.

(*) De speciebus quae asterisco signatae sunt vide. “ Annali R. Accademia di Agricoltura „, vol. XLVII, XLVIII e XLIX.

* ***Phyllosticta domestica*** Vogl. emend. *Phyllosticta Pruni-domesticae* Vogl. — Maculis epiphyllis, griseis, arescendo albicantibus, paulum bullatis, late castaneo-marginatis, orbiculatis, 0,5-2-2,5 mm. diam., confluentibus, demum in centro corrosis, in pagina inferiore castaneis; picnidiis epiphyllis, nigris, sparsis, minutis, 100-110 μ latis, ovato-prominulis, pertusis; sporulis cilindricis, rectis, utrinque rotundatis, hyalinis, 2-3,5-4 ⌣ 1-1,5.

Hab., in foliis *Pruni domesticae* (Castellamonte, Torino, Ivrea, ottobre 1905-1907); Ital. bor.; Affinis *Ph. prunicolae* (Opis.) Sacc., *Ph. pyricolae* Sacc., *Ph. destruenti* Desm., *Ph. cerasicolae* Speg. et *Ph. Mahalebi* Thüm., sed distincta.

* ***Phyllosticta montana*** Vogl. emend. *Phyllosticta Ribis-rubri* Vogl. — Maculis rotundis, len. inflatis, dimidiam partem foliorum, seu irregularibus, magna in parte foliorum lobos occupantibus, semper castaneis; picnidiis minutis, prominulis, epiphyllis, nigris; sporulis ellipsoideis vel lenticularibus, hyalinis; 4-7 rar. 9 ⌣ 3.

Hab., in foliis vivis *Ribis rubri* (Tornetti, Viù, Usseglio, m. 900-1400, settembre 1905-1907); Ital. bor.; *Ph. Grossulariae* Sacc. et *Ph. canescente* Ell. et Sv. distincta.

Phyllosticta Balsaminae Vogl. — Maculis epiphyllis, exaridis, ochraceo-ferrugineis, orbicularibus, usque ad 8 mm. latis, in foliis paullulum bullatis; picnidiis epiphyllis, sparsis, lenticulari-globosis, atris, submembranaceis, prominulis, ostiolo distincto perforatis, 90-100-120 μ latis; sporulis cylindraceis, utrinque obtusis, rectis, hyalinis, 7 ⌣ 2,5.

Hab., in foliis *Balsaminae hortensis* quae maxime vexantur, in hortis (Valsalice, Torino, Istituto Salesiano, ottobre 1907). Legit Doct. Tonelli fungorum studiosus. Affinis matrice et magnitudine sporarum *Phomae duplicis* Sacc., sed bene distincta.

* ***Cicinnobolus Artemisiae*** Vogl. — Picnidiis sphaeroideis (80-90 μ diam.), rarissime oblongis vel piriformibus, membranaceis, ostiolatis, setis erectis, fuliginosis, in parte superiore, circum ostiolum, praeditis; sporulis ellipsoideis vel amigdaliformibus, hyalinis, 4-6 ⌣ 2-2,5, med. 5 ⌣ 2,2-5 rar. 3.

Hab., parasitice in micelio *Oidii erysiphoidis* ad folia *Artemisiae* (Madonna del Pilone, Torino, Moncalieri, ottobre 1905. 1907); Ital. bor.; Distincto *C. Plantaginis*, *C. Humuli*, *C. Taraxaci*.

Phyllosticta Begoniae P. Brunaud (Vogl. emendata). — Maculis rotundatis *vel ellipticis, saepe confluentibus, sinuosis*, maiusculis, *initio* dilute olivaceis, centro pallescentibus, *dein fulvo-fuligineis, arescentibus et facile dilabentibus;* picnidiis sparsis, minutissimis, *punctiformibus, epiphyllis*, 150-180 μ latis, nigris; picnidiosporis ovoideis, hyalinis, 5 ⌣ 2, 5 ⌣ 3.

Hab., in foliis *vivis* Begoniae *Credneri* et *Metallicae*, quae maxime vexantur in Gallia et Italia.

Pyrenochaeta Centaureae Vogl. — Amphigena, sed plerumque hypophylla; maculis indeterminatis, latiusculis, griseis vel cinereo-fuscescentibus; picnidiis numerosis, plerumque superficialibus inter pilos folii seu innato-erumpentibus, globoso-conicis, piriformibus, umbrinis, coriaceo-carbonaceis, ad verticem attenuatum seu circa ostiolum latiusculum, setis rigidis, septatis, plus minus copiosis, fuligineo-atris, usque ad 140 μ longis, 4 μ latis, hirtis, 70-100 μ latis; basidiis cylindraceis, sporam aequantibus; sporulis ovoideis vel ellipsoideis, utrinque rotundatis, hyalinis, 4-5 ⌣ 2,5.

Hab., in foliis vivis *Centaureae candidissimae*, quae nigrescunt et flaccidae fiunt, in hortis (Colonia Agricola Artigianelli di Rivoli, Valsalice, Torino, settembre-ottobre 1907); Ital. bor.; Omnium maxime distincta.

Ascochyta hortorum (Speg.) Smith, Vogl. emendav. = *Phyllosticta hortorum* Speg. — Maculis circularibus, ellipticis, olivaceis, atro-marginatis, seu fuliginosis, quasi nigro margine praeditis, 2-4-6-8 mm. latis, deinde in zonas fuliginosas, ellipticas, sinuoso margine, confluentibus, 3 cm. longis, 1-2-3 cm. latis vel amplius; folia pluribus hiatibus apparet, quandoque lacertis dilabentibus se ostendit; super fructus, maculis circularibus, cancricis, fuliginosis, latis; picnidiis 100-150 μ latis, brunneo-olivaceis, ostiolo lato, immersis quandoque, praecipue in fructibus, prominulis; sporulis oblongo-ellipsoideis, diu con-

tinuis, 6-8-12 ⌣ 3-4, dein 1 -septatis, ad septum leniter constrictis, 10-12 usque ad 16 μ longis, 4-5 μ latis, plurime 10-12 ⌣ 4-5.

Hab., in foliis, caulibus et fructibus *Solani Melongenae*, valde noxia, in Italia, Gallia et America bor. Ad hanc speciem pertinent *Phoma Solani* Halsted, *Ascochyta Lycopersici* Brun. (sec. Passerini *A. socia*), *A. solanicola* Oud., *A. Atropae* Bres., *A. Alkekengi* Mass. (sec. Ferraris *A. pedemontana*). *A. physalicola* Oud. et fors. *A. pinzolensis* Bub. et Káb.

* ***Septoria Opuntiae*** Vogl. emend. *Septoria fici-indicae* Vogl. — Picnidiis minutis, punctiformibus, nigris, 100-140 μ latis, semimmersis, sparsis vel gregariis, in macula orbiculari, grisea, demum exarida insidentibus; sporulis cilindricis, curvulis, utrinque rotundatis, continuis, guttulatis, hyalinis, 24-28 ⌣ 3-4.

Hab., in cladodiis *Opuntiae fici-indicae*, in hortis (Torino, Moncalieri, luglio 1905-1907); Ital. bor.

Septoria Aderhold Vogl. — Amphigena, maculis indeterminatis, cinereo-fuscis; picnidiis immersis, rar. vix prominulis, subglobosis, 90-120-130 μ latis, fuliginosis; sporulis cylindricis vel bacillari-fusoideis, utrinque obtusiusculis, attenuato rotundatis, continuis, inde obsolete 3 -septatis, hyalinis, rectis vel minime curvulis, 22-30 ⌣ 2.

Hab., in foliis vivis *Centaureae candidissimae*, in hortis (Colonia Agricola Artigianelli di Rivoli, Valsalice, Torino, ottobre 1907); Ital. bor.; Valde distincta, socia *Pyrenochaetae Centaureae*. Prof. Rud. Aderhold, clarissimo micologo, acerbissime adepti, dicata.

Septoria Limnanthemi Vogl. — Maculis distinctis, plerumque numerosis, epiphyllis, totam folii substantiam penetrantibus, inde amphigenis, circularibus, rar. confluentibus et tunc ellipsoideis, sinuosis, umbrinis, vulgo flavo-virente marginatis, 2-3-4 usque ad 7 μ latis; picnidiis semper epiphyllis, erumpentibus, minutis, 120-140 μ latis, lenticularibus, nigris; sporulis fusoideo vel clavato-oblongis, acutis, rectis vel lenissime curvulis, obsolete 4-6 septatis, hyalinis, 36-38-48 ⌣ 1,5-2,5.

Hab., in foliis vivis *Lymnanthemi nymphoidis* in lacu (Candia, Viverone, settembre 1907); Ital. bor.; Affinis *Septoriae Menyanthis* Desm., sed colore, forma macularum et forma, magnitudine sporarum, distincta.

Septoria foetida Vogl. — Maculis circularibus, primo epiphyllis, dein amphigenis, 2-4 mm. latis, confluentibus, magnam partem folii occupantibus, ochraceis, vel albidis, exaridis; picnidiis punctiformibus, epiphyllis, prominentibus, singulo picnidio in singulis maculis; sporulis oblongo-clavulatis, obtusis, indistincte 3-septatis, hyalinis, 75-90 ᴗ 3-4.

Hab., in foliis *Daturae Métel.*, quae maxime vexantur, in horto (Istituto Salesiano, Valsalice, Torino, ottobre 1907); Ital. bor.; Legit Doct. Tonelli; *Septoriae Lycopersici* et *S. Daturae* distincta magnitudine et forma sporarum.

Septoria longispora Vogl. — Maculis exaridis indeterminatis, irregularibus, saepe confluentibus, castaneis: picnidiis epiphyllis, minutis, innato-prominulis, olivaceo-fuscis, sphaeroideis, 100-130-150 μ latis; sporulis cylindricis, subflexuosis, utrinque rotundatis, hyalinis, distincte 5-9 septatis, 70-80-120 μ longis, 3 μ latis.

Hab., in foliis *Phlogis Drummondii*, quae maxime vexantur (Torino, Lucento, novembre 1907). Magnitudine sporarum *Septoriae Phlogis* Sacc. et Speg. et *S. divaricatae* Ell. et Ev. bene distincta.

Colletotrichum ampelinum Cav. f. ***ramicola*** Vogl. — Maculis oblongis, griseis; acervulis latis, setulis rigidis, rectis, 1-septatis, fuligineo-olivaceis, basi incrassatis, pallentibus; conidiophoris cylindraceis, 17 ᴗ 7; conidiis oblongo-fusoideis, 17-20-22 ᴗ 4-5.

Hab., in ramis *Vitis*, leg. Doct. A. Tonelli. (Istituto Salesiano Valsalice, Torino); Ital. bor.

* ***Ramularia Lonicerae*** Vogl. — Maculis castaneis, rotundis vel irregularibus, 2-3-6 mm. et usque latis, coespitulis gregariis, hypophyllis, candidis; conidiophoris fasciculatis, simplicibus, continuis, hyalinis, ad apicem parce denticulatis, 50-90 μ

longis, 3-3,5 μ latis; conidiis cylindraceis, hyalinis, basi apiculatis, ad apicem rotundatis, continuis, rar. 1-septatis, breve catenulatis, 24-28 ⌣ 4.

Hab., in foliis *Lonicerae*, ad muros (Rivalta, Rivoli, Torino, novembre 1904-1907); Ital. bor.; Valde distincta *R. Sambucinae* Sacc.

* ***Ramularia Paeoniae*** Vogl. — Maculis supra fuligineis, subtus brunneo-griseis, pruinosis, irregularibus, 4-6-8 mm. latis; conidiophoris hypophyllis, erectis, fasciculatis, subsimplicibus, continuis, hyalinis, multo denticulatis, 40 μ longis, 4 μ latis; conidiis cylindraceis, hyalinis, continuis vel 1-septatis, plerumque basi apiculatis, catenulatis, 12-14 rar. 16 μ longis, 3-4 μ latis.

Hab., in foliis *Paeoniae peregrinae*, in hortis (St.-Pierre, Aosta, Ala di Stura, settembre 1905-1907); Ital. bor.; Socia cum *Cronartio flaccido*.

* ***Graphium (Leucographium) Geranii*** Vogl. — Maculis fulvis, fuligineis, rotundis seu ellipticis, 1-4-5 mm. latis, etiam confluentibus; conidiophoris hypophyllis, dilute fuligineis, filiformibus, septatis, 5-6 μ crassis, in stipite firmo sursum leniter attenuato, solitario, 250-350 μ longo, coalitis; conidiis cylindricis vel ovoideo-oblongis, hyalinis, e denticulis divergentibus oriundis, 16-24 ⌣ 5-7.

Hab., in foliis vivis *Geranii mollis* (Moncalieri, Santena, Troffarello, settembre 1905-1907); Ital. bor.; Proximum *Graphio gracili* Peck (Am. bor.).

Relazione intorno alla *Memoria* del Dott. Umberto Perazzo, intitolata: *Sopra alcune varietà di rette ed in particolare su vari tipi di complessi cubici.*

Nello spazio a cinque dimensioni stanno parecchie sorta di varietà definibili come luoghi delle rette, o piani, o spazi ordinari che sono incidenti a dati spazi (ad 1, 2, 3 dimensioni). Il Dott. Perazzo ne aveva fatto uno studio sistematico in un precedente lavoro, pubblicato fra le nostre *Memorie*. Ora egli applica quei risultati, in qualche punto ulteriormente approfonditi, alla ordinaria geometria delle rette. Egli sega cioè parecchie fra le più notevoli di quelle varietà con una V_4^2 di S_5, che riguarda come imagine dell'ordinario spazio rigato. Così ottiene molte interessanti proprietà di una lunga serie di rigate, congruenze e complessi di rette, che ancora non erano stati studiati. Citiamo in particolare i numerosi complessi di 3° grado, che qui s'incontrano per la prima volta, con varie eleganti generazioni.

Questa *Memoria* sarà certo utilissima ai cultori della geometria projettiva della retta, per le nuove particolari varietà di cui la arricchisce. Perciò noi proponiamo all'Accademia di accoglierla nei suoi volumi.

C. Somigliana.
C. Segre, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 22 Dicembre 1907.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Carutti, Renier, Pizzi, Chironi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza e De Sanctis Segretario. Il Socio Brusa scusa la sua assenza.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 7 dicembre 1907.

Il Presidente comunica che l'On. Boselli ha assentito a tenere la Commemorazione del defunto Socio Conte Costantino Nigra. Il Socio Stampini rileva la opportunità di commemorare solennemente anche il Socio Graziadio Isaia Ascoli. Il Presidente invita i Colleghi a designare in una prossima adunanza la persona a cui affidare tale Commemorazione.

Si dà poi comunicazione della lettera inviata dalla Segreteria alla Direzione del *Giornale d'Italia* intorno alle riproduzioni fototipiche di Codici curate dall'Accademia, inserita nel N. 348 (13 dicembre 1907) di detto Giornale.

Il Socio Renier presenta il Vol. IV degli *Studi glottologici italiani* diretti da Giacomo De Gregorio (Torino, Loescher, 1907).

Il Socio Chironi offre con parole di elogio:

1° Mario Sarfatti, *Del contratto d'abbuonamento alle cassette di sicurezza nelle Banche* (Torino, Bocca, 1907);

2° Carlo Toesca di Castellazzo. *Le ammortizzazioni del prezzo di avviamento di un'azienda* (Torino, Unione tipografica-editrice, 1906);

3° Id., *La così detta avulsione dei capitali dal giro degli affari e l'imposta di ricchezza mobile* (Torino, Unione tipografica-editrice, 1907).

Il Socio Chironi presenta poi per gli *Atti* una nota dell'Avv. Carlo Toesca di Castellazzo, intitolata: *Le antiche enfiteusi e il diritto di prelazione attraverso alle leggi della dominazione francese e della restaurazione e per il diritto attuale.*

Il Socio Manno presenta per le *Memorie* una dissertazione dell'Avv. Giuseppe Fornari, intitolata: *Il diritto pubblico negli Statuti del Duca Amedeo VIII di Savoia.* Il Presidente delega a riferirne in una prossima adunanza i Soci Manno e Ruffini.

Il Socio Pizzi presenta pure per le *Memorie* il *Prameyaratnakoça di Candraprabha* per la prima volta edito dal Dott. Luigi Suali, libero docente di Sanscrito nell'Università di Bologna. Il Presidente delega a riferirne i Soci Rossi, Pizzi e D'Ercole.

LETTURE

Le antiche enfiteusi e il diritto di prelazione attraverso alle leggi della dominazione francese e della restaurazione e per il diritto attuale.

Studio storico-giuridico

dell'Avv. CARLO TOESCA DI CASTELLAZZO.

SOMMARIO.

I. — Posizione del tema. — Le *antiche* enfiteusi ed il diritto di *prelazione* di fronte alle leggi della dominazione francese ed alle leggi della restaurazione. — Importanza dello studio in merito all'accertamento della loro conservata od esclusa efficacia.

II. — *a*) L'enfiteusi dal diritto romano alla rivoluzione francese, attraverso al diritto feudale. — Le leggi rivoluzionarie francesi abolitive dei diritti feudali. — La legge 18-29 dicembre 1790 e l'enfiteusi. — Leggi successive. — Effetti della legislazione rivoluzionaria francese rispetto all'enfiteusi. — Sua conservazione, diritto di riscatto e limitazione a 99 anni. — Art. 530 del Codice Napoleonico. — Codici successivi, specialmente degli Stati italiani, che accolsero l'enfiteusi e codici che la esclusero.

b) Il Codice Civile Albertino ed esclusione e divieto per esso dell'enfiteusi. — Mantenimento delle enfiteusi precedentemente stipulate per la R. Patente 6 Dicembre 1837. — Legge 13 Luglio 1857 per lo svincolo delle enfiteusi.

c) Incertezze dei compilatori del Codice vigente, in merito all'accoglimento dell'enfiteusi. — Sua definitiva codificazione. — Applicazioni legislative successive.

III. — Il diritto di *prelazione* nel giure romano. L. 3, C. *de jure emphyt.* IV, 66. — Prelazione *convenzionale* o *legale.* — Conservazione di un tale diritto, attraverso al diritto intermedio, alle leggi francesi e ai codici della restaurazione. — Silenzio del codice vigente sul diritto di prelazione.

a) Se il diritto di prelazione perduri, col vigente diritto, per le *antiche enfiteusi,* non ostante il diritto di affrancamento. — Distinzione fra prelazione *convenzionale* e *legale.* Dottrina e giurisprudenza rela-

tive alla conservazione della prelazione convenzionale. — Prelazione e affrancamento. — Loro essenziali differenze e reciproca indipendenza. — Art. 29 e 30 delle disposizioni transitorie del Codice Civile. — Conservata efficacia per esse del diritto di prelazione. — Decadenza o risoluzione *ipso iure* del diritto enfiteutico nel caso di alienazione *irrequisito domino*. — *Condizione risolutiva espressa*. — Suoi effetti. — Verbale N° 65 della Commissione di coordinamento. — Validità del patto di prelazione per il diritto attuale.

b) Prelazione *legale* per le enfiteusi costituite secondo le passate leggi. — Negata sua validità, per il diritto attuale, dalla prevalente dottrina e giurisprudenza. — Confutazione. — *Condicio juris*.

IV. — Diritto alla *devoluzione* del fondo per i casi contemplati dall'Art. 1565 del Cod. Civ. — Come possa essere operativa *ipso iure* rispetto alle antiche enfiteusi.

I. — Già qualche volta la patria giurisprudenza (1) si è dovuta occupare dell'istituto dell'*enfiteusi*, al fine di vedere se conservino o meno giuridica efficacia, agli effetti del diritto attuale, le antiche enfiteusi costituite, per il Paese nostro, an-

---

(1) Cassazione di Roma, 1° dicembre 1886, *Legge*, 1887, 1, 544; Cassazione di Torino, 13 settembre 1906, *Foro Ital.*, 1907, 1, 361.

Da queste sentenze fu deciso, che le leggi francesi del periodo rivoluzionario (e specialmente la legge 18-29 dicembre 1790), come poi il Codice napoleonico, non intesero di abolire le enfiteusi anteriormente costituite e di assolutamente vietarle per l'avvenire, ma solo di attribuire la libera facoltà del riscatto all'enfiteuta, per quelle stipulate a perpetuità.

Ove si rifletta alla larga applicazione avuta dalle leggi francesi in Italia, ed essenzialmente dal Codice napoleonico (applicato il 20 marzo 1804 in Piemonte, il 23 settembre 1805 in Liguria, esteso col decreto 30 marzo 1806 a tutti i paesi formanti il Regno d'Italia, il 1° maggio 1808 in Toscana, e il 1° gennaio 1809 negli Stati napoletani), ed all'opinione, a lungo dibattuta, che esse abbiano effettivamente proscritto e vietato l'enfiteusi, si comprende come il tema che qui, per il primo, ci proponiamo di brevemente indagare rispetto al diritto nostro — e, cioè, la persistenza dell'antica enfiteusi italiana, anche in confronto delle leggi francesi applicate in Italia — possa ancor suscitare pratico interesse, come lo dimostrano le succitate sentenze.

Sullo stato del *diritto* in Italia, nel periodo antecedente alla rivoluzione francese ed all'attuazione del Codice napoleonico, ch'era sostanzialmente il *diritto romano*, modificato da infiltrazioni feudali, statutarie e canoniche (ad es., per le *enfiteusi ecclesiastiche*), e per alcuni Stati (es., Piemonte, Modena), già disposto in più o meno complete codificazioni (costituzioni), veggasi: Gianzana, *Racc. dei lavori preparat. del Codice civ. ital.*, Torino, 1887, IV, n. 3 e seg.; Salvioli, *Manuale di storia del dir. ital.*, IV ediz., 1903, n. 88 e seg.; e specialmente Simoncelli, *L'Enfiteusi*, Milano, 1888, 1ª parte,

teriormente al periodo rivoluzionario francese, secondo i principî di diritto allora vigenti, e venute poi a contatto colle leggi della dominazione napoleonica, o colle successive leggi della restaurazione.

Anche un assai recente giudicato della Corte di Cassazione di Torino (1) ha studiato e deciso con acuta indagine e seria dottrina un tale problema, che già un tempo affaticò in special modo — come or si vedrà — le menti dei trattatisti francesi (in merito alle enfiteusi colà costituite, ed alle leggi francesi or nominate), e l'ha risolto nel senso (per cui è contrasto) di ancor riconoscere legale efficacia ad un'enfiteusi costituita in

p. 1 e seg. — Per le enfiteusi ecclesiastiche, che ebbero assai larga applicazione in Italia, nel diritto intermedio, v. PERNA, *L'Enfiteusi nel diritto antico e moderno*, Napoli, 1892, p. 83 e seg.

(1) Vedilo citato nella nota precedente. Per l'importanza della questione ivi trattata, giova riferire parte della motivazione: " ..... secondo " le leggi romane, *Cod. de jure emphyt.*, tit. LXVI, leg. 3, che costituivano " il diritto comune in Liguria, allorchè fu stipulato il contratto (di enfiteusi) " 12 novembre 1794, il diritto che si concedeva all'utilista di alienare era " sottoposto ad alcune restrizioni: quella anzitutto di *denunciare* al proprie- " tario l'alienazione, onde permettergli di esercitare il *diritto di prelazione* " che le costituzioni imperiali gli attribuivano sul compratore: ma se il " concedente non avesse fatto uso di codesta facoltà, l'alienazione era pie- " namente valida ed efficace, purchè dall'enfiteuta si pagasse una somma " di denaro, detta *laudemio*, in ricognizione della proprietà del concedente. " Questi rientrava nel suo pieno diritto ogni qualvolta l'enfiteuta non adem- " pisse alle proprie obbligazioni. Uno dei patti pertanto più in uso nelle " antiche enfiteusi era quello per cui, in caso di vendita del fondo enfiteu- " tico, il direttario avesse diritto d'essere *preferito* ad ogni altro e quindi " dovesse venir *preavvisato* per l'esercizio di tale diritto di prelazione, avendo " in ogni caso diritto ad un cinquantesimo del prezzo. Nel medioevo l'en- " fiteusi cambiò carattere, come la proprietà, sotto l'influenza delle idee " feudali: il contratto enfiteutico era informato ad un sistema feudale, " poichè, ragguagliando l'istituzione dell'enfiteusi con quella dei feudi, che " fu la base del diritto pubblico medioevale, non è a stupirsi che fra l'una " e l'altra esistesse una singolare analogia. E poichè il carattere ordinario " della locazione enfiteutica consisteva nella perpetuità dei rapporti con- " trattuali, era logico che la *rivoluzione francese* colle sue leggi abolitive " dei contratti e dei patti di natura feudale vi comprendesse anche l'enfi- " teusi perpetua. Basta quindi rammentare come in Francia la legge 18-29 " dicembre 1790 e le successive del 17 aprile 1791 e 17 luglio 1793 estese " alla Liguria per decreto del 1805, *mantenessero espressamente l'enfiteusi*,

Liguria, mentre perdurava l'applicazione del diritto romano comune, e mantenuta poi col sopraggiungere dell'applicazione ivi avvenuta (col decreto di annessione 4 ottobre 1805) delle leggi francesi, e in seguito, restituito il Regno Sardo, colla promulgazione del Codice civile albertino, posto in vigore il 1° gennaio 1838.

E il problema fu indagato e deciso da un tale giudicato non solo dal punto di vista storico ed in merito alla generale applicazione dell'istituto dell'*enfiteusi*, ma in relazione pure al valore ed effetto giuridico del particolar diritto di *prelazione*, di regola inerente (per la forza del *diritto* o per la virtù del *contratto*) —

" limitandone la durata a 99 anni e rendendola riscattabile. Ma in quelle " leggi non è parola del *patto di prelazione*, che per sè stesso nulla contenendo di contrario a quei principî che reclamavano l'abolizione del feudalismo, doveva mantenersi integro come pel passato; l'abolizione di detta " clausola avrebbe suonato offesa alla libertà delle convenzioni, in quanto " non contraddicono all'ordine ed all'interesse pubblico. Che se l'interesse " generale richiedeva che le terre venissero prosciolte dal vincolo di perpetuità per facilitarne il commercio, per abolire la manomorta e per rialzare " il credito fondiario, col mantenimento del diritto di prelazione si veniva " a conseguire lo stesso ed identico scopo a cui quelle leggi miravano col " concedere l'affrancazione, e cioè lo svincolo e la libera commerciabilità dei " fondi. Alle leggi della Rivoluzione sopravvenuto il *Codice napoleonico*, nonostante il suo silenzio a proposito del contratto enfiteutico, avendo dichiarato soltanto riscattabili tutte le rendite fondiarie perpetue (art. 530), si " dibattè in dottrina e giurisprudenza la questione, se nel silenzio del Codice " in Francia la stipulazione dell'enfiteusi fosse *vietata*: *prevalse l'opinione che* " *le sole enfiteusi perpetue fossero state espressamente abolite*: per contro le temporanee fossero rimaste sempre in osservanza e vigore, giusta il portato " della precitata legge del 1790, mai stata abrogata, che limitava ad anni 99 " la durata del contratto enfiteutico. In tal senso si è manifestata unanime la giurisprudenza francese, e la dottrina rappresentata dai suoi " migliori autori come il Merlin, il Duranton, il Troplong, il Marcadé, e " molti altri, ad eccezione del solo Demolombe che sostenne l'opinione contraria. Non è dunque giuridicamente possibile dedurre l'*abolizione* del " diritto di prelazione dell'enfiteusi del Codice napoleonico... „.

In rispondenza a questi concetti ed alla dimostrata valida persistenza delle enfiteusi precostituite, anche sotto il Codice albertino (come ancor vedremo), e per il Codice attuale, la Cassazione di Torino ha con questa sentenza deciso, *esser efficace anche oggi il patto di prelazione a favore del direttario stipulato in antico contratto d'enfiteusi, costituito secondo il diritto romano comune, nel caso di vendita del fondo enfiteutico, e quello di decadenza o risoluzione* IPSO JURE *dell'enfiteusi, per la vendita* irrequisito domino, *ed esulare conseguentemente la proponibilità di una successiva domanda di affrancazione.*

nelle antiche enfiteusi — al contratto principale, ed esplicantesi nel caso di alienazione del *jus emphyteuticum* (1).

La questione è di vero interesse storico e pratico, specialmente in relazione alle leggi francesi, per l'estesa applicazione da esse avuta in Italia (e del resto in quasi tutta Europa) all'epoca della grande conquista Napoleonica, e, di conseguenza, per l'effetto che le stesse avrebbero potuto produrre — se effettivamente *abolitive* e *proibitive*, come si è sostenuto, dell'istituto qui considerato — sulle enfiteusi precostituite e stipulate durante un tale regime legislativo, e regolate ancor oggi dalle disposizioni legislative sotto le quali furono costituite, in virtu dell'art. 29 delle disposizioni transitorie per l'attuazione del Codice civile vigente; ed anche perchè, attraverso a quest'evoluzione storica, ben si possono comprendere le incertezze e vicissitudini incorse da questo istituto, durante i lavori preparatori del Codice attuale, prima di essere accolto come precetto della legge nostra positiva (2).

Per l'importanza del tema così circoscritto e non ancora indagato di proposito — per quanto ci consta — dalla dottrina italiana, sembraci *operis pretium* di trattarne brevemente, stu-

(1) Vedi la nota precedente.

(2) Art. 1556-1567 Codice civile. Cfr. pei *lavori preparatori* del Codice attuale, i citati volumi della *Raccolta* di S. Gianzana, Torino, 1887. Di qui si ricava che nella *Relazione ministeriale* del *Pisanelli* al progetto del Codice civile (vol. 1°, n. 178) e in quella *senatoria* (id., n. 253) l'enfiteusi fu *esclusa*: solo in seguito, nella discussione alla Camera dei deputati (9-22 febbraio 1865) fu sostenuta la convenienza di comprendervi un tale istituto (opportunamente disciplinandolo e rinnovandolo) dall'on. Panattoni (vol. II, p. 69), on. Cocco (*id.*, p. 71), dallo stesso Pisanelli (*id.*, p. 127: entro certi limiti) e sopratutto dagli on. Crispi (*id.*, p. 164) e Mancini (*id.*, p. 174). Nominata poi il 6 aprile 1865 la *Commissione generale legislativa di coordinamento*, dai cui lavori uscì poi completo il Codice civile attuale, essa tosto convenne nell'idea di accoglervi l'istituto dell'*enfiteusi* (vol. III, p. 336 e seg.); il *progetto* delle disposizioni relative fu compilato da apposita Sotto-commissione, e, discusso e modificato dalla Commissione generale, formò poi il contenuto degli articoli del Codice civile dal 1556 al 1567 (titolo VII del libro III del Codice civile), che appunto all'enfiteusi si riferiscono (*vol.* III, pag. 458 e 463). Cfr. in proposito Simoncelli, *op. cit.*, p. 10 e seg. — Detti lavori *preparatori*, per quanto hanno tratto all'enfiteusi, sono pure ora riportati dal De Pirro nella nuova 2ª recente edizione della sua pregevole monografia " *Della Enfiteusi* ", Milano 1907, p. 490 e seg.

diando appunto l'enfiteusi italiana in confronto e contrasto colle leggi francesi summentovate, come pur con talune leggi della restaurazione (ed essenzialmente col Codice albertino, che fu forse il solo ad effettivamente escludere e interdire l'enfiteusi, mentre altri Codici della restaurazione, come quello del Regno delle Due Sicilie e i Codici parmense ed estense, espressamente la riattivarono e regolarono con particolari precetti), ed in riferimento eziandio al diritto (*legale* o *convenzionale*) di *prelazione*, che all'enfiteusi si annoda, nei limiti in cui dovette per lo passato e può ancora attualmente ritrovare applicazione, in contrasto coll'opposto odierno diritto di affrancazione.

E ben merita di essere anche oggi studiato l'istituto della *enfiteusi*, che, dopo tanti dubbi sulla convenienza o meno del suo mantenimento nel diritto nostro, è stato riaccolto (opportunamente rinnovato e rimodernato) nel Codice civile vigente, ed ora, assai più recentemente (e come vera istituzione politico-sociale), in nuove leggi speciali a favore di alcune provincie italiane (1), e che, sfrondato di ogni elemento feudale, può ancora tornare di vera utilità alla classe agricola e ad un proficuo regolamento della proprietà fondiaria.

II. — *a*) Riguardo al periodo legislativo della Rivoluzione francese e poi al Codice napoleonico, è erronea l'opinione

(1) Queste leggi speciali, in cui pur si dettano norme riflettenti l'istituto dell'enfiteusi, sono: la legge 2 luglio 1896, n. 268, che dispone circa la censuazione dei beni già ecclesiastici in Sicilia; la legge 2 agosto 1897, n. 382, portante provvedimenti per la Sardegna, e il relativo regolamento 29 maggio 1896, n. 336; la legge 31 marzo 1904, n. 140, che emana provvedimenti a favore della Basilicata, e il relativo regolamento 26 marzo 1905, n. 173; quella infine 15 luglio 1906, n. 383, concernente provvedimenti per le Provincie meridionali, per la Sicilia e per la Sardegna. Vedine i lavori preparatorî e i precetti positivi, in rapporto alla enfiteusi, in De Pirro, *op. cit.*, p. 466 e seg.: dagli stessi risulta non solo mantenuto e largamente applicato l'istituto dell'enfiteusi, secondo le normali disposizioni del Codice civile, ma talora pur stabilito, *ope legis*, l'obbligo dell'interpello e del *consenso* del concedente prima di *alienare* il *jus emphyteuticum*, e il divieto temporaneo di farlo, salvo in determinate circostanze (art. 4, legge 1896, art. 6, cap. 2, l. 1897; art. 26, cap. 2, l. 1904; art. 38, lett. *a*, l. 1906): ciò significa, come l'antica prelazione *legale*, un'attuale limitazione dei diritti dell'enfiteuta, che invece non si trova nel Codice civile nostro (art. 1562 Cod. civ.).

di coloro, fra cui non mancano valorosi nostri cultori della storia del diritto (1), che — come si è or ora accennato — ritengono sia stata abolita e vietata da siffatte leggi l'*enfiteusi*, quale istituzione feudale; quest'errore si può agevolmente dimostrare con un sommario esame di dette leggi.

Vero è, che un tale istituto, dalle forme precipuamente *realistiche* (*jus in re aliena*) di rapporto e vincolo essenzialmente fondiario, assunte presso il diritto romano giustinianeo, dopochè piacque all'imperatore Zenone di determinarne (però con definizione incerta e — per così dire — negativa) la figura giuridica (2), venne nel Medio Evo ad accostarsi e talvolta a confondersi con altri istituti di prevalente colore feudale, quali l'*hospilitas*, la precaria, il livello, il censo, il fitto perpetuo, l'albergamento, e persino collo stesso *feudo* — accomunando in tal caso i vincoli personali e signorili con quelli reali e fondiarii — : così da far dire a Molineo che " *verbum emphyteusis est aequivocum* „ e suscitare il noto broccardo " *de feudo ad emphyteusim valet argumentum* (3) „;

(1) Così il Salvioli nel suo mentovato *Manuale di storia del diritto italiano* (4ª ed., n. 286), testualmente dice che " in Francia l'istituto delle enfiteusi fu dalle leggi rivoluzionarie e poi dal Codice napoleonico *abolito*, come istituzione feudale, viziata da concetti fidecommissari, dannosa alla coltura..... „. Cfr. Simoncelli, *op. cit.*, p. 2 e seg.

(2) L. 1, C. *De jure emphyt.*, IV, 66: " Jus emphyteuticarium neque *conductionis* neque *alienationis* esse titulis adjicendum, sed hoc *jus tertium sit constitutum* ab utriusque memoratorum contractuum societate seu similitudine *separatum*..... „. Cfr. Vuy, *De nat. et origin. juris emphyt. Roman.*, 1838; Schmidt, *Hand. des gegenw. gelt. gem. deutsch. bürg. Rechts*, 1848, II, 1 e seg.; Windscheid, *Lehrb. des Pandeckt.*, 8ª ed., § 219 e seg., e aut. cit.; Girard, *Manuel de droit romain*, 3ª ed., p. 383 e seg.; François, *De l'emphytéose*, Paris, 1883, p. 23 e seg.; De Pirro, *op. cit.*, n. 1; Ferrini, *Man. delle Pandette*, 2ª ed., n. 390.

(3) Cfr. Dufour, *De l'emphytéose*, Paris, 1893; François, *op. cit.*, p. 242 e seg.; Viollet, *Histoire du droit français*, 3ª ed., n. 660 e seg., e bibliogr. cit.; Simoncelli, *op. cit.*, parte IIª (*Le costruzioni giuridiche dell'enfiteusi e le moderne leggi d'affrancamento*) estr. da *Arch. giurid.*, XL, fasc. 5 e 6, XLI, fasc. 1 e 2; Pertile, *Storia del diritto priv. it.*, IV, 298 e seg.; Salvioli, *op. cit.*, n. 282 e seg.

Mentre pei Romani l'enfiteusi era semplicemente un *jus in re aliena*, come s'è visto, nel diritto medioevale si esplicò il dualismo del *dominio* fra concedente ed enfiteuta, e la sua divisione in *dominium directum* e *utile*: fu questo un trovato dei glossatori, che passò poi nella comune dot-

vero è quindi che non troppo favorevolmente dovette un tale istituto (così frammisto a rapporti di carattere feudale) presentarsi agli occhi dei legislatori della Rivoluzione, avidi di distruzione e d'innovazione: — però ci avverte in proposito il François, che (1) " quelque impatiente et intraitable que fût " la passion populaire, les grandes assemblées de la Révolution " n'obéirent point aux emportements irréfléchis qui voulaient " faire table rase de toutes les institutions de l'ancien droit: " parmi elles il s'en rencontrait qui, *de leur nature propre*, " comme l'*emphytéose*, étaient exemptes de féodalité: celles-là devaient être nécessairement maintenues et seulement *corrigées* " dans celles de leurs dispositions qui auraient pu, de près ou " de loin, éveiller quelque souvenir de l'ancienne hiérarchie " seigneuriale.

" Telle fut l'œuvre de la *législation intermédiaire* „.

E quest'opera che fu perciò non già d'abolizione, ma di sola limitazione e regolamentazione, appare evidente dal contesto delle leggi in proposito emanate.

Così è che quella stessa *Assemblea Nazionale Costituente* che emanò i suoi celebri decreti in data 4, 6, 7, 8 e 11 agosto 1789, nei quali è solennemente proclamato che: (art. 1°) " L'Assemblée " nationale *détruit entièrement le régime féodal* et décrète que, dans " les droits et devoirs tant féodaux que censuels, ceux qui tien- " nent à la main morte réelle où personnelle et à la servitude " personnelle, et ceux qui les représentent, sont *abolis* sans in- " demnité et tous les autres déclarés *rachetables*... „ spiegava in seguito meglio il suo concetto (con riferimento pure all'enfiteusi) col decreto 15-28 marzo 1790, in cui mentre è detto che (Tit. 1. art. 1): " Toutes distinctions honorifiques, supériorité et puissance " résultant du régime féodal sont *abolies*... „ si aggiunge che (Titolo III, art. 1): " Seront simplement *rachetables* et continue- " ront d'être payés jusqu'au rachat effectué, tous les *droits* et

---

trina (Simoncelli, *loc. cit.*). Oggi si disputa sul punto di escogitare un'idonea concezione giuridica dell'enfiteusi per il vigente diritto, e la ricerca è difficile per la incertezza che presiedette alla *giuridica* ricostituzione e riaffermazione d'un tale rapporto nella legge nostra (Cfr. Simoncelli, *op. cit.*, parte I[a], p. 30 e seg.; e De Pirro, *op. cit.*, n. 1 e 2).

(1) *Op. cit.*, pag. 292.

" devoirs féodaux ou *censuels utiles, qui sont le prix et la condition* " *d'une concession primitive de fonds*. (Art. 2°) Et sont *présumées* " tels, sauve la preuve contraire, toutes les redevances seigneu- " riales annuelles en argent, grain, volailles, cire, denrées ou " fruits de la terre, servis sous la dénomination de cens, cen- " sives, rentes féodales, seigneuriales et *emphytéotiques*... qui ne " se payent et ne sont dues que par le propriétaire ou posses- " seur d'un fonds, tant qu'il est propriétaire ou possesseur d'un " fonds et à raison de la durée de sa possession „.

Questi principî furono solennemente confermati dalla legge 18-29 dicembre 1790 della stessa Assemblea Costituente — legge essenziale per l'enfiteusi — la quale, confermando e regolando il diritto di riscatto o affrancamento di tutte le rendite fondiarie, non solo non venne a sopprimere, ma a regolare e disciplinare l'istituto dell'enfiteusi, limitandone per l'avvenire la durata a 99 anni.

Art. 1. " Toutes les rentes foncières perpétuelles, soit en " nature, soit en argent... seront *rachetables*... Il est *défendu* de- " plus à l'avenir de créer aucune redevance foncière non rem- " boursable, *sans préjudice des baux à rentes ou emphytéoses, et* " *non perpétuels, qui seront exécutés par toute leur durée et pourront* " *être faits à l'avenir pour quatre-vingt-dis-neuf ans et au-dessus*... „.

Emanarono ancora successivamente — prima della codificazione napoleonica — altre leggi che pur esplicitamente riconobbero i contratti enfiteutici: e così la legge 27 aprile 1791 (art. 2) e la legge 16 ottobre 1791 (art. 1): — senonchè, essendo parso che tutte queste disposizioni non servissero ancora a distruggere dalle radici il sistema feudale, l'*Assemblea Legislativa* (succeduta alla *Costituente*) deliberò di abolire, come fece con suo decreto 25 agosto 1792, tutte indistintamente *le rendite*, qualunque ne fosse il nome, " à moins qu'ils ne soient " justifiés avoir pour cause *une concession primitive de fonds*, " laquelle cause ne pourra être établie qu'autant qu'elle se trou- " vera clairement *énoncée* dans l'acte primordial d'inféodation, " d'accensement ou de bail à cens, qui devra être rapporté „. Restava così invertita la *presunzione* di non feudalità delle rendite, stabilita dal mentovato articolo II (tit. III) del decreto 15-28 marzo 1790: ma rimase così meglio assodato che feudale e signorile non era da ritenersi quella rendita, che rappresentava il

corrispettivo della concessione del *godimento d'un fondo*, nel che sta appunto l'essenza dell'enfiteusi vera e propria. Tant'è che la successiva legge 17 luglio 1793 (Convenzione Nazionale), nel ribadire ancora una volta la soppressione delle rendite signorili e dei diritti feudali, eccettuava, all'art. 2°, le " *prestations purement foncières et non féodales* „. A completare la nuova sistemazione di siffatti rapporti vennero ancora le leggi 9 messidoro, anno III, e 11 Brumaio, anno VII, che, disciplinando il diritto ipotecario, lo regolarono anche in rapporto all'enfiteusi.

Da tutte queste disposizioni emanate in tale periodo intermedio tra il precedente diritto comune e feudale e la successiva codificazione napoleonica, le quali abbiamo creduto *operis pretium* riportar qui con una qualche larghezza, non appare quindi per nulla abolito e prescritto l'istituto dell'*enfiteusi*, ma invece soltanto decretate:

1° L'abolizione dei diritti, contratti e vincoli feudali e signorili propriamente detti;

2° La riscattabilità delle enfiteusi perpetue e la loro proibizione per l'avvenire;

3° La conservazione e giuridica efficacia delle enfiteusi temporanee e la potestà di costituirne delle nuove, per una durata non superiore ai novantanove anni.

E neppur la suddetta proibizione (specialmente per la legge 18-29 dicembre 1790) di statuire nuove enfiteusi perpetue o superiori ai 99 anni, significa, per quelle stipulate in spreto alla legge, la loro necessaria proscrizione e *nullità*: — la dottrina rigetta infatti questa nullità, avvertendoci che, ove ci si riporti agli insegnamenti di quei tempi, " le sentiment le plus général " est d'interpréter la loi du 1790 en ce sens, qu'il ne saurait " plus y avoir d'emphytéose perpétuelle *sans faculté de rachat* „ (1).

---

(1) FRANÇOIS, *op. cit.*, p. 299. — Un tale concetto è chiaramente e correttamente espresso dalla già mentovata sentenza 1° dicembre 1886 della Suprema Corte di Roma, la quale dice: " E nemmeno sussiste la violazione di tutte le altre disposizioni di legge, poichè, volendo anche seguire i principi stabiliti dalla *giurisprudenza francese* interpretativa della legge 29 dicembre 1790 e del Codice napoleonico, troviamo che il divieto dell'enfiteusi per una durata maggiore di 99 anni, sancito in detta legge, non portava la *nullità* del contratto stipulato a *perpetuità*: che, ferma stando *l'efficacia del patto*, l'unico effetto di tale proibizione consisteva nella facoltà dell'en-

E la stessa Suprema Cassazione francese ha espressamente deciso, in una assai nota sentenza in data 15 dicembre 1824 (1), che " la stipulation d'une rente *perpétuelle* ou redevance dans " un bail emphytéotique postérieur à la loi de 18-29 décembre 1790 " n'entraine pas la *nullité* du bail. Seulement la rente ou re- " devance stipulée est *rachetable, nonobstant la stipulation de* " *perpétuité* „ (2). Dunque — ripetesi — non abolizione e nullità, ma diritto di *riscatto* o *affrancamento* [con efficace innovazione al diritto precedente, di sapore feudale, che respingeva i patti *d'affrancamento*, contrari alla perpetuità di siffatti rapporti (3)] delle enfiteusi perpetue costituite anteriormente ed anche posteriormente alle or viste leggi, e giuridica efficacia di quelle limitate ad anni novantanove.

Ciò insegnando la storia del diritto, mal si riesce a comprendere per qual motivo, all'atto della codificazione napoleonica e nei suoi lavori preparatorî, si fosse ritenuto da taluno dei Commissari come senz'altro *abolita* detta enfiteusi dalla precedente legislazione, e come quindi non fosse più il caso di occuparsene nella nuova codificazione: eppur ciò risulterebbe dalle parole di Treilhard nell'*Exposé des motifs* del titolo " *De la distinction des biens* „, dalla dichiarazione di Tronchet, pronunziata nella discussione avanti il Consiglio di Stato, che " *maintenant l'emphytéose n'aurait plus d'objet et qu'il était donc* " *inutile de s'en occuper* „ e specialmente dalle parole del Portalis, nel discorso preliminare sul progetto del Codice civile, colle quali egli lamenta l'avvenuta proscrizione e abolizione dell'enfiteusi, per opera delle leggi della rivoluzione (4).

---

fiteuta di *riscattare* a suo beneplacito la rendita da esso dovuta: e che non sono diverse le conseguenze della proibizione contenuta nell'art. 530 del Codice napoleonico, il quale autorizzando il riscatto di ogni rendita costituita in *perpetuo*, non pronunzia altra nullità che quella delle stipulazioni contrarie al diritto di riscatto concesso al debitore della rendita „. Cfr. Simoncelli, *op.* e *1ª parte* cit., p. 3 e seg.

(1) *Rec. génér. des lois et des arrêts*, XXV, 1, 290.

(2) Cfr. Troplong, *De l'échange et du louage*, Bruxelles, 1841, n. 50.

(3) Cfr. Salvioli, *op. cit.*, n. 286.

(4) Locré, *Législat. civ. comm. et criminelle*, Bruxelles, 1836, 1, p. 181 e seg. Ecco le testuali parole del Portalis: " ..... Nous avons pensé qu'on avait " été trop loin quand, sous prétexte d'effacer jusqu'aux moindres traces de

L'opinione o quanto meno le dubbiezze dei compilatori del Codice napoleonico, riguardo all'istituto dell'enfiteusi, fecero sì che di essa non siasi fatta in detto codice speciale menzione, e solo siasi, all'art. 530 (1), genericamente stabilita la *redimibilità* delle *rendite perpetue*. — Ma la dottrina e la giurisprudenza che vennero in seguito ad illustrare ed interpretare questo pur insigne monumento di sapienza legislativa, preferibilmente ritennero che il *silenzio* sull'enfiteusi e sui suoi precetti non dovesse senz'altro significare la sua abolizione e proscrizione.

Si avvisò in merito dai principali commentatori del Codice napoleonico — meno alcuni pochi (2), tra cui va specialmente annoverato il Demolombe (3) il quale, esaminata a lungo la questione, conclude col dire che gli autori che sostengono la persistenza dell'istituto dell'enfiteusi, la creano essi stessi nel diritto nuovo — che la ricordata legge 18-29 dicembre 1790 dell'Assemblea Costituente che regolava appunto l'enfiteusi, non era mai stata *abrogata*; che non esisteva nel Codice napoleonico alcuna espressa disposizione la quale vietasse il contratto enfiteutico (nei limiti determinati dalla predetta legge), ed anzi, conformemente ai concetti da quest'ultima instaurati, si aveva precisamente l'art. 530 citato, che si limitava a rendere *riscattabili* tutte le rendite fondiarie *perpetue*; che il contenuto materiale e giuridico degli articoli 543-544 del Codice napoleonico insieme coordinati, come pure di altri disposti di legge (4).

" féodalité, on avait proscrit *le bail emphytéotique* et le bail à rente foncière,
" qui n'ont jamais été un contrat féodal, qui encourageaient les grands
" propriétaires à vendre les fonds qu'ils ne pouvaient cultiver avec soin, et
" qui donnaient à des cultivateurs laborieux, dont les bras faisaient toute
" la richesse, le moyen facile de devenir propriétaires... ". — Vedi un felice riassunto dei motivi inducenti a ritenere l'*abolizione* dell' enfiteusi, per taluni compilatori del Codice napoleonico, in Simoncelli, *op.* e *loc. cit.*

(1) Art. 530 Cod. nap.: " Toute rente établie à perpétuité pour le prix de la vente d'un immeuble, ou comme condition de la cession à titre onéreux ou gratuit d'un fonds immobilier, est essentiellement *rachetable* ". Cfr. su tale articolo Baudry-Lacantinerie e Wahl, *Trat. di diritto civile* (traduz. italiana), *Dei beni*, n. 146.

(2) Grenier, *Privil. et hypot.*, n. 143; Foelix et Henrion, *Des rentes foncières*, p. 28; Rodière et Pont, *Du contr. du mariage*, I, 338; Pont, *Priv. et hypot.*, I, n. 388; Valette, *Privil. et hypot.*, n. 128.

(3) *Cours de Code civil*, V, 487 e seg.

(4) Cfr. François, *op. cit.*, p. 312 e seg.

non era d'ostacolo, anzi permetteva e favoriva la presenza di un tale istituto, svestito d'ogni residuo feudale, nell'ordinamento giuridico francese. Si concluse perciò da essi col riconoscere efficacia ai contratti enfiteutici fatti anteriormente e durante il periodo legislativo suddetto, come pure dopo applicato il Codice napoleonico, salvo a stabilirne la limitazione nel tempo e concederne l'affrancamento o riscatto ove fossero *perpetui* o quanto meno eccedessero i 99 anni.

Basterà ricordare quanto testualmente dice il PROUDHON (1), il quale, espressamente riconoscendo l'applicabilità della legge 18-29 dicembre 1790, non affatto revocata dal Codice napoleonico, osserva " que cette loi n'ayant fait qu'assigner un terme " à l'emphytéose sans en changer autrement le caractère, c'est " toujours d'après les principes de *l'ancien droit* qu'on doit en " déterminer la nature sous tous les rapports autre que celui de " sa durée et des conséquences inhérentes à cette abréviation ". Ed ugualmente opinano (salvo talune differenze di vedute sul punto della precisa concezione giuridica della mantenuta enfiteusi (2), TOULLIER (3), DURANTON (4), TROPLONG (5), MARCADÉ (6), PEPIN LE HALLEUR (7) ed altri autori citati nella completa monografia del FRANÇOIS (8), che segue ed illustra l'opinione predominante, e riporta pure la copiosa giurisprudenza in proposito ed alcune leggi successive, che confermano la permanenza dell'istituto dell'enfiteusi nel diritto francese (9).

(1) *Traité du domaine de propriété*, Bruxelles, 1842, n. 709.

(2) FRANÇOIS, *op. cit.*, p. 329 e seg.

(3) *Le droit civil français*, Bruxelles, 1837, II, 101.

(4) *Cours de droit civil*, Bruxelles, 1841, II, n. 891.

(5) *De l'échange et du louage*, Bruxelles, 1841, n. 50; e *Comment. des privilèges et hypothèques*, Bruxelles, 1848, n. 406.

(6) *Explication du code Napoléon*, 6ª ed., II, n. 358 e seg.

(7) *Histoire de l'emphytéose*, Paris, 1843, p. 340.

(8) *Op. cit.*, p. 326, nota 5. Cfr. pure MERLIN, *Questions de droit;* v. *Emphytéose*, § 5, n. 2; DALLOZ, *Répert.*, v. *Louage emphyt.*, I, n. 3.

(9) FRANÇOIS, *op. cit.*, pag. 326, nota 6. Già il MANCINI (discorso cit., in *Raccolta di lav. preparat.*, cit., II, pag. 174) aveva brillantemente esposto alla Camera dei deputati — discutendosi il progetto del Codice civile italiano — lo stato del diritto e della dottrina e giurisprudenza francese, nel senso da noi riportato.

Così l'enfiteusi, nel suo essenziale fondamento realistico e fondiario, non fu sradicata dalla bufera delle leggi rivoluzionarie francesi e dalla successiva codificazione, che neppur potè perciò abolire i contratti enfiteutici costituiti nei paesi nei quali (come per la massima parte d'Italia) essa venne a trovar applicazione: anzi la maggior parte delle legislazioni straniere successive, e quelle stesse che essenzialmente si basano sul Codice napoleonico, ne riconobbero l'esistenza e la utilità, ed espressamente ne codificarono gli essenziali precetti per evitare i dissidi e le incertezze del diritto francese, come le leggi 10 e 25 dicembre 1824 per il Belgio, la legge 24 dicembre 1824 e il Codice civile del 1838 (art. 767 a 783) per l'Olanda; e per l'Italia, i i Codici parmense, andato in vigore il 1° luglio 1820 (art. 415-427), ed estense, pubblicato il 15 ottobre 1851 (art. 1625-1637), ed il Codice per il Regno delle Due Sicilie posto in vigore il 15 settembre 1819 (art. 1678-1703). Anche il Codice civile austriaco del 1° giugno 1811, che, colla restaurazione, venne in applicazione in Italia, accoglieva e regolava l'istituto dell'enfiteusi (art. 1122-1150).

Intorno a questa particolar codificazione favorevole all'enfiteusi, ed anzi al diritto *legale di prelazione* in caso d'alienazione (di cui ancor diremo), non è il caso di spendere qui parola: eran chiari i precetti legislativi che regolavano un tale istituto (1).

(1) Basterà riportare gli esaurienti cenni riassuntivi che ne dà il Caraffa nella sua *Enfiteusi* (dal *Digesto italiano*, V° Enfiteusi), al n. 6: " Dopo " i fortunosi eventi del 1814 e 1815, i vari Stati italiani, eccetto il Ducato " di Lucca, o richiamarono in vigore i loro antichi ordinamenti o compilarono nuovi Codici. Di questi il solo Codice albertino non contemplò " l'enfiteusi: gli altri tutti dettarono per tale contratto delle regole inspi- " rate parte dall'*antico* diritto, parte dai *nuovi* principî. La enfiteusi poteva " essere perpetua o temporanea: il canone era dovuto non quale corrispet- " tivo del godimento del fondo, ma in ricognizione del dominio diretto, ed " il solo codice *estense* stabiliva il diritto di affrancazione in favore dello " enfiteuta. L'obbligo di chiedere il *consenso* del *domino* nelle alienazioni e " il diritto di *prelazione* furono dappertutto conservati, meno che nel Codice " austriaco vigente nel Regno Lombardo-Veneto: le leggi civili pel *Regno* " *delle Due Sicilie* vi aggiunsero il diritto di prelazione in favore dell'enfi- " teuta, nel caso che il domino volesse alienare il diretto dominio. Il *lau-* " *demio*, dove era dovuto per legge, dove era rimesso all'arbitrio dei con-

b) Diversamente avvenne invece per il Regno Sardo, ove, colle leggi della restaurazione, sopraggiunse il *Codice civile albertino*, andato in vigore il 1° gennaio 1838, che fu ancor più severo per l'enfiteusi, che non le leggi rivoluzionarie francesi ed il Codice napoleonico, e merita perciò un cenno speciale.

Contrariamente a quanto sostiene una certa dottrina e giurisprudenza (1), la quale ritiene solo essersi *taciuto* dell'enfiteusi nel Codice albertino, senza però abolirla (come si è visto appunto accadere per il Codice napoleonico), la stessa fu effettivamente proscritta ed esclusa per detta legge e vietata per l'avvenire: si mantenne però efficacia alle *enfiteusi precedente-*

" traenti, i quali però non potevano pattuirlo in una somma maggiore della " quinquagesima parte. Erano cause di *devoluzione*, il mancato pagamento " del canone per tre anni, l'alienazione *irrequisito domino*, il deterioramento " del fondo enfiteutico, l'inadempienza dell'obbligo di stipulare l'atto reco- " gnitorio nei casi indicati dalla legge. Verificatasi la devoluzione, l'enfi- " teuta aveva diritto ad essere compensato delle migliorie esistenti ". Confronta pure, in generale, e per quanto ha specialmente tratto alle leggi civili napoletane, Perna, *op. cit.*, *passim* e pag. 81 e seg.

(1) Dice infatti il Salvioli (*op. cit.*, n. 286): " Dopo il 1815 fu ovunque " ristabilita l'enfiteusi romana: soltanto nel Piemonte si permisero sì le loca- " zioni centenarie, *ma si tacque sull'enfiteusi* ". Ugualmente il Caraffa (*loc. cit.* in nota preced.) solo parla di *silenzio* sull'enfiteusi nel Codice albertino; mentre correttamente di *esclusione* parlano in modo espresso il De Pirro (*op. cit.*, n. 2) e il Simoncelli (*loc. cit.*). Il François, nella sua pur elaborata disamina storico-legislativa sull'istituto dell'enfiteusi, presso i vari diritti, ritiene per errore l'enfiteusi come espressamente compresa e regolata nel Codice albertino (*op. cit.*, p. 326). In quanto alla giurisprudenza, mentre una sentenza della Corte di Cassazione di Torino, 10 febbraio 1897 (*Giurispr. Torin.*, 1897, 321), espressamente dice che dal Codice albertino furono abolite e vietate per l'avvenire le *enfiteusi*, la mentovata, recente sentenza della stessa Corte, in data 13 settembre 1906, solo accenna al *silenzio* di quel Codice sull'enfiteusi, ed *esclude il divieto*: " Nè le cose cambiarono aspetto o subirono radi- " cali innovazioni sotto l'impero del *Codice albertino*, successivamente inter- " venuto e che ebbe vigore in Liguria dal 1° gennaio 1838, e delle sue " disposizioni transitorie contenute nelle RR. Patenti 6 dicembre 1837, e " neppure coll'attuazione della legge 13 luglio 1857, approvata dal Parla- " mento Subalpino negli Stati Sardi. Vero, anche il Codice albertino non " si dimostrò favorevole a tale istituto: al pari del Codice francese restò " *muto* al riguardo, accordando soltanto la facoltà del riscatto delle *enfi-* " *teusi perpetue*, siccome infette di feudalismo (art. 1943, 1944, 1947): *per* " *altro con nessuna delle sue disposizioni le vietò per l'avvenire*..... ".

mente costituite, salvo il diritto *al riscatto*; ciò in corretta applicazione dei principi della *irretroattività* della legge, secondochè appare dall'art. 16 della Regia Patente 6 dicembre 1837 e dalla successiva legge 13 luglio 1857, n. 2307.

Per le incertezze or mentovate, è opportuno riportare i più rilevanti testi di legge in proposito.

L'art. 16 della Regia Patente 6 dicembre 1837 dice testualmente: " Le rendite fondiarie sì in denaro che in derrate, " costituite prima della osservanza del Codice a titolo di *enfiteusi*, albergamento od altra concessione di immobili o di beni " considerati a guisa di immobili, sono *regolati dalle leggi anteriori*. Nondimeno se la rendita è costituita *a perpetuità*, sarà " soggetta al *riscatto*, in conformità del disposto degli art. 1943 " e 1944 del Codice civile ".

E il Codice civile albertino andato in vigore appunto il 1° gennaio 1838, ed a cui si collega e si coordina la ora mentovata R. Patente, così si esprime: Art. 1941. " La concessione " d'immobili, di cui nell'articolo precedente (per la costituzione di " rendita fondiaria) trasferisce nel concessionario il *pieno dominio*, " nonostante qualsivoglia clausola contraria ed anche quella " della riserva del dominio che vi fosse apposta, le quali si " avranno per non scritte. — Se la concessione è fatta a titolo " oneroso, sotto qualsivoglia denominazione, come di *enfiteusi*, " albergamento od altra simile, la medesima sarà soggetta alle " regole stabilite *pel contratto di rendita*: se è fatta a titolo gra- " tuito, essa è soggetta alle regole stabilite per le *donazioni* ". — Art. 1493. " La rendita costituita a termini dei due articoli pre- " cedenti (l'art. 1942 si riferiva alla *rendita semplice o censo*) è " essenzialmente *redimibile* a volontà del debitore, nonostante " qualunque patto contrario. Può tuttavia stipularsi che il ri- " scatto non avrà ad eseguirsi durante la vita del concedente, " ovvero prima di un certo termine ". — Art. 1944. " Il riscatto " della rendita semplice si opererà mediante il rimborso del " capitale in denaro pagato per lo stabilimento della medesima, " e quello della rendita *fondiaria* col pagamento di un *capitale* " in denaro corrispondente all'annua rendita od al valore della " medesima, se in derrate, prendendo per base il prezzo medio " di queste durante gli ultimi 10 anni; salvo però che fosse " stato fissato nell'atto un capitale inferiore: in questo caso il

“ debitore sarà liberato dall'annua rendita col pagamento del ca-
“ pitale fissato „. — Art. 1947. “ Nei casi accennati nei due ar-
“ ticoli precedenti (inadempienza *agli obblighi stabiliti*) come in
“ qualunque altro di contravvenzione ai patti del contratto, il
“ creditore *non potrà che costringere il debitore al riscatto della*
“ *rendita*, senza aver mai diritto di *rivendicare l'immobile ceduto*,
“ nonostante qualunque patto o riserva che sarà come non av-
“ venuta „.

Infine l'art. 1 della legge 13 luglio 1857 per lo svincolo della enfiteusi (1) disponeva precisamente che “ ...nelle conces-
“ sioni *perpetue* di beni immobili e di beni considerati a guisa
“ di immobili, fatte *prima dell'osservanza del Codice civile*, a ti-
“ tolo di *enfiteusi*, subenfiteusi, albergamento, livello e qualsi-
“ voglia altro consimile titolo, e sotto qualsivoglia denomina-
“ zione, è fatta facoltà all'*utilista*, e in difetto al *direttario*, di
“ svincolare il fondo e *di consolidare l'utile col diretto dominio*
“ nei modi e colle norme e condizioni infra stabilite „; e al-
l'art. 18 disponeva poi che “ non si potrà derogare per con-
“ venzione delle parti al disposto degli art. 1, 8, 9 della legge
“ stessa „.

Le norme di legge ora riportate dimostrano ad evidenza quanto si è prima detto, e cioè che, mentre per le leggi del Regno Sardo si manteneva efficacia alle enfiteusi anteriori al Codice albertino, salvo il diritto al riscatto, se perpetue (2), si proibiva invece la costituzione di nuove enfiteusi, sia per l'assoluto divieto della *rivendicazione* o *devoluzione* dell'immobile

(1) Per quanto rifletteva le *enfiteusi*, livelli, censi, ecc.... costituiti, non con i privati, ma con *corpi morali*, si ebbe più tardi la legge 24 gennaio 1864, n. 1636, ove (art. 1) pur si permette ai concessionari l'*affrancamento* delle enfiteusi e concessioni *perpetue*, regolandone il modo: però, contrariamente all'art. 18 della citata legge del 1857, è ivi (art. 19) permessa la deroga, per convenzione delle parti, al disposto della legge per ciò che riguarda *la materia e il modo d'affrancamento*, le persone che possono chiederlo e la misura di esso. — Devesi ancor qui far menzione della legge 10 agosto 1862 sulla *censuazione dei beni ecclesiastici in Sicilia* (a cui succedette poi, dopo l'attuazione del vigente Codice civile e in epoca assai recente, quella già mentovata del 2 luglio 1896 con intento consimile), e su di essa, Corleo, *Storia dell'enfiteusi dei beni ecclesiastici in Sicilia*, Palermo 1871; e Perna, *op. cit.*, p. 450.

(2) *Regia Patente* 1837 e Legge 13 luglio 1857 citate.

concesso a favore del concedente, in caso d'inadempimento degli obblighi pattuiti da parte del concessionario (art. 1947 Cod. albert.), sia per l'immediata traslazione del *pieno dominio* (come per il caso di *vendita* o di *donazione*) nel concessionario: elementi tutti in antitesi col concetto di enfiteusi: la stessa era così ridotta ad una semplice *rendita fondiaria*.

Però, ripetesi, il divieto di costituire per l'avvenire enfiteusi vere e proprie (da distinguersi dalle *locazioni centenarie*, invece ammesse) (1) pel Codice civile Sardo, non escludeva la perdurante validità di quelle anteriormente stabilite, le quali conservarono vigor giuridico, salvo il diritto al riscatto spettante all'enfiteuta.

c) Si comprende dal sin qui detto, come fra opposti pareri e gravi incertezze siansi trovati appunto i compilatori del Codice civile attuale, al fine di vedere se dovevasi o meno ammettere e disciplinare l'enfiteusi nella nuova codificazione: perchè da una parte i sovra mentovati Codici dei vari Stati italiani della restaurazione l'avevano accolta e disciplinata con evidente favore, dall'altra il Codice civile albertino, su cui prevalentemente si plasmò la successiva codificazione, la proscrisse e vietò. Giustamente però prevalse, com'è noto, l'opinione affermativa, suggerita, oltrechè dal ricordato esempio delle leggi degli altri principali Stati italiani, sopratutto dal pensiero del grande numero di questi contratti che nelle varie parti d'Italia, e in epoca più o meno antica, si erano andati costituendo e conservavano applicazione ed efficacia. E questi contratti enfiteutici si affacciarono così, con perdurante efficacia, alla nuova codificazione civile italiana; anzi seguitarono pure a valere per essi i precetti delle leggi, sotto le quali furono costituiti, per virtù del già menzionato art. 29 delle disposizioni transitorie, il quale testualmente dice che: " le rendite, le prestazioni e

(1) Art. 1720 Cod. albertino: " Sono eccettuate dal disposto dell'articolo precedente le *locazioni* dei terreni gerbidi ed affatto incolti, che si faranno col patto di dissodarli e di ridurli a coltura: queste locazioni possono farsi per un tempo maggiore di trent'anni, ma che non potrà eccedere gli anni cento ". Disposizione questa, che assai avvicina, anche nello scopo, una siffatta locazione all'enfiteusi vera e propria (temporanea); però sta sempre l'intrinseca legale differenza tra i due giuridici rapporti: essenzialmente *personale* o d'*obbligazione* l'uno, *reale* l'altro.

" tutti gli oneri gravanti beni immobili a titolo di *enfiteusi*, sub-
" enfiteusi, censo, albergamento od altro simile, *costituite sotto*
" *le leggi anteriori*, sono regolate *dalle leggi medesime* „.

Così pure, essendosi mantenuto l'istituto dell'enfiteusi, dovettero validamente conservarsi quei diritti e patti ad esso connessi e propri della sua *natura*, in quanto non erano in contrasto colle nuove norme dettate per un tale giuridico rapporto.

Essenziale fra questi diritti connessi all'istituto dell'enfiteusi è il diritto di *prelazione*, di cui è contestata la giuridica ammessibilità ed esperibilità nel diritto attuale, quantunque costituito già nelle *originarie* stipulazioni delle antiche enfiteusi o *precettivamente* stabilito dalle passate leggi. Noi riteniamo che un tale diritto possa invece ancor oggi durare in rapporto all'enfiteusi e con giuridico effetto: e poichè si tratta di un tema, che, sebbene già a lungo discusso, in dottrina e giurisprudenza, è ancora grandemente *controverso*, crediamo di dover pure esporre su di esso brevemente la nostra opinione.

III. — Appena occorre ricordare che il diritto di *prelazione* significa, in rapporto all'enfiteusi, il potere giuridico spettante al concedente o *domino diretto* (secondo la teorica del dominio *diviso*) di esser preferito ad ogni altro, a parità di prezzo, nel caso di alienazione del fondo e del diritto enfiteutico da parte dell'utilista.

Le prime applicazioni di un tale diritto si ritrovano chiaramente designate già nel giure romano (giustinianeo) e specialmente nella costituzione 3ª del Codice (de jure emphyteutico, IV, 66), che giova, sul punto, riferire: " Cum dubitabatur utrum
" emphyteuta debeat, cum domini voluntate, suas meliorationes
" alienare, *vel jus emphyteuticum in alium transferre*, an eius
" expectare *consensum*? Sancimus, *siquidem emphyteuticum instru-*
" *mentum super hoc aliquas pactiones habeat, eas observari*. — Sin
" autem nullo modo huiusmodi pactio interposita sit, vel forte
" instrumentum emphyteuseos perditum est, minime licere em-
" phyteutae *sine consensu domini* meliorationes suas aliis ven-
" dere, vel jus emphyteuticum in alium transferre. Sed ne, hac
" occasione accepta, domini minime concedant emphyteutas
" sua accipere pretia meliorationum quae invenerunt, et eos

" deludant, et ex hoc commodum emphyteutae depereat, dispo-
" nimus *attestationem* domino transmitti et praedicere *quantum*
" *pretium ab alio accipi potest. Et si quidem dominus hoc dare*
" *maluerit, et tantam praestare quantitatem quantam ipse revera*
" *emphyteuta ab alio accipere potest, ipsum dominum haec com-*
" *parare* „.

Si ricava da questo testo come duplice aspetto e forma già potesse assumere pel giure romano (come poi in seguito) questo diritto di prelazione: *convenzionale* o *legale*. Il che è quanto dire che, o nel contratto d'enfiteusi si pattuivano speciali accordi riflettenti l'interpello e la preferenza spettante al *dominus*, nel caso di alienazione del *jus emphyteuticum* (come delle *meliorationes* del fondo) e allora valevano i patti, o nulla invece espressamente si prestabiliva, e allora egualmente, *ope legis*, doveva effettuarsi questo *interpello* al domino diretto e la contemporanea notificazione delle condizioni alle quali l'enfiteuta intendeva di effettuare la vendita, e sorgeva *il diritto di preferenza a favore del domino a parità di condizioni*, da esercitarsi entro due mesi, scorsi i quali, l'enfiteuta poteva liberamente alienare, coll'obbligo però di pagare al proprietario la *quinquagesima* (detta poi *laudemio*), cioè il 2 % del valore dell'enfiteusi (1).

Ancor si deve aggiungere, che già per il diritto romano, nel caso di alienazione *irrequisito domino* ed *in spreto al diritto di prelazione* (come nel caso pure di mancato pagamento per un triennio dell'annuo canone e di conseguente devoluzione al *dominus* del fondo enfiteutico) (2) la caducità dell'enfiteuta dal suo diritto operava *ipso jure*, e gli effetti datavano fin dal momento in cui erasene verificata la causa (3), senza distinguere tra prelazione *convenzionale* o *legale*: ciò è pacifico in dottrina e varrà per le ulteriori nostre considerazioni (4).

---

(1) Cfr. LEONHARD, *Inst. des röm. Rechts*, Leipzig 1894, pag. 294 e seg.: BARON, *Pandekt*, 313; WINDSCHEID, *op. cit.*, § 220; SIMONCELLI, *op.* e *parte 2ª* cit., n. 4; FERRINI, *op. e loc. cit.*

(2) L. 2, § 1 C. *de jure emphyt.*, IV, 66.

(3) Arg. L. 2 e 3 C. *de jure emphyt.*, IV, 66.

(4) FERRINI, *op. e loc. cit.*; SEGRÉ, *Dell'azione di caducità promossa contro l'enfiteuta*, negli *Studi giurid.* pel XXXV anno d'insegn. di F. SERAFINI, Firenze 1892, p. 305 e seg. Vedi pure *Cassaz. Roma*, 1 dicembre 1886 (motivaz.), in *Legge*, 1887, 1, 544.

Questi i precetti del giure romano sul diritto convenzionale o legale di prelazione (1), che si mantenne coll'enfiteusi stessa, anche nel diritto intermedio, in tale duplice sua forma d'estrinsecazione, come pur vi si mantenne l'obbligo di pagare la quinquagesima o *laudemio*, nel caso di alienazione del fondo enfiteutico da parte dell'enfiteuta (2).

Nè tale diritto di prelazione fu abolito e vietato (come neppure lo fu l'enfiteusi), secondochè giustamente riconobbe e dottamente spiegò la mentovata sentenza 13 settembre 1906 della Cassazione di Torino (3), dalle leggi rivoluzionarie fran-

(1) Altri casi di *prelazione* (convenzionale) aveva il diritto romano, specialmente nel contratto di vendita, allorchè il venditore si riservava il diritto di preferenza, nel caso di rivendita della cosa venduta da parte del compratore: si aveva così il *pactum protimiseos*, pure di origine greca, come l'enfiteusi (cfr. Windscheid, *op. cit.*, II, § 388, nota 13; Girard, *Manuel* cit., p. 714 nota 3). Patti affini erano il *pactum de retrovendendo* e *retroemendo* (patto di riscatto: art. 1515 e seg. Cod. civ.), il *pactum de addictione in diem*.

(2) Cfr. Pertile, *Storia del diritto italiano* cit., pag. 299 e seg.; e Simoncelli, *op.* e *parte 2ª* cit., n. 14, il quale testualmente dice: " Rimasero " immutate (nel Medio Evo), nella sostanza, la *quinquagesima* e la *prelazione* a favore del *dominus*, e la nuova concessione a favore dell'enfiteuta, " e si dissero, per influenza del feudo, *laudemio*, *retratto* e *investitura* ". L'obbligo del *laudemio* andò poi scomparendo nel diritto moderno, salvo speciali pattuizioni in proposito (V. Cod. del regno delle Due Sicilie), e non se ne fa menzione nel Codice nostro civile. Vedi Salvioli, *op. e loc. cit.*

(3) Vedine la motivazione riportata alla nota 1, pag. 256.

Per il diritto francese la conservazione della *prelazione* risulta in modo evidente dalla stessa giurisprudenza dell'epoca. È tipica in proposito una sentenza della Corte di Cassazione francese (causa Patocki-Schneider), in data 8 febbraio 1814 (*Recueil génér. des lois et des arrêts*, XIV, anno 1814, 1ª p., p. 249) in cui è espressamente *riconosciuto* un tale diritto — senza distinguere tra prelazione *convenzionale* o *legale* — che si dichiara derivante appunto dal giure romano, conservato pel diritto comune francese e germanico, perchè " *essentiellement propre à l'emphytéose* ". " Attendu... que l'acte " du 3 avril 1715, constitutif de l'emphytéose du moulin Bienvold, ne présente aucune expression qui décèle concession féodale... Que *la défense à Schneider de vendre sans l'agrément de l'évêque* (diritto di prelazione) ainsi " que le droit de celui-ci de *recevoir des laudêmes* en cas de vente ou de retirer l'héritage *sont des droits ordinaires appartenant aux bailleurs à titre emphytéotique*: qu'ils ne peuvent faire dégénérer l'emphytéose en inféodation ou accensement, lorsque le bailleur n'a stipulé ni devoirs ni réserves appartenant uniquement à la féodalité, et que ainsi la Cour de

cesi e dal diritto napoleonico, come neppure — per l'Italia nostra — dai divieti del Codice albertino (solo però se *precostituito*, in un coll'enfiteusi); mentre riguardo agli altri principali Stati italiani e alle leggi che vi ebbero vigore dopo la restaurazione, un tale diritto di preferenza, senza la necessità di alcun patto speciale — e così sotto forma *legale* — venne esplicitamente riconosciuto, in un coll'enfiteusi, come si è visto: — così per il Codice del regno delle Due Sicilie del 1819 agli art. 1691, 1692, 1693, 1694 (1), per il Codice estense all'art. 1631, e per il Codice parmense, agli art. 417 e 418.

Si giunse così al Codice attuale, rispetto al quale ferve la disputa se il diritto di *prelazione* a favore del direttario, non contemplato nel detto Codice, sia o meno stato conservato e sia o meno ancor oggi esperibile — essenzialmente rispetto alle *antiche* enfiteusi per cui valeva un tale diritto — sopratutto di fronte al diritto di affrancamento o riscatto oggi sempre spettante all'enfiteuta, per espresso disposto del Codice stesso (art. 1564 Cod. civ.).

a) In merito a siffatta questione, pel diritto vigente, è sorta una distinzione, sopratutto per opera della giurisprudenza nostra, fra il caso di prelazione *legale* e quello di prelazione *convenzionale* (di cui si è già detto) — in riguardo alle antiche enfiteusi, — e mentre si è sostenuto ed appare oggi opinione prevalente, che la prima non sia più in vigore pel diritto attuale,

---

" Colmar n'a-t-elle pas jugé que ces stipulations fussent féodales ou mêlées " de féodalité... ". Ed altri giudicati riporta ancora il François (*op. cit.*, pagina 295, nota 1) nello stesso senso.

(1) Il Codice per il regno delle Due Sicilie espressamente comminava la *nullità* delle alienazioni fatte del *jus emphyteuticum*, in spreto al diritto di prelazione spettante al concedente: art. 1692 " sarà *nulla* qualunque " vendita, e si darà luogo alla devoluzione, se il diretto padrone non sarà " giuridicamente interpellato a prestare il consenso ". Gli altri codici della restaurazione taciono: è però evidente, che in tale caso doveva per ogni legge avverarsi, meglio che la *nullità* (se pur con pari effetto), la risoluzione *ipso jure* del contratto enfiteutico.

Egualmente opina il De Pirro (*op. cit.*, p. 473), per i casi, di cui nelle recenti già mentovate leggi del 1896, 1897, 1904 e 1906, riflettenti l'enfiteusi, per i quali la legge esplicitamente stabilisce il divieto di alienare il fondo enfiteutico senza il consenso del concedente (V. specialmente l'art. 4 della legge del 1896).

anche rispetto alle enfiteusi costituite sotto le leggi che l'ammettevano, ed anzi la richiedevano sotto pena di nullità (com'era per il Codice del regno delle Due Sicilie) — affermandosi, colla Cassazione di Roma (1), che " di *diritto quesito* non è a parlarsi in materia di prelazione *legale*..... essa è una *mera speranza*, una semplice *facoltà*, epperciò soggetta ad essere modificata ed anche distrutta dalla legge ", — si è ritenuto e si sostiene invece, però non senza contrasto, la persistente *efficacia* della *prelazione convenzionale* pattuita in antiche enfiteusi.

Riservandoci di provare tra breve l'erroneità della prima tesi, dichiariamo subito di aderire alla seconda, che si riferisce alla prelazione *convenzionale*.

Per essa si sostiene che, sempre quando siasi stipulato, in un'enfiteusi costituita in antichi contratti, il *patto di prelazione* a favore del direttario a parità di prezzo, e il conseguente obbligo dell'interpello di questi da parte dell'enfiteuta, prima di addivenire alla alienazione del fondo enfiteutico, sotto pena di decadenza *ipso jure* (che opera quale *condizione risolutiva espressa*, come or vedremo) del diritto di enfiteusi, si intende questa decadenza o risoluzione avverata di pien diritto, all'atto della vendita effettuata senza previo interpello, e non è più possibile l'esperimento successivo di qualsiasi diritto e domanda di *affrancamento*, tanto da parte dell'utilista venditore che del terzo acquisitore del fondo enfiteutico. La *prelazione* vince, cioè, l'*affrancamento*. La qui esposta tesi annovera in suo suffragio, come contro di sè, una già copiosa dottrina e numerosi responsi della giurisprudenza (2).

(1) Sentenza 10 maggio 1882, *Legge*, 1882, II, 327. Cfr. citata sentenza 13 settembre 1906 della Cassazione di Torino.

(2) Vedi, per la *dottrina* favorevole: De Pirro, *op. cit.*, n. 35 e seg., testo e nota 12 e 13; Caraffa, *op. cit.*, n. 32 e seg.; Ricci, *Corso di diritto civile*, 2ª ediz., VIII, § 20 bis; Gabba, *Teoria della retroatt. delle leggi* (Torino 1897), III, p. 183 e seg., e *Nota* in *Giurisprudenza ital.*, 1879, I, 240; Scotti, *Artic.* in *Monit. dei Tribun.*, 1873, 401; Ferrucci, *Nota* in *Foro italiano*, 1881, I, 994; Balatta, *Artic.* in *Movim. giurid.*, 1898, 121; Ciaburri, *Artic.* in *Riv. Univ.*, 1894, IV, 77; e, per la *dottrina* contraria: Doria, *Nota* in *Foro napol.*, 1897, I, 67; A. Bussolini, *Nota* in *Foro it.* 1880, I, 235; Manduca, *Il nuovo diritto enf. e gli istituti del riscatto, della devoluz. e della prelazione*, in *Arch. giurid.*, 1891, 309 e seg.; Perna, *op. cit.*, n. 369 e seg.;

Le obbiezioni che si fanno alla persistenza del diritto di prelazione, *convenzionalmente* stabilito in antiche enfiteusi, non sono a parer nostro fondate.

Si insiste nel dire da chi è contrario alla tesi qui propugnata, che le disposizioni transitorie per l'attuazione del Codice civile, pubblicate il 30 novembre 1865, che alla enfiteusi si riferiscono (art. 29 e 30), poste in correlazione col Codice stesso (art. 1564), contrastano e resistono alla possibilità di serbar vita al diritto di *prelazione*, inquantochè coll'esercizio di questo si verrebbe ad ostacolare l'esercizio del diritto di affrancamento o riscatto, sancito in modo indefettibile da questi disposti di legge. Ma ciò non è.

Già si è visto che l'art. 29 delle dette disposizioni transitorie suona letteralmente così: " le rendite, le prestazioni, e " tutti gli oneri gravanti beni immobili, a titolo di *enfiteusi*, sub- " enfiteusi, censo, albergamento od altro simile, costituite sotto " le *leggi anteriori*, sono regolate dalle medesime „. — Per il successivo art. 30: " È fatta facoltà agli *enfiteuti* o debitori di " rendite costituite sotto le leggi anteriori di *redimere* il fondo o " di riscattare la rendita, giusta le norme rispettivamente costi- " tuite dagli art. 1564 e 1784, *nonostante qualunque patto in con-*

---

e, incidentalmente, MARONI, *Nota* in *Foro it.*, 1897, I, 171, nota *f*. I suddetti autori preferibilmente considerano alla stessa stregua sia con favore sia con disfavore, tanto la prelazione *convenzionale*, quanto la prelazione *legale*.

Vedi, per la *giurisprudenza* favorevole (essenzialmente in rapporto alla prelazione *convenzionale*): Cassazione di Torino, 15 settembre 1879, *Foro it.*, 1880, I, 235; Cassaz. Roma, 15 maggio 1882, *Legge*, 1882, II, 327 (sentenza già menzionata, ove si distingue la prelazione *legale* dalla *convenzionale*); Cassaz. Roma, 15 gennaio 1889, *Foro it.*, 1889, I, 381; Cassazione Firenze, 29 dicembre 1890, *Legge*, 1891, I, 547; Cassaz. Torino, 13 settembre 1906 cit.; e, inoltre, le sentenze della Cassaz. di Torino, 17 luglio 1894, 19 agosto 1896, 30 marzo 1897, *Giurispr. tor.*, 1894, 553; 1896, 620; 1897, 624, le quali, sebbene trattino piuttosto di casi di devoluzione *ipso jure* (per le cause di cui all'artic. 1565 Cod. civ.), offrono soluzione appropriata anche per il caso di prelazione convenzionale. Vedi, per la *giurisprudenza* contraria: App. Roma, 30 dicembre 1879, *Foro it.*, 1880, I, 172; id., 1 dicembre 1886, *Legge*, 1887, I, 544; Cassaz. Torino, 9 agosto 1899, *Giurispr. torin.*, 1899, 247; Appello Macerata, 14 febbraio 1905, *Foro it.*, 1905, I, 644: — e notisi che l'or fatta elencazione è solamente esemplificativa, nè può pretendere di esser completa, per il grande numero di decisioni in proposito.

" *trario*, e salve le originarie convenzioni di affrancamento o ri-
" scatto più favorevoli agli enfiteuti o debitori „. E l'art. 1564, ivi richiamato (che si riferisce all'enfiteusi), espressamente dice che: " l'enfiteuta *può sempre redimere* il fondo enfiteutico mediante il
" pagamento di un capitale in denaro corrispondente all'annuo
" canone sulla base dell'interesse legale, od al valore dello stesso
" canone se è in derrate, sulla base del prezzo medio di queste,
" negli ultimi dieci anni „.

Risulta indubbiamente dalla prima di queste norme di legge (art. 29 dispos. trans.) che fu per essa mantenuta forza ai precetti delle leggi *anteriori*, colle quali furono regolate le antiche enfiteusi (e quindi, *inclusivamente*, ai patti stipulati, come quello di prelazione, in conformità di tali leggi): ciò, più che altro, come semplice ripetizione e conferma, in termini espressi, del generale principio dell'*irretroattività* delle nuove leggi, già sancito dall'art. 2 delle disposizioni preliminari del Codice civile (1); — quale sola eccezione a questo principio ed all'applicazione delle precedenti leggi, fu data facoltà agli *enfiteuti* — col seguente art. 30 delle stesse disposizioni transitorie — di *redimere* o *affrancare* il fondo, giusta le norme dell'art. 1564 Cod. civ., *nonostante qualunque patto in contrario*. Ciò secondo i principî banditi, come si è visto, dal diritto rivoluzionario francese, al fine di distruggere i vincoli perpetui e feudali.

Si tratta però indubbiamente, riguardo a questo secondo precetto di legge, di una disposizione *eccezionale*, contraria al principio della *irretroattività della legge*, e che non è lecito estendere *oltre i casi e tempi in essa espressi*, nè ai *rapporti* ad essa estranei, mai non essendo, di regola, la legge retroattiva (2).

Ciò detto, si deve senz'altro aggiungere che il *diritto di prelazione* è figura giuridica ed attributo del contratto d'enfiteusi che non ha a vedere col diritto di *riscatto* o *affrancamento*. L'uno e l'altro si manifestano *in casi diversi* e per opera di *persone diverse*: il secondo è esercitato dall'enfiteuta contro il concedente ed ha per effetto di riunire nelle mani del-

(1) Cfr. pure la l. 7, C. *de leg. et const.*, I, 14.

(2) Cfr. artic. 4 disposiz. prelim., Cod. civ.; e F. S. Bianchi, *Corso di Cod. civ. ital. — Principii gener. delle leggi*, Torino 1888, p. 988-993.

l'enfiteuta il pieno dominio: il primo si esercita dal *direttario* per riprendere, a parità di condizioni, in confronto di un terzo, il fondo enfiteutico che l'enfiteuta vuole alienare. Di conseguenza l'*enfiteuta* è libero sempre, ove lo voglia, come correttamente si espresse la più volte ricordata sentenza 13 settembre 1906 della Cassazione di Torino, " di *redimere* il fondo proscioglien-" dolo da ogni vincolo enfiteutico e diventando così assoluto " proprietario, come è libero di disporne, cedendo ad altri i " propri diritti; ma ove ha stipulato il patto di prelazione, in " pari condizioni, *deve* preferire il direttario e preavvisarlo per " l'esercizio del diritto di prelazione ".

È perciò evidente come questi due diritti affatto non siano tra loro *incompatibili*, ed anzi, considerati dal punto di vista dello stesso enfiteuta, si esplichino in seguito a due processi od atti *volitivi* diversi (l'uno di acquistare la " *plena proprietas* " del fondo, l'altro di disfarsi di ogni diritto): — non è perciò possibile dire — come si suole dagli avversari dell'esposta tesi — che l'un diritto (e la relativa pattuizione di preferenza) sia *direttamente* ed anche solo *indirettamente* di ostacolo e *contrario* all'altro.

L'uno è invece dall'altro indipendente: e mentre la *prelazione* pattuita in un'enfiteusi antica è permessa dal mentovato art. 29, il *riscatto* è concesso dall'art. 30; così le due disposizioni si possono armonicamente interpretare, senza *estendere* la sfera d'applicazione della seconda, che è norma *eccezionale*, a *casi* ed a *rapporti*, ai quali non si può riferire.

Per sostenere che il diritto *convenzionale* di *prelazione* più o meno direttamente contraria ed ostacola il diritto di riscatto, si dice che ove si voglia ritenere (come noi crediamo), nel caso di alienazione fatta *irrequisito domino* e senza l'osservanza del patto di prelazione, la decadenza o risoluzione *ipso iure* dell'enfiteusi, e perciò la perdita della qualità di enfiteuta o della conseguente *possibilità di riscattare*, risulterebbe evidente il pregiudizio arrecato dal patto e diritto di prelazione alla facoltà del riscatto. Ma questo ragionamento, come è ordinariamente condotto, non regge.

Vero è che nel caso di prelazione *convenzionale*, espressamente pattuita, ci troviamo di fronte ad un *pactum adiectum* al contratto originario di enfiteusi, che, come i consimili *pacta pro-*

timiseos (1), *de retrovendendo* o *di riscatto* (2), e *de addictione in diem* (3) per la compra-vendita, si innesta al rapporto contrattuale principale ed assume di regola la figura di un'*espressa condizione risolutiva* del contratto principale, sempre quando non se ne osservi e rispetti il disposto (4). A questa interpretazione induce la natura stessa e il normale, esteriore modo

(1) L. 75 D. *de contr. emt.*, 18, I; L. 21 § 4 e 5 D. *de act. emti et vend.*, 19, 1.

(2) L. 12 D. *de O. V. A.*, 19, 5; L. 2 C. *de pact. inter emt. et vend.*, 4, 54.

(3) L. 1 e seg. D. *de in diem addict.*, 18, 2.

(4) La *condizione*, voluta dalle parti [o — come vedremo — stabilita dalla legge (*condicio juris*) nel caso di prelazione legale], e atta a risolvere il rapporto enfiteutico, si è così propriamente la violazione del *jus praelationis*, espressamente pattuito: e questa *condizione risolutiva espressa* deve qui operare, come ogni altra consimile condizione apposta ad un contratto.

Devesi qui notare che per l'enfiteusi, e in rapporto alla sua *estinzione*, per colpa dell'enfiteuta, ora si parla (specialmente in dottrina e in giurisprudenza) di *decadenza* o *caducità* del *jus emphyteuticum*, ora di *devoluzione*, ora di *risoluzione* (cfr. De Pirro, *op. cit.*, p. 482): termini tutti che possono avere la loro ragion d'essere, per la specialità del giuridico negozio; inquantochè la *decadenza* del diritto enfiteutico, che significa perdita e privazione del diritto stesso e del suo esercizio (cfr. sulla figura giuridica della *decadenza*, in generale, Modica, *Teoria della decadenza nel dir. civ. ital.*, Torino, 1906, *passim* e pag. 59 e seg.; e Chironi e Abello, *Tratt. di dir. civ. it.*, p. 690 e seg.) si verifica appunto a carico dell'enfiteuta, per l'impossibilità in cui questi si pone di potere ancor fruire ed esercitare il diritto enfiteutico, e la *devoluzione* denota il ritorno del fondo enfiteutico al concedente; ma l'effetto giuridico essenziale che si produce in ogni caso, per violazione degli obblighi di enfiteuta, è la *risoluzione* del contratto d'enfiteusi, in virtù della *condizione risolutiva espressa (facti* o *juris)*, apposta al negozio e che può verificarsi: quella ch'è *risoluzione* del negozio d'enfiteusi, in rapporto al negozio obbiettivo, produce poi *decadenza* de' diritti enfiteutici, in riguardo all'enfiteuta, e *devoluzione* del fondo in rapporto ed a favore del concedente. Se la legge positiva usa quest'ultimo termine per determinare più specialmente il caso di ritorno del pieno dominio del concedente, *ob canones non solutos* o per deterioramento o non miglioramento del fondo (art. 1565 Cod. civ.), ciò non vuol dire che in tal caso pur non abbiasi una *condizione* risolutiva dell'enfiteusi, e che ugualmente non si verifichi la risoluzione del contratto. Tant'è che noi applicheremo, per il caso di devoluzione vera e propria (secondo l'art. 1565 predetto) gli stessi principî, che per il caso di *jus praelationis*: perchè in ambo i casi si ha *decadenza, risoluzione* e *devoluzione* ad un tempo, a seconda del diverso punto di vista scelto per l'esame del rapporto. La *realità* dell'enfiteusi poi non esclude che la stessa

d'esplicazione di questo *pactum adiectum*, come anche riconosce la prevalente giurisprudenza (1). Vero è di conseguenza che *la c. risolutiva espressa* opera *ipso iure*, senza bisogno di costituzione in mora nè d'intimazione giudiziale (2); e, a tenor di legge, verificandosi, retroagisce e " rimette le cose nello stato in cui erano come se l'obbligazione non avesse mai avuto luogo „ (art. 1158 cap., e 1170 Cod. civ.). Di guisa che, nel caso di enfiteusi, questa *condizione risolutiva espressa* riporta necessariamente le parti al giorno in cui fu il contratto d'enfiteusi stipulato, nel senso di considerar questo *come se non fosse mai esistito*. Vero è infine che così, sciogliendosi *ipso jure* il con-

sorga e si estingua colle norme del *contratto*, tra cui quella della *condizione risolutiva tacita o espressa*.

A vero dire però una più semplificata terminologia si potrebbe forse usare, per evitare le confusioni e incertezze, in cui troppo sovente cade la patria giurisprudenza, nel determinare i vari giuridici rapporti sgorganti dall'istituto dell'enfiteusi.

(1) Cfr. da ultimo *App. Palermo*, 9 novembre 1906, *Circ. giurid.* 1906, 351, e la citata sentenza della Cassaz. di Torino 13 settembre 1906, ove la condizione risolutiva *espressa* e quella *tacita* sono correttamente distinte.

Per il De Pirro (*op. cit.*, n. 35 e seg.), in appoggio a teoriche del diritto comune (Corradini, *Tract. de jure praelat.*, quaestio V, n. I) non è la *condizione risolutiva espressa* del rapporto enfiteutico originario, che di regola qui si avvera, per l'alienazione *irrequisito domino* (mentre invece lo riconosce nel caso di *devoluzione*: *op. cit.*, n. 60), ma è lo stesso *dominio utile* ceduto che passa *ipso facto* e per tale causa nel *direttario*, invece che nel terzo, avverandosi così la confusione (cfr. analogicamente art. 664 Cod. civ.), nel primo, dei due *dominî* e la conseguente cessazione del rapporto enfiteutico: — ma questa tesi — se pur produttiva in fatto delle stesse conseguenze — giuridicamente non ci persuade, e perchè non conforme alle fonti romane (che volevano effettivamente la decadenza o *risoluzione* dell'enfiteusi originaria; " jure emphyteutico... cadat „: cost. 3 cit. in fine), e perchè non tale da spiegare in modo convincente, sotto l'aspetto legale, questa diretta *sostituzione giuridica* e *di fatto* del direttario al terzo acquirente nel dominio utile.

(2) Art. 1123 Cod. civ.; cfr. Cassaz. Torino, 27 novembre 1878, *Giurisprudenza torin.*, 1876, 316; *id.*, 22 aprile 1885, *Giurispr. tor.*, 1885, 480; *id.*, 1 giugno 1886, *Giurispr. torin.*, 1886, 549; Cassazione Napoli, 4 dicembre 1893, *Legge*, 1894, I, 627; Cassaz. Firenze, 22 maggio 1899, *Foro it.*, Rep. 1899, V. *Obblig.*, n. 421-45; Cassazione Firenze, 14 maggio 1900, *ibid.*, 1900, V. *Obblig.*, n. 55,: Cassaz. Palermo, 22 maggio 1900, *Foro it.*, Rep. 1900, V. *Obblig.*, n. 53; e inoltre Laurent, *Princip. de droit civil*, volume XVII, § 113 e seg.

tratto enfiteutico, cessa l'enfiteuta di aver tal veste e figura giuridica quando appunto cede, in spreto ai patti (*irrequisito domino*), il suo *jus emphyteuticum*, e come l'alienazione resta perciò nulla, così pure non può più lo *stesso* chiedere l'*affranco* o *riscatto*, di fronte al direttario che ha recuperato, *ipso jure*, il pieno dominio (come se non ne fosse mai stato privo), perchè *enfiteuta più non è*: e neppure lo può il nuovo acquisitore, *utendo juribus* del precedente enfiteuta, perchè questo *non poteva trasmettergli un diritto che più non aveva* (1).

Ma se così l'affrancamento resta impedito, ciò non avviene già per la presenza e per causa del patto e diritto di prelazione, perchè — già lo si è detto — l'affrancamento poteva *sempre* esercitarsi dall'enfiteuta, senza impedimento alcuno, ove lo si fosse preferito alla alienazione del fondo enfiteutico (ed anzi potevasi in tale guisa rendere inutile la stessa pattuita prelazione): — se ora più non lo si può dallo stesso esercitare, si è perchè cadde nel nulla l'enfiteusi e si è perduta la qualità di enfiteuta. E la si è perduta per violazione di obblighi contrattualmente assunti, che, com'eran rappresentati dal patto di prelazione, così potevano pur esserlo da altri patti, ma non inducono certo a raffigurare questo patto (come sarebbe pure di ogni altro) quale *causa efficiente* della risoluzione del contratto di enfiteusi: perchè — ripetesi — la stessa si produce non in conseguenza del patto, ma della sua *violazione*, che toccava unicamente all'enfiteuta di non commettere. E quindi in esso, esclusivamente in esso e nel suo agire, da ricercarsi la causa e l'origine del perduto diritto di affrancamento.

Questi perentori motivi — a cui altri ancor ne aggiunge la dottrina favorevole (2) — bastano per accertare la conser-

---

(1) Cfr. la perspicua motivazione della sentenza della *Cassazione di Palermo*, 9 marzo 1878, annotata dal Gabba in *Giurisprudenza italiana*, 1878, I, 1, 240.

(2) La tesi prevalente in dottrina e giurisprudenza per cui, anche trattandosi di antiche enfiteusi, l'alienazione del fondo libera l'enfiteuta da ogni obbligo (ed essenzialmente dalla prestazione del canone) verso il direttario, quantunque avvenuta *irrequisito domino* (cfr. da ultimo Cassaz. Torino, 30 dicembre 1905, *Giurispr. torin.*, 1906, p. 263, e specialmente l'elevato dibattito fra Gabba, Nota in *Foro it.*, 1887, 807 e 1888, 343, e Semeraro, *id.* in *Foro it.*, 1887, 819 e 1888, 381), è, secondo il nostro concetto sulla

vata efficacia del patto e conseguente diritto di prelazione, ed escludono, in caso di sua violazione, ogni possibilità di riscatto da parte dell'enfiteuta originario e successivo, che *in diritto* tali più non sono.

Si tratta, per le antiche enfiteusi, di un vero *diritto quesito*, sgorgante dal *pactum adiectum* al negozio fondamentale, permesso dall'antica come dalla legge attuale (art. 29 disp. trans. cit.) e non ostacolato da nessun disposto di legge (1).

Unicamente aggiungesi ancora, a pieno conforto della tesi qui dimostrata, il testuale riferimento del verbale N. 65 (seduta 30 settembre 1865) della *Commissione di coordinamento*, che, come già si è detto, introdusse nel nostro Codice civile e nelle disposizioni transitorie le norme riguardanti le enfiteusi (2): " L'au-" tore della proposta (Mancini) dichiara di non insistere sul-" l'abolizione dei *laudemi* stipulati prima dell'osservanza del " Codice. Appresso si discute se si abbiano da conservare i di-" ritti di *devoluzione* o di *preferenza* convenuti a vantaggio del " concedente, *sotto l'impero delle leggi anteriori*. Un commissario " (Bonacci) *propone di conservarli* e *perciò non se ne parlerebbe* " *nella legge transitoria*, bastando il dire che i contratti di en-" fiteusi *stipulati prima del Codice* sono regolati dalle *leggi ante-" riori*: queste leggi riconoscevano appunto tali diritti.

" La ragione poi di conservarli : *il rispetto ai patti e ai di-" ritti acquisiti*: la facilitazione che si dà indirettamente al " riscatto delle enfiteusi antiche, rispettando quei diritti. Ben " si osserva da taluno (Mancini), contro questa ragione, che, " stando alla legge economica, ogni prelazione è diminuzione di " concorrenza. La commissione però, alla maggioranza di sette " voti contro due, delibera che *quei diritti* di *devoluzione* o di " *preferenza siano conservati*, epperò non se ne farà parola nella " legge transitoria ".

---

condizione risolutiva espressa, facilmente spiegabile nel senso, che non è certo più tenuto l'enfiteuta verso il direttario per gli obblighi derivanti dall'enfiteusi, dopo di avere perduto il *jus emphyteuticum* e la qualità di enfiteuta all'atto stesso dell'alienazione fatta *irrequisito domino*. Da quel momento però spettano al direttario tutti i proventi del fondo enfiteutico.

(1) V. art. 30 disp. transit., e art. 1564 Cod. civ.

(2) V. la citata *Raccolta* del Gianzana, III, p. 583 e seg.

Niun dubbio quindi che quell'autorevole Commissione, investita di poteri legislativi (1), abbia voluto conservare in pieno vigore il patto di *prelazione* stipulato nelle antiche enfiteusi: il che prova ancora una volta che esso non poteva ostacolare l'affrancamento introdotto coll'art. 30 delle disposizioni transitorie.

Niun dubbio ancora che la stessa Commissione abbia ritenuto che per abolire il patto di prelazione occorreva un *espresso precetto* di legge, tantochè per la sua conservazione *bastava non farne parola nella legge transitoria*. L'interpretazione è su questo punto autentica, tronca di per sè la possibilità di ogni discussione e coincide perfettamente coll'opinione in proposito accolta dalla menzionata dottrina, che noi approviamo e seguiamo.

Anzi crediamo di aggiungere, in appoggio ai menzionati concetti, che non solo per le antiche enfiteusi, ma anche per quelle che fossero in oggi costituite, secondo le norme della legge civile, potrebbe essere il *jus praelationis* liberamente ed espressamente *pattuito* a favore del concedente, colle conseguenze di *risoluzione ipso jure* nel caso di sua inosservanza da parte dell'enfiteuta.

Se — come già s'è visto — le recenti leggi sull'enfiteusi del 1896, 1897, 1904 e 1906 obbligano l'enfiteuta ad ottenere il *consenso* del concedente in caso di alienazione del fondo enfiteutico (pur temporaneamente *vietata*) (2), a più forte ragione, per virtù del *contratto*, tale diritto di prestare il consenso ed anche quello di *preferenza* si può manifestare a favore del concedente.

b) Non riteniamo invece di poter approvare la forse prevalente giurisprudenza (3), quand'essa sostiene ed afferma non

---

(1) Brugi, *Istituz. di diritto civile*, p. 20 e seg.

(2) V. De Pirro, *op. cit.*, p. 468 e 473.

(3) Così: Cassaz. Napoli, 10 giugno 1893, *Foro it.*, 1893, I, 1276; Cassazione Palermo, 8 febbraio 1896, *Foro it.*, 1896, I, 416; Cassaz. Napoli, 14 maggio 1897, *Foro it.*, 1897, 913; App. Palermo, 27 giugno 1902, *Foro ital.*, Repert. 1902, v. *Enfiteusi*, n. 71-72; cfr. pure Cassazione Roma, 17 maggio 1882 già cit.; contra, nel senso da noi propugnato, Cassaz. Torino, 9 marzo 1878, *Giurispr. ital.*, 1878, I, I, 248; Cassaz. Napoli, 12 dicembre 1887, *Foro it.*, 1888, I, 472; Cassaz. Firenze, 29 dicembre 1890, *Legge*, 1891, I, 547; Cassaz. Napoli, 27 ottobre 1893, *Foro it.*, 1904, I, 94.

conservar più legale efficacia, per la legge attuale, il diritto di prelazione, stabilito non già con uno speciale patto, ma dalle stesse passate leggi (*prelazione legale*) a favore del direttario, nel caso di alienazione del *jus emphyteuticum*. Una tal legale prelazione infatti già attribuiva al concedente il diritto romano — come s'è visto —, il diritto intermedio, e poi, per l'Italia, i Codici del regno delle Due Sicilie, parmense ed estense, dell'epoca della restaurazione.

Ora il dire, come qui si fa, che — rispetto alle enfiteusi costituite sotto leggi, che *precettivamente* stabilivano il *jus praelationis* — non ci si trova di fronte ad un *diritto quesito*, ma ad una semplice *spes juris*, non più ammessa dalla legge attuale, è asserire cosa non vera, perchè invece le mentovate disposizioni transitorie e specialmente l'art. 29, hanno espressamente stabilito, come s'è visto, che *le enfiteusi costituite sotto le leggi anteriori sono regolate dalle leggi medesime*. Quindi la prelazione *legale* ancor può, anzi deve, per tale disposto di legge, sussistere: e la stessa Commissione legislativa di coordinamento ha ritenuto, come or s'è visto, di *mantenere* i *diritti* di *devoluzione* o di *preferenza*, senza distinguere se la loro origine fosse *contrattuale* o *legale*.

Che poi neppur la prelazione legale non si opponga al diritto di affrancamento e riscatto, è intuitivo, perchè la stessa opera e si attua come quella *convenzionale*, che all'affrancamento affatto non contrasta: lo stesso deve quindi dirsi per la prelazione legale.

Se non si è nella specie di fronte ad una *condizione risolutiva espressamente* pattuita, si è però di fronte — a parer nostro — ad una *condicio juris*, e cioè ad uno di quegli elementi e di quelle circostanze che la legge stessa nei vari casi espressamente stabilisce e determina, così per la vita ed efficacia (c. sospensiva) come per l'estinzione o risoluzione (c. risolutiva) d'un determinato negozio o rapporto giuridico (1). Tale era, per le or mentovate leggi, la vendita del fondo enfiteutico *irrequisito domino* e la conseguente violazione del *jus praelationis*,

(1) V. su queste *condiciones juris*, A. Scialoja, *Contributo alla teoria generale del negozio giurid.*, in *Studi di dir. privato*, Roma, 1906, p. 3 e seg. e bibliogr. cit.

che, verificandosi, portava *ipso jure* alla risoluzione dello stesso rapporto enfiteutico originario.

E poichè le *condiciones juris*, secondo l'attuale dottrina (1), sebbene distinte dalle condizioni vere e proprie, ne seguono per regola le *norme* e la *regolamentazione giuridica*, e possono essere, come quelle, così sospensive come risolutive di un determinato rapporto giuridico, e parimenti operano, salvo eccezioni, *ipso jure*, come ogni condizione vera ed *espressa*, così ancor qui la *condicio juris*, apposta dalla legge al contratto di enfiteusi, sotto forma risolutiva, per il caso di violazione del *jus praelationis*, deve operare *ipso jure* [con retroazione al giorno in cui fu contratta l'enfiteusi (2)], nell'atto in cui si effettua la vendita del fondo enfiteutico *irrequisito domino:* e allora più non si può, nè dall'enfiteuta nè dal terzo cessionario del fondo enfiteutico, richiedere, *ad alienazione compiuta*, l'affrancamento o riscatto del fondo stesso (che supporrebbe ancora in vita l'enfiteusi), perchè il contratto stesso d'enfiteusi è già definitivamente caduto nel nulla.

IV. — Brevissime parole, ancora, sul diritto alla *devoluzione* del fondo enfiteutico, spettante al direttario, posto anche questo in confronto e contrasto col diritto d'*affrancamento* o *riscatto* che spetta all'utilista.

Sebbene la giurisprudenza talora confonda questo diritto alla devoluzione colla *risoluzione* del negozio enfiteutico per il caso or visto di alienazione del fondo enfiteutico *irrequisito domino*, e in spreto al diritto di prelazione [senza vero torto, come s'è visto (3)], esso invece più propriamente si attua, secondo l'attuale legge civile, come diritto attribuito al concedente, quando per parte dell'enfiteuta si viene meno agli obblighi derivanti dalla *natura* stessa del rapporto enfiteutico, ed essenzialmente all'obbligo di pagare l'annuo canone, come pure a quello di non deteriorare il fondo, anzi di migliorarlo (art. 1565 Cod. civ.), e significa e porta con sè il potere spettante al concedente di vedere risolto anche qui, per tali cause, il contratto enfiteutico e di riunire in sè il pieno dominio.

(1) Cfr. A. Scialoja, *Monogr. cit.*; e art. 1157 e seg. Cod. civ.

(2) Arg. art. 1170 Cod. civ.

(3) V. la nota 4ª a pag. 281; cfr. pure Perna, *op. cit.*, n. 377.

Ora, mentre, secondo il diritto attuale (1), la *devoluzione* del fondo enfiteutico non si verifica *ipso jure*, in conseguenza delle ineffettuate obbligazioni, — inquantochè, anche dopo che essa fu giudizialmente chiesta dal direttario, può esser vinta da una successiva domanda d'affrancamento da parte dell'utilista — per il passato diritto, e così specialmente per il diritto romano (2), essa operava *ipso jure*, ed in ogni caso solevasi in tal senso e con tale *immediato effetto* frequentemente pattuirla nelle passate enfiteusi (3).

Di qui è venuta la questione se tale forma di esplicazione del diritto di devoluzione, che necessariamente porta con sè l'impossibilità di un successivo esercizio del diritto di affrancamento da parte dell'enfiteuta (che tale più non sarebbe), possa ancor oggi serbar efficacia, o se invece sempre sia in facoltà di quest'ultimo, anche per le antiche enfiteusi in siffatti termini stipulate, il richiedere, fino a sentenza definitiva passata in giudicato, di poter *redimere* il fondo enfiteutico.

La dottrina e la giurisprudenza sono prevalenti in quest'ultimo senso (4), che noi contrastiamo, intendendo doversi applicare pur qui i concetti già esposti per il *jus praelationis*.

---

(1) Art. 1565 Cod. civ. cit. — Cfr. De Pirro, *op. cit.*, n. 36 e 60.

(2) " *Suo jure... cadat* „ Costitut. 2, in fine, *de jure emphyt.* cit.

(3) È da notarsi però che per taluni paesi (es. Francia), durante il diritto intermedio, la *devoluzione ipso jure* per inadempimento degli obblighi enfiteutici (come anche la risoluzione *ipso jure* del rapporto enfiteutico, per violazione del *jus praelationis*), venne ad essere meno rigidamente applicata, che non nel diritto romano (cfr. Laurent, *Princip.* cit., VIII, n. 396). Essa, se anche espressamente stipulata, fu ritenuta soltanto *comminatoria*, e non senz'altro operativa *ipso jure*. Si tratta però di limitate eccezioni al diritto romano, che non ebbero esteso campo di applicazione e non influirono efficacemente sui principî riflettenti la *risoluzione e devoluzione ipso jure*, esposti nel testo.

(4) V. per la dottrina, De Pirro, *op. cit.*, n. 60 e seg., e aut. cit.; Maroni, Nota in *Foro it.*, 1897, 170; e (contra, nel senso qui propugnato) Gabba, Nota in *Foro it.*, 1881, 559. V. per la giurisprudenza App. Milano, 2 dicembre 1896, *Foro it.*, 1897, I, 170; Cassaz. Torino, 21 novembre 1897, *Giurispr. tor.*, 1510; Cassaz. Torino, 1902, *Giurispr. tor.*, 1902, 1081; Appello Casale, 29 dicembre 1904, *Giurispr. tor.*, 1905, 409; contra, Cassazione Torino, 17 luglio 1894, *Giurispr. tor.* 1894, 553; *id.*, 19 agosto 1896, *Giurispr. tor.*, 1896, 620; *id.*, 10 marzo 1897, *Giurispr. tor.*, 1897, 624. Cfr. pure la copiosa giurisprudenza raccolta da De Pirro, *op. cit.*, p. 113, in nota.

Basti ricordare ancor qui, per l'ultima volta, le disposizioni transitorie, ed essenzialmente l'art. 29, in cui è detto che la *legge anteriore*, sotto il cui impero fu costituita l'enfiteusi (e i patti relativi), è la sola applicabile.

Vero è che il diritto attuale, assai favorevole all'affrancamento dei fondi enfiteutici, ha modificato e mitigato il precedente diritto di *devoluzione ipso jure*, che operava perciò quale *condizione risolutiva espressa*, facendo allo stesso assumere piuttosto la forma d'una *condizione risolutiva tacita*, che non si attua *ipso jure*, e quindi non solo abbisogna della giudiziale sua *dichiarazione* per mezzo di sentenza, ma può pur essere nei suoi effetti procrastinata, stabilendo, di conseguenza, che l'affrancamento possa richiedersi ed effettuarsi anche dopo instata dal concedente la devoluzione (arg. art. 1565): ma ciò ha stabilito in via semplicemente *dispositiva*, ove sia muta la volontà delle parti al riguardo, e senza dare ad un tale disposto carattere *precettivo* o *imperativo* (1): tantochè il diritto civile nostro non ha richiamato l'art. 1565 (ma solo il 1564), nè nelle disposizioni transitorie (art. 30), nè all'art. 1557, pel quale si lascia alle parti di regolare *convenzionalmente* il rapporto enfiteutico, salva l'*obbligatoria* osservanza di alcuni disposti di legge, tra i quali non sono appunto comprese le disposizioni di cui all'art. 1565.

Di conseguenza anche oggi le stesse parti possono, a parer nostro, *convenzionalmente* pattuire la devoluzione *ipso jure* —: e tanto più lo potevano precedentemente, sia in virtù delle leggi anteriormente in vigore ed ancor oggi applicabili, sia in conseguenza di pattuizioni *espressamente* stipulate. Ma verificandosi questa *condizione risolutiva espressa* [sia *juris*, sia vera e propria o *convenzionale* (2)], la stessa deve come tale operare e riportarsi al punto iniziale della costituita enfiteusi, ritenendola come non mai effettuata — secondochè già s'è visto per la prelazione —; ed è impossibile in tale caso ammettere una domanda d'affrancamento o riscatto, dopochè si sono verificate inadempienze tali da indurre *ipso jure* la devoluzione, anche se non si

(1) Cfr. De Pirro, *op.* e *loc. cit.* Sul diritto imperativo (*cogens*) e dispositivo (*zwingendes und nachgiebiges Recht*), v. in generale Windscheid, *Pandekt.* cit., I, § 30.

(2) Cfr. De Pirro, *op. cit.*, n. 60.

e ancor fatto luogo alla domanda giudiziale in proposito. La stessa sentenza del magistrato, ove sia sollecitata, non fa in tal caso (com'è del resto sua natura) che *dichiarare* la *devoluzione ipso jure* verificatasi anteriormente (1); e così ogni istanza di riscatto avvenuta dopo la causa determinatrice della devoluzione, e quindi dopo la devoluzione stessa, è inefficace (anche se prima della *dichiarazione giudiziale* di quest'ultima), perchè fatta da chi non rivestiva più figura e qualità di enfiteuta.

---

(1) Che la sentenza sia essenzialmente *dichiarativa* del diritto che le preesiste, insegna la prevalente dottrina: cfr. Fadda, Nota in *Foro ital.*, 1898, I, 1282 e seg.; Chiovenda, *L'az. nel sistema del diritto*, in *Saggi di dir. proces. civile*, Bologna 1903, p. 97, nota 75; Diana, *La giurisdiz. volontaria*, Città di Castello, 1904, p. 66 e seg. Cfr. pure, in generale, Rocco, *La sentenza civile*, Torino 1906, *passim* e p. 132 e seg.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo delle LL. MM. e RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Dicembre 1907.

PRESIEDE IL SOCIO PROFESSOR GIORGIO SPEZIA
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera e Camerano Segretario.

Scusano la loro assenza il Presidente Senatore Enrico D'Ovidio e i Soci Naccari e Segre.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio Mattirolo fa omaggio alla Classe delle seguenti sue pubblicazioni: 1° *Francesco Ferrero*, Commemorazione; 2° *Seconda contribuzione allo studio della flora ipogea del Portogallo.*

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° Dal Presidente a nome dei Soci Segre e Bianchi: *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili* del Dott. Eugenio Elia Levi;

Dott. G. Ponzio, *Azione dei sali di diazonio sul fenildinitrometano*, dal Socio Fileti.

Il Socio Jadanza, a nome anche del Socio Naccari, legge la relazione sul lavoro del Dott. Boddaert, intitolato: *Misure magnetiche dei dintorni di Torino.* La relazione favorevole è approvata all'unanimità e la Memoria con votazione segreta viene dalla Classe approvata per la stampa nei volumi delle Memorie accademiche.

LETTURE

Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili.

Nota del Dott. EUGENIO ELIA LEVI, a Pisa.

1. — Due superficie S ed S' diconsi *isometriche* quando i loro punti si possono porre in corrispondenza biunivoca per modo che i loro elementi lineari risultino eguali: diconsi *applicabili* l'una sull'altra quando, immaginate le superficie come veli perfettamente flessibili ed inestendibili, si può flettere senza rottura nè duplicatura l'una di esse per modo che si distenda sull'altra [1]. Due superficie applicabili sono isometriche; ma affinchè si possa asserire che due date superficie S ed S' isometriche sono applicabili, occorre mostrare che si può trovare una successione continua di superficie isometriche le quali possano considerarsi come gli stati intermedi della superficie S, che, deformandosi e flettendosi, dalla sua forma primitiva viene a distendersi sulla superficie S'. Io mi propongo di studiare quando due superficie isometriche sono applicabili; e dimostrerò che:

Due superficie isometriche a curvatura nulla o negativa sono sempre applicabili l'una sull'altra; *mentre di due superficie isometriche a curvatura positiva si può sempre distendere una superficie sull'altra oppure sulla simmetrica di questa; e la corrispondenza*

---

[1] Questa distinzione fu introdotta dal Voss nei suoi lavori, e più recentemente riprodotta nell'art. *Abbildung und Abwickelung zweier Flächen auf einander* dell' " Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften „, Bd. III, D. 6, a., n. 2, pag. 362-363.

di simmetria fra due superficie a curvatura positiva non è mai un'applicabilità [1].

Trascurerò d'ora in poi il caso delle superficie a curvatura nulla che è di immediata evidenza. — Pel caso delle superficie a curvatura positiva mi limiterò al caso analitico; mentre tratterò il caso più generale per le superficie a curvatura negativa. Mi piace però osservare che per i noti teoremi sul carattere analitico delle soluzioni delle equazioni di tipo ellittico di secondo ordine, l'ipotesi che la superficie a curvatura positiva sia analitica equivale solo al supporre che i coefficienti $E(uv)$, $F(uv)$, $G(uv)$ dell'elemento lineare siano funzioni analitiche di una coppia conveniente di variabili u e v: poichè, ammesso ciò, ed ammesso che le coordinate x, y, z del punto della superficie, abbiano, considerate come funzioni di u, v, le derivate dei primi tre ordini finite e continue, segue di necessità che la superficie è analitica [2].

Noterò ancora che le considerazioni che seguono valgono non solo se la superficie è immersa nello spazio euclideo; ma anche se si immagina la superficie immersa in uno spazio a curvatura costante K_0: basterà in tutto quanto segue sostituire alla curvatura assoluta K della superficie la curvatura relativa

$$k = K - K_0.$$

Ciò risulta evidente quando si osservi che mediante questa sostituzione si passa dalle equazioni di Gauss e di Codazzi relative ad una superficie immersa in uno spazio euclideo alle analoghe relative ad una superficie immersa in uno spazio di di curvatura K_0 [3]: e che d'altra parte il nostro problema equivale a studiare quando avviene che i sistemi di funzioni D, D', D'', coefficienti della seconda forma fondamentale, che soddisfano alle equazioni di Gauss e di Codazzi, formano un insieme continuo.

---

[1] Tale questione mi fu proposta dal Chiar.^{mo} Prof. Bianchi; di ciò e degli utili consigli che mi diede mi sia concesso di ringraziarlo vivamente.

[2] Cfr. Bernstein S., *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre.* " Math. Ann. „ Bd. 59, 1904, pag. 20-83. Vedi anche dello stesso A.: *Sur la déformation des surfaces.* " Math. Ann. „ Bd. 60, pag. 137 (1905).

[3] Cfr. Bianchi, *Lezioni*, vol. I, § 213, pag. 492, formula (VII*) ed (VIII).

Le superficie a curvatura positiva [1].

2. — Per trattare il problema nel caso delle superficie a curvatura positiva penseremo le superficie di dato elemento lineare individuate coll'assegnare la forma di una loro curva prefissata, ad es.: della $v = 0$. Riassumerò brevemente i risultati noti relativi al problema di determinare una superficie con assegnata deformata di una curva, cercando di porre in rilievo le osservazioni che più ci interessano, rimandando per il resto alla trattazione del problema che si trova nelle *Lezioni* del Bianchi [2]. Seguo completamente le notazioni del Bianchi.

Si supponga la superficie riferita ad un sistema ortogonale (u, v) e che il parametro u misuri l'arco sulla linea $v = 0$ di cui vogliamo assegnare la deformata. Chiamerò Γ questa linea $v = 0$: e supporrò per fissare le idee che la sua curvatura geodetica ρ_v sia < 0.

La deformata C della curva Γ sia assegnata ad esempio mediante le sue equazioni intrinseche

$$\rho = f(u), \quad T = \varphi(u); \tag{1}$$

saranno $f(u)$ e $\varphi(u)$ funzioni analitiche regolari in un certo campo della variabile u. Indichiamo come al solito con α, β, γ; ξ, η, ζ; λ, μ, ν i coseni di direzione della tangente, della normale e della binormale di C. Indichi σ l'angolo di cui deve rotare nel verso positivo la normale alla superficie per portarsi sulla normale alla curva: dovrà essere

$$\operatorname{sen} \sigma = -\frac{\rho}{\rho_v}; \tag{2}$$

e questa equazione, per l'ipotesi fatta che $\rho_v < 0$, ci dà due valori supplementari di σ, l'uno compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, l'altro compreso fra

---

[1] Per quanto nel presente numero e nel successivo si abbia in vista le superficie a curvatura positiva, tuttavia la maggior parte dei ragionamenti, ed in ispecie quelli del n. 2, valgono pure per le superficie a curvatura negativa.

[2] Bianchi, *Lezioni*, vol. I, § 111-112, pag. 244-249.

$\frac{\pi}{2}$ e π. Si fissi per σ una di queste due soluzioni di (2): per ottenere la superficie basterà integrare l'equazione

$$\Delta_{22}\, \delta = (1 - \Delta_1\, \delta)\, K\,, \tag{3}$$

prendendo per δ successivamente le coordinate $x(u\,v)$, $y(u\,v)$, $z(u\,v)$ incognite della superficie; colla condizione che per $v = 0$ soddisfino rispettivamente alle uguaglianze

$$x(uv) = x(u)\,, \frac{\partial x}{\partial u} = \alpha\,, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\xi}{\rho}\,, \frac{\partial x}{\partial v} = -\sqrt{G}\,(\xi \operatorname{sen}\sigma + \lambda \cos\sigma), \tag{4}$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\frac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{G}\,(\xi \operatorname{sen}\sigma + \lambda\cos\sigma)\right],$$

e alle analoghe per y e per z.

Giova notare che basterà ottenere integrando (3) una sola delle tre funzioni incognite x, y, z; le altre si avranno poi per quadrature.

Questa osservazione ci permette di affermare col Bianchi che fin quando è $\sigma \neq \frac{\pi}{2}$ è sempre possibile risolvere una delle equazioni (3) coi dati iniziali (4): anzi si può senz'altro affermare di più che, se le funzioni analitiche $f(u)$, $\varphi(u)$ variano, rimanendo però inferiori ad un numero finito M e tali che il loro raggio di convergenza non scenda mai al disotto di un certo numero r, e che la funzione σ soluzione di (2) differisca sempre da $\frac{\pi}{2}$ di più di un certo numero ϵ, le superficie S, che si ottengono nel modo detto sopra corrispondentemente alle varie determinazioni di $f(u)$ e $\varphi(u)$, esistono *tutte* in un certo campo comune di valori per u e v. Ed al variare continuo di $f(u)$ e $\varphi(u)$, purchè si scelga con continuità la determinazione di $\sigma(u)$, varieranno anche con continuità le superficie S che si ottengono.

Noteremo infine che per quanto precede la superficie corrispondente ad una determinazione di σ è unica: e che la determinazione precedente dà effettivamente una superficie che soddisfa alle condizioni del problema.

3. — Premesso ciò, incominciamo coll'osservare che se una superficie è a curvatura positiva non si potrà mai passare con

continuità da una superficie in cui ad un determinato punto O di Γ corrisponda un valore di σ compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ ad una per cui al punto medesimo corrisponda un valore di σ fra $\frac{\pi}{2}$ e π. Ed invero se tale passaggio fosse possibile esisterebbe una deformata S' della superficie, tale che per essa il valore corrispondente di σ in O è $\frac{\pi}{2}$: allora la curva C che su S rappresenta Γ avrebbe in O il piano osculatore tangente alla superficie: il che è impossibile se la superficie è a curvatura positiva.

Dunque intanto possiamo affermare che le superficie a curvatura positiva di dato elemento lineare si dividono in due classi tali che da una superficie di una classe non si può passare con continuità alle superficie dell'altra: e sappiamo che per riconoscere se una superficie appartiene all'una od all'altra classe basta vedere se, preso un punto O su Γ, il corrispondente valore di σ è compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ o fra $\frac{\pi}{2}$ e π. Applichiamo questo criterio a due superficie simmetriche rispetto a un punto dello spazio: se osserviamo che, assumendo come positivi su curve simmetriche versi corrispondentisi, le direzioni positive delle normali alle superficie in due punti simmetrici sono concordanti, mentre le direzioni positive delle normali principali di due curve simmetriche sono opposte; concludiamo che di due superficie simmetriche l'una appartiene all'una classe e l'altra all'altra [1].

Cosicchè, per dimostrare il nostro asserto occorre solo mostrare che si può passare con continuità da una ad un' altra qualunque superficie della medesima classe. Ora ciò risulta dalle osservazioni fatte in fine al n. precedente: poichè, siano S ed S' due superficie date, C e C' le curve deformate di Γ su

[1] Che del resto due superficie simmetriche a curvatura positiva non siano applicabili risulta anche dalle considerazioni seguenti. Presa una superficie a curvatura positiva, dicasi faccia positiva della superficie quella rivolta verso i centri di curvatura; in altri termini dicasi positiva la faccia concava della superficie. Si potrà allora definire il giro positivo sulla superficie. Ora è ben chiaro che deformando con continuità la superficie, il giro positivo rimane sempre positivo, mentre si scambia col negativo per una simmetria. Onde l'asserita impossibilità di applicare una superficie sulla simmetrica.

S e S', $\sigma(u)$, $\sigma'(u)$ i valori di σ relativi a C e C' e si supponga $0 \leq \sigma \leq \sigma_0 < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \sigma' \leq \sigma_0 < \frac{\pi}{2}$. Noi potremo evidentemente costruire una successione di curve analitiche C_1 riferite fra di loro per uguaglianza di archi che permetta di passare con continuità da C a C' per modo che il valore ρ_1 della prima curvatura in un punto qualunque di C_1 sia sempre compreso fra i valori ρ e ρ' della prima curvatura nei punti corrispondenti di C e C'. Per tali curve si avrà che l'angolo σ_1 (il quale è definito da (2)) soddisfa esso pure alla limitazione $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_0 < \frac{\pi}{2}$; e quindi le superficie S_1, isometriche con S ed S', su cui C_1 è la deformata di Γ, esistono tutte in un certo campo di valori per u e v, e dànno una successione di superficie che ci permettono di passare con continuità da S ad S'.

Le superficie a curvatura negativa.

4. — Nel caso delle superficie a curvatura negativa valgono i ragionamenti fatti sopra circa alla determinazione della superficie con assegnata deformata di una curva [1]: ma non è più legittima la distinzione in due classi delle superficie deformate di una data; poichè è bensì vero che il metodo precedente non ci permette più di determinare la superficie quando in qualche punto di C sia $\sigma = \frac{\pi}{2}$ (e cioè la curva assegnata debba essere tangente ad una asintotica della superficie), ma non possiamo più assicurare che tale superficie non esista.

Riprenderemo perciò la questione dal principio, fondandoci ora sulla determinazione della superficie mediante due sue asintotiche, quale è stata trattata dal Bianchi in una nota portante lo stesso titolo della presente mia, e pubblicata negli Atti di questa Accademia [2]. Otterremo così anche il vantaggio di libe-

---

[1] Tenendo conto dei risultati della mia Nota *Sul problema di Cauchy per le equazioni a caratteristiche reali e distinte* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 2 marzo 1908), questa determinazione è in questo caso indipendente dall'ipotesi dell'analiticità.

[2] Cfr. Bianchi, *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili*. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1904-1905, vol. XL.

rarci dell'ipotesi della natura analitica della superficie che abbiamo dovuto fare fin qui.

Dato l'elemento lineare di una superficie a curvatura negativa

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{5}$$

diconsi *asintotiche virtuali* dell'elemento lineare quei sistemi di linee $(\alpha\,\beta)$ che per una conveniente tra le superficie isometriche di elemento lineare (5) sono linee asintotiche. Dato un sistema di asintotiche virtuali $(\alpha\,\beta)$ la superficie che le ammette quali asintotiche effettive è determinata a meno di movimenti e di simmetrie, poichè se l' elemento lineare (5) riferito alle $(\alpha\,\beta)$ prende la forma

$$ds^2 = E_1\,d\alpha^2 + 2F_1\,d\alpha\,d\beta + G_1\,d\beta^2, \tag{6}$$

la seconda forma fondamentale della superficie è data da

$$\pm\frac{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}{\rho}\,d\alpha\,d\beta, \tag{7}$$

dove ρ è determinato dalla

$$K = -\frac{1}{\rho^2}. \tag{8}$$

Fissato un punto O e le due asintotiche α e β uscenti da esso, per riconoscere se due superficie che ammettano il doppio sistema di caratteristiche $(\alpha\,\beta)$ sono uguali o simmetriche, basta vedere se nelle due superficie la linea α (oppure la linea β) ha la stessa torsione oppure torsione opposta: in altri termini, se procedendo lungo la linea α (o lungo la linea β) si veggono i piani tangenti alle due superficie rotare nello stesso verso oppure in verso opposto [1]. Il teorema di Enneper ci assicura che il criterio è indipendente dal considerare le due linee α oppure le due linee β.

Se le linee $(\alpha\,\beta)$ sono asintotiche virtuali per l'elemento

---

[1] In questa seconda forma il criterio vale anche quando l'asintotica α (o β) è una geodetica di (5), e quindi è una retta.

lineare (5), le u, v, considerate come funzioni di α e β, soddisfano alle equazioni (*di Darboux*)

$$(9)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} &= \left[\frac{\partial \log \rho}{\partial u} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial \log\rho}{\partial v} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \right.\\ &\qquad\left. + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right] - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} &= -\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial\log\rho}{\partial u} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right]\left[\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right] + \\ &\qquad + \left[\frac{\partial\log\rho}{\partial v} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}.\end{aligned}\right.$$

Ed inversamente, se si ha una coppia di funzioni *indipendenti* $u(\alpha\beta)$, $v(\alpha\beta)$, soluzioni di (9), il doppio sistema di linee $(\alpha\beta)$ è per l'elemento lineare (5) un sistema di asintotiche virtuali.

Come ha osservato il prof. Bianchi, al sistema (9) si può applicare il metodo delle successive approssimazioni del Picard. Precisando: si supponga che quando u e v variano in un certo campo Δ, ad es., quando $|u| < a$, $|v| < a$ le funzioni E, F, G e le loro derivate dei primi quattro ordini rimangono continue e inferiori in valore assoluto ad M: e sia M_1 il massimo valore dei secondi membri di (9) quando (uv) è in Δ e $\frac{\partial u}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial\beta}$, $\frac{\partial v}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial v}{\partial\beta}$ restano in valore assoluto inferiori a b. Si prendano due curve Γ e Γ_1 arbitrarie, ma non tangenti, uscenti dal punto $u = v = 0$ come curve $\alpha = 0$ e $\beta = 0$: e per fissare le idee, misurino α e β gli archi di Γ e Γ' a partire da $u = v = 0$: siano esse

$$(10)\left\{\begin{array}{lll}(\Gamma) & u(\alpha, 0) = f(\alpha) & v(\alpha, 0) = \varphi(\alpha)\\ (\Gamma_1) & u(0, \beta) = f_1(\beta) & v(0, \beta) = \varphi_1(\beta)\end{array}\right.$$

E si supponga che le derivate prime di $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $f_1(\beta)$, $\varphi_1(\beta)$ esistano e siano inferiori a b in valore assoluto finchè $|\alpha| < g$, $|\beta| < g$.

Se si indica con ρ il minore dei numeri g, $\sqrt{\frac{a}{M_1}}$, $\frac{b}{M_1}$, il metodo delle approssimazioni successive ci permette di affermare che esiste una coppia di funzioni $u(\alpha\beta)$, $v(\alpha\beta)$ le quali nel campo definito da $|\alpha| < \rho$, $|\beta| < \rho$ danno punti (uv) appartenenti a Δ,

ammettono derivate prime finite e continue ed inferiori in modulo a b, ammettono le due derivate miste anche esse continue ed inferiori in valore assoluto a M_1, soddisfano a (9) ed hanno i valori iniziali (10).

Ed il metodo delle approssimazioni successive ci permette [1] inoltre di affermare che la soluzione $u(\alpha\beta)$, $v(\alpha\beta)$ trovata è la sola soluzione di (9) la quale soddisfaccia alle condizioni iniziali (10). Infine si osservi che se θ è l'angolo delle curve Γ e Γ_1 nel punto $\alpha = \beta = 0$ si avrà

$$\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)} = \begin{vmatrix} f'(0) & \varphi'(0) \\ f'_1(0) & \varphi'_1(0) \end{vmatrix} = \operatorname{sen} \theta \neq 0,$$

e quindi in un campo conveniente le due funzioni u v sono effettivamente indipendenti e ci determinano un doppio sistema di asintotiche cui appartengono le curve iniziali Γ e Γ_1: e che questo sistema è unico. Possiamo dunque dire: assegnate due curve arbitrarie a tangenti distinte, esiste sempre ed è determinata a meno di un movimento o di una simmetria una superficie deformata della data che ammette quelle curve come asintotiche [2]: ed anzi si ha di più che la superficie è determinata a meno di un movimento se si assegna in un punto arbitrario di una di queste asintotiche il segno della torsione.

5. — La proposizione precedente ci suggerisce immediatamente la via che seguiremo nel dimostrare il nostro teorema: prese due superficie isometriche S ed S' si considerino le coppie di asintotiche Γ e Γ_1, Γ' e Γ'_1 di S ed S' uscenti da due punti corrispondenti e si determini una successione di coppie di curve $\bar{\Gamma}$ e $\bar{\Gamma}_1$ non mai tangenti e tali che permettano di passare con continuità dalla coppia Γ, Γ_1 alla coppia Γ', Γ'_1: la successione delle superficie $\bar{S}$ corrispondenti permetterà di passare con continuità da S ad S' oppure alla sua simmetrica.

(1) Seguendo un ragionamento analogo a quello con cui si dimostra l'unicità delle soluzioni delle equazioni a derivate ordinarie. Cfr. Goursat, *Cours d'Analyse*, vol. II, pag. 372.

(2) Questa osservazione ci permette di enunciare i teoremi *B*) *C*) della nota del Bianchi togliendo l'ipotesi di essere nel caso analitico.

Però l'ultima parte del ragionamento del n. precedente ci dice soltanto che $\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}$ è diverso da zero in un *conveniente* campo di variabilità per u, v o per α, β; perchè le conclusioni che vogliamo trarre siano legittime occorre dimostrare che esiste un campo in cui *tutte* le $\overline{S}$ esistono: occorre cioè trovare un campo nelle variabili $u\,v$, in cui certamente sia sempre $\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)} = 0$.

Supponiamo perciò che le funzioni $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $f_1(\beta)$, $\varphi_1(\beta)$ abbiano derivate seconde finite e che il numero b definito al n. 4 sia anche maggiore di tutte queste derivate. In questa ipotesi ricordando che già si suppose che le derivate quarte di E, F, G esistano e siano minori di M, esisteranno pure nel campo $|\alpha| < \rho$, $|\beta| < \rho$ tutte le derivate seconde di u, v, e saranno inferiori ad un numero N dipendente solo da b e da M.

Quindi si potrà ancora trovare un numero N_1 dipendente solo da b e da M e maggiore numericamente delle funzioni $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}\right)$, $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}\right)$; quindi se supponiamo $\left|\left(\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}\right)_{\alpha=\beta=o}\right| = |\operatorname{sen}\theta| > \mu$, fissato un numero arbitrario $\epsilon < \mu$, potremo trovare un numero $\rho_1 < \rho$ tanto piccolo che per $|\alpha| < \rho_1$, $|\beta| < \rho_1$ l'oscillazione di $\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}$, la quale è $\leq 2N_1\rho_1$, sia minore di $\mu - \epsilon$, e quindi tale che in tutto questo campo risulti $\left|\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}\right| > \epsilon$ in valore assoluto. ρ_1 dipende solo da ϵ, μ, b, M.

Si noti infine che il campo $|\alpha| < \rho_1$, $|\beta| < \rho_1$ ha per immagine in $(u\,v)$ un campo Σ variabile a seconda delle curve iniziali (10), ma contenente sempre nell'interno il campo in cui $|u| < \frac{\epsilon\rho_1}{b}$, $|v| < \frac{\epsilon\rho_1}{b}$, poichè si ha

$$\left|\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial v}{\partial \beta}\,\frac{1}{\frac{\partial (uv)}{\partial (\alpha\beta)}}\right| < \frac{b}{\epsilon}, \quad \left|\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right| = \ldots, \ldots$$

Rimane quindi totalmente eliminata l'obbiezione posta innanzi più sopra; basterà supporre che la successione delle curve $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Gamma}_1$ sia tale che l'angolo acuto che esse fanno non scenda mai al disotto del minore degli angoli di Γ, Γ_1 e di Γ', Γ'_1 perchè si abbia una effettiva successione di superficie che permettano di passare con continuità da S ad S' od alla sua simmetrica.

E possiamo dire di più che noi passeremo da S proprio alla superficie S' se Γ e Γ' hanno torsione di ugual segno, alla sua simmetrica nel caso opposto. Ma la denominazione delle curve Γ' e Γ'_1 è affatto arbitraria, e le due curve Γ' e Γ'_1 hanno torsioni uguali ed opposte; quindi noi potremo sempre chiamare Γ' la curva che ha su S' torsione dello stesso segno di Γ; ed allora il procedimento precedente ci permette di distendere S proprio sulla superficie S'.

Si può notare che, mentre quando ci si contenti di deformare S in S' o nella simmetrica di S' si può ottenere lo scopo mantenendo rigida prima una asintotica e poi l'altra, ciò non si può fare sempre nel caso in cui si voglia applicare proprio S su S'.

6. — Darò qui un esempio molto semplice di deformazione di una superficie a curvatura negativa nella simmetrica. Si immagini una superficie pseudosferica S che in un punto A abbia come asintotiche due rette fra loro ortogonali.

Una tale superficie è congrua colla superficie simmetrica rispetto al piano tangente in A: essa si porta sulla simmetrica facendola rotare di un angolo retto attorno alla normale comune in A: però la corrispondenza tra i punti di S e della superficie simmetrica che è determinata da questa congruenza non è la medesima corrispondenza che quella determinata dalla simmetria. Ma una semplicissima modificazione del procedimento precedente ci permette di generare una successione di deformate che porti la superficie S sulla simmetrica realizzando la corrispondenza fra punti data dalla simmetria. Basterà considerare invero la successione di superficie che si ottengono da S facendo prima rotare S nello spazio attorno alla normale in A di un angolo α e poi facendo strisciare su sè stessa la superficie così ottenuta di un angolo $-\alpha$ attorno al punto A. È chiaro che la superficie che si ottiene per tal modo ponendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ è precisamente una superficie identica colla superficie simmetrica.

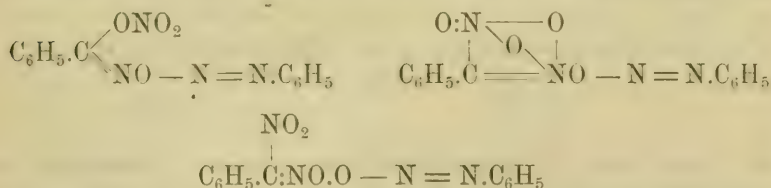
Azione dei sali di diazonio sul fenildinitrometano.

Nota del Dott. G. PONZIO.

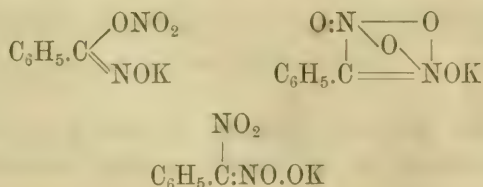
Da parecchio tempo ho ripreso lo studio dei cosiddetti *dinitroidrocarburi primari* $R.CHN_2O_4$ e specialmente di quelli solidi che ho ottenuto due anni fa (1) dalle aldossime aromatiche mediante il tetrossido di azoto. Riferisco ora su un composto giallo $C_{13}H_{10}N_4O_4$ che risulta per azione dell'acetato di fenildiazonio sul sale potassico del fenildinitrometano e su due suoi isomeri di struttura, uno bianco e l'altro rosso, nei quali può facilmente trasformarsi.

Il composto $C_{13}H_{10}N_4O_4$ *giallo*, dato il suo modo di formazione ed il suo comportamento verso l'alcool, dev'essere considerato come il sale di fenildiazonio del fenildinitrometano: per esso sono possibili le tre formole di struttura seguenti:

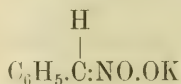
$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup ONO_2\\ \diagdown NO-N=N.C_6H_5\end{matrix} \qquad \begin{matrix}O:N & \text{——} & O\\ | & \diagdown O \diagdown & |\\ C_6H_5.C & \text{===} & NO-N=N.C_6H_5\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}NO_2\\ |\\ C_6H_5.C:NO.O-N=N.C_6H_5\end{matrix}$$

che derivano dalle corrispondenti formole del sale potassico

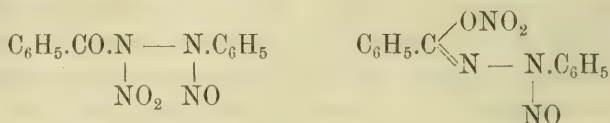
$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup ONO_2\\ \diagdown NOK\end{matrix} \qquad \begin{matrix}O:N & \text{——} & O\\ | & \diagdown O \diagdown & |\\ C_6H_5.C & \text{===} & NOK\end{matrix}$$

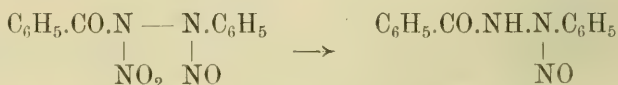
$$\begin{matrix}NO_2\\ |\\ C_6H_5.C:NO.OK\end{matrix}$$

(1) *Gazz. Chim. 36*, II, 287 e 588 (1906).

la prima delle quali fu da me dedotta dal comportamento chimico dei sali dei dinitroidrocarburi primari; la seconda è stata recentemente proposta da Hantzsch (1), ma è priva finora di dimostrazione sperimentale; la terza è analoga a quella generalmente adottata pel sale potassico del fenilmononitrometano

$$\begin{array}{c} \quad\; H \\ \quad\;\; | \\ C_6H_5.C{:}NO.OK \end{array}$$

ma è esclusa da detto chimico pel sale giallo del fenildinitrometano ed attribuita invece al leucosale.

Al composto $C_{13}H_{10}N_4O_4$ *bianco* si possono assegnare le due formole di struttura

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5.CO.N & - & N.C_6H_5 \\ | & & | \\ NO_2 & & NO \end{array} \qquad C_6H_5.C\begin{cases} ONO_2 \\ N - N.C_6H_5 \\ \qquad\;\; | \\ \qquad\;\; NO \end{cases}$$

La prima, che è quella di una benzoilfenilnitronitrosoidrazina, spiega bene il modo di comportarsi della sostanza verso l'acqua la quale, a freddo, sostituisce il gruppo NO_2 con un atomo di idrogeno dando luogo alla formazione di benzoilfenilnitrosoidrazina

$$\begin{array}{ccc} C_6H_5.CO.N & - & N.C_6H_5 \\ | & & | \\ NO_2 & & NO \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C_6H_5.CO.NH.N.C_6H_5 \\ \qquad\quad | \\ \qquad\quad NO \end{array}$$

che a sua volta, per azione dell'acqua a caldo, si trasforma in benzoilfenilidrazina, con sostituzione di un atomo di idrogeno al gruppo NO

$$\begin{array}{c} C_6H_5.CO.NH.N.C_6H_5 \\ \qquad\quad | \\ \qquad\quad NO \end{array} \longrightarrow C_6H_5.CO.NH.NH.C_6H_5$$

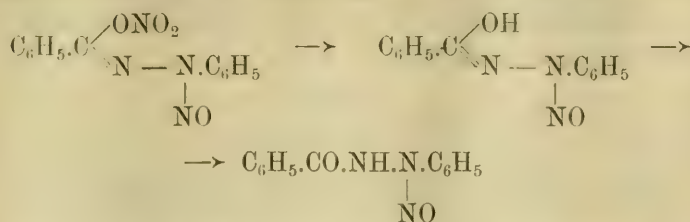
Adottando invece la seconda formola di struttura si dovrebbe ammettere che la formazione della benzoilfenilnitroso-

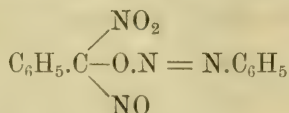
---

(1) *Berichte 40*, 1533 (1907).

idrazina fosse preceduta da quella di un composto ossidrilico instabile:

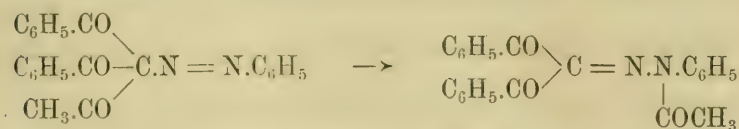
$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup ONO_2 \\ \diagdown N - N.C_6H_5 \\ \quad\;\; | \\ \quad\;\; NO\end{matrix} \longrightarrow C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup OH \\ \diagdown N - N.C_6H_5 \\ \quad\;\; | \\ \quad\;\; NO\end{matrix} \longrightarrow$$

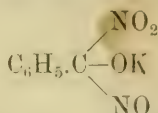
$$\longrightarrow C_6H_5.CO.NH.\underset{\displaystyle NO}{\underset{|}{N}}.C_6H_5$$

Nessuna delle tre formole del sale di fenildiazonio del fenildinitrometano, poc'anzi prese in considerazione, permette di spiegare facilmente la sua isomerizzazione in benzoilfenilnitronitrosoidrazina. Ammettendo invece per detto sale la struttura:

$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup NO_2 \\ - O.N = N.C_6H_5 \\ \diagdown NO\end{matrix}$$

la trasposizione molecolare che esso può subire:

$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup NO_2 \\ - O.N = N.C_6H_5 \\ \diagdown NO\end{matrix} \longrightarrow C_6H_5.CO.\underset{\displaystyle NO_2}{\underset{|}{N}} - \underset{\displaystyle NO}{\underset{|}{N}}.C_6H_5$$

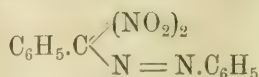
presenterebbe qualche analogia colla trasformazione testè osservata da Dimroth e Hartmann (1) di un azocomposto in un idrazone e che consiste nel passaggio di un radicale acido dal carbonio alifatico all'azoto:

$$\begin{matrix}C_6H_5.CO\diagdown \\ C_6H_5.CO - C.N = N.C_6H_5 \\ CH_3.CO\diagup\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}C_6H_5.CO \\ C_6H_5.CO\end{matrix}\!\!>C = N.\underset{\displaystyle COCH_3}{\underset{|}{N}}.C_6H_5$$

Ciò condurrebbe ad ammettere pel sale potassico del fenildinitrometano la formola di costituzione:

$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup NO_2 \\ - OK \\ \diagdown NO\end{matrix}$$

(1) *Berichte 40*, 4460 (1907).

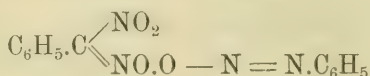
finora non proposta da alcuno e che mi riservo di discutere in un'altra Nota sulla base di esperienze che ho in corso.

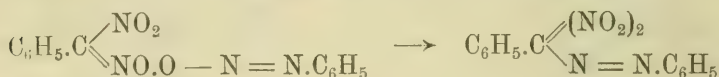
Il composto $C_{13}H_{10}N_4O_4$ *rosso* è un vero azoderivato, cioè il fenilazo-fenildinitrometano:

$$C_6H_5.C\begin{cases}(NO_2)_2\\ N=N.C_6H_5\end{cases}$$

Ammettendo pel fenildinitrometano due forme

$$C_6H_5.C\begin{cases}NO_2\\ NO.OH\end{cases} \longrightarrow C_6H_5.C\begin{cases}(NO_2)_2\\ H\end{cases}$$

la prima labile, e finora non isolata, e la seconda stabile (che è quella ordinaria, fusibile a 79°), si potrebbe attribuire al sale di fenildiazonio la formola di struttura

$$C_6H_5.C\begin{cases}NO_2\\ NO.O-N=N.C_6H_5\end{cases}$$

e spiegare la sua trasformazione spontanea in fenilazo-fenildinitrometano come un passaggio alla forma stabile:

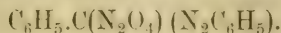
$$C_6H_5.C\begin{cases}NO_2\\ NO.O-N=N.C_6H_5\end{cases} \longrightarrow C_6H_5.C\begin{cases}(NO_2)_2\\ N=N.C_6H_5\end{cases}$$

Ad ogni modo quest'ultimo è il primo composto finora conosciuto che contenga nella sua molecola i gruppi $-NO_2$ ed $-N=NAr$ legati ad un medesimo atomo di carbonio, perchè come è noto, i cosiddetti azonitroidrocarburi $R.CH\begin{cases}NO_2\\ N=NAr\end{cases}$ di V. Meyer e di altri (1) furono recentemente riconosciuti da Bamberger (2) come idrazoni di nitroaldeidi $R.C\begin{cases}NO_2\\ N-NHAr\end{cases}$.

Mi sono già assicurato che composti analoghi a quelli che ora descriverò si possono ottenere dagli altri dinitroidrocarburi primari ed anche con sali di altri diazoni; ma su questo argomento tornerò in una prossima Nota.

(1) *Berichte 8*, 751 (1875), ecc.

(2) *Berichte 27*, 155 (1894); *31*, 2626 (1898); *33*, 2043 (1900); *34*, 2001, 2017 (1901).

Sale di fenildiazonio del fenildinitrometano.

$C_6H_5.C(N_2O_4)(N_2C_6H_5)$.

Questo composto si ottiene, con un rendimento teorico, facendo gocciolare in una soluzione di acetato di fenildiazonio, mantenuta sempre a 0° mediante aggiunta di pezzetti di ghiaccio, la quantità equimolecolare di sale potassico del fenildinitrometano in soluzione acquosa al 2 %, agitando continuamente (1). Ogni goccia che cade produce un intorbidamento seguito tosto dalla separazione di una sostanza solida cristallina, di colore giallo oro, la quale raccolta e lavata con acqua si secca senz'altro nel vuoto.

Gr. 0,2294 di sostanza fornirono gr. 0,4564 di anidride carbonica e gr. 0,0775 di acqua.

Gr. 0,1580 di sostanza fornirono cc. 27,5 di azoto (H_0 = 738,60 t = 18°), ossia gr. 0,031089.

---

(1) Il sale potassico del fenildinitrometano si può ottenere rapidamente trattando la benzaldossima (di fresco preparata e distillata nel vuoto) sciolta in etere anidro, con due molecole di tetrossido di azoto, nelle condizioni indicate in un mio precedente lavoro (loc. cit.); lavando la soluzione eterea con poca acqua ed aggiungendo quindi potassa alcoolica fino a reazione alcalina. Il sale greggio così ottenuto contiene un po' di benzoato potassico, la maggior parte del quale si può eliminare mediante successiva cristallizzazione dall'acqua; per avere però il sale potassico del fenildinitrometano perfettamente puro conviene ancora scioglierlo in acqua, acidificare la soluzione, ben raffreddata, con acido solforico diluito, sciogliere in alcool il fenildinitrometano solido separatosi ed aggiungere soluzione alcoolica di idrato potassico fino a reazione leggermente alcalina. Così operando il sale si separa in larghe lamine rosse, le quali, dopo breve tempo, anche in presenza delle acque madri, si trasformano in prismi gialli; il cambiamento di colore è analogo a quello che avevo già osservato pel sale di potassio dell'anisildinitrometano. Rendimento 70 %.

In quanto alla soluzione di acetato di fenildiazonio, questa si può preparare nel modo noto sciogliendo l'anilina in acido cloridrico diluito, diazotando con nitrito sodico, ed aggiungendo poi acetato sodico; nel mio caso però si ottengono migliori risultati preparando prima a parte il cloruro di fenildiazonio solido, secondo il metodo di Hantzsch e Jochem (*Berichte* 34, 3838 (1901)) (cloridrato di anilina, acido acetico glaciale e nitrito di isoamile), sciogliendolo in acqua ben fredda e trattandolo quindi colla quantità calcolata di acetato sodico cristallizzato.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_{10}N_4O_4$
	I	II	
Carbonio	54.47	—	54.54
Idrogeno	3.75	—	3.49
Azoto	—	19.60	19.58

Come risulta dalle analisi, il *sale di fenildiazonio del fenildinitrometano* $C_6H_5.C\,(N_2O_4)\,(N_2C_6H_5)$ così preparato è perfettamente puro. Riscaldato lentamente si fonde verso 70° per decomporsi verso 85° con sviluppo gassoso.

È molto solubile a freddo nell'etere, nel benzolo, nel cloroformio, nel solfuro di carbonio e nell'acetone; poco nell'alcool e pochissimo negli eteri di petrolio. È insolubile nell'acqua, riscaldato con questa si fonde svolgendo vapori nitrosi e trasformandosi in una massa bruna dalla quale si può ricavare soltanto acido benzoico. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con una magnifica colorazione azzurra intensa, che persiste per qualche ora e scompare per aggiunta di acqua.

Non lo si può conservare inalterato più di 24 ore; trascorso questo tempo, comincia a cambiar di colore per diventare in ultimo intensamente rosso. Il fenomeno è dovuto alla sua isomerizzazione in fenilazo-fenildinitrometano $C_6H_5.C\begin{matrix}\nearrow(NO_2)_2\\ \searrow N=N-C_6H_5\end{matrix}$ composto che si forma anche sciogliendolo in alcool, in etere od in acetone; per contro, sciolto in benzolo, in cloroformio o in solfuro di carbonio si trasforma in benzoilfenilnitronitrosoidrazina $C_6H_5.CO.N\,(NO_2).N\,(NO).C_6H_5$.

Reagisce a caldo coll'alcool etilico dando luogo alla formazione di fenildinitrometano, di azoto, di acetaldeide e di benzolo (1). Però prima ancora che l'azione dell'alcool si manifesti nel senso ora indicato una parte del sale di fenildiazonio del fenildinitrometano si trasforma nell'isomero azocomposto, il quale, essendo poco solubile, si separa tosto allo stato solido. L'operazione si fa in un apparecchio a ricadere previamente riempito di anidride carbonica e con un dispositivo atto a racco-

(1) La stessa reazione ha pure luogo a freddo, ma molto lentamente.

gliere i gas che si sviluppano nella reazione. Riscaldando lentamente a bagno maria ha luogo una viva effervescenza dovuta allo sviluppo di azoto (il quale fu riconosciuto all'analisi) e di acetaldeide. Cessata la reazione, si separa il fenilazo-fenildinitrometano, si elimina il solvente (1), ed il residuo pastoso bruno si assoggetta alla distillazione del vapore, il quale trasporta assieme a fenildinitrometano, anche un po' di benzoato di etile (2). Per isolare questi due composti si neutralizza il distillato con idrato potassico diluitissimo e si estrae con etere. Eliminando il solvente (dopo disseccamento su solfato sodico anidro) si ottiene un liquido di odore gradevole bollente verso 210°, il quale tratto con potassa alcoolica fornisce benzoato di potassio.

Gr. 0,2376 di sostanza fornirono gr. 0,1232 di solfato potassico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_6H_5.COOK + {}^1/_2 H_2O$
Potassio	23.38	23.07

La soluzione acquosa giallognola si acidifica con acido solforico diluito e si estrae con etere: questo asporta il fenildinitrometano che, ottenuto dopo eliminazione del solvente e cristallizzato dagli eteri di petrolio, si presenta in aghi bianchi fusibili a 79°.

Per l'analisi fu trasformato in sale potassico.

Gr. 0,1741 di sostanza fornirono gr. 0,0689 di solfato potassico.

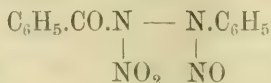
Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_7H_5KN_2O_4$
Potassio	17.73	17.72

(1) Non mi sono occupato di ricercare il benzolo nel distillato; per farlo avrei dovuto impiegare grandi quantità di sostanza, il che non ritenni conveniente.

(2) La formazione del benzoato di etile è dovuta alla eterificazione di acido benzoico, che risulta probabilmente dalla parziale decomposizione del fenildinitrometano, il quale infatti si ritrova soltanto in piccola quantità.

Benzoilfenilnitronitrosoidrazina.

$$\begin{array}{c} C_6H_5.CO.N \text{ — } N.C_6H_5 \\ \quad\;\; | \qquad\quad | \\ \quad\;\; NO_2 \quad NO \end{array}$$

Si forma per trasposizione molecolare del sale di fenildiazonio del fenildinitrometano sciolto a freddo in benzolo, cloroformio o solfuro di carbonio. Si prepara nel miglior modo operando con benzolo perfettamente anidro (1), raccogliendo le laminette bianche splendenti che, dopo qualche minuto, cominciano a separarsi dalla soluzione del sale raffreddata in ghiaccio, lavandole con etere e seccandole rapidamente nel vuoto. Rendimento 60 %.

I. Gr. 0,2167 di sostanza fornirono gr. 0,4309 di anidride carbonica e gr. 0,0760 di acqua.

II. Gr. 0,1574 di sostanza fornirono cc. 26,1 di azoto ($H_0 = 738,69$ $t = 11°$), ossia gr. 0,030382.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_{10}N_4O_4$
	I	II	
Carbonio	54.23	—	54.54
Idrogeno	3.89	—	3.49
Azoto	—	19.30	19.58

La *benzoilfenilnitronitrosoidrazina* $C_6H_5.CO.N(NO_2).N(NO).C_6H_5$ così ottenuta è, come risulta dall'analisi, perfettamente pura. Si fonde con decomposizione a 127°, ed è quasi insolubile a freddo nel benzolo, nell'etere, nel solfuro di carbonio e negli eteri di petrolio; molto solubile invece nell'alcool e nell'acetone e discretamente nel cloroformio.

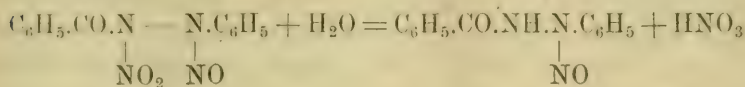
Con acido solforico concentrato, in presenza di fenolo, dà una colorazione verde smeraldo.

Non la si può conservare inalterata che per breve tempo, dopo di che comincia ad ingiallire sviluppando vapori nitrosi;

(1) Se il benzolo è umido, si svolgono vapori nitrosi e il rendimento è minore.

la decomposizione è ancora più rapida in presenza di benzolo e sopratutto di cloroformio.

Specialmente interessante è il suo modo di comportarsi verso l'acqua, la quale, *a freddo*, sostituisce il gruppo NO_2 con un atomo di idrogeno dando luogo alla formazione di benzoilfenilnitrosoidrazina e di acido nitrico (1).

$$C_6H_5.CO.\underset{\displaystyle NO_2}{\underset{|}{N}} - \underset{\displaystyle NO}{\underset{|}{N}}.C_6H_5 + H_2O = C_6H_5.CO.NH.\underset{\displaystyle NO}{\underset{|}{N}}.C_6H_5 + HNO_3$$

Trattando infatti la benzoilfenilnitronitrosoidrazina con acqua fredda, la soluzione quasi immediatamente si intorbida, e mentre si forma acido nitrico (la cui presenza si può riscontrare poi nelle acque madri) si separano dopo breve tempo laminette bianche, fusibili, con decomposizione, a 110° ed identiche colla benzoilfenilnitrosoidrazina $C_6H_5.CO.NH.N(NO).C_6H_5$ già descritta da Voswinkel (2).

I. Gr. 0,1974 di sostanza fornirono gr. 0,4670 di anidride carbonica e gr. 0,0882 di acqua.

II. Gr. 0,1035 di sostanza fornirono cc. 16 di azoto ($H_0 = 723,57$ $t = 11°$) ossia gr. 0,011400.

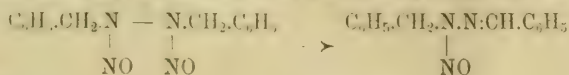
Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_{11}N_3O_2$
	I	II	
Carbonio	64.52	—	64.73
Idrogeno	4.95	—	4.56
Azoto	—	17.62	17.42

È solubile a freddo in alcool, benzolo, etere, cloroformio; insolubile nell'acqua e negli eteri di petrolio.

---

(1) Questo comportamento presenta una certa analogia con quello della dinitrosodibenzilidrazina, la quale, per azione dei solventi, o per semplice riscaldamento a 30°-40°, si trasforma in nitrosobenzalbenzilidrazone (Curtius e Quedenfelt, *Journ. f. Prakt. Chem.* 58, 379 (1898) e Curtius, *Id.* 62, 94 (1900)).

$$C_6H_5.CH_2.\underset{\displaystyle NO}{\underset{|}{N}} - \underset{\displaystyle NO}{\underset{|}{N}}.CH_2.C_6H_5 \rightarrow C_6H_5.CH_2.\underset{\displaystyle NO}{\underset{|}{N}}.N:CH.C_6H_5$$

(2) *Berichte* 34, 2352 (1901) e 35, 1943 (1902).

Il sale $C_6H_5.CO.NNa.N(NO).C_6H_5$ che essa può formare si ottiene anche, naturalmente, trattando con idrato sodico la benzoilfenilnitronitrosoidrazina.

Sulle proprietà della benzoilfenilnitrosoidrazina posso ancora aggiungere che per azione dell'acqua bollente si trasforma, con sviluppo di vapori nitrosi, in benzoilfenilidrazina simmetrica $C_6H_5.CO.NH.NH.C_6H_5$. Questa si separa, per raffreddamento, dalla soluzione acquosa e ricristallizzata dall'alcool si presenta in prismi bianchi fusibili a 168°, identici con quelli ottenuti da E. Fischer (1) per azione del cloruro di benzoile sulla fenilidrazina.

I. Gr. 0,1932 di sostanza fornirono gr. 0,5208 di anidride carbonica e gr. 0,1027 di acqua.

II. Gr. 0,1306 di sostanza fornirono cc. 15 di azoto ($H_0 = 738,20$ $t = 13°$), ossia gr. 0,017206.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_{12}N_2O$
	I	II	
Carbonio	73.51	—	73.58
Idrogeno	5.90	—	5.66
Azoto	—	13.17	13.20

La stessa benzoilfenilidrazina si ottiene pure, naturalmente, scaldando con acqua la benzoilfenilnitronitrosoidrazina, con passaggio pel nitrosoderivato.

La trasformazione della benzoilfenilnitrosoidrazina in benzoilfenilidrazina

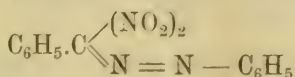
$$C_6H_5.CO.NH.\underset{\displaystyle NO}{\underset{|}{N}}.C_6H_5 \longrightarrow C_6H_5.CO.NH.NHC_6H_5$$

non era stata osservata da Voswinkel (loc. cit.); essendo essa di grande importanza per il mio lavoro, perchè analoga alla trasformazione, sopra accennata, della benzoilfenilnitronitrosoidrazina in benzoilfenilnitrosoidrazina (con sostituzione di un atomo di idrogeno ad un gruppo NO nel primo caso, ed a un

(1) *Annalen 190*, 125 (1878).

gruppo NO_2 nel secondo), ho creduto opportuno di prepare nuovamente la benzoilfenilnitrosoidrazina col metodo indicato da detto chimico, cioè facendo agire nitrito potassico ed acido cloridrico sulla benzoilfenilidrazina sospesa in alcool. Come si poteva prevedere, anche il composto ottenuto in questo modo si trasforma per azione dell'acqua bollente in benzoilfenilidrazina, sviluppando vapori nitrosi, precisamente come la benzoilfenilnitrosoidrazina che risulta per azione dell'acqua fredda sulla benzoilfenilnitronitrosoidrazina.

Fenilazo-fenildinitrometano.

$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup(NO_2)_2\\ \diagdown N = N - C_6H_5\end{matrix}$$

Si forma lasciando a sè per 8-10 giorni il sale di fenildiazonio del fenildinitrometano, ovvero sciogliendolo a freddo in alcool, in etere od in acetone. Per ottenerlo nel miglior modo conviene sciogliere il sale in etere *umido*: la soluzione gialla assume quasi subito un colore rosso e dopo qualche minuto comincia la separazione di aghi rossi, i quali raccolti e lavati bene con alcool, si cristallizzano dal cloroformio. Rendimento 95 %.

La trasformazione del sale di diazonio nell'azocomposto è favorita dalla presenza dell'acqua; infatti con etere *anidro* (distillato sul sodio) il rendimento è minore (1).

Il *fenilazo-fenildinitrometano* $C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup(NO_2)_2\\ \diagdown N = NC_6H_5\end{matrix}$ così purificato si presenta in lunghi aghi rossi appiattiti, fusibili, con decomposizione, a temperature comprese fra 138° e 147° a seconda del modo di riscaldamento.

I. Gr. 0,2567 di sostanza fornirono gr. 0,5120 di anidride carbonica e gr. 0,0864 di acqua.

II. Gr. 0,1163 di sostanza fornirono cc. 20,5 di azoto ($H_0 = 733,62$ $t = 18°$), ossia gr. 0,023301.

---

(1) Il fenilazo-fenildinitrometano si può ottenere perfino dalla soluzione benzolica del sale di diazonio del fenildinitrometano agitandola con acqua, mentre, come ho già detto, con benzolo anidro si ottiene la benzoilfenilnitronitrosoidrazina.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{13}H_{10}N_4O_4$
	I	II	
Carbonio	54.38	—	54.54
Idrogeno	3.74	—	3.49
Azoto	—	19.70	19.58

È insolubile nell'acqua, poco solubile a caldo e pochissimo a freddo nell'alcool; discretamente solubile a caldo e poco a freddo nel cloroformio, nel benzolo e nell'acido acetico glaciale; poco solubile sia a freddo che a caldo nell'etere, nel solfuro di carbonio e negli eteri di petrolio; solubile anche a freddo nell'acetone.

A differenza dei suoi due isomeri, il fenilazo-fenildinitrometano è stabile; tuttavia per una prolungata ebollizione coll'acido cloridrico si altera lentamente sviluppando vapori nitrosi e resinificandosi in parte: fra i prodotti di decomposizione si riscontra acido benzoico.

Torino, Istituto Chimico della R. Università.
Dicembre 1907.

Relazione intorno alla Memoria del Dott. D. Boddaert, intitolata: *Misure magnetiche nei dintorni di Torino.* Memoria II.

Questa 2ª Memoria *Sulle misure magnetiche nei dintorni di Torino* non è che il complemento della prima già approvata per l'inserzione nei volumi accademici.

In questa è data la componente orizzontale nelle diverse stazioni in cui sono state fatte osservazioni magnetiche.

I sottoscritti propongono l'accoglimento della Memoria nei volumi della nostra Accademia.

Torino, 29 dicembre 1907.

N. Jadanza
A. Naccari.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 5 Gennaio 1908.

PRESIEDE IL SOCIO BARONE ANTONIO MANNO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Rossi, Carle, Brusa, Allievo, Carutti, Renier, Pizzi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Sforza e De Sanctis Segretario.

Il Senatore D'Ovidio Presidente dell'Accademia giustifica la sua assenza.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 29 dicembre 1907.

Il Presidente, ricordando il desiderio espresso nella precedente seduta che venisse commemorato nella nostra Accademia il defunto Socio Graziadio Isaia Ascoli, invita il Socio Stampini a tenere la Commemorazione. Il Socio Stampini accetta.

Per la inserzione negli *Atti* il Socio Rossi presenta una sua nota intitolata: *Del Copto come base degli studi egittologici. Sua coltura in Europa e specialmente in Italia*; e il Socio De Sanctis un suo saggio su *L'Attide di Androzione e un papiro di Oxyrhynchos.*

LETTURE

Del copto come base degli studi egittologici. Sua coltura in Europa e specialmente in Italia.

Nota del Socio FRANCESCO ROSSI.

L'antica lingua dei Faraoni parlata per più migliaia d'anni nella Valle del Nilo, è rappresentata nei documenti pervenuti sino a noi, da quattro distinte scritture, la geroglifica, cioè, la jeratica, la demotica e la copta.

La più antica di tutte è la scrittura geroglifica, o come suona il suo nome, *sacra scolpita*, ed i suoi segni essendo presso che tutti un'imitazione di oggetti reali, dal modo che sono essi rappresentati nella scrittura, si dividono in geroglifici *puri*, *profilari* e *lineari*. Diconsi *puri* quei geroglifici che riproducono non solo la linea esterna del contorno e dell'ombra, ma anche i tratti interni dell' oggetto; e di questi geroglifici usati specialmente a decorazione dei monumenti sia pubblici sia privati ci offrono modelli bellissimi i templi, gli obelischi e le scene dipinte delle tombe. Talvolta ancora incidevano nel legno il solo contorno, e poscia con pietruzze, o smalti a colori diversi secondo la natura dell'oggetto, che dovevano rappresentare, ne indicavano i tratti interni in modo da formare veri mosaici, come si può vedere in un frammento di cassa funeraria del Museo egizio di Torino.

Diconsi invece profilari quei geroglifici, che riproducono solo il contorno dell'oggetto senza alcuna specificazione nell'interno, e questo è riempito tutto del colore adoperato per l'intiera iscrizione. Esempi di questo genere di geroglifici abbiamo in quasi tutte le iscrizioni che adornano i basso-rilievi, le statue, i vasi funerari e simili.

Ma sentirono ben presto gli egiziani la difficoltà di servirsi per l'uso ordinario della vita di un sistema grafico così

complicato, e dovettero perciò cercare di rendere l'uso della scrittura più facile col ridurre al minor numero di tratti possibili i segni geroglifici, conservando ad ogni oggetto quel carattere speciale che lo fa tosto distinguere da ogni altro, e così ebbero origine i geroglifici lineari, che sono una pura semplificazione ed abbreviazione dei *profilari*.

Dalla scrittura geroglifica *lineare*, fu poi facile il passaggio alla scrittura *jeratica*, che è un'abbreviazione, o per meglio dire, una semplice contrazione della geroglifica *lineare*, introdotta specialmente per l'uso dei papiri. Il papiro, come è noto, era la carta degli antichi egiziani, che ne formavano estesissimi fogli, su cui, come sui libri, i sacerdoti registravano i grandi avvenimenti e le geste dei loro re, e sono questi rotoli di papiro, pervenuti sino a noi, che ci fanno conoscere tutta la letteratura dell'antico Egitto. Infatti dalle lettere famigliari al poema noi troviamo in essi tutti i vari generi di componimento in uso presso quell'antica nazione. Ma sopratutto numerosi sono i papiri così detti funerari, che si ponevano nei sarcofagi od in mezzo alle fasciature delle mummie, od a lato di esse in rotoli dentro cassette fatte ad immagine di Osiride, contenenti ora in carattere jeratico, ora in geroglifico le preghiere e le invocazioni che il defunto rivolgeva agli Dei, perchè lo proteggessero nei pericoli e contro i nemici nella lotta, che aveva a sostenere nel suo viaggio nel mondo sotterraneo.

Lo studio di questi testi ha poi dimostrato, che la scrittura jeratica e la geroglifica rappresentavano una sola e stessa lingua, la lingua dei sacerdoti, la lingua cioè sacra e letteraria dell'antico Egitto. Ed il papiro *Prisse*, così chiamato dal nome del possessore, contenente in carattere jeratico gli ammaestramenti dello scriba *Ptah-hotep*, che visse alla corte di Assa, re della quinta dinastia, tremila anni circa avanti Cristo, ci attesta come la scrittura jeratica fosse già in uso presso gli Egiziani fin da quella remotissima epoca.

Di gran lunga meno antica invece è la scrittura demotica, o popolare, adoperata da principio quasi esclusivamente per gli atti della vita privata, poichè i documenti più antichi che sino ad oggi si conoscono, dettati in questa scrittura, sono atti di quitanza su papiro, che si conservano nel Museo egizio di Torino del tempo dei Psammetici, principi della XXVI^a^ dinastia,

che cominciarono a regnare in Egitto verso la fine del settimo secolo avanti Cristo.

Un attento esame di questi documenti ha dimostrato, come la scrittura demotica siasi formata per abbreviazione e semplificazione della jeratica allo stesso modo, che questa si formò dalla geroglifica; epperò noi non dovremo vedere altro nei segni demotici che una abbreviazione e semplificazione dei geroglifici.

Ma mentre la scrittura geroglifica colla jeratica ci rappresenta la lingua nobile o sacra dell' antico Egitto, la demotica ci dà invece la lingua volgare, la lingua parlata dal popolo.

E questa distinzione delle due lingue è chiaramente indicata nella celebre *tavola di Rosetta*, che diede il più grande impulso al deciframento dei geroglifici.

Contiene questa tavola, in una triplice iscrizione, geroglifica, demotica e greca, un decreto dei sacerdoti tutti dell'Egitto riunitisi a Memfi, in onore di Ptolomeo Epifane; i quali, per meglio perpetuare la memoria dei benefizi ricevuti dal re, stabilirono, che il decreto venisse inciso, dice il testo, in pietra nelle tre scritture in uso a quei tempi, *geroglifica* o sacra, *demotica* o del popolo, e greca. Questa scrittura demotica continuò ad essere adoperata in Egitto sino al terzo secolo dell'era cristiana, quando con l'introduzione del Cristianesimo in quella contrada, i seguaci della nuova religione, per ispogliarsi di tutto ciò che poteva loro ricordare l'antico culto, sostituirono all'alfabeto demotico quello dei padri greci, che erano venuti a predicare loro il Vangelo, ritenendo solo dell'antica loro scrittura alcuni segni per esprimere quelle articolazioni speciali al popolo egiziano che mancavano nell'alfabeto greco, e l'alfabeto greco così modificato fu chiamato copto, e copta la lingua dalle lettere di questo alfabeto rappresentata.

Il copto quindi ci rappresenta la lingua parlata dal popolo in Egitto nel periodo cristiano, e sta all'antica lingua egizia come la lingua volgare o del popolo sta alla lingua scientifica o dei libri.

Gli studi del Decacy, dell'Akerblad e dell'Joung sulla iscrizione demotica della tavola di Rosetta vennero a confermare vieppiù l'opinione già emessa dal *Salmatius*, che la lingua copta fosse la rappresentante moderna dell'antica lingua dei Faraoni,

e dovesse quindi contenere in sè non solo le radici, ma anche le forme grammaticali di quell'antico idioma. Epperò lo Champollion, a cui era serbata la gloria di sciogliere vittoriosamente l'enigma della sfinge egiziana, si preparò alla soluzione dell'arduo problema, che fu la meta costante di tutta la sua vita, con un profondo studio della lingua copta, dettando con quella lucidità, che è propria degli scritti del grande francese, una grammatica ed un dizionario copto, che, sebbene scritti solo per uso proprio, non rifiutava di comunicare a quanti gliene facevano richiesta. Imperocchè egli non fece mai mistero dei risultati delle sue ricerche, ed il frutto delle sue veglie partecipava volonteroso a quelli che vedesse con amore coltivare i suoi stessi studi.

Come lo Champollion, così anche i nostri due illustri egittologi Ippolito Rosellini di Pisa e Francesco Salvolini di Faenza posero il copto a base delle loro ricerche.

Il Rosellini, che fu l'amico e compagno diletto dello Champollion nella spedizione scientifica in Egitto, compitasi sotto gli auspicî dei due Governi di Francia e di Toscana, compose una grammatica copta sulle traccie di quella del suo illustre collega, e fu il primo a diffondere presso di noi dall'Ateneo pisano, ove era professore di lingue orientali, le dottrine del grande Francese, esposte con tanta lucidità di idee nello splendido lavoro da lui pubblicato sotto il modesto titolo di *Précis du système hiéroglyphique des anciens Égyptiens*, ove ha dimostrato come egli avesse vittoriosamente risolto il grande problema del deciframento dei geroglifici.

Del Salvolini, troppo ingiustamente oggi da noi obbliato, permettetemi che vi ricordi brevemente la non lunga, ma operosa vita. Mostrò quest'eletto ingegno fin da giovinetto un grande amore per gli studi classici, ed all'età di 15 anni componeva già nella sua Faenza, in occasione che una sua sorella vestiva l'abito monacale, un poemetto in lingua latina che gli procacciò le lodi dei dotti. Recatosi poscia a Bologna per consacrarsi allo studio delle lingue orientali, insegnate in quell'illustre Università dal celebre cardinale Mezzofanti, ebbe conoscenza della grande scoperta dello Champollion, e ben tosto vide nell'archeologia egiziana un vasto campo alla sua ambizione ed alla sua attitudine per lo studio delle lingue. A tal fine attese con instancabile zelo per due anni consecutivi allo studio del copto, che sapeva

indispensabile per la conoscenza della lingua dei geroglifici, non tralasciando nel medesimo tempo di tenersi informato degli scritti, che andavansi pubblicando sulla lingua e scrittura dell'antico Egitto.

Con tal corredo di cognizioni si risolse quindi di recarsi a Parigi per approfittare dei consigli e delle lezioni dello Champollion. Ma prima volle passare a Pisa, ove trovò il Rosellini, che attendeva alla pubblicazione della sua grande opera *I monumenti dell'Egitto e della Nubia*, i cui materiali aveva raccolto insieme con lo Champollion in 15 mesi di incessanti e faticose ricerche nel suolo egiziano. Questi accolse benignamente il giovane Faentino, e conosciuto il suo desiderio, lo animò vieppiù a metterlo in atto, dandogli lettere di raccomandazione pel grande scienziato francese, col quale era legato, come dicemmo, dalla più tenera ed affettuosa amicizia. Con tali lettere, giunto a Parigi, il Salvolini fu ricevuto dallo Champollion colla massima benevolenza, ed egli seppe così ben cattivarsi il suo affetto, che, predigendolo tra i suoi discepoli, lo iniziò non solo nei più minuti segreti della sua scoperta, ma gli comunicava ancora i fogli che andava man mano scrivendo della sua grammatica geroglifica. E quasi egli fosse presago della sua prossima fine, si affrettò a porre a parte di tutte le sue osservazioni e di tutte le sue scoperte il giovane italiano, per assicurare alla novella scienza da lui creata, un operoso e zelante seguace, che dopo la sua morte la proteggesse e la estendesse.

E da tanto era appunto il nostro Salvolini. Infatti dopo la morte dello Champollion, vedendo, che il miglior modo di convertire gli increduli o gli avversari del sistema geroglifico del suo maestro, era di esporre e discutere in modo solido e coscienzioso le varie parti, si fece a pubblicare le sue lettere all'abate Gazzera, ove trattando della notazione delle date sui monumenti dell'antico Egitto secondo l'iscrizione di Rosetta, ci diede le modificazioni, le correzioni e le prove, che gli erano state comunicate dalla bocca del maestro o da lui stesso scoperte; ed intanto lavorava indefessamente alla sua grande opera: *L'analisi grammaticale ragionata dei differenti testi antichi egizii*, di cui pubblicava, coll'appoggio del Governo sardo, la prima parte, ove diede, colla sua spiegazione dell'iscrizione geroglifica di Rosetta, la prima filologica interpretazione di un testo egiziano.

Ma la sua delicata costituzione non potè reggere ai continui e prolungati studi, e nel febbraio del 1838 soccombeva alla fatale malattia che da qualche tempo lo travagliava, non compiuto ancora il sesto lustro di sua vita.

La predilezione addimostrata dallo Champollion pel nostro giovane Faentino, e più ancora l'avere egli aspirato, sebbene vanamente, alla cattedra da quello lasciata vacante, gli suscitarono in Francia non pochi nemici, che gli mossero aspra guerra, e dopo la sua morte tacciandolo di plagiario, il sig. Dujardin giunse persino ad accusare il Salvolini di avere non solo trafugato al suo maestro delle carte, ma d'avere citato ancora erroneamente alcuni passi della grammatica dello Champollion, per poterli poscia correggere, e dare queste correzioni come sue proprie scoperte.

Queste così gravi accuse trovarono dolorosamente eco in Italia e nocquero grandemente alla fama del povero Salvolini, facendo, che si opponessero perchè fosse continuata la pubblicazione de' suoi dotti studi quegli illustri personaggi che prima l'avevano protetto. Epperò a togliere dall'ingiusto oblìo il suo nome io voglio ricordare le parole, che all'annunzio della sua morte scriveva l'illustre Direttore del Museo di Leida dottor Leemans:

" Non sarà necessario, scriveva questo valente egittologo, " dire quanto la filologia abbia perduto per la morte d'un uomo, " che giovane ancora, aveva già reso così grandi servigi a questa " scienza, e sul quale poteva fondare le più grandi speranze " per il perfezionamento di uno studio, che sgraziatamente per- " dette parecchi de' suoi più validi sostegni nel principio della " sua esistenza. Coloro che hanno fatto uno studio particolare " dell'antica lingua dei Faraoni, sapranno apprezzare quanto " abbia operato il Salvolini per facilitarne la conoscenza, ed i felici " risultati ottenuti, e che possonsi ancora ottenere dalle sue " pubblicazioni e dalle sue scoperte, non fanno che aumentare " in noi il rammarico di non esserci più dato di approfittare " de' suoi lumi e dei frutti del suo zelo e della sua perseve- " ranza ".

A difenderlo poi dall'accusa di plagiario e a dimostrare l'animo nobile e delicato del nostro giovane connazionale piacemi ricordare l'aneddoto narrato dallo stesso dottor Leemans.

Venuto nel 1834 il Salvolini a Leida per istudiare i monumenti egizi di quel celebre Museo, fu ospitato in casa de' suoi genitori, i quali nei due mesi che vi dimorò lo tennero come uno della famiglia. E fu allora che il Salvolini " mi comunicava a voce (egli scrive) citando a memoria ogni giorno una parte della grammatica egizia, che io andava scrivendo, perchè servisse di base a' miei studi, finchè non avessi l'opera stessa dello Champollion. Io avevo messo in testa a questi miei sunti il nome di Salvolini come quello dell'autore, e solo dopo la sua partenza da Leida io m'accorsi che egli aveva cancellato il suo nome e sostituito quello dello Champollion. Io (prosegue il Leemans) ho conservato questo foglio, che considero come un documento prezioso di buona fede, e come l'atto migliore a confermare il buon nome di un amico verso il quale ho tante obbligazioni ".

Ma tornando al nostro tema, noi abbiamo ancora a notare nel linguaggio volgare parlato dal popolo egiziano due distinti periodi, il primo che corre dal regno dei Psammetici sino al terzo secolo dell'era cristiana, rappresentato dalla scrittura demotica, ed il secondo, che comincia coll'introduzione della religione cristiana in Egitto, e va sino al decimo settimo secolo della nostra era, rappresentato dalla scrittura copta.

Donde poi sia venuto questo nome di *Copto*, dato alla lingua parlata dal popolo egiziano dopo l'introduzione del Cristianesimo in quella contrada, sono corse quattro distinte opinioni, che mi farò ad esporre brevemente per ordine di tempo.

La prima e più antica si fonda sopra una tradizione araba secondo la quale un re dell'Egitto, per nome *Misr*, morendo lasciò il regno diviso fra i suoi quattro figli, *Achmour*, *Atrib*, *Scha* e *Kibt*. Questi, convenuti a Memfi presso le piramidi, di comune accordo stabilirono di riconoscere re di tutto l'Egitto quello tra essi, che in singolare tenzone rimanesse vincitore. La lotta cominciò tra *Achmour* ed *Atrib*; *Achmour* vincitore da prima fu vinto da *Scha*, il quale alla sua volta fu vinto da *Kibt*, il più giovane dei quattro figli di *Misr*, che perciò venne proclamato re ed entrò trionfante in Memfi. Ed è dal nome di questo re, che gli scrittori arabi fanno derivare il vocabolo *Copto*.

Secondo altri verrebbe questa parola da una mutilazione del nome *Jacobit*, con cui furono chiamati gli avversari del concilio Calcedonico, in opposizione agli ortodossi *Melchiti*; ed in-

vero sotto il regno di Eraclio i cristiani Iacobiti dell'Egitto erano generalmente designati col semplice nome di Copti.

Una terza opinione sostenuta specialmente da *Wilkins* e da *Pocoke*, due illustri orientalisti inglesi, fa derivare questo nome da un'antica città dell'Egitto, che fin dai remoti tempi fu un emporio di 1° ordine. Imperocchè le merci che venivano dall'India, sbarcate al porto di Berenice e di Leukos, erano per mezzo di cammelli portate a questa città, e di qui, al tempo dei Faraoni, sparse nelle principali città del regno, ed in tempi meno remoti, portate in Alessandria, e quindi in Europa. Il nome di questa città era *Kabt-* o *Kab.ta*, come si legge in una stela di *Hamamat*, appartenente alla XX^{a} dinastia, rappresentante il Dio Osiride colla leggenda: *Asar-neb-Kab-ta*, ossia *Osiride Signore di Kab-ta*.

Oggi infine è opinione comune essere questo nome derivato dall'arabo قبط *Kbt copto*, che non è altro che una corruzione del vocabolo greco αιγυπτος, spogliato cioè del dittongo iniziale αι e della desinenza ος, usato a designare la *terra di Kemi*, vocabolo, che secondo il Brugsch sarebbe derivato dal gruppo geroglifico *ha . ka . ptah* significante nell'antica lingua egiziana: *Casa del culto di Ptah*, nome dato dagli antichi egiziani al famoso tempio innalzato in Memfi al Dio *Ptah*, da Mene il fondatore delle grandi dinastie faraoniche.

Ma qualunque sia l'origine che si voglia dare a questa parola, noi troviamo questa lingua, chiamata nelle scritture copte ⲁⲥⲡⲉⲛⲕⲏⲙⲉ cioè *lingua dell'Egitto*, come ⲣⲉⲙⲛⲕⲏⲙⲉ erano chiamati i suoi abitanti, comparire storicamente solo verso la metà del terzo secolo della nostra era nelle lettere ai vescovi S. Atanasio e S. Teodoro, scritte dal padre dell'ascetismo e monachismo egizio S. Antonio, il quale, come sappiamo, non parlò altra lingua che la copta, la quale, divenuta a' suoi tempi la lingua dominante del paese, rimase tale sino all'invasione araba. Ma venuto l'Egitto in potere dei seguaci di Maometto, dovettero i suoi abitanti adattarsi ad apprendere la lingua dei nuovi conquistatori, ed a misura che questa progrediva, cadeva sempre più in disuso il copto. Tuttavia mentre nell'inferiore Egitto la lingua copta era costretta a rifugiarsi nei monasteri, ove il leggere e copiare scritti copti si faceva per la regola del chiostro, nel superiore Egitto, meno soggetto all'influsso arabo, si continuò

ancora per lungo tempo a parlare la lingua nazionale, poichè l'arabo Makrizi, nella sua storia dell'Egitto scrive, che nel decimo quinto secolo le donne ed i fanciulli del superiore Egitto non parlavano altro che il copto.

Ma verso il decimo settimo secolo non solo era scomparsa affatto dalla vita del popolo la lingua copta, ma per la barbarie sempre più estendentesi in quella infelice contrada, gli stessi sacerdoti copti non erano più capaci di leggere e comprendere i libri sacri dettati nella loro lingua senza l'aiuto delle traduzioni arabe scritte sui margini dei loro libri.

Mentre così miseramente si spegneva in quella terra ogni traccia dell'antica lingua, in Europa l'illustre Peiresc cercava di rivolgere l'attenzione dei dotti su questa lingua, che gli pareva non avere alcuna analogia cogli idiomi conosciuti, ed era stata per sì lungo tempo parlata sulle sponde del Nilo da una nazione cristiana. A tal fine raccolto con grandi spese il maggior numero possibile di manoscritti copti, li pose nelle mani di uno dei più dotti uomini de' suoi tempi, il Salmasius, il quale senza altra guida ed aiuto che il suo instancabile zelo, riuscì a penetrare lo spirito di questa lingua, facendosi per mezzo di essa a spiegare parecchi antichi vocaboli egizi, tolti dagli autori greci e latini. Quasi nel medesimo tempo il padre Atanasio Kirker, al quale veniva affidata la pubblicazione del *lexicon* arabo-copto accompagnato da una grammatica che Pietro Della Valle aveva portato nel 1626 dal suo viaggio in Oriente, pubblicava a Roma, coll'aiuto dei manoscritti della biblioteca vaticana, il suo *Prodromus Ægyptiacus*, che contiene parecchie dissertazioni preliminari con un saggio di grammatica copta. E qualche anno dopo pubblicava la *Lingua Ægyptiaca restituta*, contenente le grammatiche con un vocabolario copto-arabo insieme alla loro versione latina; opera, che contribuì più d'ogni altra a promuovere lo studio della lingua copta, procacciando all'autore colla lode la riconoscenza dei dotti.

Due altri illustri raccoglitori di codici copti degni di ricordanza, furono l'inglese Huntington ed il tedesco Petreus. Il primo, durante il suo soggiorno in Siria ed in Egitto raccolse con grande zelo manoscritti orientali, e più specialmente copti, ma la morte lo colse prima che avesse potuto usufruire del suo ricco tesoro, che passò tutto intero nella biblioteca Bodlejana di Oxford.

Petreus, che si era distinto in Alemagna per la sua applicazione al copto, fece pure una lunga dimora in Egitto, ove acquistò parecchi manoscritti copti, e più altri ne copiò. Ritornato poscia in Europa, non potendo, per mancanza di mezzi, pubblicare tutti questi manoscritti, si ristrinse alla stampa del primo salmo con una versione araba ed un'altra latina, che uscì alla luce nel 1665 col titolo: *Psalterium Davidis in lingua coptica seu aegyptiaca una cum versione arabica nunc primum in latinum versum, et in lucem editum a Theodoro Petreus, Lugduni Batavorum, sumptibus auctoris*. Tradusse pure in latino su testo copto l'*Epistola* di S. Paolo agli Efesî, che si conserva con gli altri manoscritti del Petreus nella biblioteca di Berlino.

Ma incerti e lenti furono in questo primo periodo i passi nella coltura della lingua copta: la massima parte dei suoi testi giaceva manoscritta nelle biblioteche, e non ancora era stata notata la coesistenza dei suoi vari dialetti, cosicchè lo studioso non aveva altra guida che il lessico pubblicato dal padre Kirker.

Colla speranza di dare un più vivo impulso a questi studi, il Sommo Pontefice Clemente XI mandava nell'anno 1715 il maronita Giuseppe Simone Assemani a far ricerche nei vari monasteri dell'Egitto, di nuovi manoscritti copti. Ma il più benemerito di questi studi è stato il Cardinale Borgia, il quale, come Segretario prima, poi Prefetto della Congregazione *De Propaganda Fide*, servendosi dell'autorità che gli procacciava il suo eminente grado, fece per mezzo dei missionari raccogliere un numero stragrande di manoscritti copti, che si affrettava di comunicare ai dotti italiani e stranieri che volessero consacrarsi allo studio di questa lingua. Intanto coll'opera del padre Georgi che nel suo alfabeto Tibetano aveva dato prova di una grande conoscenza della lingua copta, faceva stampare un antico frammento copto del suo gabinetto, contenente una parte degli *atti* di S. Coluto, ed affidava allo svedese Zoega, ma di antica famiglia veneta (1), tenuto in grande fama per la sua vasta erudizione e per i suoi scritti sulle antichità egizie, l'incarico di comporre il catalogo ragionato dei manoscritti copti del suo gabinetto.

(1) Vedi E. Teza, *Zoega-Zuecca*. Bozze di stampa. Padova, 1903, Tip. dei Fratelli Gallina.

Ma questa preziosa opera, che era già compita alla morte del Cardinale, per una lite insorta fra i suoi eredi e la Congregazione *De Propaganda Fide*, non potè essere pubblicata che dopo la morte dell'autore, ed apparve solo nel 1810 col titolo: *Catalogus codicum copticorum manuscriptorum qui in Museo Borgiano Velitris adservantur*.

In tal modo lo studio della lingua copta si diffondeva per tutta l'Europa, e dalla Germania, dall'Inghilterra e dalla Francia sorsero uomini dottissimi a promuoverne sempre più la coltura, pubblicando ora traduzioni o commenti di codici copti, ora grammatiche e lessici, fra i quali merita particolare menzione quello di Lacroze, stampato nel 1775 con le correzioni di Scholtz e le aggiunte di Woide. E fra le grammatiche fu molto apprezzata ai suoi tempi quella di Raffaele Tuki, vescovo di Arsinoe. Questo dotto prelato, di nascita copto, chiamato ad insegnare la lingua patria nel collegio Urbano *De Propaganda Fide*, vi pubblicava le opere liturgiche della sua Nazione in copto ed in arabo. Per cura poi di quell'illustre collegio romano veniva pubblicata la grammatica del Tuki, che apparve in Roma nel 1778 col titolo di *Rudimenta linguae coptae*, che sebbene sia lavoro povero di critica e di metodo, non cessa però di essere anche ai nostri giorni di grande aiuto agli studiosi per i numerosissimi testi tebani e memfitici, che si trovano citati.

Un altro lavoro di quei tempi che merita pure di essere ricordato è il *glossarium* dell'Iablonski. Quest'opera pubblicatasi a Leida nel 1804, dopo la morte dell'autore, con note di Guglielmo Tewater, professore di teologia in quella Università, si compone di una serie di opuscoli, in cui il dotto orientalista polacco prende ad esaminare e spiegare per mezzo del copto tutte quelle parole egizie, che trovansi sparse negli autori greci e latini e nel testo ebraico della Bibbia, da lui raccolte e disposte per ordine alfabetico. Ed in Francia il sig. Quatremère, il celebrato autore delle *Recherches sur la langue et la littérature de l'Égypte*, componeva pure un dizionario copto, che sebbene rimasto sinora manoscritto è tuttavia molto conosciuto ed apprezzato dai dotti francesi.

Nè in Italia mancarono in quel periodo i cultori di questa lingua e noi possiamo con orgoglio citare i nomi del padre Giovanni Luigi Mingarelli e dell'abate Valperga di Caluso. Il Min-

garelli, datosi in età avanzata allo studio del copto, pubblicava in Bologna nel 1785 parecchi frammenti copti della biblioteca Naniana di Venezia, accompagnati da una traduzione latina e da erudite note; ma fu rapito dalla morte mentre stava preparando la pubblicazione degli altri codici di quella pregiata collezione.

L'abate Valperga di Caluso, il precettore e l'amico del grande tragico italiano Vittorio Alfieri, fu professore di lingue orientali nella nostra Università, e fra i numerosi suoi scritti lasciò pure un prezioso compendio di grammatica copta, che fu stampato a Parma nel 1783 col modesto titolo di *Rudimentum litteraturae copticae Didymi Taurinensis*. E fra i cultori della lingua copta di quel secolo possiamo pure iscrivere il nome di Ignazio Derossi, che stampava a Roma nel 1808 un'opera utilissima per lo studio di questa lingua col titolo *Etymologiae aegyptiacae*, in cui prese a notare con molta profondità di dottrina le parole che i copti tolsero dalle altre lingue, dimostrando una grande conoscenza della lingua ebraica nel paragone che egli fa delle radici copte colle semitiche, sebbene poi nelle deduzioni, che ne vuol trarre per l'affinità di questa lingua coi dialetti semitici, non sia sempre nel vero.

E questi nostri gloriosi avi posero coi loro scritti i germi che diedero negli ultimi tempi non pochi frutti. Poichè, oltre i nostri illustri egittologi Ippolito Rosellini e Francesco Salvolini già menzionati, coltivarono con onore gli studi del copto Giuseppe Bardelli, già allievo del Rosellini, e professore di lingua sanscrita e copta nell'Ateneo di Pisa; il padre Barnabita Luigi Ungarelli, il dotto interprete degli obelischi di Roma; il suo compagno di sodalizio, il padre Vercellone da Biella, ed il canonico Fabiani.

Ma il più illustre rappresentante degli studi copti in Italia del secolo XIX è l'abate Amedeo Peyron. Questi, che fu il discepolo prediletto del Caluso, cominciò la sua carriera scientifica con una pubblicazione di un lavoro critico sopra un manoscritto greco della nostra biblioteca nazionale, contenente frammenti di Empedocle e di Parmenide, pubblicazione che egli, per tentare il giudizio dei dotti, senza parlarne con alcuno faceva stampare in Germania, perchè il suo lavoro uscisse non preceduto da avviso o raccomandazione. Ciò non pertanto questa sua monografia fu altamente apprezzata dai dotti, e specialmente dall'illustre

ellenista Boissonade, che gli mandò per mezzo del celebre Cuvier, venuto a Torino in qualità di commissario delle Università di Francia, le sue congratulazioni. A questa tennero dietro parecchie altre dotte pubblicazioni, di cui mi restringerò a citare quelle che hanno maggiore attinenza coi nostri studi; epperò ricorderò innanzi tutto le splendide illustrazioni, che egli diede, dei papiri greco-egizi e della stela bilingue che si conservano nel Museo egizio.

E mentre il Tattam pubblicava in Oxford il suo lodato dizionario copto, il nostro Peyron faceva quasi contemporaneamente stampare a Torino il suo *lexicon*, composto con metodo etimologico, disposto cioè per ordine di radici, senza tener quasi conto delle vocali, ed a questo fece succedere qualche anno dopo la grammatica copta, che forma col lessico i due più compiuti lavori che fossero sino allora usciti sulla lingua copta (1).

Questo prezioso lessico del Peyron venne ancora negli ultimi anni arricchito di nuove preziose aggiunte, pubblicate nel giornale di egittologia la *Zeitschrift für aegyptische Sprache* da due lodati cultori dell'egittologia, l'inglese Goodwin e l'egiziano Kabis. Quelle del primo furono pubblicate negli anni 1870-71, in una serie di articoli in detto giornale col titolo: *Spigolature nella lessicografia copta*, e quelle del secondo, cioè del Kabis, che fu già alunno nel collegio Urbano di Roma, videro la luce negli anni 1874 e 1876 col titolo: *Auctarium lexici coptici Amedei Peyron.*

Intanto un nuovo risveglio ebbero nei giorni nostri questi studi per la scoperta in Egitto di una grande quantità di manoscritti copti, che si vanno pubblicando sotto la direzione del professore Maspero, il quale alla morte di Mariette-Bey, il glorioso scopritore del celebre *Serapeum*, che arricchì di preziosi monumenti la collezione egiziana del Louvre, fu nominato direttore del grande Museo di Boulaq, e continua con sì prosperi risultati gli scavi in quella monumentale contrada, incominciati dal suo predecessore.

(1) Sulle sue traccie pubblicai nel 1877 la *Grammatica copto-geroglifica* con un'appendice dei principali segni sillabici e del loro significato, illustrata da esempi; e nel 1901 la *Grammatica egizia nelle tre scritture geroglifica, demotica e copta.* Ma per non trovarsi in tutta Italia una tipografia munita dei tipi demotici fu quest'ultima pubblicata solo autograficamente.

Sorse quindi fra i cultori della lingua copta una nobile gara di pubblicare tutti i testi che stanno ancora nascosti nelle varie biblioteche e collezioni egiziane. Così mentre in Russia il dottore Oscar-von-Lemm, già noto per parecchi lavori egittologici, iniziava la pubblicazione dei testi copti della Bibbia, che si conservano nell'imperiale Museo di Pietroburgo, il sig. Revillout pubblicava in Francia parecchi manoscritti copti non solo del Louvre, ma ancora di altri Musei d'Europa e del Cairo. Egli aperse inoltre le colonne del suo giornale la *Revue Égyptologique* agli scritti del povero vescovo copto Monsignor Bsiai che dopo un esilio di parecchi anni a Roma, ritornato in Egitto, alla sua terra natia, venne dopo pochi mesi rapito da repentina e misteriosa morte ai diletti suoi studi sulla lingua copta.

Fra le ultime pubblicazioni copte della Germania devo ricordare quella del codice copto del nostro Museo, scritto su pergamena con copertura in legno, contenente la *Sapienza di Sirak* e quella di Salomone, che l'illustre coptologo De la Garde fece sopra una copia avuta dall'abate Amedeo Peyron. Inoltre il già citato giornale, la *Zeitschrift für aegyptische Sprache*, diretto, dopo la morte del Lepsius, dal suo discepolo il prof. Stern, pubblica continuamente nelle sue colonne studi e testi copti di questo suo nuovo e valente Direttore.

Nè l'Italia sta indietro alle altre Nazioni nel pubblicare i testi copti delle sue collezioni. Infatti a Roma abbiamo Ignazio Guidi, professore di Siriaco in quell'Ateneo, che, oltre a suoi studi speciali, pubblica pure di tratto in tratto negli Atti dell'Accademia dei Lincei testi copti della celebre biblioteca vaticana. Questa intanto affidò la pubblicazione di tutti i testi copti biblici della sua giustamente rinomata collezione al Cardinale padre Ciasca, distinto coptologo, il quale diede alla luce il primo volume dei frammenti copto-saidici con 17 grandi tavole in fotolitografia, che riproducono in modo veramente splendido le migliori pagine di quei testi.

Un'altra pubblicazione non meno meritevole di lode è quella intrapresa da Enrico Hyvernat, che fu già professore di assiriologia e di egittologia al seminario romano, col titolo: *Gli Atti dei martiri dell'Egitto*, tratti dai manoscritti copti della biblioteca vaticana e del Museo Borgia.

Così pure la nostra Accademia delle Scienze pubblicava

nelle sue Memorie (anni 1883-1892) i papiri copti della celebre collezione Drovetti, che si conservano nel Museo egizio di Torino, di modo che essi sono stati raccolti in due grandi volumi di 400 pagine ciascuno, con parecchie tavole litografiche.

Ed a questa collezione appartiene pure il papiro copto da me trovato nel 1891 in un vecchio armadio del magazzino del Museo, ove giaceva obliato, sin da quando fu portato dall'Egitto, in fondo di una rozza cassetta di legno, sepolto sotto un grande numero di frammenti e frastagli di cuoio di antiche legature copte. E questo papiro ridotto, dall'azione del tempo, e più ancora dal tarlo, in deplorevole stato, io pubblicai nel 1893 nelle Memorie della Reale Accademia dei Lincei col titolo: *Un nuovo codice copto del Museo egizio di Torino*, contenente la *Vita di S. Epifanio vescovo di Costanza in Cipro, ed i martiri di Pantaleone, di Nicomedia*, che iniziato alla fede di Cristo dal vecchio sacerdote Sant'Ermolao abbandona la medicina, che per volere del padre studiava sotto la disciplina di Eufrosino, rinomato medico di quei tempi, e professando apertamente la religione cristiana sostiene coraggiosamente il martirio sotto l'imperatore Massiminiano. Seguono quindi collegati tra loro i martìri di Ascla, di Apollonio e di Filemone, i quali tutti per la fede di Cristo incontrarono la morte sotto Ariano, governatore della Tebaide. Ariano stesso poi dopo aver perseguitato i cristiani, colpito dai prodigi operati dal martire Filemone, si converte al cristianesimo, e per esso sostiene il martirio sotto l'imperatore Diocleziano. Il codice termina col martirio di un guerriero, appartenente alla Legione decima (se non è errato il titolo di decimano datogli dallo scriba copto), chiamato *Dios*, il quale sfidando l'ira dell'imperatore Massimino muore fra i tormenti campione di Cristo.

Ed infine la nostra Accademia delle Scienze, colla pubblicazione che ha fatto nelle sue Memorie, dei manoscritti copti donati dall'abate Amedeo Peyron alla biblioteca nazionale, ha conservato alla scienza i testi di questi preziosi manoscritti, che andarono totalmente distrutti nel grave incendio della nostra biblioteca; fra i quali è di particolare interesse il testo riguardante un trattato gnostico in dialetto copto-tebano, *sulle particolari virtù che hanno da Dio gli spiriti celesti.*

L'Attide di Androzione e un papiro di Oxyrhynchos.

Nota di GAETANO DE SANCTIS

Un papiro scoperto in Egitto il 13 gennaio 1906 e pubblicato non ha guari da B. Grenfell e A. Hunt nel quinto volume degli *Oxyrhynchus Papyri* (London 1908) col n. 842, contiene varie pagine di un'opera storica del sec. IV av. Cr., che trattano largamente intorno alle vicende degli anni 396 e 395 nella penisola ellenica e nell'Asia Minore. La scoperta è importantissima e per le notizie in parte fin qui ignote che il papiro contiene sulla storia di quegli anni, e tra le quali vanno sopra ogni cosa segnalate le informazioni concise, ma lucide, che dà sull'ordinamento che aveva allora la lega beotica, e per i nuovi elementi che fornisce a chi studia il formarsi della tradizione su quella età a noi pervenuta per mezzo degli scrittori più recenti, come Nepote, Diodoro, Plutarco e Giustino. Ma per giudicare appieno del valore delle notizie contenute nel papiro e soprattutto per trarne interamente le conseguenze che possono ricavarsene intorno al costituirsi della tradizione, occorrerebbe determinarne l'autore o almeno dell'autore stabilire con precisione l'età, la patria, la tendenza.

Su questo problema si sono già sperimentati non solo i benemeriti editori del papiro, ma anche gli eruditi a cui essi hanno fatto copia del testo prima che fosse reso di pubblica ragione, in particolare E. Meyer, U. di Wilamowitz-Möllendorff e il compianto Fed. Blass: dei quali i due primi, seguìti dagli editori, attribuiscono il papiro a Teopompo, l'ultimo, seguìto da J. B. Bury e da E. M. Walker, a Cratippo. Era infatti naturale, direi anzi inevitabile, che si pensasse ad attribuire un'opera storica in cui si trattava largamente dei primi anni del sec. IV

ad uno dei continuatori di Tucidide; e Tucidide, per quanto noi sappiamo, oltrechè da Senofonte, fu continuato soltanto da Teopompo e da Cratippo.

Eppure l'attribuzione a Teopompo è da respingere per ragioni così ovvie e manifeste che non sarebbe forse neppure il caso di enunciarle ov'essa non venisse patrocinata da eruditi del valore e dall'autorità del Meyer e del Wilamowitz. Del resto gli editori non hanno mancato essi stessi di mettere onestamente in luce le difficoltà cui andava incontro l'ipotesi da loro accolta. Innanzi tutto l'opera storica di cui discorriamo tratta delle relazioni tra Focesi, Locresi e Beoti in modo tale da dimostrarsi scritta non solo anteriormente alla battaglia di Cheronea, ma anche, se non ai primordî (357), almeno al termine della guerra sacra (346). Inoltre l'autore non usa affatto le Elleniche di Senofonte che, secondo ogni probabilità, vennero alla luce varî anni prima della metà del sec. IV; anzi non ne tien conto neppure dove, se le avesse conosciute, sarebbe stato più naturale che vi avesse ricorso, nella storia delle campagne d'Agesilao in Asia, di cui Senofonte discorre come testimone oculare; e ciò sebbene appaia chiaramente che il nostro storico non mancava d'accuratezza e assai più di Senofonte cercava informazioni su tutti senza distinzione gli avvenimenti che si riferivano al periodo da lui trattato. Ora Teopompo, secondo la testimonianza del patriarca Fozio, che risale probabilmente in ultima analisi alle χιακαὶ ἐπιστολαί dello storico e che, trovandosi d'accordo con quel che sappiamo di più sicuro intorno a lui, è stata fin qui generalmente accolta dagli eruditi, era in età di quarantacinque anni quando per volontà di Alessandro Magno tornò nella sua sua patria Chio ond'era esule (333). Dev'essere nato quindi nel 378 o al più presto intorno al 380. Perciò, secondo ogni probabilità, quando fu scritta la storia di cui ci occupiamo Teopompo non era che un giovane venticinquenne o trentenne. Ora le sue Elleniche in dodici libri giungevano fino alla battaglia di Cnido (394). I fatti pertanto del 396 e del 395 non potevano esservi riferiti che in uno degli ultimi libri, e probabilmente nell'undecimo. Egli avrebbe dunque compiuta la maggior parte dell'opera sua tra i venti e i trent'anni.

Nessuno vorrà dire che ciò sia molto verisimile. Ma v'ha di più. Con grande abbondanza di particolari è riportata nel

papiro la notizia che un tal Demeneto al Pireo mise in mare per conto suo una trireme con cui salpò per raggiungere Conone. Or questo fatto, di mediocrissima importanza per chi non narrava la storia da un punto di vista strettamente ateniese, è difficile che potesse esser riferito con tal larghezza da uno che non ne fosse stato testimone oculare. Quindi nel 396 lo storico non solo già viveva, e in Atene, ma era in grado di rimanere impressionato dei fatti che si svolgevano sotto i suoi occhi. È però non può in alcun modo trattarsi di Teopompo. Certamente v'è un modo di sfuggire a questa conclusione. Teopompo, può dirsi, attinse la notizia ad una fonte scritta. Ma non è verisimile che l'autore del papiro, il quale non aveva neppure dinanzi a sè le Elleniche di Senofonte, o le trascurava, disponesse pel periodo da lui trattato d'una letteratura a cui poter attingere simili particolari, e se ne desse cura: e anche ammesso ciò, se si capisce benissimo come uno scrittore che s'era trovato in Atene nel 396 alla partenza di quella trireme ed aveva visto e condiviso il terrore o l'entusiasmo con cui l'ardimento di Demeneto era stato accolto tra i suoi concittadini, ne facesse menzione nella sua storia di quei tempi: assai meno si capisce che d'un fatto di sì poca conseguenza si occupasse tanti anni dopo uno storico di Chio.

Ad ogni modo meniamo per buone tutte queste inverisimiglianze. Un punto assai degno di considerazione è che Diodoro risente senza alcun dubbio la efficacia del nostro storico, ma non l'usa direttamente. Ciò si vede prima di tutto a proposito della ribellione di Rodi agli Spartani. Questa accadde, stando a Diodoro, quando non si voglia forzarne il testo, prima che l'armata di Conone si accrescesse del contingente fenicio condottogli dal re di Sidone (XIV, 79, 7); stando al papiro, dopo che Conone ebbe ricevuto questo rinforzo. La versione del papiro è certo preferibile: ma è degno di nota come la fonte di Diodoro, attingendo al nostro autore particolari che non trovava in Senofonte, ne abbia alterato il racconto. E questa alterazione ha un motivo evidente: esagerare il merito di Conone e dei Ciprioti che erano con lui, attribuendo ad essi un successo felice che si doveva agli aiuti barbarici. Non meno notevole è la concordia tra Diodoro (XIV, 80) e il papiro rispetto alla vittoria di Agesilao presso il fiume Pattolo, che Senofonte narra in modo affatto

diverso. Eppure anche qui è facile vedere che Diodoro non segue direttamente il nostro autore. Non parlo dei seimila nemici uccisi in luogo dei seicento menzionati nel papiro, che son dovuti certo a svista d'amanuensi o ad errore di lettura dello storico d'Agirio; ma nel racconto pur più conciso di Diodoro non manca la menzione del peana al cui canto i Greci si scagliarono contro i barbari: particolare che nel papiro non è e che Diodoro deve certo alla sua fonte diretta. Un ulteriore raffronto sarebbe istruttivo, ma non è necessario al tema di cui mi occupo. Mi basti assodare che il racconto di Diodoro dipende, ma non direttamente, da quello che è dato nel papiro. Che Diodoro abbia proceduto lui stesso ad una contaminazione di fonti è escluso dal metodo usato generalmente da questo miserrimo tra gli storici antichi. È noto che in generale egli non ci ha dato che serie d'estratti presi da singoli storici. Nel caso nostro poi la cosa è evidente anche per questo: delle due alterazioni che abbiamo segnalato alla narrazione fornita dal papiro, l'una è dovuta alla stessa tendenza favorevole ai Greci e in particolare agli Ateniesi, di cui Eforo, una delle principali fonti di Diodoro per la storia greca, dà saggio ad ogni tratto; l'altra è dovuta alla stessa ricerca d'abbellimenti retorici a cui anche altrove sacrifica la verità storica, e talora in modo al tutto analogo, lo stesso Eforo. E inoltre con l'uso d'Eforo si spiega anche il disordine della cronologia di Diodoro, di cui sarebbe assai più difficile render ragione se egli avesse usato direttamente un annalista (v. Walker presso gli editori a p. 137). Che qui nel XIV libro di Diodoro Eforo sia la fonte principalissima e probabilmente unica per la storia greca, è stato asserito, e con ottime ragioni, da parecchi critici. A noi basti ricordare il contatto verbale tra Diodoro XIV, 13 e 98, 2 e i fr. 127 e 134 d'Eforo e la menzione di Cuma (XIV, 79, 3), la città nativa d'Eforo, che questo storico soleva ricordare sovente, a proposito ed a sproposito, nel racconto della spedizione stessa d'Agesilao, in un luogo in cui Senofonte non ne faceva alcun cenno. Quindi Eforo avrebbe usato nella sua storia, e trascrivendole in qualche punto alla lettera, le Elleniche di Teopompo. Ora ciò non è molto verisimile, tanto più in quanto Eforo non pare fosse più giovane di Teopompo; e pare che morisse assai prima di lui. Teopompo infatti sopravvisse, e forse non di poco, alla morte

di Alessandro (323). Eforo sopravvisse di poco alla partenza di Alessandro per l'Asia (334), come fa credere tra altro l'esser rimasta bruscamente interrotta in mezzo ai fatti del regno di Filippo la sua storia, a cui il figlio Demofilo dovette aggiungere il racconto della guerra sacra. Inoltre è bene ricordare che la storia d'Eforo è stata usata da Aristotele non solo nella πολιτεία Ἀθηναίων, ma secondo ogni probabilità anche nella Politica, di parecchio anteriore; ed è pur bene ricordare che una buona parte dell'opera sua deve averla Eforo composta durante gli anni che precedettero alla battaglia di Cheronea. La lode ai Beoti pel loro primato militare, che Diodoro (XI, 82, 3) trascrive con incredibile leggerezza da Eforo, quando la potenza militare dei Beoti, anzi di tutti i Greci, più non esisteva, fu scritta anteriormente al 338, cioè prima che la battaglia di Cheronea dimostrasse la superiorità dell'Ares macedone.

Queste difficoltà cronologiche son gravi, ma ve ne hanno altre a mio vedere assai più gravi, sebbene non, come queste, riducibili in cifre. Di Teopompo possediamo parecchi frammenti, e si ha il giudizio datone da un altro storico che aveva letto, e accuratamente, le sue opere, Dionisio di Alicarnasso (*ad Cn. Pomp.*, 6). Ora Dionisio ci dice che Teopompo era acuto e severo giudice delle azioni umane e dei loro motivi riposti, terribile nel riprendere le colpe degli uomini e dei popoli, alto e magnifico nella lingua e armonioso nel periodare (καθαρά τε γὰρ ἡ λέξις καὶ κοινὴ καὶ σαφὴς ὑψηλή τε καὶ μεγαλοπρεπὴς καὶ τὸ πομπικὸν ἔχουσα πολύ, συγκειμένη τε κατὰ τὴν μέσην ἁρμονίαν, ἡδέως καὶ μαλακῶς ῥέουσα). Di tali qualità non mancano esempi, tutt'altro che dispregevoli, nei frammenti. Si confronti, per non citarne che un paio, il giudizio sulla corte di Filippo figlio d'Aminta conservatoci in Polibio (VIII, 9) e quello su Ermia, che s'è rinvenuto, purtroppo in condizioni assai frammentarie, nel commentario di Didimo a Demostene (col. 4, 68 segg.). Teopompo insomma si rivela e dai giudizi degli antichi e dai frammenti coloritore efficace e scrittore d'esuberante facondia, maestro in tutti gli artifizî retorici in uso nella scuola isocratea, amico dei periodi ben torniti, come storico psicologo predecessore di Tacito, per quanto di Tacito avesse l'austerità del giudizio, ma non la mirabile concisione della frase, proclive ad usare ed abusare delle ampie concioni che gli davano occasione di sfoggiare la sua eloquenza e di esporre

i suoi giudizî morali sugli uomini e gli stati. Certo i suoi artifizî retorici potevano parer povera cosa al gusto raffinato o, se vuolsi, pervertito di qualche scrittore dell'età ellenistica, come Duride di Samo (Phot., *Bibl.*, cod. 176, p. 121); ma convien riflettere che Duride avrebbe trovato probabilmente manchevole per rispetto alla ἡδονὴ ἐν τῷ φράσαι Isocrate stesso non meno de' suoi scolari Eforo e Teopompo. Certo è pure che nei frammenti di Teopompo si trova qualche tratto più disadorno e meno armonioso; ma bisogna tener presente prima di tutto che talvolta i frammenti possono assai aver perduto della loro forma genuina in una trascrizione poco coscienziosa; poi che, se quello era il carattere generale delle opere di Teopompo, poteva darsi che trattandosi, come è talora pur dovere di uno storico, di cose di poco conto, vi lasciasse correre qua e là periodi meno accurati ed eleganti. E ad ogni modo qualche frammento meno eloquente di Teopompo è di carattere narrativo e non si riferisce nè ai giudizî dello storico nè a demegorie poste in bocca a' suoi personaggi. Un Teopompo il quale avesse riassunto così i discorsi fatti all'assemblea ateniese: συνεληλυθότος δὲ τοῦ πλήθους ἀνιστάμενοι τῶν Ἀθηναίων οἵ τε περὶ Θρασύβουλον καὶ Αἴσιμον καί Ἄνυτον ἐδίδασκον αὐτοὺς ὅτι μέγαν αἱροῦνται κίνδυνον εἰ μὴ τὴν πόλιν ἀπολύσουσι τῆς αἰτίας, avrebbe avuto bisogno, dal punto di vista isocrateo, di vigorosissimo sprone, non certo di freno.

In sostanza in reciso contrasto col carattere retorico che non solo Dionisio, ma anche Plutarco (*reip. ger. praec.*, 6), ascrive alla storia di Teopompo è la forma e la sostanza del nostro papiro. La narrazione vi procede concisa e disadorna: nessun artifizio di stile, nessuna declamazione di moralista, nessuna amara invettiva, l'analisi psicologica contenuta in limiti molto modesti. Lo scrittore è uomo sereno e pratico, che bada a dir le cose con precisione e chiarezza e che può avere le sue tendenze politiche, ma non ha neppur l'ombra di πάθος, onde con perfetta indifferenza riferisce che i demagoghi ateniesi desideravano la guerra per arricchirsi a spese dello stato e che una sollevazione democratica rovesciò non senza spargimento di sangue il governo oligarchico di Rodi d'accordo con Conone, che pure da quel governo era stato ricevuto nell'isola. Di quelle concioni che tanto amava Teopompo non v'è traccia: una sola

ve n' è, di più che tacitiana brevità (col. 11, 22-23): ἴωμεν, ὦ ἄνδρες, ἔφη, πολῖται ἐπὶ τοὺς τυράννους, τὴν ταχίστην: e sì che occasioni per introdurre demegorie in quegli anni pieni d'avvenimenti non mancavano: nè v'è traccia, per quanto lo scrittore sembri più un moderato che un democratico, di avversione alla democrazia. E in conclusione, se si trattasse di Teopompo nel nostro papiro, avremmo un Teopompo del tutto disforme da quello di cui ci parlano gli antichi e che suscitava, secondo il diverso punto di vista da cui ne giudicavano, la loro ammirazione o il loro biasimo. Converrebbe ammettere che Teopompo avesse scritto le sue Elleniche giovanissimo, prima d'aver risentito l'efficacia dell' insegnamento d'Isocrate, prima d'aver acquistato l'esuberanza cui accenna il noto aneddoto e prima d'esser divenuto l'amaro censore ch'egli fu delle debolezze e dei vizî umani. Ma questa ipotesi va incontro a difficoltà gravissime. Come Teopompo già da giovane fosse maestro nell'arte retorica dimostra la sua vittoria nell'agone proposto circa il 350 da Artemisia di Caria per un encomio funebre in onore del suo defunto consorte Maussollo. Inoltre l'esuberanza rimproverata a Teopompo è naturale che nelle opere giovanili si manifestasse meglio che nelle opere dell'età matura: tanto più che gli antichi non fanno distinzione per questo rispetto tra le Elleniche e le Filippiche, mentre Dionisio, che dà di Teopompo un giudizio diffuso e ben meditato, non poteva mancare di mettere in rilievo, se v'era realmente, una differenza così profonda. Infine la efficacia dell'indirizzo isocrateo nelle Elleniche è il presupposto di di quell'aneddoto secondo cui Isocrate per l'appunto avrebbe indotto Teopompo a continuare Tucidide. E vi ha di più. Che retorico fosse realmente il carattere delle Elleniche è dimostrato dalla più importante testimonianza antica su di esse: la quale è sì esplicita che basterebbe da sola ad abbattere la ipotesi del Wilamowitz e del Meyer. È nel famoso passo di Porfirio sui plagi degli scrittori greci presso Euseb., *praep. ev.*, X, 3, p. 465; e converrà riportarla per intero: κἀγώ, φησὶν ὁ Νικαγόρας, τοῖς Ἑλληνικοῖς ἐντυγχάνων αὐτοῦ τε καὶ τοῦ Ξενοφῶντος, πολλὰ τοῦ Ξενοφῶντος αὐτὸν μετατιθέντα κατείληφα, καὶ τὸ δεινὸν ὅτι ἐπὶ τὸ χεῖρον, τὰ γοῦν περὶ τῆς Φαρναβάζου πρὸς Ἀγησίλαον συνόδου δι' Ἀπολλοφάνους τοῦ Κυζικηνοῦ καὶ τὰς ἀμφοῖν πρὸς ἀλλήλους ἐνσπόνδους διαλέξεις ἃς ἐν τῇ τετάρτῃ Ξενοφῶν ἀνέγραψε

πάνυ χαριέντως καὶ πρεπόντως ἀμφοῖν εἰς τὴν ἑνδεκάτην τῶν Ἑλληνικῶν μεταθεὶς ὁ Θεόπομπος ἀργά τε καὶ ἀκίνητα πεποίηκε καὶ ἄπρακτα· λόγου γὰρ δύναμιν καὶ διὰ τὴν κλοπὴν ἐξεργασίαν ἐμβάλλειν καὶ ἐπιδείκνυσθαι σπουδάζων βραδὺς καὶ μέλλων καὶ ἀναβαλλομένῳ ἐοικὸς φαίνεται καὶ τὸ ἔμψυχον καὶ ἐνεργὸν τὸ Ξενοφῶντος διαφθείρων. Dunque vi era nelle Elleniche di Teopompo largo uso di Senofonte, una retorica che moveva a nausea chi avesse formato il gusto sulla grazia senofontea e, inseriti nell'azione, lunghi discorsi che la rallentavano stancando il lettore. Più chiaramente di così Porfirio non poteva esprimersi, e l'accenno ai luoghi precisi dei due scrittori esclude che possa trattarsi di fantastiche accuse di plagio. Ora di tutte le caratteristiche indicate da Porfirio niuna si riscontra nel papiro; è proprio il caso di dire, con venia del lettore, che vi " brillano per la loro assenza „; e se anche la lacuna che ha portato via nel papiro la narrazione di quel colloquio ci toglie la prova matematica, la prova indiziale che il nostro papiro non spetti a Teopompo deve considerarsi come pienamente raggiunta.

In conclusione contro l'ipotesi che lo storico del nostro papiro sia Teopompo v'è un cumulo di difficoltà, tra cui non sono le maggiori le pur gravissime difficoltà d'ordine cronologico. Ed una ipotesi che, senza aver fondamento vero di fatto, presenta simili inverisimiglianze, va senz'altro abbandonata. Dissi senza vero fondamento di fatto, perchè gli argomenti di fatto con cui si è cercato di convalidarla, prescindendo da quelli già accennati e che son piuttosto istanze in contrario, son di sì poco conto che meriterebbero appena una menzione. Essi si riducono a due, che un grammatico ricorda aver Teopompo usato καθάραι in senso di ἐλθεῖν (fr. 327), uso che ricorre pure nel nostro papiro (col. 18, 39), e poi che Teopompo usava la forma Καρπασεῖς per denotare gli abitanti di Carpaso in Cipro, forma di cui ricorre nel nostro papiro il singolare Καρπασεύς: ma questa ultima coincidenza ha assai poco valore, perchè il nostro papiro parla d'un cittadino di Carpaso, non dei Carpasî, e Teopompo, nel frammento, dei Carpasî e non d'un cittadino di Carpaso; e la prima ne ha anche meno, perchè καθάραι in quel senso non è frequente, ma, come si vede in qualsiasi lessico, non è tanto raro da permettere alcuna conclusione.

Poco meno improbabile peraltro è l'attribuzione del papiro a Cratippo proposta dal Blass. Su Cratippo e l'opera sua abbiamo soltanto quattro testimonianze antiche, di cui nessuna anteriore a Dionisio d'Alicarnasso. Ne taceva, a quel che pare, Polibio nella sua famosa rassegna degli storici che lo precedettero, e lo trascuravano gli scoliasti e i lessicografi, che pur ricorrevano ad Eforo, a Teopompo, ad Anassimene, a Timeo, agli attidografi. Lo storico cui appartiene il papiro ebbe nella nostra tradizione una grandissima efficacia, e può dirsi persino che nei suoi elementi essenziali la tradizione a noi pervenuta sugli anni 396 e 395 risalga per metà a Senofonte, per metà a lui. Ora è possibile che uno storico così trascurato come Cratippo abbia avuto una tal parte nel formarsi della tradizione?

Vi ha di più. Delle quattro menzioni di Cratippo due fanno sospettare che egli non sia affatto, come lo dice Dionisio di Alicarnasso (*De Thuc.*, 16), contemporaneo di Tucidide e neppure di poco posteriore. Dice Marcellino nella vita di Tucidide (33) di dover respingere l'opinione di Zopiro che Tucidide morisse in Tracia, per quanto Cratippo ritenga che egli è nel vero. Or così non poteva esprimersi un contemporaneo sopra un fatto che al suo tempo era certo notorio. Anche meno poi poteva un contemporaneo narrare che Tucidide nel libro ottavo aveva omesso le demegorie avvedutosi che turbavano l'ordine del racconto e riuscivano tediose al lettore, e che poi non aveva più dato termine alla sua storia distoltone dalla ineguaglianza che era risultata da questo suo tardo ravvedimento (Dionys. l. c.). Questa è critica erudita alessandrina che sa di muffa e d'olio di lampada, non giudizio d'uno scrittore del principio del IV sec. Quindi è assai verisimile, conforme ad una ipotesi accolta dal Susemihl (*Geschichte der alexandrinischen Litteratur*, I, p. 646), che Cratippo fosse uno storico dell'età ellenistica, il quale, mentre cresceva l'interesse per Tucidide e non parevano soddisfacenti le continuazioni che ne avevano dato Senofonte e Teopompo, si sarebbe accinto a una nuova continuazione più delle altre adatta ad appagare la sete d'erudizione dell'età sua. Del resto anche nell'attribuire la mutilazione delle Erme ai Corinzi, Cratippo (*Vitae X orat.*, p. 834 d. Cfr. Phot. s. v. Ἑρμοκοπίδαι), sembra fondarsi non sull'opinione dei contemporanei (non ve n'è cenno

in Tucidide nè negli oratori attici), ma sull'induzione di qualche erudito posteriore. Ora la stessa cosa essendo detta da Cratippo e da Filocoro (fr. 110), e Cratippo avendone fatto cenno soltanto di passaggio in qualche digressione (perchè la sua narrazione storica continuata non poteva cominciare che col 411), è assai difficile che Cratippo fosse la fonte di Filocoro e molto più verisimile che Filocoro fosse la fonte di Cratippo. Tutto considerato, par dunque verisimile che Cratippo non sia contemporaneo ai fatti che narra; per quanto si capisca come l'aver egli continuato Tucidide possa aver fatto pensare a qualche lettore disattento che fosse contemporaneo o poco posteriore al grande storico. E ad ogni modo anche le difficoltà contro l'attribuzione del nostro papiro a Cratippo son tali che siffatta ipotesi va ritenuta molto improbabile.

Ma abbiamo noi la scelta soltanto tra Teopompo e Cratippo? In realtà a Teopompo ed a Cratippo si è pensato perchè soli continuatori di Tucidide oltre Senofonte. Escluso l'uno e l'altro, resta a cercar l'autore fuori della cerchia ristretta dei continuatori di Tucidide. E non solo nulla vieta di uscire dalle strettoie di questa cerchia, ma abbiamo anzi argomento per ritenere che il nostro papiro non è un frammento d'una continuazione di Tucidide. Vedansi le frasi che vi sono usate per indicare la transizione da un anno ad un altro. Purtroppo, per lo stato frammentario del testo, tale transizione non vi è notata che una volta sola, e anche questa sola volta in modo assai lacunoso: τὰ μ]ὲν οὖν ἁδρότατα τῶν | [circa 20 lettere περ]ὶ τοῦτο συμβάντων | [οὕτως ἐγένετο· ἀπὸ δὲ τοῦ]δε τοῦ [θ]έρους τῇ μὲν | [lacuna] ἔτος ὄγδοον ἐνειστήκει | [lacuna] αρος τὰς τριήρεις ατα- |. Così leggono e suppliscono gli editori. Ma i supplementi sono ben lontani dall'esser soddisfacenti. Nella prima parte, dove si accenna al termine di un anno, è da supporre che l'anno stesso dovesse essere designato in qualche modo nella lacuna, p. e. con la formola ἐν τῷ ἐπὶ . . . . . ἔτει; se pure il punto denotante la incertezza di lettura del secondo ο di τοῦτο non permette di congetturare [ἐν τῷ ἔτε]ι τούτῳ: di che bisognerebbe giudicare riscontrando il papiro. Ciò del resto poco monta. Ma non molto soddisfa quell'ἀπὸ δὲ τοῦδε τοῦ θέρους, dove è da leggere qualcosa come ἐπιγιγνομένου o μεσοῦντος δὲ τοῦ θέρους. La persona o la cosa per cui entrava l'ottavo anno è in lacuna; ma quel-

l'anno (convengo in ciò appieno con gli editori) (1) non può essere computato che dall'arcontato di Euclide (403/2). Di ciò sarà opportuno ripetere brevemente la dimostrazione. Il capo d'anno cade dopo che Farace cessò d'essere navarco (col. 1, 32), o forse, per parlare con più precisione, dopo che Farace cessò di comandare l'armata lacedemonia nelle acque di Caria, ma prima che Conone s'impadronisse di Rodi (col. 3, 23 segg.). Ora non può esservi dubbio che le operazioni combinate di Dercillida e Farace in Caria spettino al 397, e al principio del 396 l'assedio di Conone in Cauno per opera dello stesso Farace (Diod. XIV, 79). D'altra parte il navarco spartano che assunse il potere poco prima che Conone occupasse Rodi (col. 3, 21) è certamente il predecessore di quel navarco che prese il comando nella state del 395 (secondo il papiro col. 15, 33, Chiricrate). Ne segue che il principio dell'anno ottavo cade nel corso del 396, ma dopo il termine dell'inverno e il riaprirsi della navigazione, quindi nel principio della state o alla metà di essa. Il nuovo anno è pertanto l'ottavo per la città di Atene e dopo il termine dell'anarchia (404/3). Leggeremo perciò: τῇ μὲν [πόλει μετὰ τὴν ἀναρχίαν] ἔτος ὄγδοον ἐνειστήκει [ἐν ᾧ Φορμίων ἦρξεν, ὁ δὲ...] αρος, etc. Non par che possa leggersi (ed è caratteristico) τῇ μὲν τῶν Ἀθηναίων o τῇ μὲν Ἀθηναίων πόλει per deficienza di spazio; nè per mantenere questo supplemento gioverebbe il trasportare μετὰ τὴν ἀναρχίαν dopo ἐνειστήκει, sia perchè non vi sarebbe più spazio pel nome dell'arconte, che, dato il computo μετὰ τὴν ἀναρχίαν, sembra indispensabile, sia perchè la frase diverrebbe alquanto zoppicante, sia perchè le parole τῶν Ἀθηναίων πόλει sarebbero da sole troppo scarse a riempire la lacuna. Non credo del resto che i supplementi qui proposti abbiano bisogno dal punto di vista formale di una speciale giustificazione. Se però questa fa duopo, basti rimandare, p. es., a Polibio (I, 6, 1): ἔτος μὲν οὖν ἐνειστήκει μετὰ τὴν ἐν Αἰγὸς ποταμοῖς ναυμαχίαν ἐννεακαιδέκατον, πρὸ δὲ τῆς ἐν Λεύκτροις μάχης ἑκκαιδέκατον. ἐν ᾧ Λακεδαιμόνιοι μὲν κτλ.

Ma, anche prescindendo dalla scelta precisa dei supplementi, questa maniera di computo non è da supporsi nelle Elleniche di

(1) Convengo pure con essi, e per le medesime ragioni da essi addotte, nel ritenere che il brano A del papiro vada posto innanzi ai brani B e D.

Teopompo. Che se Teopompo, come Tucidide, che egli continuava, dava agli anni un numero ordinale, non poteva cominciare un nuovo computo se non dopo il termine del 27° ed ultimo anno della guerra peloponnesiaca, in modo che il 396/5 per lui sarebbe stato l'anno nono e non l'ottavo. Il computo del papiro può solo giustificarsi partendo da un punto di vista strettamente ateniese. Ma la restaurazione democratica in Atene non poteva esser mai l'era d'uno storico nè Ateniese nè propenso alla democrazia, e che non s'occupava specialmente d'Atene, come Teopompo, tanto più che narrando dopo la guerra del Peloponneso solo i fatti compresi tra la distruzione e la ricostruzione delle lunghe mura d'Atene, egli avrebbe scelto un'era tanto inopportuna al suo proposito, quanto disdicevole alla economia della sua narrazione, invece di partire, come era naturale, dalla distruzione appunto di quelle mura. Ciò appare di piena evidenza, quando pure per la incertezza dei singoli supplementi non vogliasi insistere sul fatto che solo un Ateniese poteva intendere senz'altro per πόλις ed ἄρχων la città di Atene e il suo arconte eponimo.

Così il nostro storico non pare fosse continuatore di Tucidide. Ma prima di procedere oltre nella ricerca è bene di fissarne alcune caratteristiche. È chiaro: 1° che si tratta d'uno storico contemporaneo o almeno vicinissimo di tempo ai fatti narrati; 2° che questo storico ha avuto una efficacia innegabile sulla nostra tradizione; 3° che va ricercato tra gli storici a noi ben noti, perchè è impossibile che non siamo informati d'uno storico greco del IV secolo che si leggeva ancora in un cantone remoto dell'Egitto intorno al 200 dopo Cr. Questi ultimi due punti ci dànno affidamento di poter risolvere il problema; altrimenti dovremmo rinunciarvi, non essendovi dubbio che nella prima metà del sec. IV, anche prima della pubblicazione delle Elleniche di Senofonte, s'era formata una copiosa letteratura storica di secondaria importanza a noi ignota o appena nota (v. E. Meyer, *Geschichte des Altertums*, III, p. 278).

Siffatte caratteristiche (se prescindiamo dagli attidografi) non si applicano, oltre a Teopompo, che ad Eforo e ad Anassimene. Eppure d'Eforo, come già hanno riconosciuto gli editori, non può trattarsi. Prima di tutto Eforo era un retore, per quanto la sua retorica fosse meno lussureggiante di quella di Teopompo;

poi non disponeva come il nostro storico i fatti annalisticamente, ma κατὰ εἴδη; poi il suo racconto ci è per questo periodo rappresentato da Diodoro, di cui abbiamo veduto le caratteristiche divergenze col papiro; poi Eforo avversava Sparta e il nostro autore non l'avversa; infine Eforo scriveva non solo di storia della penisola ellenica o dell'Asia Minore, ma di storia generale: qui di storia generale non v'è alcuna traccia; nè v'è traccia delle sue triviali considerazioni etico-politiche, frequenti fino al tedio. E si potrebbe continuare; ma è da presumere che nessuno attribuisca il nostro papiro ad Eforo. E se poi taluno, pur dopo aver confrontato la trattazione *toto coelo* diversa delle cause della guerra del Peloponneso in Eforo e della guerra corinzia nel nostro storico, vorrà identificarli, non ci sarà argomento che valga a persuaderlo, ma resterà senza dubbio solo. Contro Anassimene di Lampsaco poi val l'argomento che, giungendo in dodici libri dalla teogonia alla battaglia di Mantinea (362) e occupandosi in essi non solo della storia di tutti i Greci, ma anche di quella dei barbari, non poteva certo trattare dei fatti anche minori del 396 e 395 con l'ampiezza con cui ne discorre il nostro papiro. Che del resto per la retorica e le concioni, sebbene appartenente ad altra scuola, Anassimene non fosse da meno d'Eforo e di Teopompo, è provato a sufficenza da vari frammenti conservati nel citato commentario di Didimo e, quando non bastasse, dalla orazione pseudodemostenica contro la lettera di Filippo, che probabilmente è una concione estratta dalle Filippiche di quello storico.

Dunque il nostro papiro non sembra appartenere nè a Teopompo nè a Cratippo nè ad Eforo nè ad Anassimene; e se è ben naturale del resto che tra questi (i maggiori scrittori che si occupassero dei primi anni del sec. IV) si sia cercato lo storico cui attribuirlo, non doveva essere difficile avvedersi che non era questa la via migliore per condurre a termine la ricerca. Infatti l'autore d'uno scritto asciutto, disadorno, prosaico, senza retorica, senza πάθος nè palese nè sapientemente contenuto, senza larghezza di considerazioni morali e psicologiche, non pare che debba cercarsi tra gli autori di quelli ch'erano o che si riputavano i maggiori capilavori della storiografia greca. Non era un libro il nostro che fosse scritto con grandi pretese d'artista e di scienziato, per quanto sorprenda appunto gradevolmente il let-

tore moderno per la sua mancanza di pretese e di retorica. Era solo una modesta e sobria raccolta di notizie fatta da un uomo pratico ed intelligente, non da un retore nè da un pensatore. Nè v'è contraddizione in ciò con quel che abbiamo stabilito sopra, che il libro ebbe grande efficacia sulla tradizione e fu largamente diffuso, perchè anche nell'antichità non le sole grandi opere d'arte ebbero efficacia e diffusione.

E vi era appunto una categoria di scrittori, le cui opere, per quanto uniformi e tediose alla lettura, erano consultate dagli antichi come miniere di notizie fededegne, scrittori che debbono pur essersi occupati, e largamente, del periodo di cui discorriamo, gli Attidografi. E come, esclusi i quattro maggiori storici di cui si è discorso, tra gli scrittori che ebbero notorietà e che influirono sulla tradizione par che solo qualche attidografo possa essersi occupato con tale larghezza degli anni 396 e 395 av. Cr., è probabile che tra essi vada cercato il nostro autore. A questa conclusione del resto si sarebbe potuto fors'anche giungere direttamente, senza procedere per via d'esclusione. Infatti, se è vero quel che abbiamo congetturato sulla indicazione del nuovo anno 396/5, a nessuno meglio che ad un attidografo si attaglia non solo la frase, su cui potrebbe rimaner qualche dubbiezza, ma la scelta dell'era, che non aveva importanza se non per Atene, e quella dell'anno, che sembra fosse precisamente l'anno attico. Così, per valermi d'una analogia moderna, nel *Corpus Inscriptionum Atticarum* (o, come deve dirsi ora, nelle *Inscriptiones Atticae*) gli editori hanno separato giustamente le *Inscriptiones Euclidis anno antiquiores* dalle altre, mentre nella *Sylloge* del Dittenberger, il cui argomento è panellenico, si separano invece le iscrizioni anteriori e posteriori alla guerra del Peloponneso. Nulla ha poi di singolare che in un'Attide, oltre il nome dell'arconte, si indicasse di quanto l'anno di cui esso era eponimo fosse posteriore a un avvenimento notevole di storia ateniese, come nella πολιτεία aristotelica uno dei punti di partenza dei computi cronologici è l'arcontato di Solone. Sappiamo del resto che talvolta nell'Attide il nome dell'arconte era premesso in nominativo al racconto dei fatti compiuti in un dato anno. E questa doveva certo essere la regola quando di quei fatti si dava un cenno di poche righe e in modo che il libro somigliasse più ad un indice che ad una narrazione storica (come

doveva essere in generale per i tempi anteriori a quelli in cui era vissuto l'attidografo). Ma le cose dovevano essere diverse quando il nome dell'arconte veniva menzionato quasi di passaggio in mezzo ad un'ampia e continuata esposizione di fatti: al modo stesso che non tutta la storia di Livio aveva la forma asciutta che assume alcune volte pei primi anni della repubblica, ad es. per gli anni 500 e 499: *consules Servius Sulpicius, Manius Tullius; nihil dignum memoria actum. T. Aebutius deinde et C. Vetusius. his consulibus Fidenae obsessae, Crustumeria capta, Praeneste ab Latinis ad Romanos descivit* (II 19).

Ma non basta. Si confronti il papiro con le Elleniche di Senofonte. Si vedrà che nel papiro è assai meglio lumeggiato tutto ciò che ha relazione con Atene. Nessuno fuorchè un Ateniese poteva dare importanza all'episodio di Demeneto e della sua nave e coglierne occasione per delineare la posizione dei maggiori uomini politici di Atene di fronte alla guerra che si andava preparando; e in un Ateniese si spiega il profondo interesse con cui son narrati i precedenti di quella battaglia di Cnido che segnò il termine della egemonia marittima spartana e permise agli Ateniesi di ricostruire le loro lunghe mura. A ciò non si opponga che lo scrittore si occupa con larghezza di cose non strettamente pertinenti alla storia ateniese, come le imprese di Agesilao in Asia, la uccisione di Tissaferne per opera di Titrauste e di Arieo (1) e la costituzione della lega

(1) È opportuno qui notare che la venuta di Arieo nell'Asia Minore ha dato occasione a narrare d'una seconda ribellione di Arieo al re nell'inverno 395/4 (Judeich, *Kleinasiatische Studien*, pag. 71, n. 2; 72, n. 1. Meyer, *Geschichte des Altertums*, V, 212). Il fondamento di questa opinione è che Spitridate e i Paflagoni, dopo aver defezionato dal re ad Agesilao, disgustatisi coi Lacedemoni per la loro prepotenza, ᾤχοντο ἀπιόντες εἰς Σάρδεις πρὸς Ἀριαῖον πιστεύσαντες ὅτι καὶ ὁ Ἀριαῖος ἀποστὰς βασιλέως ἐπολέμησεν αὐτῷ (Xenoph., *Hell.*, IV, 1, 27, cfr. Plut., *Agesil.*, 11, 4). Ma c'è appena bisogno di dire che d'una ribellione di Sardi, il propugnacolo della potenza persiana nell'Asia Minore, in questi anni non vi ha la più piccola traccia. E d'altra parte se Arieo s'era davvero ribellato al re, doveva essersi alleato con Agesilao e quindi doveva essere poco disposto ad accogliere chi defezionava da lui. È chiaro che Spitridate, desiderando di tornare in pace col re dopo esserglisi ribellato, cercò di ottenere il suo intento per mezzo di Arieo, che, al pari di lui ribelle ad Artaserse, aveva poi saputo tornargli in grazia: questo e non altro dice, chi ben lo intenda, il passo di Senofonte.

beotica. Per citare qualche analogia, l'attidografo Androzione si occupava degli Sparti e della fondazione di Tebe (fr. 28-30), delle leggende tebane (fr. 31), della milizia scelta arcadica degli Epariti (fr. 54), della battaglia di Neone (fr. 23), delle imprese di Onimarco (fr. 24); e le numerose citazioni di lui presso Stefano Bizantino mostrano quanto frequentemente avesse occasione di accennare a luoghi fuori dell'Attica; tantochè tra i suoi frammenti quelli che si riferiscono a cose propriamente attiche sono in minoranza. A giudicare pertanto da ciò che ne rimane, l'attidografo Androzione nei libri successivi al III, nei quali conduceva il racconto dall'arcontato d'Euclide sino ad un punto non ben determinabile del regno di Filippo, doveva narrare, pur facendo centro in Atene, le vicende della Grecia in generale; nè, come abbiamo veduto, vi mancava anche ricordo di imprese militari in cui gli Ateniesi non avevano avuto parte alcuna. E del resto era naturale e necessario che storie ateniesi scritte nel sec. IV facessero alla storia generale della Grecia tanto posto quanto ne fa p. es. alla storia generale d'Italia Niccolò Machiavelli nelle Istorie Fiorentine: nè si saprebbe proprio in qual modo Androzione avrebbe potuto dilungarsi per parecchi libri intorno ad un periodo di un mezzo secolo, in un' opera in cui non erano nè concioni nè frasi retoriche, se così non faceva: perchè rivolgimenti costituzionali in quegli anni ad Atene non accaddero, e le riforme d'ordine interno, p. es. la istituzione delle simmorie, non erano tali da fornirgli materia sì copiosa.

Contro l'attribuzione del papiro ad un attidografo potrebbe osservarsi che un Ateniese difficilmente si sarebbe mostrato così favorevole a Sparta. In effetto questa difficoltà non sussiste punto. Lo storico avrebbe preferito certo che Atene, contentandosi della pace e della tranquillità interna restaurata nel 403, non avesse mosso guerra ai Lacedemoni intesi allora alla lotta nazionale contro il barbaro. In ciò consiste tutto il suo laconismo: ed è un laconismo che può perdonarglisi facilmente, quando si pensi che un altro Ateniese, Senofonte, non solo si espresse nella sua storia in modo, per la egemonia spartana, assai più favorevole, ma anche per essa combattè contro le milizie della sua patria alla battaglia di Coronea. Pongasi mente del resto che il nostro attidografo scriveva probabilmente quando l'odio contro Sparta era un sentimento antiquato, dopo che il

timore della egemonia tebana aveva indotto ad allearsi gli antichi avversari, e i sentimenti nuovi erano stati consacrati nei campi di Mantinea, dove, combattendo per le due antiche rivali ora alleate, era morto il figlio del ribelle Senofonte, Grillo. Per giudicare del resto della tendenza del nostro scrittore conviene tenere presenti varie circostanze. Ad esempio caratteristico è che egli nega vi fossero in Tebe degli ἀττικίζοντες, osservando che l'interesse di partito, non la simpatia per gli Ateniesi mosse Ismenia a romperla con Sparta iniziando la guerra corinzia. Ed è pur caratteristico, e par dovuto al sentimento nazionale, quel che l'autore dice sull'oro persiano speso a piene mani in Grecia per instigare gli Elleni a insorgere contro Sparta mentre essa metteva a pericolo la potenza persiana nell'Asia Minore: non fu secondo lui l'oro straniero, ma gl'interessi personali o di partito che indussero i demagoghi di Tebe, d'Atene, d'Argo e di Corinto a preparare la riscossa contro Sparta. Ma d'altra parte anche alle gesta dell'eroe ateniese della guerra corinzia, Conone, è dato nel racconto un rilievo che non hanno in alcun modo presso l'altro storico ateniese, Senofonte; e l'opera di lui nel preparare la vittoria e nel domare con coraggio, fermezza e sagacia la sommossa dell'armata, che parve per un momento mettere ogni cosa in pericolo, è posta in una luce quale forse Conone stesso poteva appena desiderarne una migliore, talchè la sua figura si disegna netta e luminosa accanto a quella del re Agesilao, che invece predomina oscurandone ogni altra nelle Elleniche di Senofonte. E non parmi strano che l'autore ateniese possa rimpiangere la pace ingloriosa sotto l'egemonia spartana, che includeva la permanente rinuncia ad ogni ambizione d'impero. Già non era egli il solo a vedere nel dominio marittimo la fonte d'ogni male; come lui la pensavano anche altri grandissimi ateniesi, Platone p. es. e, almeno fino ad un certo segno, Isocrate. E del resto non era poi molto singolare che si pensasse a questo modo quando la così detta guerra sociale ebbe spezzato anche la seconda lega marittima e indotto molti Ateniesi a desiderare di vivere tranquilli senza più sogni di egemonia, cercando piuttosto di far rifiorire con una politica di pace e di raccoglimento la prosperità economica dello Stato. In sostanza il nostro scrittore non è colpevole nè d'un soverchio filolaconismo nè d'una troppo

calda amicizia per Tebe, sebbene delle cose tebane tratti assai meno sprezzantemente del suo conterraneo Senofonte; e per quanto egli non inclini certo verso demagoghi come il tebano Ismenia o l'ateniese Cefalo, mostra d'apprezzare equamente i migliori tra i democratici ateniesi, come Trasibulo (di Stiria) e Conone; e quando Conone protegge e provoca in Rodi l'insurrezione sanguinosa del demo contro l'oligarchia dei Diagorei, non ha per lui una parola di biasimo. È insomma lo storico del papiro quel che noi diremmo un moderato; ed è inoltre un uomo pratico, uso a scrutare le ragioni d'interesse che a lui paiono determinar le azioni degli uomini e ad occuparsi con certa larghezza di questioni finanziarie, come a proposito del modo tenuto dai Persiani nel dare i sussidi per le guerre.

Gli attidografi più noti tra i più antichi (chè solo dei più antichi e più noti può trattarsi nel nostro papiro) non sono che due, Clidemo e Androzione. Vasta abbastanza poteva esser l'opera d'ambedue perchè vi avesse luogo una trattazione ampia dei fatti del 396 e del 395. Clidemo nel terzo libro discorreva di Clistene; e se anche non è dimostrato che la sua Attide si prolungasse almeno per altri nove libri (perchè nella citazione del duodecimo presso Esichio s. v. Ἀγαμεμνόνια φρέατα il dodici è forse da correggere in due), nulla però si oppone a supporre che ne abbracciasse non pochi altri. Certo è che egli trattava della spedizione ateniese in Sicilia, e certo è pure che scriveva dopo la istituzione delle simmorie, dunque dopo il 378, per quanto non molto dopo, se è chiamato il più antico degli attidografi. Androzione poi, entrato nella vita politica circa il 387 e morto dopo il 344, scrisse almeno otto libri (anche per lui la citazione del libro duodecimo in Harpocr. s. v. Ἀμφίπολις è sospetta), di cui cinque dedicati alla storia ateniese posteriore al 403. Della sua Attide il quarto e il quinto libro comprendono, stando alle citazioni, all'incirca quaranta anni. Molto oltre il 360/59 nel quinto libro non poteva giungersi, se nel sesto si narravano vicende del 354 (fr. 23) e nel settimo del 350/49 (nel fr. presso Didimo, col. 14, 35 segg.). Nè poi è difficile che la condanna di Cefisodoto del 360/59, attribuita al quinto libro da una citazione (Harpocr. s. v. Κηφισόδοτος), spetti in realtà al sesto (basterebbe correggere E in F), perchè sarebbe strano che nel quarto libro si andasse solo dal 403 al 397/6 e nel

quinto dal 397/6 al 360. Che nel quinto si trattasse di cose del 397/6 si desume dalla menzione che vien fatta della ambasceria cui partecipò Agnia, arrestata dagli Spartani (fr. 17): ambasceria la cui data, prima incerta, è ora assicurata dal nostro papiro (col. 1, 30 segg.); può peraltro sospettarsi che su Agnia si tornasse in quel libro per via di digressione, se pur non v'è errore di cifra nella citazione, parendo strano che di sì pochi anni, e anni di pace, si narrassero le vicende nel libro quarto. Ad ogni modo sia che nei libri quarto e quinto si trattasse degli anni di cui nelle Elleniche Senofonte discorre dal terzo al settimo, sia che, come è più probabile, vi fosse compresa qualche decina d'anni meno, la narrazione poteva procedervi benissimo ampia all'incirca come nelle Elleniche: perchè i libri delle Elleniche sono d'assai piccola mole, e vi hanno p. es. libri di Polibio che sono superiori per lunghezza a due o anche a tre di essi presi insieme, a tacere dello spazio che si guadagnava quando, anche narrando le maggiori vicende con pari ampiezza, si omettevano particolari dilettevoli a leggersi, ma senza reale importanza, come quelli che Senofonte dà su Spitridate e sul colloquio tra Agesilao e Farnabazo, o anche interessanti più che altro la storia speciale di Sparta, come la congiura di Cinadone.

Dei due attidografi, se non possiamo escludere che sia Clidemo l'autore della nostra storia, è certo più verisimile che sia Androzione. Clidemo sembra aver badato molto più d'Androzione a miti ed a prodigi, e la sua Attide, di cui non si hanno che sedici frammenti, sembra essere stata oscurata da quella d'Androzione, di cui se ne hanno oltre sessanta; e inoltre, mentre per grandissima parte i frammenti di Clidemo si riferiscono a cose mitiche e nessuno alla storia del IV secolo, buona parte di quelli d'Androzione si riferiscono a cose storiche e in particolare alla storia appunto di questo secolo. Androzione era inoltre un uomo politico pratico di cose finanziarie, e delle sue cognizioni in tal materia s'era valso anche nell'Attide, come si rileva dai frammenti, cercando di formarsi un'idea adeguata della σεισάχθεια soloniana. Figlio di Androne, che era stato dei quattrocento e poi aveva accusato Antifonte (Harpocr. s. v. Ἄνδρων. *Vitae X orat.* p. 833 f), dobbiamo ritenere che Androzione fosse avverso tanto agli oligarchici quanto alla sfrenata demagogia

d'un Cefalo; sembra invece che andasse d'accordo specialmente col moderato Aristofonte d'Azenia, il quale, appunto per la sua politica opportunistica e conciliatrice, era avversato dagli estremi d'ogni fazione, da Eubulo ad esempio non meno che dai radicali Egesandro ed Iperide (Beloch, *Att. Politik.* p. 167).

Fu d'accordo, a quel che pare, Androzione con Aristofonte anche nella temeraria politica antipersiana che questo demagogo patrocinò (v. specialmente Demosth. *c. Timocr.* 11 seg.), e dello stesso sentimento nazionalista che risplende nel papiro diede prova anche più tardi, se è vero che ebbe parte nella magnanima quanto impolitica risposta che Atene diede nel 344/3 ad Artaserse III εἰρηνεύσειν πρὸς Ἀρταξέρξην ἐὰν μὴ ἐπὶ τὰς Ἑλληνίδας ἴῃ πόλεις (Didym., col. 8, 12 segg.). Entrato, come s'è detto, nella vita politica intorno al 387 (Demosth. *c. Androt.* 66) e figlio d'uno dei quattrocento, non è dubbio che nel 396 era in grado d'interessarsi di quel che avveniva nella sua patria. Nel 346, in età di circa settant'anni, prendeva ancor parte alla vita politica ateniese, come mostra il decreto da lui proposto in onore dei figli del re bosporano Leucone (Dittenberger, *Sylloge*, I[2], 129). Del 344/3 si occupava nella sua Attide, riportandovi, a quel che pare, il testo d'un decreto proposto in quell'anno da lui stesso (Didym., col. 8, 14 seg.). Stando poi a Plutarco (*de exil.*, 14) scrisse la sua Attide in esilio a Megara, dunque dopo quell'anno. Questa notizia non è in contraddizione con la data presumibile del nostro papiro, il quale per la lingua, che s'accosta in qualche parte alla κοινή, non può essere molto anteriore alla metà del secolo, e per la piena indipendenza da Senofonte non può esserle di molto posteriore. Ma può del resto dubitarsi con qualche fondamento della sua attendibilità, perchè par singolare che s'infierisse ad Atene contro un uomo politico di second'ordine come Androzione, precisamente quando la vecchiaia lo rendeva meno pericoloso a' suoi avversarî. È peraltro ad ogni modo verisimile che Androzione scrivesse in età abbastanza avanzata sia perchè nei libri VI e VII dell'Attide si occupava dell'ultimo decennio della prima metà del sec. IV, sia perchè solo la vittoria del partito d'Eubulo, contrario a quello d'Aristofonte, e poi il trionfo del suo avversario personale Demostene dovettero indurlo a dedicare alle lettere l'operosità che fino allora aveva speso nella vita politica. Non deve peraltro il fram-

mento citato più sopra indurci a credere che tutta l'Attide fosse scritta dopo il 344 3: è presumibile che fosse in parte pubblicata, o almeno composta, già prima.

Non va taciuta una difficoltà a prima vista gravissima contro l'attribuzione del nostro papiro ad Androzione. Un frammento del settimo libro della sua Attide, riportato letteralmente da Didimo nel commentario a Demostene recentemente scoperto, suona così (col. 14, 37 segg.): ὡρίσαντο δὲ καὶ Ἀθην[αῖο]ι πρὸς Μεγαρέας τὴν Ὀργάδα διὰ τ[οῖ]ν θεοῖν ⟨ἐπιτρέψαντας αὐτοῖς ὁρίσασθαι⟩ ὅπως βούλοιντο· συνεχώρησαν γὰρ οἱ Μεγαρεῖς ὁριστὰς γενέσθαι τὸν ἱεροφάντην Λακρατ⟨ε⟩ίδην καὶ τὸν δαιδοῦχον Ἱεροκλείδην. καὶ ὡς οὗτοι ὥρισαν, ἐνέμειναν. καὶ τὰς ἐσχατιὰς ὅσαι ἦσαν πρὸς τῆι Ὀργάδι καθιέρωσαν διαμαντευσάμενο[ι] καὶ ἀνελόντος τοῦ θεοῦ λῶιον καὶ ἄμεινον εἶναι μὴ ἐργαζομένοις· καὶ στήλαις ὡρ[ί]σθη κύκλωι λιθίναις Φιλοκράτους εἰπόντος.

Questo stile o per meglio dire questa assenza di stile non ha riscontro nel nostro papiro. A tacere degli iati, più numerosi assai in queste righe che nel papiro, la sintassi, guardando il brano isolatamente, è così primitiva da stupire in un discepolo di Isocrate, quale era pur Androzione, per quanto nel suo libro non facesse soverchiamente professione di retorica. Che se egli avesse davvero scritto a quel modo la sua Attide, allora certo Demostene avrebbe mentito oltre l'uso degli oratori ateniesi quando di lui diceva agli eliasti (*c. Androt.* 4): ἔστιν γὰρ ὦ ἄνδρες Ἀθηναῖοι τεχνίτης τοῦ λέγειν καὶ πάντα τὸν βίον ἐσχόλακεν τούτῳ, o quando lo chiamava (66) λέγειν δεινός. È facile vedere che qui è conservato, s'intende senza la fedeltà diplomatica che noi vorremmo e che era ignota agli antichi, l'usuale formulario e lo stile di cancelleria di qualche documento concernente la vertenza, forse d'uno ψήφισμα proposto dallo stesso Androzione, in cui dobbiamo supporre rette da un ἐπειδή le frasi che qui appaiono collegate mediante il καί.

A questo proposito va notato che la congettura di B. Keil (a p. 56 della edizione teubneriana) per spiegare come secondo Filocoro i Megaresi avrebbero ceduto alle armi ateniesi, secondo Androzione si sarebbero piegati διὰ τοῖν θεοῖν, è inaccettabile affatto. Non si tratta della versione ateniese e megarese d'uno stesso fatto, l'una rappresentata da Filocoro, l'altra da Androzione che ne scrisse quand'era esule a Megara; nè c'è vera

contraddizione, tanto più che Filocoro trascrive, e quasi letteralmente, Androzione. Ma Androzione che della cosa doveva, com'è naturale, parlare assai più diffusamente, al racconto della spedizione militare soggiungeva il riassunto e l'analisi di qualche documento concernente la fine della vertenza, p. e. dell'accordo definitivo tra Ateniesi e Megaresi in cui, eseguita la terminazione e piantati i cippi terminali della ὀργάς, s'impegnavano a rispettarla; e si capisce che in un documento simile l'accordo doveva apparire non concluso per forza, ma συγχωρησάντων τῶν Μεγαρέων διὰ τοῖν θεοῖν (1).

Quanto allo stile del nostro papiro, esso è certo tale che ad un greco imbevuto di pregiudizi retorici come Dionisio di Alicarnasso doveva apparire monotono e stucchevole, quale egli definisce in genere lo stile delle Attidi (*Antiq. Rom.*, I, 8: μονοειδεῖς γὰρ ἐκεῖναί τε καὶ ταχὺ προσιστάμεναι τοῖς ἀκούουσιν); a noi se non può piacere la mancanza di colorito, non dispiace certamente la lucida scorrevolezza. E se Androzione n'è realmente l'autore, non vorremmo certo rimproverare Plutarco (*De exil.*, 14) per averlo enumerato tra gli scrittori che ebbero a collaboratrici le muse; giudizio peraltro che certo non varrebbe pel frammento presso Didimo.

Non è del resto singolare che l'opera di Androzione potesse avere sulla tradizione tanta efficacia quanta ne ha avuta lo storico del nostro papiro; sarebbe anzi singolare il contrario. Una storia attica, concisa o diffusa che fosse, scritta da un uomo che per quasi mezzo secolo aveva partecipato alla vita politica in Atene e che degli avvenimenti narrati da Senofonte era stato testimone oculare, non poteva mancare d'esser letta ed usata dai contemporanei e dai posteri, tanto più se era leggibile. E che di fatto e contemporanei e posteri profittassero dell'opera d'Androzione sapevamo già dall' Ἀθηναίων πολιτεία di Aristotele, dove Androzione è talora trascritto alla lettera, e dalla vita di Solone in Plutarco, che ad Androzione deve probabilmente in

(1) Sulla terminazione della ὀργάς e le questioni che vi si collegano v. Dittenberger, *Sylloge*, I², 789. Staehelin, *Beiträge zur alten Geschichte*, V (1905), p. 64 segg.; 145 segg. Son dispiacente di non aver potuto consultare il saggio del Foucart sul papiro di Didimo venuto recentemente alla luce nei *Mém. de l'Acad. des Inscriptions*, XXVIII, p. 1ª.

buona parte le strette attinenze verbali con la πολιτεία, da Plutarco direttamente non usata. A tal proposito sarà bene ricordare che oltre i punti di contatto tra Aristotele ed Androzione generalmente noti, uno ve n'ha su cui già ebbi inutilmente a richiamare l'attenzione nella *Riv. di filol.*, XX (1891-2), p. 162 (1). Si sa che Aristotele, diversamente da Senofonte, distingue due decarchie che tennero successivamente il potere in Atene dopo destituiti i trenta. Anche Androzione (fr. 10 = Harpocr. s. v. δέκα καὶ δεκαδοῦχος) parlava di due decarchie: περὶ τῶν μετὰ τὴν κατάλυσιν τῶν τριάκοντα Ἀθήνησι χειροτονηθέντων ἀνδρῶν δέκα καὶ τῶν ἑξῆς (scil. δέκα) εἴρηκεν Ἀνδροτίων ἐν τῇ τρίτῃ. Probabilmente se E. Meyer avesse tenuto presente non l'interpretazione comune di questo frammento, ma il senso che indubbiamente esso ha, avrebbe trattato in modo diverso del valore delle notizie fornite sulle due decarchie da Aristotele (*Geschichte des Altertums*, V, 40). Che Eforo quando non poteva più disporre di Tucidide consultasse Androzione accanto a Senofonte, anzi a preferenza di Senofonte, avremmo potuto ritenere *a priori* data la tendenza della storia d'Eforo così diversa da quella delle Elleniche senofontee: e la cronologia non s'oppone a questa ipotesi, perchè Eforo era probabilmente di parecchio più giovane dell'attidografo. E a testimonianza dell'uso d'Androzione in Eforo può citarsi il fr. 133 M. di questo scrittore, dove è detto che nella battaglia presso Corinto del 394 secondo i due storici ἐνίκησαν τοὺς Ἀθηναίους οἱ Λακεδαιμόνιοι σφόδρα, mentre, come si sa, nelle Elleniche di Senofonte la rotta degli Ateniesi è in parte scusata, in parte attenuata.

La scarsezza dei frammenti non permette tra il papiro ed Androzione un raffronto che possa dirsi esauriente; e tuttavia attinenze non mancano. Così, prima della scoperta del papiro l'arresto e la uccisione di Agnia e degli altri andati con lui ambasciatori da Atene al re di Persia eran noti soltanto da un

(1) Di questo saggio, il primo che io abbia dato alle stampe, va rettificato secondo ciò che è esposto nella presente nota quel che è detto occasionalmente intorno ad Androzione; mentre son lieto di constatare che i concetti da me propugnati intorno al valore storico della Ἀθηναίων πολιτεία aristotelica, appena essa fu pubblicata dal Kenyon, sono nella loro sostanza quelli appunto oggi accolti generalmente dai critici.

frammento di Androzione e da uno di Filocoro (Harpocr. s. v. Ἀγνίας): e pure il fatto è d'importanza secondaria, tanto che se non può escludersi, è però incerto che fosse menzionato da altri storici di quel periodo. Filocoro poi tiene probabilmente la notizia appunto da Androzione, ch'egli copiava senza scrupolo a man salva, come dimostra p. e. il confronto tra i già citati frammenti dell'uno e dell'altro sulla ἱερὰ ὀργάς. Meno notevole è l'altra citazione di Androzione presso Pausania (VI, 7, 6), dove era ricordato come Conone stava con la sua armata a Cauno e come riuscì a far insorgere i Rodii contro Sparta. Ora il papiro si trattiene sul soggiorno di Conone in Cauno, e non è dubbio che faceva cenno della insurrezione di Rodi. Ma di ciò, sebbene taccia Senofonte, poteva, anzi doveva parlare chiunque si fosse occupato coscienziosamente di quel periodo. Avrebbe maggiore importanza il sapere se nel papiro aveva riscontro quel che Androzione narrava secondo Pausania a proposito della secessione di Rodi da Sparta, la cattura e l'uccisione di Dorieo per opera degli Spartani: ma purtroppo la grande lacuna che segue alla colonna 3ª ci vieta di saperlo. Certo non è difficile che vi fosse menzionato, tanto più che vi son ricordati più oltre i suoi amici politici in Rodi, i Diagorei.

È però molto interessante il ricercare le attinenze tra il papiro e i cenni sulla guerra corinzia che dà il periegeta Pausania (III, 9), il quale ha gli attidografi alla mano e cita, per un fatto appunto di quella guerra, Androzione. Queste attinenze, già rilevate dagli editori, e che hanno tanto maggior valore in quanto Pausania non cita mai le storie di Eforo nè di Cratippo nè di Anassimene, e Teopompo cita una sola volta a proposito della guerra sacra (III, 10, 3), son superiori a quelle che legano col nostro papiro qualsiasi altro racconto della guerra corinzia. Conforme al papiro e contro Senofonte, gli Ateniesi Cefalo ed Epicrate accettano presso Pausania l'oro persiano: così pure tra i capi del partito antispartano in Beozia, accanto ad Androclide e ad Ismenia, Pausania e il papiro (col. 12, 34) menzionano non Galassidoro ricordato da Senofonte (III, 5, 1), ma un personaggio il cui nome è dato con lieve varietà di lezione, Antiteo od Anfitemide. Così pure in un punto gravissimo in cui il papiro si discosta da Senofonte, ed è probabilmente nel vero, nel ritenere cioè che la scintilla della guerra corinzia sia

partita dalla Locride Esperia e non dalla Opunzia, Pausania conviene col papiro; e infine anche rispetto alla battaglia del Pattolo vinta da Agesilao, Pausania, per quanto ne discorra concisamente, s'accosta più al papiro che a Senofonte. Non mancano peraltro alcuni dissensi tra Pausania e il nostro autore, sebbene non sì gravi talora come sembra agli editori. Ad esempio Pausania narra, conforme a Senofonte, come Timocrate fu inviato con denaro persiano in Europa da Titrauste dopo la morte di Tissaferne (395); ma il papiro non assevera punto il contrario, come ritengono il Grenfell e il Hunt. Vi si dice, parlando di fatti del 396, che Epicrate e Cefalo agivano contro Sparta, perchè da molto tempo, prima assai di ricevere i sussidi persiani, erano, per ragioni d'interesse, nemici dei Lacedemoni. Ma ciò non vuol dir punto che allora fossero inviati questi sussidi; lo storico ne parla evidentemente per via di digressione, senza averne fatto prima alcun cenno; e nulla vieta di credere che ne parlasse di nuovo, e questa volta secondo l'ordine dei fatti, dopo la venuta di Titrauste nell'Asia Minore (1). E così pure non v'è contraddizione in ciò che riguarda l'effetto dei sussidi persiani. Pausania mostra chiaro di ritenere che si dovette a quei sussidi se Agesilao fu costretto ad abbandonare l'impresa d'Asia; nè ciò nega il nostro storico, il quale solo vuol rilevare che, non per essere stati comperati dai Persiani, ma per ragioni personali o di partito lavoravano contro Sparta quelli stessi che accettarono i sussidi del Re. Più gravi son due altre divergenze. I Lacedemoni, lieti dei prosperi successi d'Agesilao su Tissaferne, ancora nel corso della state del 395 secondo Senofonte gli concessero piena autorità sull'armata e facoltà di nominare quel navarco che egli volesse (III, 4, 27). Nel papiro invece si narra come nel corso di quella estate al navarco Pollide succedette il navarco Chiricrate (colonna 15, 33, cfr. 21, 26). Forse la contraddizione anche qui è

(1) Neppure mi sembra che risolva la questione la frase del papiro (2, 32): οἱ μὲν οὖν ἐν ταῖς πόλεσι ταῖς προειρημέναις πολὺ μᾶλλον ἢ διὰ Φαρνάβαζον καὶ τὸ χρυσίον ἐπηρμένοι μισεῖν ἦσαν τοὺς Λακεδαιμονίους. Timocrate fu inviato da Titrauste d'accordo con Farnabazo, e naturalmente il nome ben noto di Farnabazo e la notizia dei preparativi da lui fatti per la guerra marittima poteva avere grande efficacia sull'animo dei Greci.

più apparente che reale, e non è troppo difficile conciliare le due testimonianze; ma di ciò altrove. Certo è ad ogni modo che qui Pausania si attiene a Senofonte, come pure a Senofonte si attiene ascrivendo ai Locresi incitati dal partito avverso a Sparta in Tebe la prima violazione della pace nella Grecia centrale, mentre il papiro sembra ascriverla ai Focesi. Vero disaccordo in fondo non c'è, perchè anche il papiro riferisce che la contesa cominciò τῶν Λοκρῶν ἀνθαρπασάντων ἀνθ' ὧν ἀπέβαλον προβάτων. Ma è chiaro da questi due casi che Pausania o la sua fonte (la cosa vuol lasciarsi incerta, non essendo il caso di toccar qui la vessata questione della originalità di Pausania) pose a base del suo racconto quello del nostro papiro, correggendolo o alterandolo qua e là con le sue reminiscenze senofontee; e ne guadagna in probabilità l'ipotesi che il papiro stesso spetti ad Androzione, da Pausania, come dicemmo, citato a proposito delle vicende del 396.

Nel presentare questa ipotesi io esprimo l'augurio che nuove scoperte mettano in luce, se non l'opera intera d'Androzione, che sarebbe speranza troppo audace, altri e maggiori frammenti, sicchè egli non resti defraudato della gloria che a giusto titolo sembra spettargli fra i posteri.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo delle LL. MM. e dei RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 12 Gennaio 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Salvadori, Mosso, Spezia, Segre, Jadanza, Guareschi, Fileti, Parona, Mattirolo, Somigliana, Fusari e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

I Soci Naccari e Guidi scusano la loro assenza.

Il Socio Somigliana presenta in dono i due suoi lavori seguenti: *Sulla preparazione matematica degli Allievi ingegneri; Sulla teoria Maxwelliana delle azioni a distanza.*

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Dott. Ernesto Laura, *Sulla integrazione di un sistema di quattro equazioni differenziali lineari a determinante gobbo per mezzo di due equazioni di Riccati,* dal Socio Morera;

2° Dott.i G. Ponzio ed E. Valente, *Sulla benzilfenilidrazina simmetrica,* dal Socio Fileti.

LETTURE

Sulla integrazione di un sistema di quattro equazioni differenziali lineari a determinante gobbo per mezzo di due equazioni di Riccati.

Nota II del Dr. ERNESTO LAURA.

IV.

Nel N. 3 della Nota I (*) è stato integrato il sistema differenziale (II) per mezzo di due equazioni di Riccati (**) giovandoci della proprietà: che per una stessa sostituzione lineare operata simultaneamente sulle variabili ξ, η, ζ, esso riducesi ad un sistema di forma simile.

Insisterò maggiormente sopra questo concetto eseguendo direttamente sul sistema (II) una sostituzione lineare a coefficienti costanti dapprima, e funzioni arbitrarie di t di poi, in vista di ricercare le maggiori riduzioni comportate nell'integrazione del sistema (II), quando di questo sieno conosciute delle soluzioni particolari.

(*) Cfr. questi Atti, vol. XLII. Adunanza del 16 giugno 1907.

(**) Deve essere qui notata una inesattezza incorsa nella suddetta nota. A pag. 21, riga 6 dal basso, in luogo di

$$-(\alpha \mathfrak{X}_1'f + \beta \mathfrak{X}_2'f + \gamma \mathfrak{X}_3'f)$$

deve essere posto

$$-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\mathfrak{X}_1'f + i\,\frac{\alpha-\beta}{2}\mathfrak{X}_2'f + i\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\mathfrak{X}_3'f\right).$$

Conseguentemente l'integrazione del sistema (IV) dipende da quella dell'unica equazione di Riccati

$$\frac{d\sigma}{dt} = \alpha+\beta-\frac{\gamma}{2}+(\alpha-\beta)\sigma+\frac{\gamma}{2}\sigma^2.$$

Si considerino le trasformazioni di variabili, inverse l'una dell'altra, e a coefficienti costanti:

$$(38)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{h_1 + h_2\xi_2}{h_3 + \xi_2} \\ \eta_1 = \dfrac{h_1 + h_2\eta_2}{h_3 + \eta_2} \\ \zeta_1 = \dfrac{h_1 + h_2\zeta_2}{h_3 + \zeta_2} \end{cases}$$

$$(39)\quad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2\xi_1}{\alpha_3 + \xi_1} \\ \eta_2 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2\eta_1}{\alpha_3 + \eta_1} \\ \zeta_2 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2\zeta_1}{\alpha_3 + \zeta_1} \end{cases}$$

tra le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e le h_1, h_2, h_3, intercedono le relazioni:

$$(40)\quad \begin{cases} \alpha_1 = h_1 & h_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = - h_3 & h_2 = - \alpha_3 \\ \alpha_3 = - h_2 & h_3 = - \alpha_2 . \end{cases}$$

Dopo qualche riduzione si trova che trasformato del sistema (II) nelle variabili ξ_2, ζ_2, η_2 è:

$$(\mathrm{V})\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_2}{dt} = \dfrac{a - b\alpha_3 + c\alpha_3^2}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1}\xi_2^2 + \dfrac{-2a\alpha_2 + b\alpha_1 + b\alpha_2\alpha_3 - 2c\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1}\xi_2 + \\ \qquad + \dfrac{a\alpha_2^2 - b\alpha_1\alpha_2 + c\alpha_1^2}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1} + \alpha\dfrac{(\xi_2 - \eta_2)(\xi_2 - \zeta_2)}{\zeta_2 - \eta_2} \\ \dfrac{d\eta_2}{dt} = \dfrac{a - b\alpha_3 + c\alpha_3^2}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1}\eta_2^2 + \dfrac{-2a\alpha_2 + b\alpha_1 + b\alpha_2\alpha_3 - 2c\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1}\eta_2 + \\ \qquad + \dfrac{a\alpha_2^2 - b\alpha_1\alpha_2 + c\alpha_1^2}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1} + \beta\dfrac{(\eta_2 - \zeta_2)(\eta_2 - \xi_2)}{\xi_2 - \zeta_2} \\ \dfrac{d\zeta_2}{dt} = \dfrac{a - b\alpha_3 + c\alpha_3^2}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1}\zeta_2^2 + \dfrac{-2a\alpha_2 + b\alpha_1 + b\alpha_2\alpha_3 - 2c\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1}\zeta_2 + \\ \qquad + \dfrac{a\alpha_2^2 - b\alpha_1\alpha_2 + c\alpha_1^2}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1} + \gamma\dfrac{(\zeta_2 - \xi_2)(\zeta_2 - \eta_2)}{\eta_2 - \xi_2} \end{cases}$$

Le α_1, α_2, α_3 sieno invece funzioni del tempo — allora, indicate le derivate rispetto a t nell' ipotesi delle α costanti con $\frac{d'}{d't}$ — avremo:

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{d'\xi_2}{d't} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dt} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha_3}\frac{d\alpha_3}{dt}, \ \&$$

ossia, a calcoli fatti tenendo conto delle (39) e delle (40),

$$\text{(VI)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{d'\xi_2}{d't} + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3}\left[(\xi_2 - \alpha_2)\frac{d\alpha_1}{dt} + (\alpha_1 - \alpha_3\xi_2)\frac{d\alpha_2}{dt} - \right. \\ &\qquad \left. - \xi_2(\xi_2 - \alpha_2)\frac{d\alpha_3}{dt}\right] \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= \frac{d'\eta_2}{d't} + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3}\left[(\eta_2 - \alpha_2)\frac{d\alpha_1}{dt} + (\alpha_1 - \alpha_3\eta_2)\frac{d\alpha_2}{dt} - \right. \\ &\qquad \left. - \eta_2(\eta_2 - \alpha_2)\frac{d\alpha_3}{dt}\right] \\ \frac{d\zeta_2}{dt} &= \frac{d'\zeta_2}{d't} + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3}\left[(\zeta_2 - \alpha_2)\frac{d\alpha_1}{dt} + (\alpha_1 - \alpha_3\zeta_2)\frac{d\alpha_2}{dt} - \right. \\ &\qquad \left. - \zeta_2(\zeta_2 - \alpha_2)\frac{d\alpha_3}{dt}\right]. \end{aligned} \right.$$

Determiniamo le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per modo che il sistema (VI) assuma la forma (III), allora le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dovranno soddisfare ad un sistema differenziale che si ottiene eguagliando a zero i coefficienti di ξ_2^2, ξ_2 e il termine noto nel 2° membro della 1ª delle (VI), oppure i coefficienti di η_2^2, η_2 ed il termine noto nel 2° membro della 2ª. Se le equazioni così ottenute si risolvono rispetto alle $\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt}$ si ottiene il sistema differenziale seguente:

$$\text{(VII)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= b\alpha_1 - a\alpha_2 - c\alpha_1\alpha_3 \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= c(\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3) \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -a + b\alpha_3 - c\alpha_3^2. \end{aligned} \right.$$

Le h, che compaiono nelle (38), dovrebbero invece soddisfare al sistema:

$$
\text{(VIII)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dh_1}{dt} &= bh_1 + ah_3 + ch_1h_2 \\
\frac{dh_2}{dt} &= a + bh_2 + ch_2^2 \\
\frac{dh_3}{dt} &= -c(h_1 - h_2h_3)
\end{aligned}
\right.
$$

come facilmente si ricava, usando delle formole (40).

È facile il verificare, come è prevedibile *a priori*, che si soddisfa al sistema (VIII) con il porre

$$h_1 = A\,; \quad h_2 = B\,; \quad h_3 = C$$

avendo le lettere A, B, C il significato stesso che esse hanno nel N. III della Nota 1ª.

Il sistema (IV) assume allora la forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi_2}{dt} &= \alpha\,\frac{(\xi_2 - \eta_2)(\xi_2 - \zeta_2)}{\zeta_2 - \eta_2} \\
\frac{d\eta_2}{dt} &= \beta\,\frac{(\eta_2 - \zeta_2)(\eta_2 - \xi_2)}{\xi_2 - \zeta_2} \\
\frac{d\zeta_2}{dt} &= \gamma\,\frac{(\zeta_2 - \xi_2)(\zeta_2 - \eta_2)}{\zeta_2 - \xi_2}\,.
\end{aligned}
$$

Si ricava in altre parole lo stesso risultato del N. III. Possiamo poi osservare che i sistemi (VII) ed (VIII) sono i sistemi di Lie relativi ai gruppi semplicemente transitivi e reciproci:

$$-\alpha_2\frac{\partial f}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial f}{\partial\alpha_3}\,; \qquad \alpha_1\frac{\partial f}{\partial\alpha_1} + \alpha_3\frac{\partial f}{\partial\alpha_3}\,;$$
$$-\alpha_1\alpha_3\frac{\partial f}{\partial\alpha_1} + (\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3)\frac{\partial f}{\partial\alpha_2} - \alpha_3^2\frac{\partial f}{\partial\alpha_3}$$

$$h_3\frac{\partial f}{\partial h_1} + \frac{\partial f}{\partial h_2}\,; \qquad h_1\frac{\partial f}{\partial h_1} + h_2\frac{\partial f}{\partial h_2}\,;$$
$$h_1h_2\frac{\partial f}{\partial h_1} + h_3^2\frac{\partial f}{\partial h_2} - (h_1 - h_2h_3)\frac{\partial f}{\partial h_3}$$

i quali gruppi poi sono rispettivamente il 1° e 2° gruppo parametro del gruppo le cui equazioni in termini finiti sono le (39).

Usando dei metodi prima spiegati non è allora difficile ridurre l'integrazione sia del sistema (VII), che quella del sistema (VIII) alla integrazione di un'unica equazione di Riccati, e ciò senza quadrature.

Consideriamo ancora il sistema (VI) e determiniamo le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per modo che il sistema (VI) venga a coincidere con il sistema (II), ciò equivarrà a ricercare le trasformazioni (38) a coefficienti variabili che trasformano in sè il sistema (II).

Nel 2° membro della 1ª equazione del sistema (VI) eguagliano il coefficiente di ξ_2^2 a c, quello di ξ_2 a b, ed il termine noto, escluso il termine:

$$\alpha \frac{(\xi_2 - \eta_2)(\xi_2 - \zeta_2)}{\eta_2 - \zeta_2}$$

ad a risolvendo le equazioni che così si ottengono nelle $\frac{d\alpha_1}{dt}$, $\frac{d\alpha_2}{dt}$, $\frac{d\alpha_3}{dt}$ otteniamo il sistema:

$$\text{(IX)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= a(\alpha_3 - \alpha_2) + 2b\alpha_1 - c\alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2) \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= a + b\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_3) \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= -a + b\alpha_3 + c(-\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1) . \end{aligned} \right.$$

Questo sistema, quando a, b, c sieno considerati come parametri, è un sistema di Lie collegato con il gruppo intransitivo:

$$X_1f \equiv \quad (\alpha_3 - \alpha_2)\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_3}$$

$$X_2f \equiv + 2\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_3}$$

$$X_3f \equiv - \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2)\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + (\alpha_1 + \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha_3)\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + (-\alpha_3^2 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1)\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}$$

il quale si mostra facilmente essere simile al gruppo delle rotazioni dello spazio ordinario attorno di un punto. Esso ammette perciò un unico invariante, che sarà ovviamente un integrale

del sistema (IX). Questo integrale si può determinare o come integrale comune alle equazioni alle derivate parziali

$$X_1 f = X_2 f = X_3 f = 0$$

oppure, il che poi è lo stesso, osservando che dal sistema differenziale (IX) identicamente si ricava:

$$(\alpha_2 + \alpha_3) d\alpha_1 + (\alpha_2\alpha_3 - \alpha_3^2 - 2\alpha_1) d\alpha_2 + (\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1 - \alpha_2^2) d\alpha_3 = 0.$$

Il trinomio differenziale del 1° membro ammette il fattore integrante:

$$\frac{1}{(\alpha_2 + \alpha_3)^3}$$

e quindi l'invariante cercato sarà:

$$\frac{4\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2}{(\alpha_2 + \alpha_3)} = h \tag{41}$$

essendo h una costante arbitraria.

Riducendo il sistema (IX) usando di questo integrale conosciuto ci riduciamo al sistema:

$$\text{(X)} \quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_2}{dt} = a + b\alpha_2 + c\alpha_2^2 - c\alpha_2\alpha_3 + \dfrac{c}{4}\left[h(\alpha_2 + \alpha_3)^2 - (\alpha_2 - \alpha_3)^2\right] \\[2ex] \dfrac{d\alpha_3}{dt} = -a + b\alpha_3 - c\alpha_3^2 + c\alpha_2\alpha_3 - \dfrac{c}{4}\left[h(\alpha_2 + \alpha_3)^2 - (\alpha_2 - \alpha_3)^2\right]. \end{cases}$$

L'integrazione di questo sistema si riconduce a quella di un'unica equazione di Riccati. Il metodo che si può seguire è il solito. Si considerino i due gruppi:

$$\begin{cases} Xf \equiv -\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_3} \\[2ex] Yf \equiv \alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \alpha_3 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Zf \equiv\ & \frac{1}{4}\left[-3\alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2 - h(\alpha_2 + \alpha_3)^2\right]\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \\ & + \frac{1}{4}\left[3\alpha_3^2 - 2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2^2 + h(\alpha_2 + \alpha_3)^2\right]\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X'f \equiv -\dfrac{\partial f}{\partial \xi} - \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \\ Y'f \equiv \xi \dfrac{\partial f}{\partial \xi} + \eta \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \\ Z'f \equiv -\xi^2 \dfrac{\partial f}{\partial \xi} - \eta^2 \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{cases}$$

Essi sono simili ed egualmente composti; eguagliamo le funzioni stazionarie rispettive, otterremo le ricercate formole di trasformazione — procedendo in questo modo si hanno le formole seguenti:

$$(42) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_3 - \sqrt{h}(\alpha_2 + \alpha_3)}{2} \\ \eta = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_3 - \sqrt{h}(\alpha_2 + \alpha_3)}{2} \end{cases}$$

$$(43) \qquad \begin{cases} \alpha_2 = \dfrac{+\xi + \eta + \dfrac{1}{\sqrt{h}}(-\xi + \eta)}{2} \\ \alpha_3 = \dfrac{-\xi - \eta + \dfrac{1}{\sqrt{h}}(-\xi + \eta)}{2} \end{cases}$$

Il sistema (X) si riduce poscia, introducendo le nuove varianti ξ, η, alla forma voluta:

$$(XI) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = a + b\xi + c\xi^2 \\ \dfrac{d\eta}{dt} = a + b\eta + c\eta^2 \end{cases}$$

Si ha perciò il risultato: *Tutte le trasformazioni a coefficienti variabili del tipo:*

$$(44) \qquad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 \xi_1}{\alpha_3 + \xi_1} \\ \eta_2 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 \eta_1}{\alpha_3 + \eta_1} \\ \zeta_2 = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 \zeta_1}{\alpha_3 + \zeta_1} \end{cases}$$

che mutano in sè il sistema (II), *si ottengono ponendo nelle* (44) *in luogo di* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *una qualunque soluzione del sistema* (IX). *L'integrazione di questo sistema equivale a quella di un'unica equazione di Riccati.*

Del sistema (IX) sia conosciuta una soluzione — il procedimento prima indicato fornirà due soluzioni dell'equazione:

$$\frac{d\tau}{dt} = a + b\tau + c\tau^2 .$$

Con una ulteriore quadratura otterremo dunque l'integrale generale sia del sistema (XI) che del sistema (IX). Si noti subito la differenza che vi ha tra i sistemi (VII) (od VIII) ed il sistema (IX); l'integrazione di entrambi questi sistemi equivale a quella di un' unica equazione di Riccati — la conoscenza di una soluzione del sistema (VIII) è sufficiente per scrivere senza quadrature ulteriori il suo integrale generale, mentrechè conoscendo del sistema (IX) una soluzione occorrerà un'ulteriore quadratura per formare il suo integrale generale.

La ragione di un simile fatto consiste sostanzialmente in in ciò: il gruppo con cui è collegato il sistema (VII) è un gruppo semplicemente transitivo, il gruppo con cui è collegato il sistema (IX) non è invece tale.

Del sistema (II) sieno conosciute due soluzioni

$$\begin{matrix} \xi_1^{(1)} & \eta_1^{(1)} & \zeta_1^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} & \eta_1^{(2)} & \zeta_1^{(2)}. \end{matrix}$$

Determiniamo le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in modo da soddisfare alle equazioni:

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_1^{(2)} &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \xi_1^{(1)}}{\alpha_3 + \xi_1^{(1)}} \\ \eta_1^{(2)} &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \eta_1^{(1)}}{\alpha_3 + \eta_1^{(1)}} \\ \zeta_1^{(2)} &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \zeta_1^{(1)}}{\alpha_3 + \zeta_1^{(1)}} \end{aligned} \right.$$

il che è possibile quando si abbia:

$$\xi_1^{(1)} \neq \eta_1^{(1)} \qquad \eta_1^{(1)} \neq \zeta_1^{(1)} \qquad \zeta_1^{(1)} \neq \xi_1^{(1)}$$

$$\xi_1^{(2)} \neq \eta_1^{(2)} \qquad \eta_1^{(2)} \neq \zeta_1^{(2)} \qquad \zeta_1^{(2)} \neq \xi_1^{(2)}.$$

Dico allora che le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soddisfano al sistema (IX). Infatti le $\xi_1^{(1)}, \eta_1^{(1)}, \zeta_1^{(1)}$, soddisfacendo al sistema (II), le $\xi_1^{(2)}, \eta_1^{(2)}, \zeta_1^{(2)}$ soddisferanno al sistema (VI), e poichè esse soddisfano pure al sistema (II), questi due sistemi coincideranno, e quindi le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ verificano le (IX).

Consegue dal procedimento prima seguito per l'integrazione del sistema (IX), che in questo caso vengono ad essere conosciute due soluzioni dell'equazione di Riccati:

$$\frac{d\tau}{dt} = a + b\tau + c\tau^2.$$

Ossia si ha il risultato: *se del sistema* (II) *sono conosciute due soluzioni, con operazioni algebriche si possono ottenere due soluzioni dell'equazione di Riccati:*

$$\frac{d\tau}{dt} = a + b\tau + c\tau^2$$

e quindi con una quadratura si può scrivere il suo integrale generale, ossia la trasformazione di variabili (36) *che conduce dal sistema* (II) *al sistema* (III).

Le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ricavate dalle (45), in funzione delle due serie di variabili $\xi_1^{(1)}, \eta_1^{(1)}, \zeta_1^{(1)}$; $\xi_1^{(2)}, \eta_1^{(2)}, \zeta_1^{(2)}$, sostituite nella (41) dànno luogo poi all'unico invariante posseduto dal gruppo (19) quando quest'ultimo sia esteso a coppie di variabili.

V.

Possiamo procedere parallelamente a quanto è stato fatto nel N. precedente assoggettando il sistema (II) al gruppo di trasformazioni reciproco del gruppo (38).

Consideriamo perciò le trasformazioni di variabili, inverse l'una dell'altra:

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{h_1\eta_2(\xi_2-\zeta_2)+\xi_2(\eta_2-\zeta_2)}{h_1(\xi_2-\zeta_2)+\eta_2-\zeta_2} \\ \eta_1 &= \frac{h_2\eta_2(\xi_2-\zeta_2)+\xi_2(\eta_2-\zeta_2)}{h_2(\xi_2-\zeta_2)+\eta_2-\zeta_2} \\ \zeta_1 &= \frac{h_3\eta_2(\xi_2-\zeta_2)+\xi_2(\eta_2-\zeta_2)}{h_3(\xi_2-\zeta_2)+\eta_2-\zeta_2} \end{aligned}\right.$$

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{\alpha_1\eta_1(\xi_1-\zeta_1)+\xi_1(\eta_1-\zeta_1)}{\alpha_1(\xi_1-\zeta_1)+\eta_1-\zeta_1} \\ \eta_2 &= \frac{\alpha_2\eta_1(\xi_1-\zeta_1)+\xi_1(\eta_1-\zeta_1)}{\alpha_2(\xi_1-\zeta_1)+\eta_1-\zeta_1} \\ \zeta_2 &= \frac{\alpha_3\eta_1(\xi_1-\zeta_1)+\xi_1(\eta_1-\zeta_1)}{\alpha_3(\xi_1-\zeta_1)+\eta_1-\zeta_1} \end{aligned}\right.$$

Tra le $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, h_1, h_2, h_3$ intercedono le relazioni:

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{h_1(h_2-h_3)}{h_2(h_1-h_3)} \\ \alpha_2 &= -\frac{h_2-h_3}{h_1-h_3} \\ \alpha_3 &= -\frac{(h_1+1)(h_2-h_3)}{(h_2+1)(h_1-h_3)} \end{aligned}\right.$$

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} h_1 &= -\frac{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)}{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)} \\ h_2 &= -\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_3} \\ h_3 &= -\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2-\alpha_3)}{(\alpha_2+1)(\alpha_1-\alpha_3)} \end{aligned}\right.$$

Eseguiamo sopra il sistema (II) questa trasformazione di variabili, ponendoci dapprima nell'ipotesi che i parametri α, h che in essa entrano sieno costanti.

Una simile trasformazione (uso i simboli del N° III della Nota I[a]) lascia inalterata la trasformazione infinitesima:

$$\lambda\mathfrak{X}_1 f + \mu\mathfrak{X}_2 f + \nu\mathfrak{X}_3 f$$

e muta la trasformazione infinitesima del gruppo reciproco

$$\lambda'\mathfrak{Y}_1 f + \mu'\mathfrak{Y}_2 f + \nu'\mathfrak{Y}_3 f$$

in altra del gruppo stesso.

Posto mente all'osservazione posta al principio del N° III della Nota I[a] potremo dedurre: la trasformazione di variabili (46), a parametri costanti, riduce il sistema differenziale (II) ad un sistema differenziale di forma simile.

A calcoli fatti il sistema (II) assume invero la forma seguente:

$$\text{(XII)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi_2}{dt} &= a + b\xi_2 + c\xi_2^2 - \frac{\alpha_2-\alpha_3}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} H_1 \frac{(\xi_2-\eta_2)(\xi_2-\zeta_2)}{\zeta_2-\eta_2} \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= a + b\eta_2 + c\eta_2^2 - \frac{\alpha_3-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} H_2 \frac{(\eta_2-\zeta_2)(\eta_2-\xi_2)}{\xi_2-\zeta_2} \\ \frac{d\zeta_2}{dt} &= a + b\zeta_2 + c\zeta_2^2 - \frac{\alpha_1-\alpha_2}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)} H_3 \frac{(\zeta_2-\xi_2)(\zeta_2-\eta_2)}{\eta_2-\zeta_2} \end{aligned} \right.$$

in cui si è posto

$$(50) \qquad H_i = (\alpha_i + 1)\alpha + \alpha_i(\alpha_i + 1)\beta - \alpha_i\gamma.$$

Le α_i sieno invece funzioni del tempo, e si indichino come al solito le derivate rispetto a t nell'ipotesi delle α costanti con $\frac{d'}{d't}$; avremo:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{d't} + \frac{d\alpha_1}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{d\alpha_2}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \frac{d\alpha_3}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha_3}.$$

Operando allora la trasformazione (46) in questa nuova ipotesi, avremo:

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{d'\xi_2}{d't} + \frac{d\alpha_1}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{\alpha_1\eta_1(\xi_1-\zeta_1)+\xi_1(\eta_1-\zeta_1)}{\alpha_1(\xi_1-\zeta_1)+\eta_1-\zeta_1} \; ; \; \&$$

Introducendo le variabili ξ_2, η_2, ζ_2 a mezzo delle (46), ed

eliminando le h a mezzo delle (49), otteniamo, dopo qualche riduzione, come trasformato del sistema (II) il sistema seguente:

$$\text{(XIII)}\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_2}{dt} = a + b\xi_2 + c\xi_2^2 - \dfrac{\alpha_2-\alpha_3}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)}\left(\dfrac{d\alpha_1}{dt}+H_1\right)\dfrac{(\xi_2-\eta_2)(\xi_2-\zeta_2)}{\zeta_2-\eta_2} \\ \dfrac{d\eta_2}{dt} = a + b\eta_2 + c\eta_2^2 - \dfrac{\alpha_3-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}\left(\dfrac{d\alpha_2}{dt}+H_2\right)\dfrac{(\eta_2-\zeta_2)(\eta_2-\xi_2)}{\xi_2-\zeta_2} \\ \dfrac{d\zeta_2}{dt} = a + b\zeta_2 + c\zeta_2^2 - \dfrac{\alpha_1-\alpha_2}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}\left(\dfrac{d\alpha_3}{dt}+H_3\right)\dfrac{(\zeta_2-\xi_2)(\zeta_2-\eta_2)}{\eta_2-\xi_2} \end{cases}$$

dove per le H_i bisogna porre le espressioni date dalle (50).

Le α_1, α_2, α_3 soddisfino al sistema differenziale

$$\text{(XIV)}\qquad \frac{d\alpha_i}{dt} + H_i = 0$$

ossia poniamo nelle (46) in luogo delle α_i tre soluzioni distinte dell'equazione di Riccati

$$(51)\qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\beta\sigma^2 + (-\alpha - \beta + \gamma)\sigma - \alpha\,;$$

il sistema trasformato (XIII) assumerà la forma:

$$\text{(XV)}\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_2}{dt} = a + b\xi_2 + c\xi_2^2 \\ \dfrac{d\eta_2}{dt} = a + b\eta_2 + c\eta_2^2 \\ \dfrac{d\zeta_2}{dt} = a + b\zeta_2 + c\zeta_2^2 \end{cases}$$

ossia le ξ_2, η_2, ζ_2 soddisfano ad una stessa equazione di Riccati:

$$\frac{d\tau}{dt} = a + b\tau + c\tau^2$$

il che costituisce un risultato già ottenuto per altra via.

Nel sistema (XIV) si introducono le variabili h legate alle α

dalle formole (48), (49) — dopo facili calcoli si perviene al sistema seguente:

$$(\mathrm{XVI})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= \alpha\,\frac{(h_1-h_2)(h_1-h_3)}{h_3-h_2} \\ \frac{dh_2}{dt} &= \beta\,\frac{(h_2-h_3)(h_2-h_1)}{h_1-h_3} \\ \frac{dh_3}{dt} &= \gamma\,\frac{(h_3-h_1)(h_3-h_2)}{h_2-h_1} \end{aligned}\right.$$

Il metodo esposto ai N[i] III e IV, e quello qui dato per l'integrazione del sistema (II), in sostanza coincidono, benchè le due equazioni di Riccati (51) e (IV) sieno diverse. Entrambi questi metodi infatti riducono l'integrazione del sistema (II) alla integrazione separata dei due sistemi differenziali:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a + b\xi + c\xi^2 \\ \frac{d\eta}{dt} &= a + b\eta + c\eta^2 \\ \frac{d\zeta}{dt} &= a + b\zeta + c\zeta^2 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \alpha\,\frac{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}{\zeta-\eta} \\ \frac{d\eta}{dt} &= \beta\,\frac{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}{\xi-\zeta} \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \gamma\,\frac{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}{\eta-\xi} \end{aligned}\right.$$

Consideriamo ancora il sistema differenziale (XIII) e determiniamo le α_1, α_2, α_3 per modo che questo sistema coincida con il sistema (II); ciò equivarrà a determinare tutte le trasformazioni (47) che mutano in sè il sistema (II). Dovremo porre perciò:

$$-\frac{\alpha_2-\alpha_3}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)}\left(\frac{d\alpha_1}{dt}+H_1\right)=\alpha$$

$$-\frac{\alpha_3-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}\left(\frac{d\alpha_2}{dt}+H_2\right)=\beta$$

$$-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}\left(\frac{d\alpha_3}{dt}+H_3\right)=\gamma$$

e quindi le α_1, α_2, α_3 soddisfano al sistema differenziale:

$$
\text{(XVII)} \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dt} &= -\alpha + (\gamma - \alpha - \beta)\alpha_1 - \beta\alpha_1^2 + \alpha\,\frac{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_3-\alpha_2} \\
\frac{d\alpha_2}{dt} &= -\alpha + (\gamma - \alpha - \beta)\alpha_2 - \beta\alpha_2^2 + \beta\,\frac{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}{\alpha_1-\alpha_3} \\
\frac{d\alpha_3}{dt} &= -\alpha + (\gamma - \alpha - \beta)\alpha_3 - \beta\alpha_3^2 + \gamma\,\frac{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_2-\alpha_1}
\end{aligned}
\right.
$$

Operiamo sopra questo sistema la trasformazione

$$
(52) \qquad \beta_i = \frac{p_i\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3) + \alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3)}{p_i(\alpha_1 - \alpha_3) + \alpha_2 - \alpha_3} \qquad i = 1, 2, 3
$$

le p_1, p_2, p_3 indicando tre soluzioni distinte dell'equazione di Riccati

$$
\frac{d\sigma}{dt} = -\alpha + (\gamma - \alpha - \beta)\sigma - \beta\sigma^2.
$$

Tenendo presenti le formole prima stabilite, il sistema (XVII) assume la forma:

$$
\frac{d\beta_i}{dt} = -\alpha + (\gamma - \alpha - \beta)\beta_i - \beta.\beta_2^2
$$

ossia le β_1, β_2, β_3 soddisfano alla stessa equazione di Riccati — si conclude: *l'integrazione del sistema* (XVII) *dipende da quella di una unica equazione di Riccati.* Il metodo qui seguìto non lascia scorgere come si dovrebbe procedere per l'integrazione del sistema (XVII) quando di quest'ultimo fosse conosciuta una soluzione.

Il sistema (XVII) è un sistema di Lie collegato con il gruppo

$$
(53) \quad \left\{
\begin{aligned}
Xf &\equiv (1 + \alpha_1 - f_1)\frac{\partial f}{\partial\alpha_1} + (1 + \alpha_2)\frac{\partial f}{\partial\alpha_2} + (1 + \alpha_3)\frac{\partial f}{\partial\alpha_3} \\
Yf &\equiv (\alpha_1 + \alpha_1^2)\frac{\partial f}{\partial\alpha_1} + (\alpha_2 + \alpha_2^2 - f_2)\frac{\partial f}{\partial\alpha_2} + (\alpha_3 + \alpha_3^2)\frac{\partial f}{\partial\alpha_3} \\
Zf &\equiv \alpha_1\frac{\partial f}{\partial\alpha_1} + \alpha_2\frac{\partial f}{\partial\alpha_2} + (\alpha_3 + f_3)\frac{\partial f}{\partial\alpha_3}
\end{aligned}
\right.
$$

nel quale si è posto:

$$f_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_3 - \alpha_2}$$

$$f_2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)}{\alpha_1 - \alpha_3}$$

$$f_3 = \frac{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

il quale non è transitivo dacchè il determinante delle $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$ è nullo — questo gruppo è inoltre simile al gruppo delle rotazioni dello spazio ordinario attorno ad un punto. Si potrebbe quindi, per ridurre l'integrazione del sistema (XVII) a quella di una equazione di Riccati, procedere con metodo analogo a quello dato nel N° precedente per il sistema (IX). Si incontra però maggior difficoltà per la ricerca dell'invariante del gruppo (52), o, il che è lo stesso, dell'integrale nelle sole α_1, α_2, α_3 del sistema (XVII), e quindi procederemo per altra via.

Il sistema (XVII) coincide con il sistema (II) qualora in questo ultimo si ponga:

$$\left\{ \begin{aligned} a &= -\alpha \\ b &= \gamma - \alpha - \beta \\ c &= -\beta \end{aligned} \right.$$

ossia se introduciamo a mezzo delle (34) le analoghe delle quantità p_{ik}, che adesso indicheremo con p'_{ik},

$$\left\{ \begin{aligned} &-\frac{p'_{14} + p'_{23} - ip'_{34} - ip'_{12}}{2} = \frac{-p'_{14} + p'_{23} + ip'_{24} + ip'_{13}}{2} \\ &i(p'_{14} - p'_{13}) = ip'_{34} - ip'_{12} \\ &-\frac{p'_{14} + p'_{23} + ip'_{34} + ip'_{12}}{2} = \frac{-p'_{14} + p'_{23} - ip'_{24} - ip'_{13}}{2} \end{aligned} \right.$$

da cui

$$\left\{ \begin{aligned} p'_{23} &= 0 \\ p'_{24} &= p'_{34} \\ p'_{13} &= p'_{12} . \end{aligned} \right.$$

Se dunque determiniamo le tre quantità

$$p = p'_{14} \qquad q = p'_{24} \qquad r = p'_{12}$$

per modo che

$$\begin{cases} 2\alpha = p - i(q + r) \\ 2\beta = p + i(q + r) \\ \gamma = p + i(q - r) \end{cases}$$

se usiamo delle formole (24), (26), il sistema differenziale (XVII) si ridurrà al sistema lineare

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = - r(y + z) - pu \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - qu \\ \dfrac{dz}{dt} = rx - qu \\ \dfrac{du}{dt} = px + q(y + z). \end{cases}$$

Sono integrali di questo sistema

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = \text{cost}$$
$$y - z = \text{cost.}$$

Il sistema (XVIII) può ridursi mediante una opportuna scelta di variabili ad un sistema lineare con tre variabili a determinante gobbo. Si ponga perciò:

$$x + u = \xi \qquad y + z = -\eta \qquad x - u = \zeta\,;$$

il sistema (XVIII) assumerà la forma:

$$\text{(XIX)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = (r - q)\eta + p\zeta \\ \dfrac{d\eta}{dt} = -(r - q)\xi - (r + q)\zeta \\ \dfrac{d\zeta}{dt} = (r + q)\eta - p\xi \end{cases}$$

Questo sistema usando poi delle formole del Darboux si riduce all'integrazione dell'equazione di Riccati

$$\frac{d\sigma}{dt} = -i(r-q)\sigma + \frac{-p+i(r+q)}{2} + \frac{-p-i(r+q)}{2}\sigma^2$$

ossia introducendo le α, β, γ:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\alpha + (\gamma - \alpha - \beta)\sigma - \beta\sigma^2$$

cioè all'equazione (51). Da quanto precede discende poi: *se del sistema* (XVII) *è conosciuta una soluzione, con sole operazioni algebriche si possono ottenere due soluzioni particolari dell' equazione* (51); *e con una quadratura l'integrale generale sia dell'equazione* (51) *stessa che del sistema* (XVII).

L'integrale generale del sistema (XVII) si ottiene risolvendo le (52) rispetto alle α_1, α_2, α_3 quando per le p_i si pongano tre soluzioni particolari dell'equazione di Riccati (51), e inoltre si ponga

$$\beta_i = \frac{A + BC_i}{C + C_i}$$

dove il 2° membro è l'integrale generale dell'equazione (51) e le C_i sono costanti arbitrarie.

Del sistema differenziale (II) sieno conosciute due soluzioni distinte:

$$\xi_1^{(1)},\ \eta_1^{(1)},\ \zeta_1^{(1)}$$

$$\xi_1^{(2)},\ \eta_1^{(2)},\ \zeta_1^{(2)}.$$

Determiniamo le α_1, α_2, α_3 in modo da soddisfare alle equazioni:

$$\xi_1^{(2)} = \frac{\alpha_1\eta_1^{(1)}(\xi^{(1)} - \zeta_1^{(1)}) + \xi_1^{(1)}(\eta_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)})}{\alpha_1(\xi_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)}) + \eta_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)}}$$

$$\eta_1^{(2)} = \frac{\alpha_2\eta_1^{(1)}(\xi_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)}) + \xi_1^{(1)}(\eta_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)})}{\alpha_2(\xi_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)}) + \eta_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)}}$$

$$\zeta_1^{(2)} = \frac{\alpha_3\eta_1^{(1)}(\xi_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)}) + \xi_1^{(1)}(\eta_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)})}{\alpha_3(\xi_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)}) + \eta_1^{(1)} - \zeta_1^{(1)}}$$

Allora con metodo analogo a quello usato al N° precedente si dimostrerà che le α_1, α_2, α_3 che così si ricavano soddisfano

al sistema (XVII), e quindi: *se del sistema differenziale* (II) *sono conosciute due soluzioni distinte, si potranno con sole operazioni algebriche ottenere due soluzioni dell'equazione di Riccati* (51). Occorrerà in questa ipotesi quindi una ulteriore quadratura, per avere l'integrale generale di questa stessa equazione.

VI.

Nei N. precedenti l'integrazione del sistema (II) è ricondotta a quella delle due equazioni di Riccati (Vedi N° III):

$$(54)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} = a + b\tau + c\tau^2 \\[2mm] \dfrac{d\sigma}{dt} = \alpha + \beta - \dfrac{\gamma}{2} + (\alpha - \beta)\sigma + \dfrac{\gamma}{2}\sigma^2 \end{cases}$$

o, il che è lo stesso, (Vedi N° V) a quello delle equazioni:

$$(55)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} = a + b\tau + c\tau^2 \\[2mm] \dfrac{d\sigma}{dt} = -\alpha + (-\alpha - \beta + \gamma)\sigma - \beta\sigma^2. \end{cases}$$

Introduciamo per le a, b, ... le espressioni in funzione dei coefficienti p_{ik} del sistema (I) date dalle (34); le equazioni (54), (55) diverranno rispettivamente:

$$(56)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{-(p_{14}+p_{23})+i(p_{34}+p_{12})}{2} + i(p_{24}-p_{13})\tau + \dfrac{-(p_{14}+p_{23})-i(p_{34}+p_{12})}{2}\tau^2 \\[2mm] \dfrac{d\sigma}{dt} = \dfrac{p_{14}-p_{23}-i(p_{34}-p_{12})}{2} - i(p_{24}+p_{13})\sigma + \dfrac{p_{14}-p_{23}+i(p_{34}-p_{12})}{2}\sigma^2 \end{cases}$$

$$(57)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{-(p_{14}+p_{23})+i(p_{34}+p_{12})}{2} + i(p_{24}-p_{13})\tau + \dfrac{-(p_{14}-p_{23})+i(p_{34}+p_{12})}{2}\tau^2 \\[2mm] \dfrac{d\sigma}{dt} = \dfrac{-p_{14}+p_{23}+i(p_{24}+p_{13})}{2} + i(p_{34}-p_{12})\sigma + \dfrac{-p_{14}+p_{23}-i(p_{24}+p_{13})}{2}\sigma^2. \end{cases}$$

Le due equazioni (56) vengono a coincidere qualora sia:

$$p_{14} = p_{24} = p_{34} = 0.$$

Il sistema (I) si riduce in questo caso ad altro simile con tre variabili, e all'equazione:

$$u = \text{cost.}$$

Le due equazioni (57) coincidono qualora:

$$p_{23} = 0$$

$$p_{24} = p_{34}$$

$$p_{12} = p_{13}$$

Il sistema (I) si può ridurre (cfr. il § III, pag. 16) ancora in questo caso ad altro di forma simile e con tre variabili mediante *una trasformazione nelle sole variabili dipendenti* e all'equazione:

$$y - z = \text{cost.}$$

La discussione generale dei casi in cui l'integrazione del sistema (I) dipende da quella di una sola equazione di Riccati, non è fatta in questa nota. Questa ricerca può essere eseguita studiando le relazioni che devono intercedere tra le a, b, c e le α, β, γ affinchè i due sistemi:

$$\frac{d\xi}{dt} = a + b\xi + c\xi^2 \qquad \frac{d\xi}{dt} = \alpha \frac{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}{\zeta - \eta}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = a + b\eta + c\eta^2 \qquad \frac{d\eta}{dt} = \beta \frac{(\eta - \xi)(\eta - \zeta)}{\xi - \zeta}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = a + b\zeta + c\zeta^2 \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma \frac{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}{\eta - \xi}$$

sieno equivalenti, ossia si possa passare dall'uno all'altro mediante una trasformazione sopra le sole variabili dipendenti.

Passeremo infine a considerare le riduzioni comportate nella integrazione del sistema (I), quando di esso sieno conosciute delle soluzioni particolari.

A) — *Se del sistema* (I) *è conosciuta una soluzione particolare, la completa integrazione di questo sistema è ricondotta a quella di una delle quattro equazioni di Riccati* (56), (57).

Infatti in questo caso è pure conosciuta una soluzione del

sistema (II); se quindi usiamo, ad esempio, del metodo dato al § III, Nota 1ª, e se poniamo di sapere integrare l'equazione:

$$\frac{d\tau}{dt} = a + b\tau + c\tau^2$$

conosceremo la trasformazione (36), e quindi verremo a trovare tre soluzioni del sistema (III), ossia tre soluzioni del sistema (IV) (Vedi osservazioni al piede della prima pagina di questa Nota 2ª). Otterremo dunque tre soluzioni distinte di una stessa equazione di Riccati e quindi potremo scrivere senza quadrature il suo integrale generale, come pure quello del sistema (III).

Le equazioni:

$$(58) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{LC_1(C_2 - C_3) + C_2(C_1 - C_3)}{L(C_2 - C_3) + C_1 - C_3} \\ \eta_2 &= \frac{MC_1(C_2 - C_3) + C_2(C_1 - C_3)}{M(C_2 - C_3) + C_1 - C_3} \\ \zeta_2 &= \frac{NC_1(C_2 - C_3) + C_2(C_1 - C_3)}{N(C_2 - C_3) + C_1 - C_3} \end{aligned} \right.$$

nelle quali L, M, N sono funzioni note del tempo; e C_1, C_2, C_3 delle costanti arbitrarie rappresentano l'integrale generale del sistema (III). Riponendo allora nelle (36) le ξ_2, η_2, ζ_2 con le funzioni del tempo date dalle (58), otterremo l'integrale generale del sistema (II).

Del sistema (I) e quindi anche del sistema (II) sieno conosciute due soluzioni distinte. Il teorema dato al N. IV, pag. 9, permette allora con una quadratura di scrivere l'integrale generale dell'equazione di Riccati:

$$\frac{d\tau}{dt} = a + b\tau + c\tau^2$$

e quindi di formare la trasformazione (36) che conduce dal sistema (II) al sistema (III). Di quest'ultimo sarà conosciuta una soluzione e quindi senza quadrature se ne potrà formare l'integrale generale.

Si otterrà perciò anche l'integrale generale (procedendo come dianzi) del sistema (II), e quindi anche quello del sistema (II). Si ha dunque:

B) — *Se del sistema* (I) *sono conosciute due soluzioni distinte, si potrà formare il suo integrale generale mediante una sola quadratura.*

A risultato analogo conduce l'applicazione del teorema dato alla fine del § IV.

I risultati ora ottenuti e controsegnati con A) e B) furono ottenuti per altra via dal sig. Eiesland (Cfr. Memoria citata, " Am. Journal of Math. ", vol. XXXVIII, N° 1, pag. 27). Questo Autore riduce il sistema (I), quando ne sia conosciuta una soluzione ad altro di forma simile a tre variabili mediante una trasformazione ortogonale a coefficienti variabili. La riduzione dell'integrazione del sistema (I) a quella di due equazioni di Riccati riesce fatta perciò per via indiretta.

Il metodo dato da quest'Autore ha però il grande vantaggio di essere applicabile ad un sistema di forma simile al (I) con un numero qualunque di variabili. Nella citata Memoria egli ottiene per tal modo un risultato, notevole per la sua generalità, e che comprende come casi particolari i teoremi A) e B).

Sulla benzilfenilidrazina simmetrica.

Nota di G. PONZIO ed E. VALENTE.

La benzilfenilidrazina simmetrica $C_6H_5.CH_2.NH.NH.C_6H_5$ (β-benzilfenilidrazina) è stata descritta come una sostanza solida, fusibile a 155°, da Schlömann (1), il quale ritenne di averla ottenuta scaldando in tubo chiuso a 160°, per 24 ore, fenilidrazina (1 molecola) con cloruro di benzile (2 molecole), distillando nel vuoto il prodotto della reazione (previo trattamento con acqua ed estrazione con etere), raccogliendo la porzione bollente a 230°-260° e cristallizzandola dall'alcool. D'altra parte, secondo Minunni (2), scaldando a 115°-120° il cloruro di benzile (1 mo-

(1) *Berichte 26*, 1020 (1893).
(2) *Gazz. Chim. 22*, II, 219 (1892).

lecola) con fenilidrazina (2 molecole) si forma la benzilfenilidrazina asimmetrica (α-benzilfenilidrazina) $\begin{matrix} C_6H_5.CH_2 \\ C_6H_5 \end{matrix} \rangle N.NH_2$.

Rifacendo le esperienze di Schlömann (loc. cit.), ed operando nelle condizioni da lui indicate, noi non abbiamo potuto ottenere nessun prodotto bollente a 230°-260°, e questo risultato negativo, assieme al fatto che detto chimico non dà nessuna prova che il suo composto sia realmente la β-benzilfenilidrazina (1), ci ha indotti a studiare nuovamente la reazione che avviene fra il cloruro di benzile e la fenilidrazina, per vedere se, come succede in altri casi analoghi, non si formasse una miscela delle due idrazine bisostituite α e β.

Facendo però agire assieme detti composti in soluzione alcoolica abbiamo ottenuto benzilfenilidrazina asimmetrica $\begin{matrix} C_6H_5.CH_2 \\ C_6H_5 \end{matrix} \rangle N.NH_2$ e benzilidenbenzilfenilidrazone (benzilfenilidrazone della benzaldeide) $\begin{matrix} C_6H_5.CH_2 \\ C_6H_5 \end{matrix} \rangle N.N = CH.C_6H_5$.

In seguito, basandoci sui lavori di E. Fischer e Knoevenagel (2), i quali da bromuro di allile e fenilidrazina avevano preparato, con buon rendimento, l'allilfenilidrazina simmetrica $C_3H_5.NH.NH.C_6H_5$, abbiamo creduto di poter arrivare alla benzilfenilidrazina simmetrica in modo analogo, cioè facendo agire il bromuro di benzile sulla fenilidrazina, ma l'esperienza ci ha dimostrato che operando in soluzione eterea a freddo, si forma bromuro di fenildibenzilazonio $C_6H_5(C_6H_5.CH_2)_2NBr.NH_2$ e benzilidenbenzilfenilidrazone $\begin{matrix} C_6H_5.CH_2 \\ C_6H_5 \end{matrix} \rangle N.N = CH.C_6H_5$.

Con una via alquanto più lunga abbiamo finalmente raggiunto il nostro scopo. Basandoci sul fatto osservato da Michaelis ed Hermens (3), secondo i quali il fenilortopiperazone

(1) Schlömann dice soltanto che il composto da lui ottenuto, come altre basi secondarie, non dà alcun precipitato coll'acido metafosforico.

(2) *Annalen 239*, 204 (1887).

(3) *Berichte 25*, 2751 (1892) e *26*, 676 (1893).

$$\begin{array}{l} CH_2 - CO - N.C_6H_5 \\ | \qquad\qquad\quad | \\ CH_2 - CO - NH \end{array}$$ è facilmente scisso dall'acido cloridrico in fenilidrazina ed in acido succinico, abbiamo pensato che il derivato benzilico $$\begin{array}{l} CH_2 - CO - N.C_6H_5 \\ | \qquad\qquad\quad | \\ CH_2 - CO - N.CH_2.C_6H_5 \end{array}$$ potesse allo stesso modo fornire la β-benzilfenilidrazina. L'esperienza ci ha dimostrato che ciò realmente avviene e così siamo riusciti a preparare la benzilfenilidrazina simmetrica $C_6H_5.CH_2.NH.NH.C_6H_5$, la quale, precisamente come la maggior parte delle altre β-idrazine, è un liquido di proprietà ben diverse da quelle del composto descritto da Schlömann (loc. cit.) ed è inoltre pochissimo stabile, ossidandosi, anche all'aria, colla massima facilità, in benzilazofenile $C_6H_5.CH_2.N = N.C_6H_5$.

Azione del cloruro di benzile sulla fenilidrazina. — 2 molecole di fenilidrazina sciolte in 5 volumi di alcool assoluto ed 1 molecola di cloruro di benzile si scaldano per tre ore a ricadere a bagno maria, per il che si osserva separazione di cloridrato di fenilidrazina. Il prodotto della reazione si versa in acqua bollente addizionata di acido acetico e di acetato sodico, si estrae con etere l'olio separatosi, si secca la soluzione eterea su solfato sodico anidro e si tratta con acido cloridrico concentrato. Si ottiene in tal modo *cloridrato di α-benzilfenilidrazina* $\begin{array}{l} C_6H_5.CH_2 \\ C_6H_5 \end{array}\!\!>N.NH_2.HCl$ il quale cristallizza dall'acqua in prismi bianchi, fusibili a 170°.

Gr. 0,6741 di sostanza richiesero cc. 28,7 di idrato sodico $\frac{N}{10}$ corrispondenti a gr. 0,104755 di acido cloridrico.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{14}N_2.HCl$
Acido cloridrico	15,54	15,56

Da esso, mediante trattamento con alcali, si isola l'*α-benzilfenilidrazina* $\begin{array}{l} C_6H_5.CH_2 \\ C_6H_5 \end{array}\!\!>N.NH_2$, la quale, assoggettata alla distillazione nel vuoto, bolle tutta al disotto di 212° ($H_0 = 10^{mm}$),

e per la maggior parte alla temperatura costante di 207°-208° (1). Non si ha traccia di sostanza bollente a 230°-260°, quindi resta escluso che nelle condizioni descritte si formi il composto di Schlömann (loc. cit.) (2).

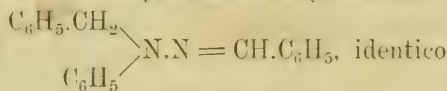
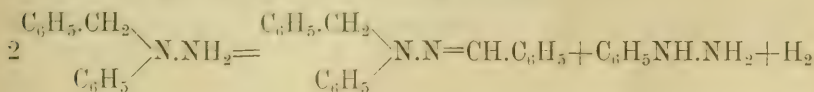
Nella soluzione eterea, dopo il trattamento con acido cloridrico, rimane disciolta una sostanza neutra, la quale, previa eliminazione del solvente e successive cristallizzazioni dall'alcool, si presenta in aghi bianchi fusibili a 111°.

I. Gr. 0,1932 di sostanza fornirono gr. 0,5930 di anidride carbonica e gr. 0,1151 di acqua.

II. Gr. 0,1488 di sostanza fornirono cc. 12,25 di azoto ($H_0 = 736,51$ $t = 11°$), ossia gr. 0,014217.

Cioè su cento parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_{20}H_{18}N_2$
Carbonio	83,70	—	83,91
Idrogeno	6,62	—	6,29
Azoto	—	9,55	9,79

I risultati dell'analisi e tutte le proprietà del composto dimostrano che esso è il *benzilidenbenzilfenilidrazone* (benzilfenilidrazone della benzaldeide) $\begin{matrix} C_6H_5.CH_2 \\ C_6H_5 \end{matrix}\!\!>N.N = CH.C_6H_5$, identico con quello che abbiamo pure preparato, secondo le indicazioni di Philips (3) facendo reagire la benzaldeide coll'α-benzilfenilidrazina. La sua formazione è dovuta alla proprietà, già osservata da Oefner (4), dell'α-benzilfenilidrazina di decomporsi spontaneamente nel senso indicato dalla reazione

$$2\,\begin{matrix} C_6H_5.CH_2 \\ C_6H_5 \end{matrix}\!\!>N.NH_2 = \begin{matrix} C_6H_5.CH_2 \\ C_6H_5 \end{matrix}\!\!>N.N{=}CH.C_6H_5 + C_6H_5NH.NH_2 + H_2$$

(1) Una determinazione di azoto fatta nel prodotto così ottenuto (trovato N = 13.07, calcolato per $C_{13}H_{14}N_2$ N = 14,14 %) dimostra che la base non distilla inalterata, cosa già riconosciuta da Minunni (loc. cit.).

(2) Il Dott. Ciusa, della R. Università di Bologna, ci comunica di aver anch'egli tentato di preparare la benzilfenilidrazina simmetrica col metodo di Schlömann, arrivando agli stessi nostri risultati negativi.

(3) *Annalen 252*, 289 (1889).

(4) *Monatshefte 25*, 599 (1904).

Per analogia coi risultati ottenuti da Paal e Bowedig (1), i quali credettero di aver riscontrato fra i prodotti dell'azione della fenilidrazina sul cloruro di o-nitrobenzile, oltre alla o-nitrobenzilfenilidrazina $\begin{matrix}(NO_2)C_6H_4.CH_2\\ C_6H_5\end{matrix}\!\!>N.NH_2$, anche la bis-o-nitrobenzilfenilidrazina $\begin{matrix}(NO_2)C_6H_4.CH_2\\ C_6H_5\end{matrix}\!\!>N.NH.CH_2.C_6H_4(NO_2)$, abbiamo dapprima creduto che il nostro composto, fusibile a 111°, fosse la bis-benzilfenilidrazina $\begin{matrix}C_6H_5CH_2\\ C_6H_5\end{matrix}\!\!>N.NH.CH_2.C_6H_5$, la quale contiene due atomi di idrogeno in più del benzilidenbenzilfenilidrazone e richiede C = 83,33, H = 6,94, N = 9,72 %. I numeri trovati e l'esperienza di confronto sopra riferita ci tolsero però ogni dubbio e ci indussero a studiare nuovamente l'azione del cloruro di o-nitrobenzile sulla fenilidrazina. In tal modo abbiamo potuto dimostrare che la *cosiddetta bis-o-nitrobenzilfenilidrazina* di Paal e Bowedig *altro non è che l'o-nitrobenziliden-o-nitrobenzilfenilidrazone* (o-nitrobenzilfenilidrazone della o-nitrobenzaldeide) $\begin{matrix}(NO_2)C_6H_4.CH_2\\ C_6H_5\end{matrix}\!\!>N.N{=}CH.C_6H_4(NO_2)$ cioè contiene due atomi di idrogeno in meno (2).

Ripetendo infatti le esperienze di detti chimici, cioè riscaldando a ricadere per tre ore 1 molecola di fenilidrazina con due molecole di cloruro di o-nitrobenzile, versando il prodotto della reazione in acqua bollente contenente disciolti acetato sodico ed acido acetico, estraendo con etere e trattando con acido cloridrico, abbiamo anche noi riscontrato nella soluzione eterea un

(1) *Berichte 25*, 2896 (1892).

(2) Ciò concorda anche colle analisi a Paal e Bowedig (loc. cit.), i quali hanno trovato C = 63,87, H = 4,57, N = 15,03, mentre pei due composti si calcola rispettivamente

	$C_{20}H_{18}N_4O_4$	$C_{20}H_{16}N_4O_4$
Carbonio	63,49	63,82
Idrogeno	4,76	4,25
Azoto	14,82	14,89

composto neutro, il quale cristallizza dall'alcool in aghi rossi fusibili a 128°. Però l'identico composto l'abbiamo pure ottenuto mescolando soluzioni alcooliche di quantità equimolecolari di o-nitrobenzaldeide e di o-nitrobenzilfenilidrazina: l'*o-nitrobenzil-fenilidrazone della o-nitrobenzaldeide* si forma immediatamente a freddo e ricristallizzato dall'alcool si presenta in aghi rossi fusibili a 128°, difficilmente solubili in alcool, in etere ed in acido acetico, solubili nell'acetato di etile e nel benzolo, ed in tutte le loro proprietà identici colla creduta bis-o-nitrobenzilfenil-idrazina di Paal e Bowedig.

Azione del bromuro di benzile sulla fenilidrazina. — Aggiungendo una molecola di bromuro di benzile a due molecole di fenilidrazina sciolte nel doppio volume di etere anidro e mantenendo la miscela alla temperatura ordinaria, comincia a separarsi, già dopo breve tempo, un ammasso di cristalli di bromidrato di fenilidrazina. Separando quest'ultimo, trascorse 24 ore, e distillando l'etere filtrato si ottiene un residuo pastoso, dal quale, per trattamento con benzolo a freddo, si separa una sostanza insolubile, che cristallizza dall'alcool in splendidi prismi bianchi fusibili a 143°.

I. Gr. 0,2338 di sost. fornirono cc. 16 di azoto ($H_0 = 741,07$ $t = 13°$), ossia gr. 0,018492.

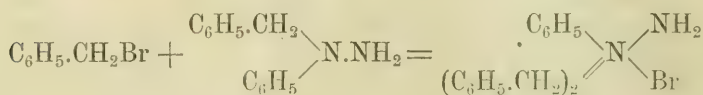
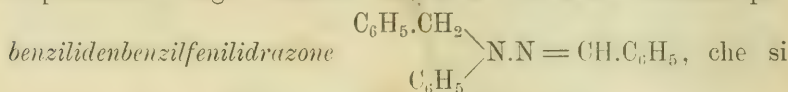
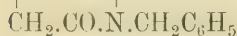
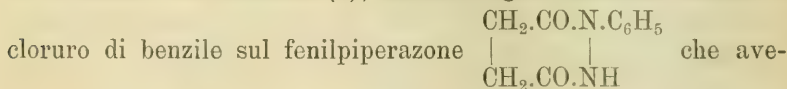
II. Gr. 0,5806 di sostanza fornirono gr. 0,2946 di bromuro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{20}H_{21}N_2Br$
	I	II	
Azoto	7,90	—	7,58
Bromo	—	21,50	21,68

Questo composto, insolubile nell'etere e nel benzolo, poco solubile a caldo e pochissimo a freddo nell'alcool, è anche pochissimo solubile nell'acqua e non si altera a contatto degli idrati alcalini, e non è altro che *bromuro di fenildibenzilazonio* (bromuro di dibenzilfenilidrazinio) $C_6H_5(C_6H_5.CH_2)_2NBr.NH_2$, finora non conosciuto. La sua formazione è dovuta ad una reazione che avviene fra il bromuro di benzile e l'α-benzilfenilidrazina, rea-

zione che è analoga a quella che ha luogo p. es. fra il bromuro di etile e l'etilfenilidrazina in assenza di solvente e che dà origine, secondo E. Fischer (1), al bromuro di fenildietilazonio (bromuro di dietilfenilidrazinio) $C_6H_5(C_2H_5)_2NBr.NH_2$. Vuol dire adunque che in soluzione eterea la fenilidrazina e il bromuro di benzile reagiscono fra di loro solo parzialmente nel senso previsto, cioè con formazione di α-benzilfenilidrazina e di bromidrato di fenilidrazina: eliminando però il solvente, il bromuro di benzile rimasto inalterato e l'α-benzilfenilidrazina formatosi reagiscono poi l'uno coll'altra con formazione di bromuro di fenildibenzilazonio:

$$C_6H_5.CH_2Br + \begin{matrix} C_6H_5.CH_2 \\ C_6H_5 \end{matrix}\!\!>N.NH_2 = \begin{matrix} C_6H_5 \\ (C_6H_5.CH_2)_2 \end{matrix}\!\!>N<\!\!\begin{matrix} NH_2 \\ Br \end{matrix}$$

Sciolto nel benzolo rimane un altro composto, il quale, isolato per svaporamento del solvente e cristallizzato dall'alcool si presenta in aghi bianchi fusibili a 111° e si riconosce per *benzilidenbenzilfenilidrazone* $\begin{matrix} C_6H_5.CH_2 \\ C_6H_5 \end{matrix}\!\!>N.N = CH.C_6H_5$, che si forma in modo analogo al caso precedentemente studiato.

Idrolisi del benzilfenilpiperazone. — Il benzilfenilpiperazone $\begin{matrix} CH_2.CO.N.C_6H_5 \\ | \qquad\quad | \\ CH_2.CO.N.CH_2C_6H_5 \end{matrix}$ l'abbiamo preparato, secondo le indicazioni di Michaelis ed Hermens (2), facendo agire alcoolato sodico e cloruro di benzile sul fenilpiperazone $\begin{matrix} CH_2.CO.N.C_6H_5 \\ | \qquad\quad | \\ CH_2.CO.NH \end{matrix}$ che avevamo a sua volta ottenuto dal cloruro di succinile (3) e cloridrato di fenilidrazina in soluzione benzolica. Riscaldato con acido cloridrico al 20 % subisce rapidamente l'idrolisi trasformandosi in

(1) *Annalen 190*, 107 (1878).
(2) *Berichte 25*, 2747 (1892) e *26*, 674 (1893).
(3) Alle attuali conoscenze sul cloruro di succinile è da aggiungersi che esso distilla a 106° a 30 mm. di pressione.

acido succinico ed in benzilfenilidrazina simmetrica, la quale si separa per raffreddamento allo stato di cloridrato.

Il *cloridrato della benzilfenilidrazina simmetrica* $C_6H_5.CH_2.NH.NH.C_6H_5.HCl$ si presenta in laminette bianche fusibili a 193°-95° ed è poco solubile nell'acqua calda; insolubile nell'etere (1).

I. Gr. 0,1625 di sostanza richiesero cc. 6,87 di idrato sodico $\frac{N}{10}$, corrispondenti a gr. 0,025075 di acido cloridrico.

II. Gr. 0,3398 di sostanza fornirono cc. 35,5 di azoto ($H_0 = 733,92$ $t = 13°$), ossia gr. 0,040719.

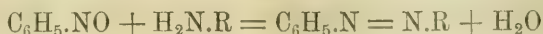
Cioè su cento parti:

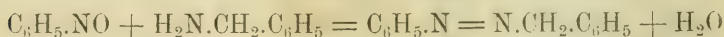
	trovato I	trovato II	calcolato per $C_{13}H_{14}N_2HCl$
Acido cloridrico	15,43	—	15,56
Azoto	—	11,98	11,94

Trattato con soluzione di acetato sodico fornisce la *benzilfenilidrazina simmetrica* (β-benzilfenilidrazina) $C_6H_5.CH_2.NH.NH.C_6H_5$ la quale è un olio incoloro più leggiero dell'acqua, che all'aria si ossida colla massima rapidità trasformandosi in benzilazofenile $C_6H_5.CH_2.N = N.C_6H_5$. Quest'ultimo composto ha per noi un interesse speciale, dovendone confrontare le proprietà

(1) Nella memoria di Michaelis ed Hermens (loc. cit.), pubblicata nel 1893, si trovano alcune comunicazioni preliminari sul cloridrato di benzilfenilidrazina simmetrica, comunicazioni date con riserva, ma che non furono mai confermate e che secondo le nostre esperienze risultano erronee. Detti chimici accennano di aver ottenuto per azione dell'acido cloridrico concentrato sull'etere benzilfenilidrazinsuccinico $\begin{array}{l} CH_2.COOC_2H_5 \\ | \\ CH_2.CO.N.CH_2C_6H_5.NHC_6H_5 \end{array}$ un cloridrato fusibile a 167°-170° che ritennero per quello della β-benzilfenilidrazina. Decomponendolo con alcali, estraendo la base con etere e trattando la soluzione eterea con ossido giallo di mercurio ottennero un olio rossastro, dal quale poco a poco si separò una sostanza bianca fusibile a 200°-201°: mediante distillazione col vapore separarono l'olio che ritennero benzilazofenile, mentre considerarono la sostanza solida come un isomero (?) del precedente. È curioso poi notare che nel Beilstein (IV, pag. 1385) si trova descritto, evidentemente per una svista, come benzilazofenile (benzolazofenilmetano) il composto bianco fusibile a 200°-201°.

con quelle di un prodotto che abbiamo ottenuto per altra via: ci proponiamo perciò di prepararlo, più comodamente, sia per idrolisi della dibenzoilbenzilfenilidrazina $\genfrac{}{}{0pt}{}{C_6H_5.CO}{C_6H_5.CH_2}\!>\!N.N\!<\!\genfrac{}{}{0pt}{}{COC_6H_5}{C_6H_5}$, sia applicando la reazione scoperta da Baeyer (1) ed estesa poi da Mills (2), da Bamberger (3) e da Auwers e Röhrig (4) a molti amidoderivati, mediante la quale si possono ottenere facilmente gli azocorpi:

$$C_6H_5.NO + H_2N.R = C_6H_5.N = N.R + H_2O$$

Trattando il nitrosobenzol con benzilamina $C_6H_5.CH_2.NH_2$ si dovrebbe appunto ottenere il benzilazofenile:

$$C_6H_5.NO + H_2N.CH_2.C_6H_5 = C_6H_5.N = N.CH_2.C_6H_5 + H_2O$$

ma su questo argomento riferiremo in una prossima Nota.

Torino, Istituto Chimico della R. Università.
Gennaio 1908.

---

(1) *Berichte 7*, 1638 (1874).
(2) *Journ. Chem. Soc. 67*, 928 (1895).
(3) *Berichte 29*, 102 (1896).
(4) *Berichte 30*, 989 (1897).

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 19 Gennaio 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-Presidente dell'Accademia, Rossi, Allievo, Carutti, Chironi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza e De Sanctis, Segretario.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 5 gennaio 1908.

Il Vice-presidente On. Boselli offre a nome della R. Deputazione di Storia patria l'ottavo volume della *Bibliografia storica degli Stati della monarchia di Savoia*, compilata da Antonio Manno, rilevandone la grande importanza.

Il Socio Ruffini presenta l'opera di Mons. Emanuele Colomiatti, *Codex iuris pontificii seu canonici* (Taurini 1888-1907), e ne illustra il contenuto ed il valore con parole che sono registrate negli *Atti*.

Il Socio Rossi presenta per l'inserzione negli *Atti* una sua nota intitolata: *Delle dottrine religiose dell'antico Egitto*.

La Classe quindi si raccoglie in seduta privata e procede alla nomina della Commissione giudicatrice del premio Gautieri per la letteratura (triennio 1905-1907), nella quale riescono eletti i Soci Renier, Graf e Sforza; e a far parte della Giunta per la biblioteca accademica conferma per un nuovo triennio il Socio Manno, giusta l'art. 32 dello Statuto accademico.

LETTURE

Delle dottrine religiose dell'antico Egitto.

Nota del Socio FRANCESCO ROSSI.

L'egittologia, questa novella disciplina creata dal genio dello Champollion, raggiunse ben presto per opera dei numerosi suoi cultori un onorevole posto infra le altre scienze sorelle.

Ma a difendere le dottrine del grande Maestro dagli attacchi de' suoi avversari, rivolsero in sul principio i discepoli le ricerche nel campo puramente filologico, lasciando ai successori le investigazioni nel campo filosofico-religioso, e col ricomporre, come fecero, la lingua, che è indispensabile all'intelligenza dei miti in essa espressi, prepararono ai filosofi un ampio materiale per le loro ricerche.

La religione egiziana, che eccitava così vivamente l'attiva curiosità dello Champollion, è ancora poco nota in quanto a' suoi principii, e la teoria già da lui segnalata della triade sotto i tre aspetti di padre, di madre e di figlio; tutta l'evoluzione divina, la credenza in un Dio unico, e le attribuzioni dei quattro elementi riferentisi a tipi che li concretano, ma di una maniera piuttosto derivata, che primitiva, tutti questi punti sparsi di una religione già fatta, mostrano, come bene ha osservato il sig. Lefebeur nel suo studio sopra alcuni capitoli del *Libro dei morti*, il punto a cui essa tende, piuttosto che il concetto fondamentale da cui questa deriva.

L'epopea religiosa dell'antico Egitto è fondata sopra una specie di lotta divina, in cui *Horo*, la *Luce*, trionfa di *Set*, le *tenebre*, l'*uccisore di Osiride*, e questa guerra dei due fratelli rivali, collegata dai sacerdoti egiziani alla storia generale e locale del loro paese, traspare ad ogni tratto in tutti i loro testi sacri, ed è confermata pure dai racconti degli autori greci, in gran parte iniziati a questi misteri. L'antichità greca offre quindi un ricco tesoro a queste ricerche, aumentato oggi ancora dai tanti

monumenti religiosi riprodotti nelle splendide pubblicazioni dello Champollion, del Rosellini, del Lepsius, e di altri esimii egittologi, contenenti gli inni e le composizioni sacre dell'antico Egitto, e principalmente i testi relativi al *mito* d'Horo e le scene delle tombe reali e sopratutto il *Libro dei morti*.

La tradizione egiziana, confermata dal rinomato papiro jeratico cronologico, o canone regio, che si conserva nel Museo egizio di Torino, ci dice che prima dei re mortali regnarono in Egitto per una serie sterminata di anni gli Dei, divisi, come ci narra Erodoto, in tre ordini tra loro genealogicamente connessi.

Gli Dei del primo ordine erano otto, ed i loro nomi si trovano ancora nei monumenti, aventi ciascuno uno special culto nei diversi nomi, in cui era fin dai più remoti tempi diviso l'Egitto. Così *Ammone* che i Greci paragonarono col loro Giove, era adorato principalmente in Tebe, ove gli fu inalzato il famoso tempio. *Ptah* invece, l' Ἥφαιστος dei Greci ed il Vulcano dei Latini, aveva principal culto in Memfi, l'antica rivale di Tebe, ed il suo tempio godeva per tutto l'Egitto di non minore rinomanza che quello di *Ammone* in Tebe, ed era oggetto della stessa venerazione.

Ammone, il Dio nascosto, secondo il significato del suo nome, è quella forza occulta, che trae le cose alla *luce*; *Ptah* è l'organizzatore del mondo, il Dio che compie, secondo l'espressione del filosofo neo-platonico d'Alessandria, Giamblico, tutte le cose con *arte* e *verità*.

Gli Dei del secondo ordine, discendenti immediatamente dal primo, per via di figliazione, componevano l'anello intermedio che legava l'elemento cosmogonico, formato dal primo ordine, coll'elemento psicologico o terrestre, costituito dal terzo. Gli Dei di questo secondo ordine erano dodici, e tutti figli di più antiche divinità cosmiche, e specialmente di Ra il più giovane di esse, ma tutti di antica origine, e molto diffusamente adorati. Il carattere quindi di quest'ordine è esistenza derivativa, secondaria ed al tempo stesso istrumentale, analoga ad un 'di presso a quella dei *cabiri*. L'idea di divinità è in quest'ordine considerevolmente mescolata colla credenza di potere di natura, ed ha una materiale tendenza, da cui risulta essere quest'ordine non puramente cosmogonico come il primo, ed anche non completa-

mente terrestre e psicologico come il terzo. A capo del terzo ordine troviamo Osiride, che la tradizione fa figlio di *Seb*, il *Cronos* dei Greci, uno dei figli di *Ra*, e termina con Horo, il vincitore di Tifone, il *dio del male*. Ed anche nel sovra citato papiro cronologico o *Canone regio*, Horo è dato come l'ultimo dei Re divini, ed il suo nome è, in questo papiro, separato da quello di *Mene*, il primo dei *re mortali*, soltanto per alcune poche linee jeratiche, che contenevano la serie cogli anni di regno degli *Hor-Šesu* o *seguaci di Horo*, il Dio nazionale per eccellenza, ed il pastore speciale del popolo egiziano, e furono questi *Hor-Šesu*, che costituirono il governo teocratico, il quale precedette il regno di *Mene*.

Ma al disopra di tutti questi Dei, dei quali la fervida immaginazione del popolo egiziano aveva popolato il suo cielo, stava per l'iniziato al santuario un Dio unico, increato, invisibile e nascosto negli abissi inaccessibili della sua essenza, di cui *Ra*, il Dio della *Luce*, il *Sole*, era la prima e più splendida manifestazione.

Infatti in un papiro del nostro Museo, pubblicato negli " Atti della R. Accademia delle Scienze ", 1879, rappresentante in una graziosa scena il Dio *Ra*, che percorre nella sua barca la vôlta celeste, uscendo dalla regione delle tenebre, raffigurate in sette donne colorate in nero e senza testa, portanti sul collo un lungo serpente, e chiamate le reggenti o regine dell'Occidente, nell'iscrizione geroglifica, che accompagna la scena, *Ra* è chiamato *Dio unico che fu nel principio, ogni Dio fu dopo di lui*. In queste figure di donne colorate in nero, l'autore volle simboleggiare le tenebre, che precedettero la luce, ed alludere al tempo indefinito, senza misura, che ha preceduto la formazione del mondo, od in altre parole, il *caos*, ossia la notte primordiale e senza limite, che troviamo in quasi tutte le cosmogonie; concetto, che si trova pure espresso nel capitolo XVII del *Libro dei morti*, il grande repertorio delle dottrine religiose di quel popolo. Questo capitolo, che espone nel suo principio la cosmogonia secondo i sacerdoti egiziani, comincia colle seguenti parole: *Io sono Atum, allorchè era solo nel Nun*. *Atum* è il sole notturno, o meglio la forma oscura, che prende *Ra*, *il sole luminoso, l'unico esistente nel Nun*, l'abisso celeste, ossia l'elemento acqueo, l'oceano primordiale, che contiene nel suo seno i germi di tutte

le cose. Quindi prosegue: *Io sono Ra, col suo diadema, allorchè ha cominciato la sovranità che ha fatto*; e spiega quest' ultima frase dicendo: *È Ra, allorchè cominciò ad apparire nel regno che ha fatto, quando non esisteva ancora il firmamento.*

Da *Atum* sorge quindi *Ra*, il quale divide i quattro elementi, che prima esistevano nel *Nun*, come forze disordinate e confuse, e col separare il cielo dalla terra, produce la luce, che dà la vita a tutti gli esseri. Il che concorda pure col bell'inno al sole, ove il Dio è invocato con queste parole: *Tu, Signore del cielo, Signore della terra, hai fatto le stelle, che sono nel cielo, gli uomini, che sono sulla terra; Dio unico esistente da principio, hai fatto le terre, hai creato le intelligenze, hai fatto il Nun, hai creato il Nilo, hai fatto le acque, e fai vivere tutto ciò che è in esse.* Egli è adunque il Dio, che mantiene e conserva la vita ed il mondo, il Dio attivo, operante e combattente. Per questo *Ra* è il padre, il tipo ed il modello dei re dell'Egitto, che tengono da lui il loro potere, e regnano su questo come Ra sul mondo. Di qui ne viene che tutti i Faraoni prendono il titolo di *figlio del Sole*, titolo che precede nei cartelli reali il nome di famiglia.

Un episodio del suo regno, degno di essere qui menzionato, è quello della distruzione degli uomini per opera degli Dei, conservatoci in una iscrizione mitologica della grande tomba di Seti I a Tebe. In una piccola camera oscura e bassa, che trovasi quasi in fondo della magnifica tomba di questo re, è rappresentata in un grande basso-rilievo una vacca colorata in rosso, avente sotto il ventre il Dio *Su*, l'Atlante egizio, con otto altre divinità personificate da stelle. Lo Champollion che riprodusse ne' suoi monumenti dell'Egitto questo basso rilievo, omise la grande iscrizione geroglifica che l'accompagna, ed è quella appunto che contiene la narrazione di questo grande episodio del regno di Ra. Non ostante le molte lacune, prodotte dal tempo e più ancora dalla mano degli uomini, che interrompono in parecchi luoghi la narrazione, si ricava come Ra, il quale da una lunga serie d'anni regnava sugli uomini e sugli Dei, nei suoi vecchi giorni offeso dall'audacia degli uomini che congiurarono contro di lui, raduna il Consiglio degli Dei, rivolgendosi al suo padre *Nun* con queste parole: " Tu, l'anziano degli Dei, " da cui io sono nato, e voi Dei antichi, ecco gli uomini che " sono nati da me, pronunziano parole ingiuriose contro di me:

“ ditemi ciò che volete fare a questo proposito; io ho aspettato, “ e non ho voluto punirli prima d'aver inteso il vostro giudizio „. Allora *Nun*, il più anziano degli Dei, prende la parola, e testimoniata a *Ra* la sua profonda venerazione, a nome di tutti propone all'oltraggiato Monarca la distruzione degli uomini che congiurarono contro di lui, e ne viene dato l'incarico alla Dea *Sekhet*, la Dea che, nei monumenti colossali del nostro Museo, è rappresentata con testa di leone, sormontata dal disco solare, e chiamata la *guardiana dei templi*, la *punitrice degli empi,* la *distruggitrice dei nemici di Ra.*

La Dea impiega parecchie notti in questa opera di distruzione, colla quale riempie del sangue degli uomini tutto il paese sino ad Eracleopoli, e riceve per la sua obbedienza gli encomii da Ra.

Dopo questa strage degli uomini, lo sdegno di *Ra* viene pienamente placato per una grande offerta, preparata dai messaggieri del Dio, consistente in una quantità straordinaria di frutti raccolti in tutto l'Egitto, e mescolati col sangue degli uomini, di cui riempiono settemila vasi. Questa offerta colma di gioia il cuore del divino monarca, che nella sua contentezza giura di non più distruggere gli uomini.

Da questo punto il testo dell'iscrizione si fa sempre più difficile ed oscuro per le numerose lacune, che interrompono la narrazione. Pare tuttavia, che dopo qualche tempo la terra siasi di nuovo popolata d'uomini, i quali si fanno una seconda volta a congiurare contro di lui. Poichè il testo parla ancora di un combattimento, in cui questi nemici di Ra vengono pienamente dispersi. Ma legato dal giuramento fatto, non potendo più distruggerli, e stanco della loro compagnia, si fa trasportare in cielo da *Nun*, ed affida il governo della terra al Dio *Seb* ed alla Dea *Nut*, dal cui connubio nacque Osiride, il primo Dio del terzo ordine. Osiride infatti è ad ogni tratto chiamato nelle stele funerarie il *figlio maggiore di Seb*, *quegli che siede sul trono di Seb*, *l'erede di Seb*; ed il suo culto, sebbene il meno antico, fu il più diffuso di tutti, poichè a differenza delle altre divinità, che erano ordinariamente particolari a tale o tal altro nomo, Osiride, Dio del mondo delle anime, regnava per tutto l'Egitto, di modo che ciascuna delle 42 capitali di provincia aveva un tempio consacrato a questo Dio.

Osiride, narra la tradizione, è l'essere infinitamente buono,

che dopo aver regnato lunghi anni, nella valle del Nilo, ed insegnato a' suoi abitatori costumi e leggi, colmo di benedizioni fu ucciso dal malvagio Tifone, che con l'aiuto de' suoi 72 compagni, fattone a pezzi il corpo, li disperse per tutto il suolo d'Egitto, o secondo il racconto dei Greci, rinchiuso il cadavere in una cassa di mummia, lo gettò nel Nilo. Iside, che gli era sorella e sposa, avutane la novella nella città di Copto, prese tosto le gramaglie, e corse, piangendo, la contrada in cerca del corpo dell'amato consorte. Lo trovò finalmente a Biblo, sul lido fenicio, spinto ivi a terra dalle onde, dove, a proteggerlo della verde sua ombra, era sorto improvvisamente un gran tamarisco, l'albero sacro ad Osiride. Di qui essa lo portò in Egitto, e diedegli in Abido splendida sepoltura. In questo frattempo crebbe il loro figlio *Horo*, che risoluto di vendicare il padre suo, combattè durante un lungo numero di giorni Tifone ed i suoi compagni, nè cessò dalla lotta finchè non li ebbe cacciati da tutto l'Egitto, vendicando così la morte del padre. Ma questi non era morto; egli era solamente disceso nel mondo inferiore, ove fondava il regno delle anime, e riviveva intanto nel suo figlio Horo come giovane principe dei viventi in una nuova vita e rinnovata signoria.

Ora questo mito, che in linguaggio simbolico ci conduce alla dottrina della credenza egiziana sull'immortalità dell'anima, ha la sua radice appunto nella natura di quella contrada. Infatti la valle del Nilo, formata dai versanti delle due catene di montagne, la libica che la chiude ad occidente e la protegge dalle sabbie e dagli uragani del gran deserto di *Sahara*, e l'arabica, che si estende all'oriente sino al Mar Rosso e termina coll'istmo di Suez, sarebbe rimasta un' arida petraia se il Nilo, che la percorre in tutta la sua lunghezza, nelle sue annuali e regolari innondazioni, col depositare un limo grasso e leggiero, non l'avesse resa atta alla produzione, convertendola in una delle più fertili regioni del mondo. Il Nilo adunque, che inaffia il terreno disseccato dal sole e lo concima e ne rende possibile la vegetazione, e con ciò la vita nella contrada, e che con la regolare innondazione e col decrescimento stabilisce la norma alle divisioni dell'anno e quindi tutta l'attività e tutto quanto lo sviluppo sociale ed intellettuale de' suoi abitatori, non era altro pei religiosi egiziani, che un' emanazione di Osiride; anzi lo stesso Dio Osi-

ride sotto forma corporea. Così nel bell'inno al Nilo, questo è invocato dal poeta egiziano con tali parole: " Omaggio a te, " che ti sei manifestato su questa terra, e vieni in pace a far " vivere l'Egitto, irrigatore delle campagne create da Ra; tu " abbeveri la terra, e scendi amico dei pani e delle produ- " zioni ". Quando poi gli infocati venti del deserto libico ardono le campagne, e la corrente del Nilo decresce, allora Osiride è ucciso da Tifone e dai suoi 72 compagni, che ne fanno a pezzi il corpo e li disperdono per tutto l'Egitto. Desolata lo cerca Iside, la madre terra, sospirando indarno gli abbracciamenti dell'adorato consorte; ora signoreggia il paventato Tifone, il Dio della Siccità e della Sventura, con i suoi compagni, ed il paese piange la morte di Osiride. Ma quando dopo i 72 giorni dell'infocato calore, ed alla metà di giugno, il letto del fiume si riempie di nuove acque, ed il Nilo, al tempo del solstizio d'estate, esce fuori delle sue sponde e ne allaga tutta la valle, allora è Osiride di nuovo svegliato; il giovane Horo, cioè la nuova benedizione dell'anno, ha vinto il Dio dell'arsura e della sterilità.

Così la morte di Osiride ed il suo ritorno a vita non sono altro che l'annuale spegnersi e risvegliarsi a vita della forza della natura; la sua morte non è che apparente; esso continua a vivere e nel suo figlio Horo e nel mondo inferiore. Anche la morte dell'uomo è nella dottrina egiziana assimilata al deperimento della forza creatrice della natura, che sfugge alla morte per rinascere alla vita; l'uomo, cioè, non muore di una morte eterna, ma la sua anima divisa dal corpo continua a vivere come la sonnecchiante forza della natura, e come questa di nuovo si sveglia, e la morta terra si riempie di nuova freschezza di vita, così anche un giorno l'anima del trapassato si ricongiungerà col suo corpo ad un nuovo corso di vita.

Osiride aveva inoltre ancora un culto molto diffuso sotto la forma vivente del bue *Apis*. Il bue era in tutto l'Egitto l'animale tenuto in maggior conto, poichè era sotto queste spoglie che Osiride, l'essere sommamente buono, scendeva talvolta in mezzo agli uomini, esponendosi ai dolori della vita terrestre. La sua madre era tenuta vergine anche dopo il parto, perchè *Apis* non era concepito nel seno di sua madre per contatto del maschio, ma da *Ptah*, la sapienza divina personificata, che sotto forma di un fuoco celeste, o, come dice Ero-

doto, di un raggio di cielo, fecondava la vacca, che doveva dargli la vita. *Apis* era quindi un' incarnazione di Osiride per virtù di *Ptah*, e, come insegnavano i sacerdoti, secondo la testimonianza di Plutarco, *Osiride* ed *Apis* si fondevano in una sola e stessa divinità, e dovevasi considerare *Apis* come un' immagine perfetta dell'anima di Osiride. Egli aveva quindi un santuario nel tempio di *Ptah* a Memfi, e quando veniva a morire, era la sua morte pianta per settanta giorni; si imbalsamava il suo corpo, e lo si seppelliva con la più grande pompa nei sotterranei del tempio, designato dai greci col nome di *Serapeum* o tempio di Serapide. Compiute le cerimonie funebri, i sacerdoti uscivano in cerca di un novello *Apis*. Se trovavano in qualche mandra un torello generato da una vacca, che non avesse ancor partorito, e munito di certi segni sacri, che dovevano essere in numero di 28, si congratulavano per tanta fortuna col proprietario della mandra, e conducevano il novello *Apis* nei dintorni di Nilopoli, in una prateria, ove dimorava quaranta giorni. Quindi lo si trasportava a Memfi sopra una barca ornata di un *naos* dorato, e si celebrava in tutto l'Egitto la sua riapparizione per sette giorni continui con processioni, sacrifizi ed altri segni di gioia, perchè la ricomparsa di *Apis* era riguardata come una prova vivente della protezione divina.

Strettamente congiunto col mito di Osiride è quello di Horo. La morte di Osiride e la vendetta che ne prende il figlio Horo ne forma il principale argomento. Tifone insieme co' suoi compagni avendo preso con inganno Osiride, e fattone a pezzi il corpo, li disperse per tutto l'Egitto. Il figlio non doveva lasciare impunito tanto delitto: epperò accompagnato dalla madre Iside, e guidato dal Dio *Thoth*, dichiara la guerra a Tifone, che in questo mito si nasconde sotto le forme di un ippopotamo; ma dopo lunga lotta viene preso, ed è incatenato da Horo. Ottenuta questa vittoria, Iside consiglia il figlio di fare a pezzi il suo nemico, come questi aveva fatto del padre suo, e di offrirne le varie membra agli Dei, che la Dea gli addita; così Horo, ucciso Tifone, e fattone a pezzi il corpo, è dichiarato giusto.

In questa leggenda Tifone non è più semplicemente il Dio del male, l'avversario personale di Osiride, ma è un sovrano, che occupa con i suoi compagni la più grande parte dell'Egitto da Edfou sino all'oriente del delta. *Hor-xuti* regna in Nubia,

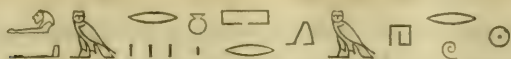
dove è come relegato: ma nell'anno 363 del suo regno, il suo figlio *Hor-hut* raccoglie un esercito, ed accompagnato dal padre suo, il quale lo segue durante tutta la spedizione, e lo appoggia co' suoi consigli, scende in Egitto, e cacciato Tifone si fa signore di tutto il paese.

Come il mito di Osiride ha il suo fondamento nella natura del suolo egiziano, così questo dio Horo dovette probabilmente avere a radice un fatto storico. Infatti *Set*, il nome egiziano di Tifone, è nella storia egiziana rappresentato come il Dio dei nemici, e specialmente dei popoli di razza semitica, che conquistarono una volta la contrada, e la misero sovente in pericolo; ed è secondo lo storico egiziano Manetone, il re, che nella dinastia degli Dei precedette immediatamente Horo. Questa tradizione perciò dimostrerebbe che la successione di Horo dovette aver avuto luogo per diritto di conquista, e che questi avvenimenti avrebbero di poco preceduto i tempi storici.

Questi due miti formano per così dire il perno, intorno a cui si svolgono le dottrine religiose contenute nel *Libro dei morti*.

Tale libro, il cui più compiuto esemplare è posseduto dal Museo di Torino, fu dallo Champollion intitolato *Rituale funerario*, a ciò forse indotto dalle scene che l'accompagnano, riguardanti le ceremonie in onore dei defunti, e della trasmigrazione delle anime. Ma un esame più profondo di questo testo persuase il Dr. Lepsius, che ne fece la pubblicazione nel 1842, a chiamarlo *Libro dei morti*, poichè, come osservò quest'esimio egittologo, esso non contiene alcuna istruzione pel culto dei morti, nessun inno o preghiera che venisse pronunziata dai sacerdoti nell'interramento del defunto, ma è il defunto stesso, che parla e narra le cose che vede ed ode, le preghiere e le invocazioni che egli stesso rivolge ai diversi Dei presso ai quali egli giunge; in una parola riguarda lui solo, e le sue avventure nel lungo errare dopo la morte terrestre.

I primi quindici capitoli di questo grande repertorio delle dottrine religiose dell'antico Egitto sono i soli, che compongono un tutto ben ordinato e connesso, e si può dire, che essi rappresentano lo schema o meglio l'essenza dell'intiera opera, di cui i rimanenti capitoli formatisi a diverse epoche e provenienti anche da diverse fonti, non sono che un' amplificazione di particolari atti ed avvenimenti dell'anima.

Questi primi capitoli portano il titolo

ha-m-ro.u.nu per m hru,

principio dei capitoli della manifestazione alla luce; letteralmente, *principio dei capitoli dell'uscire al giorno*. La scena, che illustra questa parte dell'opera, rappresenta la solenne processione funebre, dietro la quale appare il defunto adorante il Dio *Sole*. Il primo capitolo contiene le invocazioni al Signore dell'Averno, Osiride; nel nono questi schiude al defunto, come a suo figlio, le vie del cielo e della terra, e nei seguenti l'Osiriano (giacchè il defunto è qui assimilato ad Osiride e ne porta anche il nome) è giustificato ed introdotto nel regno della luce, che è la meta di tutto il pellegrinaggio infernale. Da questo momento la carriera del defunto è assimilata del tutto a quella del sole; egli esce dal mondo sotterraneo ogni mattina col sole per riposarsi con esso alla sera nel *Xer-neter* (il mondo sotterraneo), e come l'anima celeste ossia *Ra*, veniva ogni sera a coricarsi nel corpo terrestre ossia in Osiride (il sole del mondo sotterraneo), così l'anima del defunto elevandosi al cielo col sole, lo lasciava ogni sera, e si ricongiungeva col suo corpo nel sepolcro.

Il cielo era quindi considerato come il soggiorno delle anime, mentre la terra era la dimora dei corpi. E questa separazione dell'anima e del corpo è meglio ancora indicata nelle stele funerarie, ove s'incontrano frequentemente le espressioni: *la sua anima è nel cielo, il suo corpo è nella terra,* o quest'altra: *possa egli entrare ed uscire dal Xer-neter, l'anima nel cielo, il corpo nel tuau* od emisfero inferiore.

Egli esce, dice il testo, *il giorno come Horo, e ricomincia la vita dopo morte ogni giorno.* Nel capitolo XV, *chiede di essere adorato al mattino, di coricarsi alla sera; che la sua anima esca con Ra verso il cielo.* Altrove si legge: *io mi corico la notte, io chiudo gli occhi la notte, io sono sotterrato durante il tempo della notte in questo canale del bacino di Maa.*

E questo concetto, che della vita oltremondana si formavano gli Egiziani, è più chiaramente ancora indicato nel *Shai en Sinsin*, o *libro della respirazione*, ove è detto: *tu ti svegli ogni*

giorno; tu vedi i raggi del sole; Ammone viene a te coi soffii della vita e ti fa respirare nel tuo sarcofago; tu esci verso il cielo ogni giorno.

Ora per questo il defunto doveva riprendere tutti i suoi organi ed essere ristabilito, come era sulla terra; laonde è detto al capitolo 164 del *Libro dei morti*: che *il corpo non si corrompa, ma divenga vigoroso nel Xer-neter, che le sue carni e le sue ossa siano preservate dai vermi, e siano sane come quelle di chi non è morto*; che cioè *la sua testa, le sue braccia*, i suoi occhi, le sue orecchie, la sua bocca, la sua loquela e la sua forza gli siano rese; in una parola che risusciti pienamente nel *Xer-neter*.

Di qui si spiega la cura immensa che ponevano gli Egiziani alla conservazione del loro corpo, ed ogni loro membro era posto sotto la protezione di qualche Dio, *acciocchè non sia guasto, dice il libro, ed offeso il suo corpo eternamente*. Ma perchè il defunto potesse ottenere questa protezione e conseguire la risurrezione nel *Xer-neter*, era necessario, che la sua anima fosse dichiarata pura nel giudizio, che si compiva nella sala della doppia giustizia. Questo giudizio, che è anche rappresentato figurativamente, forma l'argomento del capitolo 125° del suddetto libro, ed è uno dei più ripetuti sui papiri funerari. Esso porta il titolo: *Capitolo dell'entrata nella sala della doppia giustizia: l'individuo si separa dai peccati che ha fatto per vedere il volto degli Dei*. La scena che lo accompagna, rappresenta un'ampia sala, poggiante da ciascun lato sopra colonne di ordine egizio, i cui capitelli imitano il bottone del fiore di loto. A sinistra vi è Osiride, fasciato in forma di mummia, e seduto sopra un ricco trono, posto entro un tempietto, che tiene nelle mani lo scettro a uncino e lo staffile come simbolo della sua dignità sovrana; e nella sala fanno corona a Osiride 42 Dei, segnalati per le loro teste simboliche, muniti tutti della penna di struzzo, indizio del loro grado di giudici, ed innanzi a questi sta una piccola figura inginocchiata, rappresentante il defunto colle mani sollevate in atto di adorazione.

Di contro ad Osiride e sull'entrata della sala è rappresentato di nuovo il defunto in piedi, con una mano levata innanzi agli occhi e l'altra piegata al petto; su lui è scritta in quattro brevi linee verticali l'invocazione, che egli fa ad Osiride così concepita: " Omaggio a te, che risiedi nell'Amenti, *Unnefer*, " Signore di Abido, concedi che io attraversi il cammino delle

" tenebre, e mi unisca co' tuoi servi, che abitano nel cielo in-
" feriore; che io entri ed esca dalla contrada di *Ro-sta* (una
" denominazione del mondo inferiore), e dalla sala della doppia
" giustizia, possa io raggiungere l'abitazione del cielo inferiore „.

Qui lo riceve primieramente la Dea della giustizia, chiamata *Ma*, segnalata dalla penna di struzzo, e porta il titolo di *regina dell'Amenti*, e *concede*, dice l'iscrizione che l'accompagna, *che il nome di lui* (cioè del defunto) *sia nella sua casa*, *e che esso si congiunga colla sua fonte* (principio) *in eterno*. Comunemente è questa Dea rappresentata due volte, volendo forse con questa ripetizione esprimere l'idea di giustizia rimuneratrice e giustizia punitrice, poichè anche la sala è chiamata della doppia giustizia. Nel mezzo della scena è innalzata una bilancia, sulla quale siede un cinocefalo, simbolo dell'equilibrio, l'animale sacro a Thoth. In uno dei piattelli della bilancia vi è un vaso in forma di cuore, e presso di questo, come sorvegliando l'operazione, è rappresentato di nuovo il defunto. A fargli contrappeso, nell'altro piattello vi è l'immagine della Dea *Ma*.

Il Dio a testa di sciacallo, Anubis, il protettore dei morti, porta la mano alla corda di questo secondo piattello; Horo, il Dio a testa di sparviero, tiene la mano al regolatore per dichiarare se vi è equilibrio nella bilancia, e Thoth, il Dio a testa di ibis, il giustificatore di Osiride e di Horo e di tutti i defunti riconosciuti giusti, scrive sulla tavolozza dello scriba, che tiene in mano, il risultato della bilancia. La leggenda che sta sopra questo Dio dice: *Parole di Thoth*, Signore di *Xumnnu* (Ermopolis): *Signore delle divine parole, Dio grande*, *residente in Heser*, *che il suo cuore* (cioè del defunto) *sia rimesso al suo posto*: che è quanto dire l'annunzio della sua risurrezione; poichè credevasi, che il cuore conservasse il principio della vita, e nell'imbalsamazione veniva questo trattato a parte, e posto in un vaso speciale sotto la protezione del genio funerario *Tuamutef*. Il defunto perciò risuscitava, quando gli si restituiva il cuore. Innanzi al Naos d'Osiride ed al disopra di una tavola piena di offerte stanno i quattro genii funerari, i figli e compagni di Osiride, i quali hanno principal cura della mummia. Infine dietro a questi e sopra un piedestallo in forma di propileo havvi una belva mostruosa a testa di ippopotamo e ventre di lupa, colla bocca spalancata, che ricorda il cane cerbero dei Greci, ed è

chiamata nella leggenda che l'accompagna: *la distruttrice dei nemici, la divoratrice, signora dell'Amenti, nella regione dell'Amenti.*

Veniva quindi la confessione negativa, che il defunto faceva volgendosi a' suoi giudici con queste parole: " Omaggio a voi, " Signori della doppia giustizia. Omaggio a te, Dio grande, Si- " gnore della giustizia. Io sono venuto a te, mio signore, io mi " avvicino per vedere le tue grazie. Io conosco il tuo nome, io " conosco il nome de' tuoi 42 Dei, che sono con te nella sala " della doppia giustizia, viventi per sorvegliare i peccatori, per " nutrirsi del loro sangue, il giorno del rendimento delle opere " innanzi ad Unnefer (ossia Osiride) giustificato „. Quindi proseguiva: *io non ho commesso peccati verso gli uomini, io non ho oppresso i deboli, io non ho proferto menzogne nel luogo della giustizia, io non ho fatto atti abbominevoli agli Dei.* E così di seguito viene enumerando le varie azioni cattive che non ha commesso, le quali tutte si possono facilmente riassumere nei seguenti peccati capitali, che sono: la *tirannia*, la *menzogna*, il *sacrilegio*, la *durezza di cuore*, l'*omicidio*, l'*adulterio*, il *furto*, e termina la sua confessione negativa col dire: *io sono quattro volte puro, la mia purità è la purità della grande Fenice, che è in Suten-Xenen. Nulla di abbominevole è in me in questa terra della doppia giustizia. Sì, tu mi salvi dalla loro mano.*

Ma per essere ammessi fra gli eletti, non bastava essersi astenuto dal male, era necessario avere operato anche il bene; epperò alla confessione negativa teneva dietro una confessione positiva, in cui il defunto enumerava le opere buone, che aveva compite sulla terra. " *Io diedi* (dice egli) da mangiare *a chi* " *aveva fame*, da bere a chi aveva sete, vestimenta ai nudi, al- " loggio a chi era senza asilo, accolsi nella mia barca quelli, " che a me si accostavano, pregando, per passare il fiume, io " portai offerte agli Dei e doni ai trapassati „. Ottiene per ciò di non essere condannato *innanzi al Signore delle anime, perchè pura è la sua bocca, bianche sono le sue mani. Vieni*, gli si dice, *vieni* a gioire del suo volto (cioè d'Osiride), *perchè tu hai ascoltato la sua parola, e fu trovata pia la tua anima sulla terra.*

Tuttavia, prima d'essere accolta fra gli eletti del cielo, l'anima del defunto doveva subire ancora la purificazione del fuoco per liberarsi da ogni più piccola macchia od impurità, che potesse aver contratto nella sua dimora sulla terra. E questa purificazione

col fuoco forma l'argomento del capitolo 126, che segue immediatamente quello del giudizio nella sala della doppia giustizia.

In testa di questo capitolo, che lo Champollion designò col nome di *purgatorio egizio*, sta una vignetta rappresentante un bacino di fuoco, ai cui quattro angoli siede un cinocefalo, che il defunto invoca con queste parole: " Oh! voi, che vivete della " verità, vi nutrite della verità, esenti da frode, detestanti il " male, scancellate in me ogni sozzura, toglietе da me ogni ini- " quità, non rimanga più in me alcuna macchia, fate che io " entri in *Ro-sta*, che io traversi i piloni misteriosi dell'*Amenti* ". Ed i cinocefali gli rispondono: " entra ed esci da *Ro-sta*, tra- " versa, cammina innanzi; noi annulliamo i tuoi falli, noi di- " struggiamo le sozzure, di cui ti sei macchiato sulla terra; " noi cancelliamo tutte le impurità, che tu possa aver conser- " vato; entra in *Ro-sta*, passa per i piloni misteriosi dell'A- " menti, esci ed entra a tuo piacimento con gli altri mâni, e " sii invocato ogni giorno in mezzo dell'orizzonte ".

Egli è quindi accolto nel coro degli Dei: non è più soggetto alla morte, diventa egli stesso un Dio, e riceve, come gli Dei, omaggio dai viventi, pani, bevande, cibi sull'altare di *Ra*, latte, grano ed orzo nelle campagne di *Aarou*, l'Elisio egiziano.

Il suo arrivo in questa beata contrada è anche rappresentato figurativamente al capitolo 110 di questo *Libro dei morti*. È questa un'ampia valle, bagnata da un immenso fiume, che tutta la percorre, e non offre alcun pericolo a traversarlo, perchè sebbene sterminata sia la sua larghezza, ed immensurabile la sua lunghezza, non vi ha alcun pesce, non v'è alcun rettile in esso.

In questa amena valle entra il defunto, accompagnato dal Dio Thoth, che tiene nelle mani il papiro della giustificazione, e, fatto omaggio al ciclo degli Dei grandi, sale nella barca che lo deve menare al luogo di dimora assegnatogli. Qui lo si vede coltivare il suo campo, arare, seminare e mietere: le sue biade sono alte sette cubiti, e tre le spighe, e della ricca messe raccolta fa offerte al Dio Hapi, il Nilo celeste, che ha dato fertilità ai campi.

Di qui si vede la stretta analogia, che questa campagna di *Aa-rou* ha coi campi elisi dei Greci, che essi pure ci rappresentano bagnati ed affatto circondati dall'Oceano, ove le anime santificate continuavano, secondo le loro inclinazioni, la vita terrestre, libera però d'ogni male terreno; e si differenzia tuttavia

dall'Elisio greco in ciò, che l'eletto nella dottrina egiziana non rimaneva rinserrato nella regione infernale, ma ne usciva a piacimento, e poteva fare tutte le trasformazioni, che voleva, ritornare fra i mortali, o, come dice il testo, *marciare sulla terra come vivente, essere nel luogo dei viventi di cui poteva prendere tutte le forme.* Nel sovracitato *libro della respirazione* si legge: *un Dio è la tua anima nel cielo, che prende tutte le trasformazioni che desidera.*

Ma se nella sala del giudizio il cuore del defunto si fosse trovato leggiero nella bilancia della doppia giustizia, e l'anima macchiata di colpa e perciò indegna di partecipare alla gioia eterna dell'Elisio, veniva cacciata dalla presenza de' suoi giudici, e condannata a migrare per le diverse esistenze della terra, sino a ritornare nel corpo d'uomo.

Una ripetuta morte era così per lungo tempo il suo retaggio, finchè questa, come anima umana, fosse stata trovata giusta innanzi al Tribunale di Osiride. La migrazione dell'anima era quindi una espiazione ed una purificazione, perchè essa aveva peccato e si era macchiata.

Ma oltre le anime, che nella sala della doppia giustizia, perchè macchiate da colpe e peccati, non erano state trovate degne della Società degli Dei, e perciò a fine di purificarsi avevano a ricominciare la loro migrazione nelle diverse esistenze terrene, sembra la dottrina sacerdotale degli Egiziani distinguere ancora un' altra classe d'anime, la cui natura, essendo del tutto inclinata al male, erano divenute incorreggibili e condannate quindi alla doppia morte, poichè non solamente il loro corpo, ma anche la loro anima era incorsa nella morte eterna. Questi sono chiamati nelle loro sacre scritture i *doppiamente morti*, cioè gli atei, gli empi, i compagni di *Set*, i dispregiatori degli Dei, i dannati.

Come le anime trovate pure e pie nella sala della doppia giustizia, non ricominciavano la migrazione, perchè non avevano più bisogno di purificarsi, così le anime di questi ultimi erano condannate alla doppia morte, perchè non erano più capaci di purificazione; incorrevano perciò nell'eterna morte del corpo e dell'anima, e divenivano il nutrimento dei malvagi demoni del mondo inferiore.

A conferma di questa dottrina si possono citare parecchi

luoghi del *Libro dei morti*, in cui si allude a questi demoni, che avevano potere sulle anime dei trapassati, e potevano tormentarle ed anche ucciderle. Così al capitolo XVII, il defunto rivolge al Signore dell'Averno, la seguente preghiera: " Oh!
" Signore della grande dimora, Re Supremo degli Dei, salva
" l'Osiride da quel demone che ha la faccia di Tesem (il nome
" di cane), le sovracciglia d'uomo, che si nutre dei perversi ",
e più sotto: " Salva l'Osiride da questo demone che rapisce le
" anime, che divora i cuori, che si nutre dei cadaveri ".

Egualmente dicesi di un altro demone: *un fuoco è la sua anima per consumare i corpi dei doppiamente morti.* In un altro luogo rivolge il defunto le parole a tre altri genii funerari:
" Oh! demoni, che vivete della doppia morte, non cada io sotto
" di voi, non entri uno dei vostri spiriti nelle mie membra ".

Nel capitolo sovracitato il defunto dice ancora: " Salva
" l'Osiride da questi guardiani, a cui il Signore degli Spiriti
" ha affidato la sorveglianza de' suoi nemici, che ha abbando-
" nati per essere immolati. Alla loro guardia nessuno può sot-
" trarsi. Fa che io non cada sotto le loro spade: che io non
" metta il piede sul loro palco insanguinato, che io non segga
" nelle loro prigioni, che io non cada sotto la loro mannaia, che
" io non sia preso nelle loro reti, che non mi venga fatto nulla
" di ciò, che detestano gli Dei, perchè io sono un principe nella
" grande sala " (nella sala cioè della doppia giustizia).

Onde si vede, che la speculazione contemplativa sacerdotale non si limitava alla doppia morte, all'annientamento totale dell'anima per una sola volta, ma andava ancor oltre, e faceva soffrire a questi condannati, innanzi alla loro totale distruzione, ricercati tormenti e martirii.

Come i beati nelle 75 regioni del cielo, in altrettante belle trasformazioni godono ogni immaginabile gioia, così i dannati nelle 75 regioni del tenebroso inferno, *ove le anime atee* (dice il testo) *non fissano mai il Dio Sole, quando fa splendere i raggi del suo disco,* sono assoggettati ai più tormentosi martirii; qui bolliti in *incandescenti caldaie sono fra i più orribili tormenti della sete gettati in fredda acqua*, ma appena cercano di bere, si cangia questa subito in fuoco fiammeggiante; il cibo che essi vogliono prendere, scompare come ombra; sono inoltre legati a pali da rossi demoni, e tagliati a pezzi da spade; coi piedi

attaccati in alto è strappato loro il cuore dal corpo; tormenti che ben ricordano quelli descritti nell'*Inferno* dal grande Alighieri.

Possiamo quindi conchiudere dalla breve analisi che abbiamo fatto di questo *Libro dei morti*, essere credenza degli Egiziani che il defunto in virtù di certe cerimonie e di certi atti da lui fatti o compiuti in suo favore, e giustificato nella sala della doppia giustizia, risuscitava, riprendeva i suoi organi, e divenuto immortale, godeva le beatitudini del mondo superiore, e ritornava a piacimento fra i viventi con facoltà di prendere tutte le forme desiderabili. Si professava, in una parola, la dottrina dell'immortalità dell'anima, e la credenza di un premio per i buoni, e di un castigo per i cattivi in un altro mondo, o, per dirlo con linguaggio egiziano, in una eterna vita dei giusti, ed in una doppia morte dei malvagi.

Cenno illustrativo sull'opera di Mons. E. Colomiatti, *Codex iuris pontificii seu canonici* (Taurini, G. Derossi, Tom. I-III, 1888-1906).

Nota del Socio FRANCESCO RUFFINI.

L'opera, che il Prof. Emanuele Colomiatti offre per mezzo mio all'Accademia, compendia il frutto di ben vent'anni oramai di indefesso, accurato e pazientissimo lavoro.

Il valore di essa può essere considerato sotto un duplice aspetto; e cioè sotto l'aspetto della sua opportunità attuale, e quindi prevalentemente pratico; e poi sotto l'aspetto del suo carattere storico, e quindi essenzialmente scientifico.

Al primo riguardo bisogna che si ricordi, come il Pontefice Pio X abbia appunto, con uno dei primi atti del suo pontificato e cioè con il Motu-proprio: *De Ecclesiae legibus in unum redigendis*, del 19 marzo 1904, dato inizio a una grande impresa di codificazione dell'universo diritto ecclesiastico, a preparare la quale fu nominata una numerosa Commissione.

Che il compito da questa assuntosi sia veramente tale da far tremar le vene ed i polsi a qualunque più erudito e più coraggioso canonista, e che esso, di conseguenza, abbia lasciato alquanto scettici sul suo finale risultato parecchi dei cultori di questa scienza, ognuno comprende di leggeri quando rifletta, che data dal 1317 l'ultima opera di codificazione del proprio diritto che la Chiesa cattolica conosca. Da allora in poi nulla più si ebbe di somigliante, non già perchè il bisogno di una compilazione riassuntiva dell'immenso materiale legislativo disperso non siasi fatto sentire sempre, e a volte addirittura in modo quasi incalzante. Basterà ricordare quel tentativo di una nuova codificazione del diritto canonico, che si ebbe al chiudersi del Concilio di Trento sullo scorcio del secolo decimosesto, e che per complesse ed in parte ancora misteriose ragioni compiutamente fallì. E si potrà ricordare ancora, come tra le più urgenti instanze, che il Corpo vescovile cattolico presentò agli ordinatori del Concilio Vaticano, fosse precisamente quella che il Concilio stesso desse opera ad una codificazione del diritto ecclesiastico, tanto più desiderabile in quel punto, in quanto di gran lunga era venuto accrescendosi il materiale legislativo nei tre altri secoli decorsi dopo il Concilio di Trento. Ma anche questa volta la improvvisa sospensione del Concilio avvenuta, come è assai noto, il 20 ottobre 1870, tolse che il desiderio fosse soddisfatto. Ora è appunto nell'intento di agevolare l'invocata codificazione, che dalla chiusura del Concilio Vaticano in poi molti canonisti cattolici si sono dati attorno a compilare schemi e progetti di essa. Fra questi il più imponente, senza possibilità di contestazione, è quello, intorno a cui si travaglia dal 1888 in poi il Colomiatti, senza che però egli sia giunto ancora al termine del suo grande tentativo.

Nè faccia meraviglia questo irrompere dell'iniziativa privata in una intrapresa di carattere così essenzialmente pubblico, anzi addirittura sovrano, qual'è quella di codificare il diritto. Tutti i grandi diritti storici, a cominciare dallo stesso Diritto romano per finire col Diritto inglese, hanno conosciuto queste opere preparatorie dei privati nel campo della codificazione; opere, a cui sovente è stato poi assegnato o in modo esplicito dall'Autorità pubblica, che le faceva proprie e le sanciva, o in modo implicito per opera della medesima, che se ne valeva

nella pratica, un carattere stabile ed ufficiale. Per non uscire dal campo della Chiesa cattolica, è troppo noto che la prima compilazione sistematica del diritto ecclesiastico fu quella intrapresa sul cader del secolo V dal monaco Dionigi, collezione che pontefici ed imperatori accolsero di poi ed elevarono a dignità di vero Codice. È noto del pari l'importanza decisiva che subito ottenne in tutta la Cristianità e conservò nei secoli quell'opera, di iniziativa tutt'affatto privata, che è il celeberrimo Decreto di Graziano. È noto infine, come dall'opera ancor sempre di un privato, da una delle cosiddette *Compilationes antiquae*, e cioè dalla collezione di decretali, che Bernardo di Pavia pubblicava nel 1191, derivi quella quintuplice ripartizione in libri, che le grandi Raccolte posteriori delle decretali dei pontefici, Gregorio IX, Bonifacio VIII, Clemente V accolsero, e che è rimasta poi definitiva e decisiva nei libri e nelle scuole ortodosse della Chiesa cattolica fino ai giorni nostri. Naturale quindi che in un corpo così strettamente fedele alle sue tradizioni, come è quello della Chiesa cattolica, la memoria di quegli illustri precedenti abbia invogliato parecchi ecclesiastici a ritentare l'esperimento. E non sarebbe neppure da meravigliare, che di qualcuno di questi lavori preparatorî di carattere privato avesse poi a rimanere decisiva l'impronta nella futura codificazione, dato sempre che questa abbia davvero a riuscire a buon termine.

A questa gara nel compilare progetti e disegni del futuro nuovo corpo del diritto ecclesiastico hanno preso parte essenzialmente Giuristi francesi e Giuristi italiani. La scienza tedesca, anche la più ortodossa, si è tenuta alquanto in disparte, poco persuasa dell'opportunità dell'impresa, e non immune del resto, neppure in questo campo, dalla scarsa propensione, così caratteristica dei Tedeschi, ai grandi lavori di codificazione. Tant'è vero, che per mutare di ambienti e di compiti, non si possono però svestire mai a pieno i caratteri fondamentali della propria razza e gli abiti mentali del proprio paese! E di ciò hanno data pure una convincentissima prova gli stessi Canonisti francesi e i Canonisti italiani, dei quali abbiamo detto, per il modo assai diverso, con cui essi si sono accinti all'opera comune. I Francesi, invero, non hanno saputo staccare l'occhio dal loro famoso Codice Napoleonico, e si sono pertanto studiati di darci un Co-

dice ecclesiastico fatto ad immagine e somiglianza di quello: testo di loro esclusiva fattura e distribuito in brevi articoli uguali, ordine logico e sistematico e non cronologico nella distribuzione della materia, nessuna traccia poi di preoccupazione scientifica o di elaborazione del materiale legislativo, in forma così apodittica e secca messo insieme. Gli Italiani invece, memori certo di un savio ammonimento che era già nella petizione dei Vescovi napoletani al Concilio Vaticano, e cioè che non sarebbe convenuto alla Chiesa di seguire l'esempio dei codici civili attuali, e di adottarne lo sminuzzamento dei precetti legislativi in brevi articoli, si attennero per contro più fedelmente nelle loro compilazioni alle tradizioni secolari della Chiesa. E quindi ci diedero un testo non di loro fattura, ma dedotto integralmente dalle leggi già ora imperanti nel seno stesso della Chiesa, riproducendole nella loro integrità letterale non solo, ma anche, occorrendo, nella loro maestosa ampiezza. Ed inoltre, pur avendo distribuito secondo grandi linee sistematiche la materia, rispettarono però, finchè fu possibile, la successione cronologica dei vari disposti legislativi. Infine corredarono i loro progetti, quali in misura maggiore e quali in minore, di tutto un apparato ora di testi paralleli, ora addirittura di commenti.

E questo è vero, massimamente per il lavoro del nostro Colomiatti. Il sistema da lui seguito è il seguente: il codice è diviso in due grandi parti. La prima comprende il *Jus primarium seu fundamentale*, e contiene tutti i canoni relativi al Sommo Pontefice, fondamento di ogni diritto, e la seconda comprende il cosiddetto *Jus secundarium seu derivatum*, e cioè tutti gli altri canoni, i quali ricevono forza dall'autorità del Sommo Pontefice.

La materia è distribuita in titoli, sezioni, capitoli, distinzioni e in canoni, la cui numerazione è continua per tutta l'opera. Per ciascun canone vengono riprodotti, senza nessun cambiamento, i termini stessi delle costituzioni pontificie e dei decreti dei concilii, in cui l'argomento sia stato definito nel modo più esplicito e più perspicuo. In nota peraltro vengono riprodotti gli altri eventuali canoni consonanti con quelli del testo, dato sempre che ce ne siano. E vengono del pari riprodotti quegli altri canoni ancora, che sono stati da quelli ac-

colti nel testo, abrogati in tutto o in parte, e gli errori, che dai vari canoni furono condannati. Se i canoni compresi nelle note fanno parte di già del *Corpus juris canonici,* vale a dire furono accolti nel Decreto di Graziano o nelle Decretali, il Colomiatti si accontenta semplicemente di citarli, secondo il metodo consueto, essendo assai facile ricorrere direttamente al testo: in caso inverso egli li riproduce per intiero, indicando la loro data e le prime parole del documento da cui egli li ha tratti.

L'opera, ognun lo vede, assume così un carattere spiccatamente, anzi assolutamente impersonale. È la Chiesa medesima quella che parla nel libro del Colomiatti. Ora è senza dubbio a rimpiangersi, nell'interesse della Chiesa stessa, che, dato questo peculiarissimo carattere dell'opera del Colomiatti, egli non sia stato compreso in quella Commissione a cui furono commessi i lavori preparatori del futuro codice, mentre pure vi furono inclusi due dei più noti compilatori di progetti, e cioè il romano Pezzani ed il francese Pillet. Ed è a rimpiangersi, perchè solamente per la via tracciata dal Colomiatti e non certo per quella, così vivacemente propugnata appunto da Monsignor Pillet, la Chiesa potrebbe — almeno secondo il nostro modo di vedere — far cosa veramente conforme alla sua secolare tradizione e non inferiore alla sua dignità. Ed è anche a rimpiangersi per un altro verso, e cioè in quanto quei principî di supremazia e di antagonismo di fronte allo Stato, che la Chiesa non potrà non riaffermare in tutto o in parte nel futuro codice, certamente susciterebbero assai minor scalpore, quando la loro formulazione rimanesse quella che fu oramai consacrata nei secoli, e non fosse già quella più cruda e molto più gravida di intenzioni, che vi potrebbero dare nel loro stile moderno i compilatori del codice.

Checchè per altro si possa pensare di tutto ciò, non è per altro chi possa negare che da cotesto metodo così impersonale del Colomiatti provenga all'opera sua un carattere scientifico, che l'altre non hanno affatto o non, almeno, in uguale misura. E non senza fondamento l'autore stesso lo segnalò nella prefazione al primo volume, ove scrive che con il sussidio della sua compilazione: " cuilibet grave non erit historiam brevi contexere cuiuslibet præcepti, quemadmodum quisquis commode habet sub oculis completam materiam idest eruditionem casus „. E proprio

vero. La storia dogmatica di ogni singolo precetto risulta per tal modo tracciata nelle sue linee essenziali e viene, diremo così, narrata dai documenti per la bocca della Chiesa medesima.

Si può quindi essere stati e rimanere profondamente increduli della riuscita finale della codificazione ora intrapresa in via ufficiale; ma non si potrà non riconoscere che l'opera del Colomiatti ha una sua ragione di essere indipendente da quella. Essa sarà in ogni tempo di sussidio prezioso agli studiosi; se non proprio, come il Colomiatti spera, in tanta misura da rendere per essi superfluo il ricorso ad altre fonti, che non siano il *Corpus iuris canonici*, certo però in maniera da sopperire validamente al difetto di esse per chi non ne possa disporre, e il ricorso ad esse e il loro uso per chi pure le abbia sotto mano.

Per una duplice ragione pertanto — io stimo — l'Accademia nostra può prendere in particolare considerazione la ponderosa opera, offertale dal Colomiatti; e cioè, così per il suo strettissimo collegamento con uno dei più singolari eventi legislativi, che, qualunque ne possa essere poi la sorte, il tempo nostro avrà visto, come ancora per essere essa uno di quegli esempi di dedizione di un'intiera esistenza a un compito arduo, ingrato, ed irto di fatiche e di sacrifici, de' quali, è giusto riconoscerlo, è particolarmente tenace e gloriosa la tradizione negli appartenenti allo stato ecclesiastico. E perciò l'Accademia può ben far suo il voto, con cui il conoscitore e il critico più profondo che la storia della codificazione del diritto ecclesiastico abbia avuto, il Laemmer, credette di chiudere il suo esame dell'opera del Colomiatti, alla quale oppose bensì obbiezioni metodologiche ma riconobbe, tra l'altro, il merito di un decisivo miglioramento progressivo di volume in volume, dicendo: " Ich... kann nur wünschen, dass es Colomiatti gelingen möge, seinen monumentalen Codex allmälich zum Abschluss zu bringen „.

(Sulla storia della codificazione si vegga l'accuratissimo libro del Laemmer, *Zur Codification des Canonischen Rechts*, Freiburg im Breisgau, 1899. Sul carattere e sul valore del tentativo ora in corso di preparazione, il recentissimo e magistrale articolo del Friedberg, *Ein neues Gesetzbuch für die katholische Kirche*, in " Deutsche Zeitschrift für Kirchenrecht „, XVIII, 1908, pp. 1-74. Cfr. inoltre: Ruffini, *La codificazione del diritto*

ecclesiastico, negli “ Studi offerti al Prof. Scialoja „, Prato, 1904; e, polemizzando contro questo lavoro, e cioè in senso ottimistico: Rossi, *La codificazione del diritto canonico,* nel “ Contenzioso ecclesiastico „, Genova, 1906).

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

PREMII DI FONDAZIONE GAUTIERI

L'Accademia Reale delle Scienze conferirà nel 1908 un premio di fondazione Gautieri all'opera di Letteratura, Storia letteraria, Critica letteraria, che sarà giudicata migliore fra quelle pubblicate negli anni 1905-1907. Il premio sarà di L. 2500, e sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i membri nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in italiano.

Gli autori, che desiderano richiamare sulle loro pubblicazioni l'attenzione dell'Accademia, possono inviarle a questa. Essa però non farà restituzione delle opere ricevute.

Torino - Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 26 Gennaio 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Salvadori, Spezia, Peano, Jadanza, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi, Somigliana, Fusari e Camerano Segretario.

I Soci Naccari e Segre scusano la loro assenza.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica che il sig. Luigi Saudino ha inviato nuovi documenti intorno alla sua pila elettrica costante ed economica, e che essi verranno trasmessi ai commissari nominati dalla Classe all'esame di essa, i Soci Naccari e Grassi.

Il Presidente presenta l'opera del Prof. Carlo Goebel, Socio corrispondente dell'Accademia: *Einleitung in die experimentelle Morphologie der Pflanzen*, che l'Autore manda in omaggio.

Comunica inoltre l'annunzio del IV Congresso internazionale dei matematici che si terrà in Roma dal 6 all'11 aprile 1908.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° Prof. Beppo Levi, *Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie*, Nota III, dal Socio Segre;

2° Dott. Eugenio Elia Levi, *Sul problema di Fourier*, dal Socio nazionale non residente Luigi Bianchi.

Il Presidente, a nome del Socio Naccari, presenta le *Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1907 all'Osservatorio della R. Università*, calcolate dai Dott[i] V. Fontana e F. Chionio.

Il Socio Parona presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche il suo lavoro intitolato: *Sopra alcune Rudiste del Cretaceo superiore del Cansiglio nelle Prealpi venete.* La Classe con votazione segreta approva l'inserzione di detto lavoro nei volumi delle *Memorie.*

LETTURE

Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie.

Nota 3ª di BEPPO LEVI, a Cagliari.

Nella Nota II abbiamo determinato tutte le configurazioni arborescenti costituite da un numero finito di punti razionali d'una cubica a coefficienti razionali (per le def., v. Nota II, n. 2). Passeremo ora a studiare le configurazioni poligonali.

Sistemi finiti di punti razionali a configurazione poligonale semplice.

Le configurazioni poligonali semplici (Nota II, n. 2) sono caratterizzate dal fatto che, se ω è un conveniente periodo del parametro ellittico corrispondente al punto corrente della cubica, un vertice A della configurazione ha coordinata ellittica della forma $\frac{\omega}{3t}$ dove t è dispari. Diamo a t i primi valori:

1. $t = 3$. - *Dal punto* $A\left(\frac{\omega}{9}\right)$ *si deducono razionalmente i due tangenziali successivi* $A_1\left(-\frac{2\omega}{9}\right)$, $A_2\left(\frac{4\omega}{9}\right)$; *il tangenziale di* A_2 *è* A: *sulla cubica non esiste alcun altro punto razionalmente dipendente da questi.*

Cubiche su cui si ha una tal configurazione di punti razionali esistono certamente, perchè l'imporre che il triangolo AA_1A_2 sia un triangolo dato (che si dovrà scegliere a vertici razionali) equivale ad imporre alla cubica 6 sole condizioni. Possiamo aggiungere che esistono cubiche su cui non stanno altri punti razionali che i tre vertici di un tal triangolo; per ottenerne una basta considerare la cubica $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ che, pel teorema di Fermat, non ha altri punti razionali che i tre flessi

$(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$, $(1,0,-1)$ e trasformarla mediante una trasformazione quadratica a coeff. razionali, avente per punti fondamentali le ulteriori intersezioni di essa cubica con una conica che la tocchi in uno di questi flessi e passi per un secondo ([1]).

Chiameremo $\mathfrak{F}(3)$ la configurazione descritta.

2. $t=5$. - *Dal punto* $A\left(\frac{\omega}{15}\right)$ *si deducono successivamente i tre tangenziali* $A_1\left(-\frac{2\omega}{15}\right)$, $A_2\left(\frac{4\omega}{15}\right)$, $A_3\left(-\frac{8\omega}{15}\right)$; *tangenziale di quest'ultimo è di nuovo* A. Se tal quadrangolo di tangenziali è costituito di punti razionali, *la cubica possiede un quinto punto razionale, flesso, nel punto* $A_4\left(-\frac{\omega}{3}\right)$ *d'incontro delle diagonali* AA_2, A_1A_3.

Si ottiene una cubica a coefficienti razionali possedente una tal configurazione di punti razionali esprimendo che nella cubica (1) della Nota II, n. 5 i punti (2) e (3) coincidono. Si ottiene la condizione

$$a=1.$$

Osservando che le cubiche che posseggono quattro punti razionali tangenziali successivi ciascuno del precedente possono sempre ridursi alla forma (1) della Nota II, n. 5 con una trasformazione proiettiva a coefficienti razionali, si vede che, a meno di una tale trasformazione, le cubiche su cui si presenta la nostra configurazione sono quelle del fascio

$$y(y-x)(x-z)+bxz(y-z)=0 \qquad (b \text{ razionale}). \tag{1}$$

Che fra queste ne esistano di quelle aventi altri punti razionali (non razionalmente dedotti dai precedenti) è evidente. Per quali valori di b tali altri punti razionali non si presentino resterebbe a studiarsi.

La configurazione qui considerata si chiamerà $\mathfrak{F}(5)$.

3. $t=7$. - *Dal punto* $A\left(\frac{\omega}{21}\right)$ *si deducono i tangenziali successivi* $A_1\left(-\frac{2\omega}{21}\right)$, $A_2\left(\frac{4\omega}{21}\right)$, $A_3\left(-\frac{8\omega}{21}\right)$, $A_4\left(\frac{16\omega}{21}\right)$, $A_5\left(-\frac{11\omega}{21}\right)$; *il*

([1]) Si avrà come trasformata una cubica a coeff. razionali, con tre soli punti razionali, corrispondenti ai tre flessi nominati, e non allineati (perchè questi non appartengono a una conica della rete omaloidica della trasformazione), costituenti quindi un triangolo di tangenziali.

tangenziale di A_5 *è* A. Se sulla cubica esiste un tale esagono di tangenziali razionali, *sarà ancora punto razionale di essa il punto* $A_6\left(\frac{\omega}{3}\right)$ *flesso, in cui concorrono le diagonali* AA_3, A_1A_4, A_2A_5.

Nella cubica (1) della Nota II, n. 5, i punti $A, A_1, \ldots$ sono i primi vertici di un esagono quale quello qui considerato se il terzo punto d'incontro della cubica colla retta AA_2 è il punto A_4, tangenziale di A_3 (1).

Si trova la condizione (2)

$$b = \frac{a-1}{a}$$

la quale si soddisfa razionalmente scegliendo a razionale arbitrario. Le cubiche a coefficienti razionali su cui esiste la configurazione di punti razionali considerata sono quindi proiettivamente riduttibili alle cubiche del sistema

$$(2) \qquad y^2(x-z) - yx\left(ax - \frac{a^2+a-1}{a} z\right) - \frac{a-1}{a} xz^2 = 0.$$

Chiameremo $\mathfrak{F}(7)$ questa configurazione: i vertici d'ordine pari e quelli d'ordine dispari dell'esagono sono allineati.

4. $t=9$. - *Dal punto* $A\left(\frac{\omega}{27}\right)$ *si deducono quali tangenziali successivi i punti* $A_1\left(-\frac{2\omega}{27}\right)$, $A_2\left(\frac{4\omega}{27}\right)$, $A_3\left(-\frac{8\omega}{27}\right)$, $A_4\left(-\frac{11\omega}{27}\right)$, $A_5\left(-\frac{5\omega}{27}\right)$, $A_6\left(\frac{10\omega}{27}\right)$, $A_7\left(\frac{7\omega}{27}\right)$, $A_8\left(-\frac{14\omega}{27}\right)$. *Il tangenziale di* A_8 *è* A: si ottiene così un enneagono di tangenziali e *nessun altro punto della cubica si deduce razionalmente da questi.* Essi si ordinano a 3 a 3 in 9 rette

$$\begin{matrix} AA_2A_5 & AA_3A_7 & AA_4A_6 \\ A_1A_3A_6 & A_1A_4A_8 & A_1A_5A_7 \\ A_2A_4A_7 & A_2A_6A_8 & A_3A_5A_8 \end{matrix}$$

le quali passano a 3 a 3 per ciascun punto della configurazione.

(1) Perchè il parametro ellittico α di A sarà $\frac{\omega}{21}$ se deve soddisfare alla condizione

$$\alpha + 4\alpha + 16\alpha = \omega.$$

(2) Sarà utile tener presenti le coordinate di quella terza intersezione, già ottenute al n. 5 della Nota II.

Esistono cubiche a coefficienti razionali sulle quali si trova una tal configurazione di punti razionali. Per dimostrarlo stabiliremo dapprima che è possibile una tal configurazione interamente costituita di punti razionali: si può intanto suppor scelto il sistema delle coordinate in modo che

$$A \equiv (0\,0\,1) \qquad A_2 \equiv (0\,1\,0) \qquad A_4 \equiv (1\,0\,0) \qquad A_3 \equiv (1\,1\,1).$$

A causa degli allineamenti AA_3A_7, $A_2A_4A_7$ dovrà allora essere

$$A_7 \equiv (1\,1\,0),$$

ed a causa degli allineamenti AA_2A_5, AA_4A_6 si potrà porre

$$A_5 \equiv (0\,\alpha\,\beta), \quad A_6 \equiv (\gamma\,0\,\delta).$$

Esprimendo allora che si verificano gli allineamenti $A_2A_6A_8$, $A_3A_5A_8$ si ottiene

$$A_8 = (\beta\gamma,\ \alpha\delta - (\alpha - \beta)\gamma,\ \beta\delta)$$

ed esprimendo quindi che le rette A_3A_6, A_4A_8, A_5A_7 passano per uno stesso punto A_1 si ottiene la condizione

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma(\gamma - \delta)}{\gamma^2 - \gamma\delta + \delta^2},$$

ove si dovranno scegliere per γ e δ interi arbitrari, risultandone determinati di conseguenza α e β.

Così determinato l'enneagono $AA_1 \ldots A_8$, si vede agevolmente che *esiste una ed una sola cubica per cui esso è poligono di tangenziali.* Si consideri infatti il fascio di cubiche definite dagli 8 punti base $AA_1 \ldots A_7$; ad esso appartiene la cubica costituita dalle tre rette AA_2A_5, $A_2A_4A_7$, $A_1A_3A_6$, e poichè questa ha punto doppio in A_2, tutte le cubiche del fascio hanno in A_2 la stessa tangente. Ma al fascio appartiene pure la terna di rette A_2A_3, AA_4A_6, $A_1A_5A_7$; la tangente fissa è dunque A_2A_3. Si consideri in particolare la cubica del fascio passante per A_8: si avrà che la cubica circoscritta all'enneagono $AA_1 \ldots A_8$ ha in A_2 la tangente A_2A_3. Per simmetria si conclude immediatamente che in generale la tangente ad essa nel punto A_i è la A_iA_{i+1} (in A_8 è la A_8A), cosicchè l'enneagono $AA_1 \ldots A_8$ vi è poligono di tangenziali; e la cubica è evidentemente a coeff. razionali.

La sua equazione dipenderà ancora da un parametro razionale $p = \frac{\gamma}{\delta}$. Riferita al sistema di coordinate sopra descritte sarà:

$$(3) \qquad (p-2)(p^2-p+1)xy(x-y) - p^2(p-1)x^2z - p(p^3-4p^2+3p-1)xyz - p(p^2-p+1)y^2z + p^3(p-1)xz^2 - p^2(p-1)yz^2 = 0.$$

Chiameremo $\mathfrak{S}(9)$ la configurazione di punti razionali ora descritta. Se, almeno per convenienti valori di p, possa la cubica (3) contenere altri punti razionali, naturalmente non razionalmente deducibili da $AA_1 \ldots A_8$, è questione che resterebbe ancora a discutersi.

5. $t = 11$. - Per $t = 11$ non ci è riuscito di assodare la esistenza o la non esistenza di una corrispondente configurazione di punti razionali sopra una cubica a coeff. razionali. Cionondimeno il problema relativo subisce una riduzione che pare interessante per se stessa.

Dal punto $A\left(\frac{\omega}{33}\right)$ *si deducono razionalmente, per costruzione di tangenziali successivi, i punti* $A_1\left(-\frac{2\omega}{33}\right)$, $A_2\left(\frac{4\omega}{33}\right)$, $A_3\left(-\frac{8\omega}{33}\right)$, $A_4\left(\frac{16\omega}{33}\right)$: *il tangenziale di quest'ultimo punto è di nuovo* A. *La retta* AA_2 *taglia poi ulteriormente la cubica nel punto* $A_4'\left(-\frac{5\omega}{33}\right)$, *da cui, per costruzioni successive di tangenziali, si deducono i punti* $A'\left(\frac{10\omega}{33}\right)$, $A_1'\left(\frac{13\omega}{33}\right)$, $A_2'\left(\frac{7\omega}{33}\right)$, $A_3'\left(-\frac{14\omega}{33}\right)$: *il tangenziale di quest'ultimo è di nuovo* A_4'. *Le rette* A_iA_i' *concorrono in un 11-mo punto razionale della cubica,* $A_0\left(-\frac{\omega}{3}\right)$, *flesso. Si esauriscono così i punti razionalmente dedotti da* A. *La configurazione si compone di due pentagoni di tangenziali, i cui vertici sono a coppie allineati col flesso* A_0. Reciprocamente se sopra una cubica un punto A, di coordinata ellittica α, è vertice di un pentagono di tangenziali, deve esistere un periodo ω tale che $(-2)^5\alpha = \alpha - \omega$ onde $\alpha = \frac{\omega}{33}$. Si otterrà dunque una cubica sulla quale il punto $A = (1\ 0\ 0)$ è origine di una configurazione quale quella qui considerata, imponendo che nella cubica (1) del n. 5 della Nota II

$$(4) \qquad y^2(x-z) - yx[ax-(a+b)z] - bxz^2 = 0$$

la tangente nel punto $A_3 \equiv (1\,1\,1)$ incontri ulteriormente la cubica in un punto A_4 la cui tangente passi per A. Il pentagono di tangenziali avente A per origine avrà per vertici $A, A_1 \equiv (0\,0\,1)$, $A_2 \equiv (0\,1\,0)$, A_3, A_4, e sarà interamente costituito di punti razionali, e la cubica medesima avrà coeff. razionali (1) tosto che A_4 è razionale.

Orbene dimostreremo la proposizione seguente: *Nella rete di cubiche* (4) *quelle per cui il punto* $A \equiv (1\,0\,0)$ *è vertice di un pentagono di tangenziali, costituiscono un sistema* ∞^1 *ellittico in corrispondenza birazionale a coefficienti razionali coi punti della cubica del tipo* (1) n. 2 *in cui* $b = -1$. Tal cubica è precisamente il luogo dei punti A_4 per le varie cubiche del sistema.

Si esprimerà infatti che la tangente nel tangenziale di A_3 passa per A, dicendo che passano per uno stesso punto (A_4) la cubica (4), la sua tangente in A_3

$$(1 - a)\, x + b\, y + (a - b - 1)\, z = 0 \tag{5}$$

e la conica polare di A rispetto ad essa

$$y^2 - 2axy + (a + b)\, yz - bz^2 = 0. \tag{6}$$

Eliminando a e b fra le tre equazioni si ha che il luogo del punto comune alle tre curve è dato da

$$\begin{vmatrix} z - x & y - z & x - z \\ yx(z - x) & zx(y - z) & y^2(x - z) \\ y(z - 2x) & z(y - z) & y^2 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$y(y - z)\,(z - x) \begin{vmatrix} z & y & z \\ x & x & y \\ 2x - z & x - z & y \end{vmatrix} = 0.$$

Non tenendo conto dei fattori lineari, cui corrisponderebbero cubiche (4) degeneri si ottiene così come luogo del punto A_4 la cubica

$$y^2x - y^2z - x^2z + yz^2 = 0 \tag{7}$$

che si riconosce identica alla (1) del n. 2 ove si ponga $b = -1$ e si scambino x e z. Questa cubica passa pei punti (0 0 1), (1 0 0), (0 1 0), (1 1 1), (0 1 1) che vi costituiscono la configurazione $\mathfrak{S}(5)$, ma se il punto A_1 è uno di questi, la cubica (4) si spezza. Per sapere se esistano cubiche a coefficienti razionali su cui la configurazione relativa a $t = 11$ sia costituita di punti razionali occorrerà quindi decidere se, oltre questi punti, la cubica (7) possegga altri punti razionali.

Configurazioni poligonali miste.

6. — Abbiamo chiamato *configurazioni poligonali miste* (Nota II, n. 2) quelle che corrispondono a valori di t prodotti di un numero dispari per una potenza di 2. Dalle conclusioni della detta Nota si può già dedurre che su una cubica a coefficienti razionali non potranno esistere configurazioni poligonali miste di punti razionali corrispondenti a valori di t in cui il fattore 2 abbia esponente >3. Invero si è osservato (Nota II, n. 4) che, se il nucleo della configurazione contiene un flesso, questo è estremo di un ramo appartenente alla configurazione arborescente corrispondente al parametro ellittico iniziale $\frac{\omega}{3.2^\nu}$, se $t = 2^\nu . t'$ e t' dispari. Confrontando colle conclusioni del n. 11 della stessa Nota risulta allora che se la configurazione poligonale semplice corrispondente al parametro ellittico iniziale $\frac{\omega}{3t'}$ contiene un flesso non può essere $\nu > 3$. Ma immediatamente si vede pure che l'ipotesi dell'esistenza del flesso è superflua: invero si è già notato nella Nota 1ª che, se una cubica a coefficienti razionali contiene un punto razionale, esiste una sua trasformata razionale sulla quale a quel punto corrisponde un flesso (razionale): e se quel primo punto apparteneva al nucleo di una configurazione poligonale mista, questo flesso apparterrà anch'esso al nucleo di una configurazione poligonale mista corrispondente a un divisore t in cui il fattore 2 ha lo stesso esponente.

Occorre però riesaminare caso per caso le configurazioni che per questa semplice osservazione risultano ammissibili. Vedremo che non tutte esistono realmente: posto in generale $t = 2^\nu . t'$ (t' dispari), vedremo anzi che il valore massimo di ν per cui

esistono le corrispondenti configurazioni di punti razionali decresce in modo suggestivo col crescere di t'.

Configurazioni corrispondenti a $\nu = 1 - 7$. $t' = 3$, $t = 6$ - *Dal punto* $A'\left(\frac{\omega}{18}\right)$ *si deduce il tangenziale* $A\left(-\frac{\omega}{9}\right)$, *vertice del triangolo di tangenziali di una configurazione* $\mathfrak{S}(3)$. *Ciascuno degli altri due vertici è tangenziale d'un altro punto razionale: i punti* $A_1'\left(\frac{7\omega}{18}\right)$, $A_2'\left(-\frac{5\omega}{18}\right)$.

Per riconoscere la possibilità d'una tal configurazione di punti razionali sopra una cubica a coefficienti razionali, si osservi che se ai punti $A'AA_1A_2$ si attribuiscono rispettivamente le coordinate $(1\,0\,0)$, $(0\,0\,1)$, $(0\,1\,0)$, $(1\,1\,1)$ l'equazione della cubica prende la forma (1) del n. 5 della Nota II ((4) del n. 5 di questa), e si avrà la configurazione voluta imponendo che la tangente in $A_2 \equiv (1\,1\,1)$ passi per $A \equiv (0\,0\,1)$. Rifacendoci ai calcoli del n. 5 si vede che l'equazione di detta tangente è (5), onde deve essere

$$a - b - 1 = 0.$$

L'equazione della cubica prende la forma

$$y^2(x - z) - yx[(b + 1)x - (2b + 1)z] - bxz^2 = 0. \tag{8}$$

8. $t' = 5$, $t = 10$. - *Dal punto* $A'\left(\frac{\omega}{30}\right)$ *si deduce il tangenziale* $A\left(-\frac{\omega}{15}\right)$, *vertice di un quadrangolo di tangenziali, quale quello della configurazione* $\mathfrak{S}(5)$. *La configurazione possiede inoltre un flesso come* $\mathfrak{S}(5)$, *e questo e i rimanenti tre vertici del quadrangolo sono tangenziali ciascuno di un altro punto razionalmente dedotto da* A' (cfr. Nota II, n. 4) e se in una cubica del fascio (1) (n. 2) esiste un punto razionale che abbia per tangenziale uno qualsiasi dei punti $AA_1A_2A_3A_4$, esisterà tutta la configurazione qui considerata, di punti razionali.

Esistono cubiche a coefficienti razionali per cui questo fatto si verifica: per mostrarlo basterà riconoscere che in una cubica (1) il flesso $A_4 \equiv (1\,1\,0)$ può essere tangenziale di un punto razionale. La conica polare di A_4 rispetto ad (1) è

$$(y + x - z)\,(y - x + bz) = 0.$$

La retta $y + x - z = 0$ è la polare armonica del flesso A_4: le sue intersezioni colla cubica sono determinate dall'equazione:

$$bx^2(y + x) + y^2(y - x) = 0,$$

e si potrà sempre disporre di b, mantenendolo razionale, in modo che una soluzione $\frac{x}{y}$ di questa equazione sia razionale: basterà scegliere arbitrariamente un α razionale e porre

$$b = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2(\alpha + 1)}.$$

L'equazione della cubica diviene

$$(9)\qquad y(y - x)(x - z) + \frac{\alpha - 1}{\alpha^2(\alpha + 1)} xz(y - z) = 0.$$

9. $t' = 7$, $t = 14$ - *Del punto* $A'\left(\frac{\omega}{42}\right)$ *è tangenziale il punto* $A\left(-\frac{\omega}{21}\right)$ *origine di una configurazione* $\mathfrak{S}(7)$ (n. 3): *oltre i punti di questa configurazione saranno razionalmente dedotti da esso altri 6 punti aventi per tangenziali rispettivamente gli altri 6 punti di questa*; e se una cubica razionale possiede una configurazione del n. 3 di punti razionali un punto della quale sia tangenziale di un punto razionale, possiederà, di punti razionali, tutta la la configurazione di cui è questione. Ma dimostreremo che *non può esistere una tal configurazione di punti razionali sopra una cubica a coefficienti razionali.*

Riprendiamo perciò l'equazione (2) del n. 3 cui si riducono tutte le cubiche corrispondenti a t multiplo di 7

$$(2)\quad y^2(x-z)-yx\left(ax - \frac{a^2 + a - 1}{a} z\right) - \frac{a-1}{a}xz^2=0 \quad (a \text{ razion.}).$$

Il flesso A_6 ha per coordinate $(1\ a\ a)$; la sua polare armonica rispetto alla cubica è

$$a(x - y) - (a - 1)z = 0,$$

e le intersezioni di questa colla cubica sono definite dall'equazione

$$(10)\quad a^2x^3 - a(2a - 1)x^2z + a(a - 1)xz^2 + (a - 1)z^3 = 0.$$

Si consideri questa come una equazione in a; se potesse esistere una cubica a coefficienti razionali in cui un punto $A'\left(\frac{\omega}{42}\right)$ fosse razionale, dovrebbero esistere valori razionali (interi) per x e z per cui le radici di questa equazione siano razionali; sia cioè quadrato il suo discriminante

$$z^2[(x^2 + xz + z^2)^2 - 8x^2z^2].$$

Occorre perciò che sia quadrato il secondo fattore e perciò che, p e q essendo numeri interi convenienti, possa porsi

$$x^2 + xz + z^2 = p^2 + 2q^2$$
$$xz = pq.$$

Segue

$$(x - z)^2 = p^2 - 3pq + 2q^2 = (p - q)(p - 2q).$$

Si osservi che x e z possono supporsi primi fra loro; dovranno allora esserlo pure p e q, e quindi $p - q$ e $p - 2q$: questi due numeri dovranno quindi separatamente esser quadrati. Poniamo

$$p - q = m^2, \quad p - 2q = n^2 \quad \text{onde} \quad x - z = mn.$$

Sarà

$$p = 2m^2 - n^2, \quad q = m^2 - n^2$$

$$(x + z)^2 = p^2 + pq + 2q^2 = 8m^4 - 11m^2n^2 + 4n^4$$

ossia, ponendo $x + z = t$,

$$m^2(8m^2 - 11n^2) = (t - 2n^2)(t + 2n^2).$$

Per discutere in modo sistematico questa equazione, osserviamo anzitutto che i due fattori del 1° membro debbono essere primi fra loro, in particolare di parità diversa; t ed n non possono avere fattori comuni diversi dal 2 e quindi lo stesso avviene pei due fattori del 2° membro; inoltre non può essere t divisibile per 4 ed n pari, altrimenti sarebbe pari anche m: quindi dei binomi $t - 2n^2$ e $t + 2n^2$ uno non possiederà mai il fattor 2

con esponente >2: valendosi dell'arbitrarietà del segno di t si può sempre supporre che tale sia il primo binomio. Si chiami allora α il massimo divisore dispari comune a m e $t-2n^2$ e si facciano le posizioni seguenti:

Se m è dispari

$$m=\alpha\gamma \quad 8m^2-11n^2=\beta\delta \quad t-2n^2=\alpha^2\beta \quad t+2n^2=\gamma^2\delta.$$

Se m è divisibile per 2 ma non per 4

$$m=2\alpha\gamma \quad 8m^2-11n^2=\frac{1}{4}\beta\delta \quad t-2n^2=\alpha^2\beta \quad t+2n^2=\gamma^2\delta.$$

Se m è multiplo di 4 (eventualmente anche d'una maggior potenza di 2)

$$m=4\alpha\gamma \quad 8m^2-11n^2=\beta\delta \quad t-2n^2=4\alpha^2\beta \quad t+2n^2=4\gamma^2\delta$$

(per giustificare quest'ultima posizione si osservi che se $m=4\alpha\gamma$, $(t-2n^2)(t+2n^2)$ è divisibile per 16; allora non potrebbe n essere intero se uno dei fattori non fosse divisibile per 4, l'altro essendo quindi divisibile per una maggior potenza di 2).

Si osservi che dei due numeri γ e β uno sarà sempre dispari (γ nel 1° e nel 2° caso, β nel 3°); inoltre si avrà

$$(\alpha,\gamma)\,[1]=(\alpha,\delta)=(\gamma,\beta)=1. \tag{11}$$

Si indichi ancora con ϵ il numero 0 nel 1° caso, il numero 1 nel 2° e nel 3°, e con N un numero uguale ad n nel 1° e nel 3° caso, uguale a $2n$ nel 2°. Le posizioni fatte dànno allora le equazioni

$$11N^2=2^{4\epsilon+3}\alpha^2\gamma^2-\beta\delta, \quad 4N^2=2^{2\epsilon}(\gamma^2\delta-\alpha^2\beta)$$

onde

$$44N^2=2^{4\epsilon+5}\alpha^2\gamma^2-4\beta\delta=11\,.\,2^{2\epsilon}\gamma^2\delta-11\,.\,2^{2\epsilon}\alpha^2\beta$$

da cui

$$\delta(11\gamma^2+2^{2(1-\epsilon)}\beta)=\alpha^2(2^{2\epsilon+5}\gamma^2+11\beta).$$

[1] Con (α,γ) rappresentando il m. c. d. di α e γ.

A causa delle (11) questa uguaglianza può solo verificarsi se

(I) $\delta = 2^{2\epsilon+5}\gamma^2 + 11\beta \quad \alpha^2 = 11\gamma^2 + 2^{2-2\epsilon}\beta$

oppure

(II) $7\delta = 2^{2\epsilon+5}\gamma^2 + 11\beta \quad 7\alpha^2 = 11\gamma^2 + 2^{2-2\epsilon}\beta$

(essendo 7 il determinante dei coefficienti dei fattori binomi).

Tratteremo dapprima l'ipotesi (I). — Dalle equazioni (I) si ricava

$$2^{2-2\epsilon}\beta = \alpha^2 - 11\gamma^2, \quad 2^{2-2\epsilon}\delta = 7\gamma^2 + 11\alpha^2,$$

onde, sostituendo nella precedente espressione di $4N^2$,

(12) $2^{4(1-\epsilon)}N^2 = 7\gamma^4 + 22\alpha^2\gamma^2 - \alpha^4 = 128\gamma^4 - (11\gamma^2 - \alpha^2)^2.$

Si ponga ancora, per semplicità, $2^{2(1-\epsilon)}N = r$; l'equazione (12) potrà scriversi

$$(r - 8\gamma^2)(r + 8\gamma^2) = (19\gamma^2 - \alpha^2)(\alpha^2 - 3\gamma^2),$$

r e γ non possono aver comuni che fattori 2 al più; perciò e per le (11) i binomi del 1° membro fra loro e parimenti quelli del 2° membro fra loro hanno comuni al più fattori 2. Si può quindi porre

$$r - 8\gamma^2 = 2^\xi\lambda\nu \qquad r + 8\gamma^2 = 2^\eta\mu\rho$$
$$19\gamma^2 - \alpha^2 = 2^\zeta\lambda\mu \qquad \alpha^2 - 3\gamma^2 = 2^{\xi+\eta-\zeta}\nu\rho$$

λ, μ, ν, ρ numeri dispari, fra loro primi a due a due.

Si ricava

$$16\gamma^2 = 2^\zeta\lambda\mu + 2^{\xi+\eta-\zeta}\nu\rho = 2^\eta\mu\rho - 2^\xi\lambda\nu$$
$$16\alpha^2 = 2^\zeta . 3\lambda\mu + 2^{\xi+\eta-\zeta} . 19\nu\rho.$$

La seconda equazione della 1ª linea può scriversi

$$\lambda(2^\zeta\mu + 2^\xi\nu) = \rho(2^\eta\mu - 2^{\xi+\eta-\zeta}\nu) ;$$

In questa i binomi dei due membri debbono contenere il fattore 2 collo stesso esponente: sia 2^θ questo fattore; dovrà essere

$$2^\theta\lambda = 2^\eta\mu - 2^{\xi+\eta-\zeta}\nu, \quad 2^\theta\rho = 2^\zeta\mu + 2^\xi\nu,$$

e quindi, sostituendo nella precedente espressione di $16\alpha^2$,

$$2^{\theta+4}\alpha^2 = 2^{\zeta+\eta} . 3\mu^2 + 16 . 2^{\xi+\eta}\mu\nu + 2^{2\xi+\eta-\zeta} . 19\nu^2.$$

Secondochè $\zeta+\eta$ è pari o dispari si ponga

$$2^{\frac{1}{2}(\zeta+\eta)}\mu = \mu', \quad 2^{\xi+\frac{1}{2}(\eta-\zeta)}\nu = \nu', \quad \theta+4=\theta'$$

ovvero

$$2^{\frac{1}{2}(\zeta+\eta+1)}\mu = \mu', \quad 2^{\xi+\frac{1}{2}(\eta-\zeta-1)}\nu = \nu', \quad \theta+5=\theta'.$$

Si indichino inoltre con ρ e ι il quoziente e il resto della divisione di θ' per 2 ($\iota=0$ o 1) e si ponga $2^\rho\alpha=\alpha'$. L'ultima equazione diviene

$$2^\iota\alpha'^2 = 3\mu'^2 + 16\mu'\nu' + 19\nu'^2.$$

Considerata come equazione in μ' ha per discriminante

$$3 . 2^\iota\alpha'^2 + 7\nu'^2;$$

ora si ha $\left(\frac{6}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}\right)$[1] $= -1$: quindi, qualunque sia il valore di ι (0 o 1) non esistono valori interi di α' e ν' per cui esso sia quadrato esatto. La condizione (I) non può dunque essere soddisfatta.

Resta ad esaminarsi il sistema (II): da esso si ricava

$$2^{2-2\epsilon}\beta = 7\alpha^2 - 11\gamma^2 \quad 2^{2-2\epsilon}\delta = \gamma^2 + 11\alpha^2$$

$$(13) \quad 2^{4(1-\epsilon)}N^2 = \gamma^4 + 22\alpha^2\gamma^2 - 7\alpha^4 = (\gamma^2+11\alpha^2)^2 - 128\alpha^4$$

ossia, ponendo di nuovo $2^{2(1-\epsilon)}N = r$,

$$128\alpha^4 = (\gamma^2 + 11\alpha^2 - r)(\gamma^2 + 11\alpha^2 + r).$$

I trinomi del 2° membro non possono avere fattori dispari comuni; inoltre, per ipotesi, α è dispari: dovrà quindi aversi

$$\alpha = \pi\chi$$

$$\gamma^2 + 11\alpha^2 - r = \pm 2^\kappa\pi^4 \quad \gamma^2 + 11\alpha^2 + r = \pm 2^{7-\kappa}\chi^4$$

$$\pi, \chi \text{ dispari, primi fra loro; } 0<\kappa<7.$$

---

[1] Ove le parentesi rappresentano simboli di Legendre.

Allora

$$\gamma^2 + 11\alpha^2 = \pm (2^{\kappa-1}\pi^4 + 2^{6-\kappa}\chi^4),$$

da cui risulta che deve scegliersi il segno superiore (+) perchè il primo membro è essenzialmente positivo; e, sostituendo ad α il suo valore in π e χ

$$\gamma^2 = 2^{\kappa-1}\pi^4 - 11\pi^2\chi^2 + 2^{6-\kappa}\chi^4.$$

Occorre qui distinguere due casi: 1° κ dispari; moltiplicando ambi i membri per $2^{\kappa+1}$ l'equazione diviene

$$2^{\kappa+1}\gamma^2 = (2^\kappa\pi^2 - 11\chi^2)^2 + 7\chi^4;$$

2° κ pari; moltiplicando ambi i membri per $2^{8-\kappa}$ l'equazione diviene

$$2^{8-\kappa}\gamma^2 = 7\pi^4 + (2^{7-\kappa}\chi^2 - 11\pi^2)^2.$$

In entrambe le equazioni il primo membro è un quadrato ed esse rientrano quindi nella forma generale [1]

$$7\xi^4 = \eta^2 - (2^\kappa\zeta^2 - 11\xi^2)^2$$

dove ξ e ζ sono dispari, ξ, η e ζ primi fra loro a 2 a 2, κ dispari e <7. Ora quest'equazione può scriversi

$$7\xi^4 = (\eta - 2^\kappa\zeta^2 + 11\xi^2)(\eta + 2^\kappa\zeta^2 - 11\xi^2).$$

I due trinomi del secondo membro sono primi fra loro (non potendo nemmeno avere il fattor 2 perchè il 1° membro è evidentemente dispari); uno di essi deve avere il fattor 7 e si può sempre supporre sia il primo, con una conveniente scelta del segno di η. Si soddisferà quindi l'equazione ponendo

$$\xi = \sigma\tau$$

$$\eta - 2^\kappa\zeta^2 + 11\xi^2 = \pm 7\sigma^4 \quad \eta + 2^\kappa\zeta^2 - 11\xi^2 = \pm \tau^4$$

σ, τ dispari, primi fra loro.

---

[1] ξ, η, ζ, κ, essendo ora nuove indeterminate, indipendentemente dal significato precedente.

Segue

$$2(2^\kappa \zeta^2 - 11\xi^2) = \pm (\tau^4 - 7\sigma^4),$$

onde

$$2^{\kappa+1}\zeta^2 = \pm (\tau^4 \pm 22\sigma^2\tau^2 - 7\sigma^4).$$

Si ricordi che κ è dispari e quindi $\kappa + 1$ è pari: l'equazione ottenuta rientra allora nel tipo (12) o nel tipo (13) secondochè si sceglie il segno inferiore o il superiore. Ora si è già mostrato che le equazioni della forma (12) non ammettono soluzioni. Nel caso che si riproducesse la forma (13) si osservi che nella nuova equazione α è sostituito da σ e che si ha $\alpha = \zeta\tau\sigma$; è quindi $|\sigma| < |\alpha|$ a meno che $|\zeta| = |\tau| = 1$. In questa ipotesi l'equazione diviene

$$2^{\kappa+1} = 1 + 22\sigma^2 - 7\sigma^4$$

e risolvendo questa equazione si vede che σ non può essere intero se non è $\kappa = 3$ e la soluzione intera è allora $|\sigma| = 1$. Segue $|\xi| = 1$, $|\eta| = 4$, $|\gamma| = 1$, $|\alpha| = 1$.

Così l'ammettere che l'equazione (13) abbia soluzioni in valore assoluto $\neq 1$ ha per conseguenza che essa ha pure altre soluzioni, ancora $\neq 1$ in valore assoluto ed in cui $|\alpha|$ ha valore minore. Questa diminuzione non potendo protrarsi indefinitamente, deve concludersi che tali soluzioni di modulo $\neq 1$ non possono esistere. Adunque l'equazione (13) non ammette soluzioni (in cui le incognite siano $\neq 0$) che per

$$|\alpha| = |\gamma| = |m| = -\beta = |n| = p = 1, \quad q = 0$$
$$|x| = 1, \quad z = 0 \quad \text{o} \quad x = 0, \quad |z| = 1.$$

Allora $a = 0$ o $a = 1$ e la cubica (2) degenera.

Le soluzioni di (13) in cui qualche incognita (la quale non può essere che α) è nulla sfuggono alla precedente analisi, a causa delle considerazioni relative allo spezzamento in fattori. In tale ipotesi $m = \alpha\beta = 0$, $x - z = mn = 0$, $x = z$, onde, per la (10), $a = 1$; la cubica (2) degenera ancora.

Risulta così provata l'impossibilità enunciata al principio del n. 10. — Riassumendo quindi, *esistono, sopra cubiche a coefficienti razionali, configurazioni poligonali miste di punti razionali*

per $\nu = 1$ (*in cui quindi ogni punto del nucleo è tangenziale di* un *punto razionale che al nucleo non appartiene*) *per i valori* 3 *e* 5 *di* t'; *ma una tal configurazione non esiste più per* $t' = 7$. È molto probabile che nemmeno essa esista per valori di $t' > 7$. Senza trattenerci per ora ad assodare questo fatto, ci volgiamo a considerare i casi in cui $\nu = 2$: evidentemente la nostra attenzione dovrà solo portarsi sopra le ipotesi $t' = 3$, $t' = 5$, perchè ogniqualvolta con un valore di t' non è compatibile un valore di ν, non sono compatibili *a fortiori* i valori maggiori.

Configurazioni per cui $\nu = 2$ — **11**. - $t' = 3$, $t = 12$ - *Dal punto* $A''\left(\frac{\omega}{36}\right)$ *si deduce il tangenziale* $A'\left(-\frac{\omega}{18}\right)$ *origine d'una configurazione analoga a quella del n.* 7. Applicando un'osservazione generale (Nota II, n. 4) si ha che, *se* A *è razionale*, A' *sarà pure tangenziale di un altro punto razionale* $B\left(-\frac{17\omega}{36}\right)$ *e che del pari i punti* A'_1 *e* A'_2 *sono tangenziali ciascuno di due punti razionali. Si hanno così 12 punti che costituiscono l'intiera configurazione.* La configurazione descritta — di punti razionali — esiste. Basterà mostrare che nella cubica (8) del n. 7 il punto $A' \equiv (1\,0\,0)$ può, per una scelta conveniente di b, essere tangenziale di due punti razionali A'', B: se ciò avviene, nel fascio di coniche aventi per punti base i punti di contatto delle tangenti da A', una conica degenere si comporrà di due rette razionali (una delle quali è $A''B$): sarà precisamente la conica che ha per punto doppio $A_2 \equiv (1\,1\,1)$.

Il detto fascio di coniche è determinato dalle

$$y^2 - y[2(b+1)x - (2b+1)z] - bz^2 = 0$$
$$yz - (b+1)x^2 = 0.$$

La conica del fascio passante per (1 1 1) è

$$\left[\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{b}}\right)y - \sqrt{1+\frac{1}{b}}\,x - z\right] \times \left[\left(1 - \sqrt{1+\frac{1}{b}}\right)y + \sqrt{1+\frac{1}{b}}\,x - z\right] = 0$$

e le due rette di cui essa si compone saranno razionali se tale è $\sqrt{1+\frac{1}{b}}$.

Poniamo

$$1+\frac{1}{b}=c^2;$$

sarà

$$b=\frac{1}{c^2-1}$$

e, attribuendo a c segno conveniente, una qualunque delle due rette della detta conica sarà rappresentata da

$$(c+1)y-cx-z=0.$$

Si può quindi supporre sia questa la retta $A''B$: essa dovrà quindi tagliare la cubica, o, più semplicemente, le coniche del fascio, in punti razionali. Tali intersezioni sono date dall'equazione

$$y[(c+1)y-cx]-\frac{c^2}{c^2-1}x^2=0$$

il cui discriminante è

$$c^2\left(1+\frac{4}{c-1}\right).$$

Le due radici saranno dunque razionali se è quadrato esatto

$$1+\frac{4}{c-1}=\frac{c+3}{c-1}.$$

Fissato arbitrariamente un numero razionale r, basterà quindi assumere:

$$\frac{c+3}{c-1}=r^2 \quad \text{ossia} \quad c=\frac{r^2+3}{r^2-1}$$

e quindi

$$b=\frac{1}{c^2-1}=\frac{(r^2-1)^2}{8(r^2+1)}$$

perchè la cubica (8) possegga la configurazione di punti razionali di cui qui è questione.

12. $t'=5$, $t'=20$. - *Dal punto* $\mathrm{B}\left(\frac{\omega}{60}\right)$ *si deduce il tangenziale* $\mathrm{A}'\left(-\frac{\omega}{30}\right)$, *da cui deriva razionalmente una configura-*

zione quale quella descritta nel n. 8. Alla configurazione dei punti razionalmente dedotti da B *appartiene pure il punto* $B'\left(-\frac{29\omega}{60}\right)$, *allineato con* B *e con* A_3, *ed avente pure per tangenziale* A'.

Ma *non esistono cubiche a coefficienti razionali su cui un punto* $B\left(\frac{\omega}{60}\right)$ *possa essere razionale.* Se invero esistesse una tal cubica, essa dovrebbe potersi rappresentare coll'equazione (9), con una conveniente scelta di α razionale. Si ponga $\alpha = \frac{p}{q}$ (p e q interi, primi fra loro) e si osservi che chiedere che A' sia tangenziale dei punti razionali B e B', equivale a chiedere che il punto $A_4' \equiv (p, q, p+q)$ che ha per tangenziale il flesso A_4 (n. 8), sia a sua volta tangenziale di due punti razionali B_4 e B_4', i quali saranno allineati con A_4.

L'equazione (9) si scrive

$$y^2\left[x-y-\frac{q^2(p-q)}{p^2(p+q)}z\right]+y\left[(x-y)^2-\frac{p^3+p^2q+pq^2-q^3}{p^2(p+q)}(x-y)z+\frac{q^2(p-q)}{p^2(p+q)}z^2\right]$$
$$+\frac{q^2(p-q)}{p^2(p+q)}(x-y)z^2=0.$$

La conica polare di A_4' rapporto ad essa è

$$y^2\frac{(p+q)(p-q)^2}{p^2}+y\left[\frac{p^3-p^2q-pq^2+q^3}{p^2}(x-y)-\frac{p^3+p^2q-pq^2-q^3}{p^2}\frac{p-q}{p+q}z\right]$$
$$+z^2\frac{q^2(p-q)}{p(p+q)}-(x-y)z\frac{q(p^3-p^2q+pq^2+q^3)}{p^2(p+q)}+(x-y)^2q=0.$$

Le due curve sono segate dalla retta

$$x-y=\mu z$$

fuori di A_4 rispettivamente nelle coppie di punti definite dalle equazioni:

$$y^2\left[\mu-\frac{q^2(p-q)}{p^2(p+q)}\right]+yz\left[\mu^2-\frac{p^3+p^2q+pq^2-q^3}{p^2(p+q)}\mu+\frac{q^2(p-q)}{p^2(p+q)}\right]+$$
$$+\frac{q^2(p-q)}{p^2(p+q)}\mu z^2=0.$$

$$y^2\frac{(p+q)(p-q)^2}{p^2}+yz\left[\frac{p^3-p^2q-pq^2+q^3}{p^2}\mu-\frac{p^3+p^2q-pq^2-q^3}{p^2}\frac{p-q}{p+q}\right]+$$
$$+z^2\left[q\mu^2-\frac{q(p^3-p^2q+pq^2+q^3)}{p^2(p+q)}\mu+\frac{q^2(p-q)}{p(p+q)}\right]=0:$$

e tali coppie di punti coincideranno se

$$\frac{p^2(p+q)\mu - q^2(p-q)}{(p+q)^2(p-q)^2} = \frac{p^2(p+q)\mu^2 - (p^3+p^2q+pq^2-q^3)\mu + q^2(p-q)}{(p^3-p^2q-pq^2+q^3)(p+q)\mu - (p^3+p^2q-pq^2-q^3)(p-q)} =$$

$$= \frac{\mu q(p-q)}{\mu^2 p^2(p+q) - \mu(p^3-p^2q+pq^2+q^3) + pq(p-q)}.$$

La prima di queste equazioni è identicamente soddisfatta ([1]): resta così un'equazione la quale, dopo soppressione della soluzione $\mu = \frac{p-q}{p+q}$, che corrisponde alla retta $A_4 A'_4$, diviene

$$p^3(p+q)\mu^2 - 2p^2q^2\mu + q^3(p-q) = 0.$$

Affinchè B_4 e B'_4 siano razionali occorre anzitutto che la corrispondente radice di questa equazione sia razionale, e perciò dovrà esser quadrato il suo discriminante

$$p^3q^3(-p^2+pq+q^2).$$

Si può supporre p e q positivi: infatti questo discriminante non muta se si cambiano di segno p e q, onde p può sempre assumersi positivo; se poi q fosse negativo e precisamente $q = -q'$, il discriminante medesimo diverrebbe

$$p^3q'^3(-q'^2+pq'+p^2)$$

ove p e q' sarebbero positivi, e quest'espressione non differisce dalla precedente che per la sostituzione di q' e p risp. a p e q. p e q dovendo esser primi fra loro, dovranno esser quadrati i singoli fattori, onde potrà porsi

$$p = r^2 \qquad q = s^2$$

$$(14) \qquad s^4 + r^2s^2 - r^4 = t^2$$

r, s, t interi primi fra loro a due a due.

([1]) Si può verificarlo per via analitica, ma può pure prevedersi con una semplice osservazione geometrica: la retta polare di A_4 rispetto alla conica polare di A'_4 coincide colla polare armonica di A_4 (flesso) rispetto alla cubica. Ne segue che ogni retta $x - y = \mu z$ passante per A_4 sega la conica e la cubica in due coppie di punti rispetto a cui A_4 ha lo stesso coniugato armonico, ossia, poichè A_4 è punto all'∞ ($z = 0$), lo stesso punto medio. È ciò che è espresso dall'eguaglianza identica rilevata nel testo.

L'equazione (14) può scriversi

$$r^2(s^2 - r^2) = t^2 - s^4 = (t - s^2)(t + s^2).$$

Si osservi che s non può essere pari: infatti se s fosse pari, il 1° membro della (14) sarebbe $\equiv -1 \pmod{4}$ e quindi non quadrato, a meno che $r = 0$, nel qual caso la cubica degenera in una terna di rette; dovrà quindi esser pari r^2 o $(s^2 - r^2)$ e quindi saranno pari $t - s^2$ e $t + s^2$. Potrà porsi

$$t - s^2 = 2\alpha^2\gamma \qquad t + s^2 = 2\beta^2\delta$$

$$r = 2\alpha\beta \qquad s^2 - r^2 = \gamma\delta \qquad \text{se } r \text{ pari}$$

$$r = \alpha\beta \qquad s^2 - r^2 = 4\gamma\delta \qquad \text{,, } r \text{ dispari}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ primi fra loro a due a due, α dispari.

Nell'ipotesi di r pari si ha quindi

$$s^2 = \beta^2\delta - \alpha^2\gamma = \gamma\delta + 4\alpha^2\beta^2$$

onde

$$\beta^2(\delta - 4\alpha^2) = \gamma(\delta + \alpha^2). \tag{15}$$

Nell'ipotesi di r dispari invece

$$s^2 = \beta^2\delta - \alpha^2\gamma = 4\gamma\delta + \alpha^2\beta^2$$

$$\beta^2(\delta - \alpha^2) = \gamma(4\delta + \alpha^2).$$

Ma, ponendo $4\delta = \delta'$, $4\gamma = \gamma'$, quest'equazione prende la forma $\beta^2(\delta' - 4\alpha^2) = \gamma'(\delta' + \alpha^2)$ identica alla (15): possiamo quindi limitarci a trattare quella prima equazione, purchè non si escluda che γ e δ possano avere un fattor 4 comune.

δ ed α essendo primi fra loro, $\delta - 4\alpha^2$ e $\delta + \alpha^2$ non possono avere altri fattori comuni che eventualmente UN fattore 5. Se tal fattore non esiste, la (15) può solo soddisfarsi con

$$\delta - 4\alpha^2 = \gamma \qquad \delta + \alpha^2 = \beta^2$$

$$\delta = \beta^2 - \alpha^2 \qquad \gamma = \beta^2 - 5\alpha^2.$$

Allora

$$s^2 = \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 + 5\alpha^4.$$

Se quel fattor 5 esistesse sarebbe invece $\delta - 4\alpha^2 = 5\gamma$, $\delta + \alpha^2 = 5\beta^2$ e si giungerebbe all'equazione $s^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + 5\beta^4$ che differisce dalla precedente solo per lo scambio di α e β. Consideriamo dunque solo la prima equazione: essa può scriversi

$$s^2 = (\beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^4;$$

da cui segue che $\beta^2 - \alpha^2$ e α^2 debbono avere le forme

$$\beta^2 - \alpha^2 = m^2 - n^2, \quad \alpha^2 = mn.$$

Perchè siano primi fra loro α e β, debbono esser tali m ed n: deve dunque essere

$$m = \tau^2 \qquad n = \sigma^2$$

$$\beta^2 = \tau^4 + \tau^2\sigma^2 - \sigma^4.$$

Si ottiene così una nuova equazione della stessa forma della (14), dove σ ha preso il posto di r. Ora dalle relazioni

$$r = \alpha\beta \quad \text{o} \quad = 2\alpha\beta, \qquad \alpha^2 = mn \qquad n = \sigma^2$$

segue

$$|\sigma| \leq |r|$$

potendo valere il segno $=$ solo se

$$|\beta| = m = \tau^2 = 1 \qquad \text{onde} \qquad 0 = \beta^2 - 1 = \sigma^2(1 - \sigma^2).$$

Questa uguaglianza può solo verificarsi per

$$|\sigma| = 1, \quad \alpha^2 = 1, \quad s^2 = 4$$

ovvero per

$$\sigma = 0, \quad \alpha = 0, \quad s^2 = 1, \quad r = 0.$$

La seconda ipotesi fu già esclusa, essendosi escluso che $r = 0$; nella 1ª ipotesi, per conciliare l'eguaglianza trovata $s^2 = 4$ col fatto che l's della nostra questione deve essere dispari, deve ammettersi che l'equazione (15) non sia l'equazione vera del nostro problema, ma l'equazione modificata, come si disse, nel-

l'ipotesi di r dispari; allora $|s| = |r| = 1$ e la cubica si spezza ancora in una coppia di rette.

Deve dunque essere

$$1 < |\sigma| < |r|.$$

Dall'ipotesi che l'equazione (14) ammetta una soluzione intera in cui $|r| > 1$ segue dunque che essa deve averne un'altra per cui $|r|$ è minore, ma sempre >1; r dovendo essere intero, ne seguirebbe un assurdo decremento illimitato del valor assoluto ch'essa può assumere.

13. — Il solo valore di $t' (\leq 7)$ che sia compatibile con $\nu = 2$, è dunque $t' = 3$. Resterebbe a ricercarsi se tal valore di t' sia ancora compatibile con $\nu = 3$: questa ricerca presenta notevoli difficoltà aritmetiche e noi l'abbandoniamo per ora: riservo ad una Nota IV alcune altre considerazioni, di diversa indole sopra le configurazioni finite di punti razionali.

Come già nella Nota II, rilevo, chiudendo, fra i risultati aritmetici delle precedenti discussioni, la dimostrazione della non risolubilità in numeri interi delle equazioni:

$$7x^4 + 22x^2y^2 - y^4 = z^2 \tag{12}$$

$$x^4 + 22x^2y^2 - 7y^4 = z^2 \qquad (\text{per } |y| \neq 0,\ 1) \tag{13}$$

[e, per combinazione di queste, dell'equazione

$$2^{\varkappa}x^4 - 11x^2y^2 + 2^{5-\varkappa}y^4 = z^2 \quad (\text{per } |x|,\ |y| \neq 0,\ 1)]$$

$$x^4 + x^2y^2 - y^4 = z^2 \qquad (\text{per } |y| \neq 0,\ 1). \tag{14}$$

Sul problema di Fourier.

Nota del Dottor EUGENIO ELIA LEVI.

1. — Dato un corpo ed in esso la distribuzione delle sorgenti di calore, il problema più generale della teoria del calore (problema di Fourier) consiste nel determinare la distribuzione delle temperature nei punti del corpo, quando si conosca la distribuzione iniziale delle temperature nei punti del corpo e la distribuzione delle temperature per i successivi valori del tempo nei punti dello spazio ambiente. Analiticamente, se supponiamo che il corpo sia omogeneo e che la conducibilità interna sia costante, il problema, quando si scelgano convenientemente le unità di misura, si traduce nel modo seguente: se il corpo è ad n dimensioni [1], si consideri lo spazio in cui le variabili coordinate sono le variabili $x_1 x_2 \dots x_n$ dello spazio in cui è immerso il corpo e la variabile y che rappresenta il tempo, ed in esso il cilindro a generatrici parallele all'asse delle y, il quale ha per base il campo che sull'iperpiano $y = 0$ rappresenta il corpo considerato; si deve trovare una soluzione dell'equazione

$$(1) \qquad \Delta_2 z - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x_1 x_2 \dots x_n y) \qquad \left(\Delta_2 z = \sum_1^n {}_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}\right),$$

che sulla base del cilindro assuma i valori assegnati

$$(2) \qquad z(x_1 x_2 \dots x_n 0) = f_1(x_1 x_2 \dots x_n),$$

e sulla superficie laterale soddisfi alla condizione

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial n} + \kappa z = \varphi(x_1 x_2 \dots x_n y).$$

---

[1] Sarà $n = 3$ se si considera un corpo qualunque dello spazio ordinario. Ben sovente però le condizioni di simmetria ed altre analoghe permettono di supporre $n = 1$ od $n = 2$. Perciò ho lasciato nell'enunciato la massima generalità al numero n.

In quest'ultima condizione la derivata rapporto ad n rappresenta la derivata rapporto alla normale al cilindro: il punto $x_1 x_2 \dots x_n$ rappresenta un punto della superficie del corpo (poichè la condizione è da soddisfarsi sui punti della superficie laterale del cilindro); ed infine la κ è una funzione assegnata, sempre finita e continua, che può dipendere dalle x e dalla y. Nel problema fisico $\varphi(x_1 x_2 \dots x_n y)$ è uguale a $\kappa z_1 (x_1 x_2 \dots x_n y)$ dove z_1 rappresenta la temperatura dello spazio ambiente (¹). Supporremo che $f(x_1 x_2 \dots x_n y)$ ammetta derivate prime finite (²); $f_1(x_1 \dots x_n)$ e $\varphi(x_1 x_2 \dots x_n y)$ siano finite e continue: e se si vuole che anche al tempo iniziale non vi siano singolarità per i valori delle derivate di z al contorno del corpo, le supporremo tali che per questi punti le (2) e (3) diano determinazioni concordi.

Il precedente problema è già stato studiato da molti autori: i quali hanno sempre seguito il metodo indicato dal Poincaré nel caso particolare del raffreddamento di un corpo (³): ricorderò i lavori del Le Roy (⁴), dello Stekloff, (⁵) e la notevole memoria dello Zaremba (⁶): più recentemente il Lauricella (⁷)

(¹) Cfr. ad es. RIEMANN-WEBER, *Die Partiellen Differentialgleichungen der Mathematischen Physik.* 2 Bd., § 33 e 34.

(²) Od anche soltanto soddisfaccia all'ipotesi che esistano due numeri positivi e non nulli l ed α tali che, presi due punti $(x_1 x_2 \dots x_n y)$ ed $(x_1' x_2' \dots x_n' y')$, sia sempre

$$\frac{f(x_1 x_2 \dots x_n y) - f(x_1' x_2' \dots x_n' y')}{\rho^\alpha} < l,$$

dove

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \dots + (x_n - x_n')^2 + (y - y')^2}\,.$$

(³) H. POINCARÉ, *Sur les équations de la Physique mathématique,* " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ", tomo VIII, 1894. Vedi anche la *Théorie analytique de la chaleur.*

(⁴) LE ROY, *Sur l'intégration des équations de la chaleur,* " Annales de l'École Normale supérieure " (1898-99).

(⁵) STEKLOFF, *Mémoire sur les fonctions harmoniques de M. Poincaré,* " Annales de la Faculté de Sciences de Toulouse ", 1900.

(⁶) ZAREMBA, *Solution générale du problème de Fourier,* " Bulletin de l'Académie de Cracovie ", 1904. Vedi anche varie altre memorie del medesimo autore negli " Annales de l'École Normale Sup. ", 1899, e nel " Journal de Mathématiques ", 1900, ecc.

(⁷) LAURICELLA, *Applicazioni della teoria di Fredholm al problema del raffreddamento dei corpi,* " Annali di Matematica ", tomo XIV, serie 3ª, 1907.

ha semplificato le teorie svolte da questi autori introducendo anche qui i metodi delle equazioni integrali di Fredholm.

Io seguirò in questa nota i metodi che esposi già in una ricerca analoga per l'equazione (1): ed in particolare per lo studio del problema della distribuzione delle temperature, quando i valori di esse siano noti in tutti i punti del corpo nell'istante iniziale e siano pure noti nei punti del contorno per i valori successivi del tempo [1]. Spero che tale studio non parrà inutile: poichè mi sembra che il metodo qui tenuto porti ad una trattazione del problema assai più semplice di quella nota, in quanto non si richiede affatto la ricerca delle soluzioni eccezionali di una conveniente equazione, e si richiede che al contorno siano soddisfatte assai minori condizioni di quelle imposte fin qui. Inoltre il metodo serve a risolvere il problema analitico più generale, — privo, a dir vero, di qualunque semplice significato fisico — che si ottiene quando si richiegga che la condizione (3) sia soddisfatta non già sulla superficie laterale di un cilindro o generatrici parallele all'asse delle y, ma nei punti di una ipersuperficie affatto generale che ammetta iperpiano tangente mobile con continuità e mai parallelo ad un piano caratteristico. e curvature finite (cfr. più oltre n. 2).

Posso dire che gli studi che svolgo in questa Nota stanno a quelli contenuti nella mia memoria citata nella medesima relazione in cui stanno la teoria del doppio strato ed il problema di Dirichlet rispetto alla teoria dello strato semplice ed al problema derivato di Dirichlet e alle sue generalizzazioni. Nei n[i] 2 e 3 richiamerò i risultati di (A): nei n[i] 4-6 dimostrerò il teorema di esistenza.

Il problema qui trattato ammette al più una soluzione. Si ottiene questo risultato con metodi classici nel caso che la super-

---

(1) E. E. Levi, *Sull' equazione del calore*, " Annali di Matematica ", tomo XIV. serie 3ª: un largo sunto di questa memoria fu pubblicato nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei " dell'ottobre scorso collo stesso titolo. Citerò questa memoria colla lettera (A) e ad essa mi riferirò continuamente. Questa nota era già redatta quando il sig. Holmgren ha annunciato di avere una soluzione dello stesso problema pel caso di una sola variabile nella nota: *Sur l'équation de l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$. pubblicata nei "Comptes Rendus " nel dicembre scorso.

ficie laterale sia cilindrica e che la κ sia positiva (1). Tuttavia anche nel caso generale il teorema di unicità è vero: nel caso in cui la κ sia negativa e la superficie sia cilindrica esso fu già dimostrato mediante gli sviluppi in serie di funzioni eccezionali (2). Io ne darò in fine al lavoro una dimostrazione perfettamente generale (n. 7).

Ridurrò il problema allo studio di un' equazione integrale di Fredholm che, come le analoghe di (A), ha molte analogie con le particolari equazioni studiate dal Volterra. Ciò fa sì che non mi occorrerà mai di supporre nota la teoria del Fredholm per la dimostrazione di esistenza: invece la supporrò nota per dimostrare il teorema di unicità.

2. — Tratterò il caso di $n = 2$: nessuna difficoltà porterebbe il caso di un maggior numero di dimensioni, tolta qualche complicazione nelle notazioni. E sarebbe anche più semplice trattare il caso di $n = 1$: non scelsi questo caso appunto per evitare quelle particolari condizioni che lo semplificano.

Il campo che considereremo sarà limitato da un'area (base) posta sul piano $y = 0$ che chiameremo k: e da una superficie laterale che chiameremo s: s potrà essere una superficie cilindrica, o più in generale una superficie regolare che ammette piano tangente e curvature finite: per essa si supporrà di più che il piano tangente formi sempre un angolo finito $> \Theta > 0$ coi piani caratteristici (3).

Indicheremo con $s(y')$ la parte di s che si trova al disotto del piano $y = y'$, con $c(y')$ la curva sezione di s col piano $y = y'$, con $S(y')$ lo spazio racchiuso da s, dal piano $y = 0$ e dal piano $y = y'$. Sarà quindi $c(0)$ il contorno di k (4). Preso un punto M di s, con n indicheremo, come dicemmo, la direzione della normale alla curva c passante per il punto M volta verso l'interno

---

(1) Cfr. RIEMANN-WEBER, *Die Partiellen Differentialgleichungen*, Bd. 2, § 34.

(2) Cfr. ZAREMBA, loc. cit., cap. IX, § 28, pag. 141-142.

(3) Se la superficie s è cilindrica, quest'ultima condizione è soddisfatta, poichè il piano tangente è sempre ortogonale ai piani caratteristici. La prima si riduce a chiedere che il contorno c di k abbia tangente e curvatura finita.

(4) Se la superficie è cilindrica, tutte le curve $c(y)$ sono uguali alla curva $c(0)$ contorno di k.

di S, con ν la normale ad s nel punto M medesimo, volta pure verso l'interno di S: in altri termini sarà n la proiezione di ν sul piano caratteristico per M [1].

Indicheremo con $u\,y$ un sistema di coordinate curvilinee, formato colle linee $y=$ cost e le loro traiettorie ortogonali [2], che valga a determinare i punti di s.

Infine se $M\equiv(x_1x_2y)$, $M'\equiv(x'_1x'_2y')$ sono due punti dello spazio, ρ sarà la loro distanza, r la distanza delle loro proiezioni sopra un qualunque piano caratteristico. Se M od M' sono su s, diremo n, n'; ν, ν' le direzioni n, ν ad essi relative.

Dalle ipotesi fatte su s segue che, se M ed M' sono su s:

1° [3] In virtù del fatto che s ha curvature finite è possibile trovare un numero N tale che, detto $(\nu\nu')$ l'angolo delle due normali in M ed M', si abbia

$$(1)\qquad |\widehat{\nu\nu'}|<N\rho \quad \text{e quindi anche} \quad |\widehat{nn'}|<N\rho.$$

Inoltre se N è sufficientemente grande sarà ancora, indicando con $|\widehat{\rho\nu}|$ l'angolo della congiungente MM'

$$(2)\qquad \left|\frac{\pi}{2}-(\widehat{\rho\nu})\right|<N\rho.$$

2° [4] se N è sufficientemente grande e se $(\widehat{rn})$, $(\widehat{rn'})$ sono gli angoli delle direzioni n ed n' colla congiungente le projezioni di M ed M' su un medesimo piano caratteristico, saranno soddisfatte le condizioni:

$$(3)\qquad \begin{aligned} |\cos(\widehat{rn})| &< \frac{N}{\operatorname{sen}\Theta}r+\frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\frac{|y-y'|}{r} \\ |\cos(\widehat{rn'})| &< \frac{N}{\operatorname{sen}\Theta}r+\frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\frac{|y-y'|}{r}. \end{aligned}$$

[1] Se la superficie s è cilindrica, n e ν coincidono. — Per queste ipotesi circa la superficie s cfr. (A) n. 26.

[2] Cfr. (A) n. 27.

[3] Cfr. (A) n. 26.

[4] Se la superficie s è cilindrica, le (3) si semplificano, in quanto si può sopprimere l'ultimo termine e porre $\operatorname{sen}\Theta=1$.

Basta infatti osservare che $|\cos(\widehat{rn})| = \left|\frac{\cos(\widehat{r\nu})}{\cos(\widehat{\nu n})}\right| \leq \frac{|\cos(\widehat{r\nu})|}{\operatorname{sen}\Theta}$; indi calcolare $\cos(\widehat{r\nu})$ dal triedro che ha per spigoli ρ, ν, r mediante la formula

$$\cos(\widehat{r\nu}) = \cos(\widehat{\rho\nu})\cos(\widehat{r\rho}) + \operatorname{sen}(\widehat{\rho\nu})\operatorname{sen}(\widehat{r\rho})\cos\hat{\rho}$$

dove $\hat{\rho}$ indica l'angolo diedro il cui spigolo è in ρ: per essere $|\cos\hat{\rho}| < 1$, $|\cos(\widehat{\rho\nu})| < N\rho$ [formula (2)], $|\cos(\widehat{r\rho})| = \frac{r}{\rho}$, $|\operatorname{sen}(\widehat{r\rho})| = \frac{|y'-y|}{\rho}$ segue allora $|\cos(\widehat{r\nu})| < Nr + \frac{(y'-y)}{r}$; onde la prima delle (3). Ed in modo analogo si ha la seconda [1].

3. — Poniamo

$$h_{\alpha\beta}(x_1x_2y; x_1'x_2'y') = e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} \frac{r^\alpha}{(y'-y)^\beta} \tag{1}$$

$$(r^2 = (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2; \; y \leq y').$$

Ci occorre ricordare alcuni teoremi dimostrati in (A) relativi a questa funzione ed ai suoi integrali. Questa funzione è regolare in ogni punto del semispazio in cui $y < y'$, si annulla per $y = y'$, tranne nel punto $(x_1x_2y) \equiv (x_1'x_2'y')$ dove è singolare. Se si fissano i valori di (x_1x_2y) [o di $(x_1'x_2'y')$] e si fa allontanare all'infinito il punto $(x_1'x_2'y')$ [e (x_1x_2y)] la funzione $h_{\alpha\beta}(x_1x_2y; x_1'x_2'y')$ tende a zero di ordine maggiore di una qualunque potenza di $\frac{1}{R}$, — R indicando la distanza di $(x_1'x_2'y')$ [o di (x_1x_2y)] da un punto arbitrario; ad es. dall'origine.

Se con $\Sigma(y')$ si indica un qualunque campo posto tutto al disotto del piano $y = y'$ il quale non si estenda all'infinito nel senso delle y negative — resti ad es.: nel semispazio delle y positive — la funzione $h_{\alpha\beta}$ è integrabile assolutamente in $\Sigma(y')$ tosto che si abbia

$$\alpha + 1 > 0 \qquad 4 + \alpha - 2\beta > 0;$$

---

[1] Cfr. (A) n. 28.

se si pone $4+\alpha-2\beta=\delta$, e con η si indica il massimo valore di $y'-y$ in $\Sigma(y')$, sarà

$$(1)\qquad \iiint_{\Sigma(y')} |h_{\alpha\beta}(x_1x_2y\,;\,x_1'x_2'y')|\,dx_1dx_2dy < L_{\alpha\beta}\eta^{\frac{\delta}{2}}$$

$L_{\alpha\beta}$ indicando una costante finita dipendente solo da α e β (1).

Indichi s una superficie quale quella studiata nel n. precedente; ed uy le coordinate curvilinee sulla superficie medesima sopra descritte: sia Edu^2+Gdy^2 l'elemento lineare di s riferito ad u e y. Sia $(x_1x_2y)=(uy)$ un punto variabile in $s(y')$. L'*integrale*

$$(2)\qquad \iint_{s(y')} h_{\alpha\beta}(x_1x_2y\,;\,x_1'x_2'y')\,\psi(uy)\sqrt{E}\,du\,dy$$

dove $\psi(uy)$ rappresenta una funzione finita e continua del punto di $s(y')$, *è una funzione finita e continua di* $(x_1'x_2'y')$ *in tutto lo spazio tosto che*

$$\alpha+1>0 \qquad 3+\alpha-2\beta>0\,;$$

e se si pone $3+\alpha-2\beta=\delta$ e si fa l'ipotesi che su $s(y')$ sia sempre $y'-y<\eta$ e $|\psi(uy)|<\Psi$ si avrà

$$(3)\qquad \iint_{s(y')} |h_{\alpha\beta}(x_1x_2y\,;\,x_1'x_2'y')\,\psi(uy)|\sqrt{E}\,du\,dy < \Psi L_{\alpha\beta}\eta^{\frac{\delta}{2}}$$

$L_{\alpha\beta}$ indicando una quantità dipendente da α e β soltanto. Se poi $\psi(uy)$ soddisfa alla condizione

$$|\psi(uy)|<\Psi_1[y-(y'-\eta)]^{\gamma}$$

sarà

$$(4)\qquad \iint_{s(y')} |h_{\alpha\beta}(x_1x_2y\,;\,x_1'x_2'y')\,\psi(uy)|\sqrt{E}\,du\,dy < \Psi_1 L^{(1)}_{\alpha\beta}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma\left(\gamma-1+\frac{\delta}{2}\right)}\eta^{\gamma+\frac{\delta}{2}}$$

$L^{(1)}_{\alpha\beta}$ indicando una costante dipendente da α e β soltanto — e dalla superficie s, ma non dalla funzione ψ — e Γ essendo la nota funzione Euleriana (2). Si noti che, indicando con dc il differenziale dell'arco della curva $c(y)$ negli integrali delle for-

(1) (A) n. 22 specialmente formula (12).
(2) Cfr. (A) n. 27, formule (16) e (16)*bis*.

mule (2) (3) e (4) al posto di $\sqrt{E}\,du\,dy$ si può scrivere $dc\,dy$. Così faremo ordinariamente in seguito.

Infine si indichi come prima con n la direzione positiva della normale alla $c(y)$ in (x_1x_2y); e con $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}) \equiv (u^{(1)}y^{(1)})$ indichiamo un punto fisso di s e con $(\widehat{r^{(1)}n})$ l'angolo della n colla congiungente la projezione (x_1x_2) di (x_1x_2y) colla projezione $(x_1^{(1)}x_2^{(1)})$ di $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$ volta verso quest'ultima. L'integrale

$$(5)\qquad \iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)}n})\, \psi(uy)\, dc\,dy$$

ha ancora senso, poichè per le (4) del n. 3 si ha

$$(6)\qquad |h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)}n})| < \frac{N}{\operatorname{sen}\Theta}\, h_{22}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}) + \\ + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\, h_{01}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\,;$$

e quindi basta applicare la proposizione sopra ricordata relativa all'integrale (3).

Quando in (5) al posto di $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$ si ponga un punto arbitrario $(x_1'x_2'y')$ dello spazio, si otterrà ancora un valore per l'integrale (5), poichè l'integrando è sempre finito: onde risulta che la funzione rappresentata da (5) esiste ed è finita in *tutto lo spazio*. Però è da notarsi che essa non è continua in tutto lo spazio, ma ha una discontinuità sulla superficie s: ivi essa soddisfa alla relazione

$$(7)\qquad \lim_{(x_1'x_2'y')=(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\pm 0} \iint_{s(y')} h_{12}(x_1x_2y; x_1'x_2'y') \cos(\widehat{rn})\, \psi\,(uy)\,dc\,dy = \\ = \mp 4\pi\psi(u^{(1)}y^{(1)}) + \iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)}n})\psi(uy)\, dc\,dy.$$

Nella formula precedente valgono insieme i segni superiori o gli inferiori: ed ho indicato con $\lim\limits_{(x_1'x_2'y')=(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})+0}$ il limite preso nell'ipotesi che il punto $(x_1'x_2'y')$ tenda al punto $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$ restando dalla parte di s da cui è rivolta la direzione positiva della normale, con $\lim\limits_{(x_1'x_2'y')=(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})-0}$ il limite preso nell'ipotesi contraria [1].

---

[1] (A) n. 28, formula (19). Si noti che in confronto di quella formula si ha qui un cambiamento di segno proveniente dal fatto che si è invertita la direzione positiva di r ed $r^{(1)}$.

4. — Richiamate tali proposizioni, osserviamo anzitutto che il problema si può semplificare supponendo che le funzioni $f(x_1x_2y)$, $f_1(x_1x_2)$ che compaiono nelle (1) e (2) del n. 1 siano entrambe nulle. Invero nella citata memoria [1] ho dimostrato, e del resto facilmente si deduce dai primi risultati enunciati al n. 3, che la funzione

$$z_1(x_1'x_2'y') = \frac{1}{4\pi}\iiint_{S(y')} h_{01}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\, f(x_1x_2y)dx_1dx_2dy$$

soddisfa alla (1) del n. 1 in tutto il campo S tosto che $f(x_1x_2y)$ soddisfaccia le condizioni rammentate al n. 1, onde se z è la funzione cercata, la funzione $\zeta = z - z_1$ soddisferà alla $\Delta_2\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0$ e di essa, come di z, si conosceranno i valori su k, i valori di $\frac{\partial\zeta}{\partial n} - \kappa\zeta$ su s: onde la ricerca di z si riduce a quella di una funzione ζ che soddisfa a condizioni al contorno simili a quelle cui soddisfa z ed all'equazione

$$\Delta_2\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0.$$

Onde intanto risulta che si può supporre nella (1) del n. 1 $f=0$.

Similmente se $F(x_1x_2)$ è una funzione finita e continua in tutto il piano, la funzione $z_2(x_1'x_2'y')$ definita da

$$z_2(x_1'x_2'y') = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x_1x_2)h_{01}(x_1x_20;\, x_1'x_2'y')dx_1dx_2$$

rappresenta una soluzione dell'equazione precedente che sul piano $y'=0$ si riduce a $F(x_1x_2)$ ed è regolare in tutto il semispazio delle y positive: onde basterà supporre che $F(x_1x_2)$ si riduca su k a $f_1(x_1x_2)$ per trarre, in modo analogo a quanto si fece sopra, la conclusione che si può supporre nella (2) del n. 1 $f_1(x_1x_2) = 0$ [2].

Ci limiteremo quindi alla ricerca di una funzione soluzione in S dell'equazione

$$\text{(I)} \qquad \Delta_2 z - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

[1] (A) n. 22 e ss.; e n. 30.

[2] Cfr. (A) n. 30.

nulla su k, la quale soddisfa su s alla condizione

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial z}{\partial n} - \kappa(uy)z(uy) = \varphi(uy)\,,$$

$\kappa(uy)$, $\varphi(uy)$ essendo funzioni finite e continue del punto (uy) di s [1].

Procureremo di porre la funzione cercata nella forma

$$\text{(III)} \qquad z(x_1'x_2'y') = -\frac{1}{2\pi}\iint_{s(y')} h_{01}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\,\psi(uy)\,dc\,dy,$$

dove si pone $(x_1x_2y) \equiv (uy)$ e $\psi(uy)$ è una funzione finita e continua del punto di s, da determinarsi convenientemente.

La funzione (III) è soluzione di (I) in tutti i punti dello spazio i quali non appartengono ad s: poichè è ben noto, e si verifica del resto assai facilmente, che quando i due punti (x_1x_2y) $(x'_1x'_2y')$ sono distinti la funzione $h_{01}(x_1x_2y;\, x'_1x'_2y')$ soddisfa rispetto alle variabili $(x'_1x'_2y')$ all'equazione (I). D'altra parte per i teoremi enunciati nel n. 3 essa rappresenta una funzione finita e continua in tutto lo spazio: e poichè per $y' = 0$ il campo $s(y')$ si riduce a zero, essa si annulla in tutti i punti interni di k [2]. Non rimane quindi che da esprimere che essa soddisfa su s alla equazione (II): mostreremo ora che partendo dai risultati del n. 3 si può determinare $\psi(uy)$ per modo che questa condizione risulti soddisfatta.

5. — Indichiamo perciò, come prima, con $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}) \equiv (u^{(1)}y^{(1)})$ un punto di s, con $n^{(1)}$ la direzione n relativa ad esso: calcoliamo la derivata della funzione (III) rapporto alla direzione $n^{(1)}$ nel punto $(x_1'x_2'y')$, e facciamo poi tendere $(x_1'x_2'y')$ a $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$. La direzione $n^{(1)}$ è parallela al piano $y = 0$; in altri termini y è indipendente dalla variabile corrente lungo $n^{(1)}$: avremo quindi

$$\frac{\partial}{\partial n^{(1)}} h_{01}(x_1x_2y; x_1'x_2'y') = \frac{1}{2}\, h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\,\frac{\partial r}{\partial n^{(1)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\, h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y') \cos\,(\widehat{rn^{(1)}})$$

---

[1] Se le $f_1(x_1x_2)$, $\varphi(x_1x_2y)$ davano determinazioni concordi per i punti del contorno $c(0)$ di k, ancora si avranno determinazioni concordi dopo le nostre trasformazioni del problema: sarà cioè $\varphi(u, 0) = 0$.

[2] Se $\varphi(u0) = 0$ si vedrà che $\psi(u0) = 0$ e resterà allora provato che la funzione (III) ha le derivate prime regolari anche nell'interno dei punti di c. Cfr. (A) n. 30: ed anche n. 28; formula (20).

come direzione positiva di r intendendosi quella volta verso la projezione del punto $(x_1'x_2'y')$.

E quindi

$$(1) \quad \frac{\partial z(x_1'x_2'y')}{\partial n^{(1)}} = -\frac{1}{4\pi}\iint_{s(y')} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\,\psi(uy)\cos(\widehat{rn^{(1)}})\,dcdy.$$

E potremo ancora scrivere

$$(2) \quad \frac{\partial z(x_1'x_2'y')}{\partial n^{(1)}} = -\frac{1}{4\pi}\iint_{s(y')} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\cos(\widehat{rn})\,\psi(uy)\,dcdy +$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{s(y')} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\left[\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})\right]\psi(uy)\,dcdy.$$

Facciamo ora tendere $(x_1'x_2'y')$ a $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$: avremo dalla (7) del n. 3, se si suppone $\psi(uy)$ finita e continua:

$$\lim_{(x_1'x_2'y')=(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\pm 0} \frac{1}{4\pi}\iint_{s(y')} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\cos(\widehat{rn})\psi(uy)\,dcdy$$

$$= \mp\psi(u^{(1)}y^{(1)}) + \frac{1}{4\pi}\iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\cos(r^{(1)}n)\psi(uy)\,dcdy$$

dove vale il segno $+$ o $-$ a seconda che $(x_1'x_2'y')$ è interno ad S oppure è esterno.

Per trovare quindi il valore limite di $\frac{\partial z(x_1'x_2'y')}{\partial n^{(1)}}$ quando il punto $(x_1'x_2'y')$ tende al punto $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$, basta trovare il valore limite del secondo integrale che compare in (1). Ma questo integrale è continuo in tutto lo spazio.

Per mostrarlo comincierò col far vedere che detto integrale ha senso quando il punto $(x_1'x_2'y')$ è precisamente un punto $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}) \equiv (u^{(1)}y^{(1)})$ della superficie s: e rappresenta una funzione continua del punto della superficie. Mostrerò poi che quando $(x_1'x_2'y')$ tende ad $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$ restando sempre sulla $n^{(1)}$ l'integrale tende *uniformemente* al valore che esso prende nel punto $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$: onde l'enunciata continuità.

Si noti perciò che le direzioni r, $n^{(1)}$, n giaciono tutte in un piano parallelo ai piani caratteristici: onde segue

$$(3) \quad |\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{\widehat{rn^{(1)}}+\widehat{rn}}{2}\operatorname{sen}\frac{\widehat{rn^{(1)}}-\widehat{rn}}{2}\right| \leq 2\operatorname{sen}\frac{nn^{(1)}}{2}.$$

Onde dalle (1) del n. 2 segue

$$(4) \qquad |\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})| \leq 2N\rho^{(1)},$$

$\rho^{(1)}$ essendo la distanza di $(x_1 x_2 y)$ da $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$.

Se quindi il punto $(x_1' \, x_2' \, y')$ cade precisamente nel punto $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$ di s osservando che $\rho^{(1)} \leq r^{(1)} + |y^{(1)} - y|$ si avrà

$$(5) \qquad |h_{12}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \{\cos(\widehat{r^{(1)} n^{(1)}}) - \cos(\widehat{r^{(1)} n})\}|$$
$$\leq 2N(h_{22}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) + h_{11}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})).$$

E quindi intanto per i risultati del n. 3 esisterà l'integrale

$$(6) \qquad \iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1 x_2 y;\, x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)}) \{\cos(\widehat{r^{(1)} n^{(1)}}) - \cos(\widehat{r^{(1)} n})\} \psi(uy)\, du\, dy$$

e rappresenterà una funzione continua del punto di s. Ed anzi, se assumiamo come campo di integrazione, invece di $s(y^{(1)})$, una parte di esso, compresa tra due piani caratteristici distanti di una certa quantità piccola a piacere η, l'integrale medesimo sarà, per la (3) del n. 3 e per la disuguaglianza (5), infinitesimo di ordine uguale a quello di $\eta^{\frac{1}{2}}$.

Se invece il punto non appartiene alla superficie s, ma è un punto $(x_1' x_2' y^{(1)})$ della $n^{(1)}$ condotta pel punto $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$, dalla (4) si avrà

$$(7) \qquad \left|\frac{\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})}{\rho}\right| \leq 2N\frac{\rho^{(1)}}{\rho} = 2N\frac{\operatorname{sen}(\widehat{\rho n^{(1)}})}{\operatorname{sen}(\widehat{\rho^{(1)} n^{(1)}})} \leq 2N\frac{1}{\operatorname{sen}(\widehat{\rho^{(1)} n^{(1)}})}.$$

Ora noi possiamo dividere il campo $s(y^{(1)})$ in due parti; l'una $\sigma(y^{(1)})$ tutta interna ad una striscia compresa fra due piani caratteristici di altezza arbitrariamente piccola η ed in cui si abbia $\operatorname{sen}(\rho^{(1)} n^{(1)}) > \operatorname{sen}\frac{\Theta}{2}$, e la parte residua $s(y^{(1)}) - \sigma(y^{(1)})$. Invero basta osservare che per quanto si è detto al n. 2 nei punti di $s(y^{(1)})$ interni alla sfera di raggio $\frac{\Theta}{2N}$ e di centro il punto $(x_1^{(1)} x_2^{(1)} y^{(1)})$ si ha $|\widehat{\rho^{(1)} n^{(1)}}| \geq |\widehat{\rho_1 \nu^{(1)}} - \widehat{\nu^{(1)} n^{(1)}}| \geq \Theta - N\rho^{(1)} \geq \frac{\Theta}{2}$.

Si spezzi allora l'integrale da studiarsi nelle due parti relative a $\sigma(y^{(1)})$ ed a $s(y^{(1)}) - \sigma(y^{(1)})$. Quanto alla prima si deduce da (7) ricordando che $\rho \geq r + |y^{(1)} - y|$ e richiamando la (3) del n. 3:

$$\left|\iint_{\sigma(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y^{(1)})[\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})]\,\psi(uy)\,dc\,dy\right| \leq$$

(8)

$$\leq \frac{2N}{\operatorname{sen}\frac{\Theta}{2}} \iint_{\sigma(y^{(1)})} |h_{22}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y^{(1)}) + h_{11}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y^{(1)})\, \psi(uy)|\, du\,dy \leq$$

$$\leq \psi \frac{2N}{\operatorname{sen}\frac{\Theta}{2}} \cdot \left(L_{22} + L_{11}\eta^{\frac{1}{2}}\right)\eta^{\frac{1}{2}}$$

onde diverrà infinitesima con η. Quanto alla parte residua, osserviamo che per essa l'integrando è sempre finito e continuo, quindi è ben evidente che, preso un numero ϵ piccolo a piacere, si potrà, una volta fissato η, fissare un numero δ tanto piccolo che per $\sqrt{(x_1' - x_1^{(1)})^2 + (x_2' - x_2^{(1)})^2} < \delta$ si abbia, qualunque sia il punto $(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})$ di s,

$$\left|\iint_{s(y^{(1)}) - \sigma(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;x_1'x_2'y^{(1)})[\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})]\psi(uy)dcdy - \right.$$

(9)

$$\left. - \iint_{s(y^{(1)}) - \sigma(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})[\cos(\widehat{r^{(1)}n^{(1)}}) - \cos(\widehat{r^{(1)}n})]\psi(uy)dcdy\right| \leq \epsilon.$$

Se ricordiamo ora che, come già si è osservato sopra, l'integrale (6) esteso al campo $\sigma(y^{(1)})$ soddisfa ad una limitazione analoga alla (8), segue che

$$\lim_{\substack{x_1'=x_1^{(1)} \\ x_2'=x_2^{(1)}}} \iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;x_1'x_2'y^{(1)})[\cos(\widehat{rn^{(1)}}) - \cos(\widehat{rn})]\psi(uy)\,dc\,dy =$$

$$\iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})[\cos(\widehat{r^{(1)}n^{(1)}}) - \cos(\widehat{r^{(1)}n})]\,\psi(uy)\,dc\,dy.$$

e che la convergenza è uniforme. Onde la continuità del secondo integrale di (1).

E pertanto di qui e da (2) potremo conchiudere che, se si suppone $\psi(uy)$ finita e continua,

$$\lim_{(x_1'x_2'y')=(x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})+0} \frac{1}{4\pi}\iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;x_1'x_2'y')\cos(\widehat{rn^{(1)}})\psi(uy)dc\,dy =$$

(IV)

$$= \mp\psi(u^{(1)}y^{(1)}) + \frac{1}{4\pi}\iint_{s(y^{(1)})} h_{12}(x_1x_2y;x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\cos(\widehat{r^{(1)}n^{(1)}})\psi(uy)\,dcdy.$$

6. — Dalla (IV) e dalla (1) del n. 5 segue che, affinchè la funzione (III) soddisfaccia alla (II), occorre e basta che $\psi(uy)$ sia una funzione finita e continua la quale soddisfaccia all'equazione integrale:

$$\text{(V)} \quad \psi(u^{(1)}y^{(1)}) - \frac{1}{4\pi}\iint_{s(y^{(1)})} [h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\cos(\widehat{r^{(1)}n^{(1)}}) -$$
$$- 2\kappa(uy)h_{01}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})]\psi(uy)\,dcdy = \varphi(u^{(1)}y^{(1)}).$$

L'equazione (V) è un'equazione integrale del tipo di Fredholm: e, se si può risolvere, ci darà una funzione, la quale, sostituita in (III), se finita e continua, risolve il problema. Basterebbe quindi dimostrare che la (V) non ha nullo il determinante. E ciò non sarebbe difficile, ove *si volesse ammettere che per il nostro problema sia già dimostrato il teorema di unicità*, ricorrendo a considerazioni analoghe a quelle ordinariamente usate per dimostrare la risolubilità del problema di Dirichlet: ma siccome per noi il teorema di unicità non è noto che in casi particolari, noi non terremo tale via; e dimostreremo direttamente, come già feci in (A) [1] per una analoga equazione, che in base alle formule (3) e (4) del n. 3 la serie di Neumann (e di Volterra) che dà la soluzione di questa equazione, converge.

Invero si osservi che la serie di Neumann risolvente la (V) è data da

$$\text{(1)} \quad \psi(uy) = \varphi(uy) + \varphi_1(uy) + \varphi_2(uy) + \ldots + \varphi_n(uy) + \ldots$$

dove

$$\text{(2)} \quad \varphi_i(u^{(1)}y^{(1)}) = \frac{1}{4\pi}\iint_{s(y^{(1)})} [h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\cos(\widehat{r^{(1)}n^{(1)}}) -$$
$$- 2\kappa(u^{(1)}y^{(1)})h_{01}(x_1x_2y;x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})]\varphi_{i-1}(uy)\,dcdy.$$

---

[1] N. 30.

Ora si osservi che, se $|\kappa(uy)| < K$, posto $\left(2K + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\right) = C$, per la (6) del n. 3 si ha:

$$|h_{12}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}) \cos(\widehat{r^{(1)}n^{(1)}}) - 2\kappa(u^{(1)}y^{(1)})\, h_{01}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})| <$$
$$< \frac{N}{\operatorname{sen}\Theta}\, h_{22}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}) + C h_{01}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)}).$$

Onde se si suppone

$$|\varphi(uy)| < \Phi,$$

in virtù delle (3) e (4) del n. 3 si avrà

$$|\varphi_1(uy)| < \frac{\Phi}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22} + CL_{01}\right] y^{\frac{1}{2}}$$

$$|\varphi_2(uy)| < \frac{\Phi}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22} + CL_{01}\right] \left\{\frac{1}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22}^{(1)} + CL_{01}^{(1)}\right]\right\} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} y$$

$$|\varphi_3(uy)| < \frac{\Phi}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22} + CL_{01}\right] \left\{\frac{1}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22}^{(1)} + CL_{01}^{(1)}\right]\right\}^2 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{6}{2}\right)} y^{\frac{3}{2}}$$

. . . .

$$|\varphi_n(uy)| < \frac{\Phi}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22} + CL_{01}\right] \left\{\frac{1}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22}^{(1)} + CL_{01}^{(1)}\right]\right\}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)+1} y^{\frac{n}{2}}$$

. . . .

E quindi rammentando che

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{2h}{2}\right) = (h-1)!, \quad \Gamma\left(\frac{2h+1}{2}\right) > (h-1)!,$$

e posto

$$H = \left\{\frac{1}{4\pi}\left[\frac{N}{\operatorname{sen}\Theta} L_{22}^{(1)} + CL_{01}^{(1)}\right]\right\}^2,$$

e chiamato Φ_1 il massimo dei numeri Φ, $\frac{\Phi}{8\sqrt{\pi}}(L_{22} + CL_{01})\frac{1}{\sqrt{H}}$,

$\frac{\Phi}{8\sqrt{\pi}}(L_{22}+CL_{01})\sqrt{y_0}$, si avrà che la (1) converge come una serie esponenziale e che precisamente è

$$|\psi(uy)|<2\Phi_1 e^{Hy}. \tag{2}$$

Onde, poichè la $\psi(uy)$ data da (1) è finita e continua, il *teorema di esistenza è pienamente dimostrato* [1].

Abbiamo contemporaneamente mostrato che *l'equazione* (V) *ha sempre il determinante* $\neq 0$, e che quindi *l'equazione omogenea corrispondente a* (V) *non ha mai altra soluzione che lo zero.*

7. — Per dimostrare il teorema di unicità della soluzione incominciamo col dimostrare il teorema in un caso particolare. Col solito metodo delle integrazioni per parti si ottiene per una qualunque funzione z soddisfacente a (I) e nulla su k, come è ben noto, la formola seguente:

$$\begin{aligned}0 &= \iiint_{S(y')} z\left(\Delta_2 z-\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx_1dx_2dy = -\iiint_{S(y')}\Delta_1 z\,dx_1dx_2dy\,- \\ &-\iint_{s(y')} z\frac{\partial z}{\partial n}\sqrt{E}\,du\,dy+\frac{1}{2}\iint_{s(y')} z^2\cos(\widehat{\nu y})\frac{du\,dy}{\sqrt{EG}}-\frac{1}{2}\iint_{p(y')} z^2 dx_1dx_2\end{aligned} \tag{1}$$

dove $p(y')$ è l'area del piano $y=y'$ interna ad $S(y')$ [possiamo anche dire l'area piana racchiusa dalla curva $c(y')$,] $\cos(\widehat{\nu y})$ indica il coseno dell'angolo della direzione positiva della ν con quella della y, ed infine $\Delta_1 z=\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2$. Nel caso che la s sia cilindrica a generatrici parallele all'asse delle y scomparirà il terzo integrale della formula precedente, poichè $\cos(\widehat{\nu y})=0$.

---

[1] Si noti che se era $\varphi(u0)=0$ sarà evidentemente da (1) e (2), $\psi(u0)=0$, poichè in questa ipotesi nella limitazione (2) della $\psi(uy)$ col tendere di y a zero si può prendere Φ e quindi Φ_1 piccolo a piacere. La funzione (III) sarà quindi allora regolare anche nei punti del contorno di k. Cfr. n. 4 e specialmente la nota a piè di pag. 12.

Si supponga ora, se possibile, che la funzione z soddisfaccia su s ad una relazione del tipo della (II), ma omogenea:

$$(2) \qquad \frac{\partial z}{\partial n} - \kappa(uy)z = 0,$$

dove la funzione $\kappa(uy)$ sia tale che

$$(3) \qquad \sqrt{E}\kappa(uy) - \frac{1}{2}\cos(\widehat{\nu y})\frac{1}{\sqrt{EG}} = \kappa_1(uy) > 0.$$

Sarà evidentemente sempre possibile, qualunque sia la superficie s, trovare delle funzioni finite e continue $\kappa(uy)$ che soddisfacciano a (3); ad es.: se la superficie s è cilindrica a generatrici parallele all'asse delle y avendosi $\cos(\widehat{\nu y}) = 0$ basterà prendere $\kappa(uy) > 0$. La (1) dà allora

$$(4) \; 0 = -\iiint_{S(y')} \Delta_1 z dx_1 dx_2 dy - \iint_{s(y')} \kappa_1(uy) z^2 du dy - \frac{1}{2}\iint_{p(y')} z^2 dx_1 dx_2.$$

Ora gli integrali del secondo membro della (4) sono tutti essenzialmente positivi, nulli solo se la z è identicamente nulla: quindi l'unica funzione z la quale si annulli su k e soddisfaccia alla (2), dove si suppone che per $\kappa(uy)$ valga la diseguaglianza (3), sarà lo zero. In altri termini risulta di qui che *la soluzione del problema propostoci è unica quando la funzione* $\kappa(uy)$ *che compare in* (II) *soddisfa alla* (3).

Ritorniamo al caso che $\kappa(uy)$ sia qualunque. Se esistessero due funzioni che soddisfacessero alle (I) e (II), esisterebbe una funzione z che soddisfa alla (I), si annulla su k, e su s è tale che

$$\frac{\partial z}{\partial n} - \kappa(uy)z = 0.$$

Ed ove una tale funzione z potesse porsi sotto la forma (III) la funzione $\psi(uy)$ corrispondente dovrebbe soddisfare all'equazione integrale omogenea corrispondente a (V); ma per l'osservazione finale del numero precedente, una tale funzione deve essere identicamente nulla, e tale deve quindi essere anche la $z(x_1 x_2 y)$. Onde il teorema di unicità riuscirà dimostrato tosto

che si possa provare che *ogni* soluzione dell'equazione (I), nulla su k, si può porre sotto la forma (III).

Ora ciò risulta immediatamente: basta osservare che presa una qualunque tale funzione z, se si considera una funzione $\kappa'(uy)$ soddisfacente a (3) e si pone

$$\frac{\partial z}{\partial n} - \kappa'(uy)z = \varphi'(uy),$$

per il teorema di unicità dato sopra, la funzione $z(uy)$ sarà precisamente data dalla (III) dove la $\psi(uy)$ è determinata dalla equazione

$$\psi(u^{(1)}y^{(1)}) + \frac{1}{4\pi}\iint_{s(y^{(1)})} \left[h_{12}x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\cos(\widehat{r^{(1)}n^{(1)}}) - \right.$$
$$\left. - 2\kappa'(u^{(1)}y^{(1)})\, h_{01}(x_1x_2y;\, x_1^{(1)}x_2^{(1)}y^{(1)})\right]\psi(uy)\; dc dy = \varphi'(u^{(1)}y^{(1)}).$$

Onde riesce così *provato pienamente anche il teorema di unicità relativo al nostro problema.*

8. — Avvicinando i risultati di questo lavoro con quelli ottenuti nella mia memoria citata se ne possono dare molte semplici generalizzazioni. Così noi potremmo supporre che la superficie s consti di diverse parti $s_1\, s_2 \dots s_n$ e che su alcune di queste $s_{i_1}, s_{i_2} \dots s_{i_h}$ siano assegnati i valori della funzione z, sulle altre $s_{j_1}, s_{j_2}, \dots s_{j_{n-h}}$ siano assegnate delle relazioni tra i valori di z ed i valori di $\frac{dz}{dn}$ del tipo della (II).

Questo problema corrisponderebbe, quando le s_i ed s_j sono cilindriche ed a generatrici parallele all'asse delle y, all'ipotesi che il corpo fosse limitato da vari contorni, e su alcuni di essi fossero assegnati i valori delle temperature, e per gli altri invece fossero assegnati i valori delle temperature dello spazio ambiente e le condizioni di irraggiamento e conducibilità del contorno del corpo.

In tal caso basterebbe porre la funzione z sotto la forma

$$z(x_1'x_2'y') = \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_i \iint_{s_i(y')} h_{12}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\cos(\widehat{rn})\,\psi_i(u_iy)\, dc_i dy + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_j \iint_{s_j(y')} h_{01}(x_1x_2y;\, x_1'x_2'y')\,\psi_j(u_jy)\, dc_j\, dy\right\},$$

dove $(u_i y)$, $(u_j y)$ indicano dei sistemi di variabili coordinate sulla superficie s_i, s_j, dc_i, dc_j gli elementi di arco delle intersezioni delle s_i, s_j coi piani caratteristici: e nei vari integrali devesi intendere $(x_1 x_2 y) \equiv (u_i y)$ o $(x_1 x_2 y) \equiv (u_j y)$; e dove le funzioni $\psi_i(u_i y)$, $\psi_j(u_j y)$ sono funzioni finite e continue da determinarsi convenientemente.

Le condizioni imposte alla z al contorno sono sufficienti per determinare le funzioni ψ_i, ψ_j in modo unico mediante equazioni integrali perfettamente simili all'equazione (V): noteremo solo che perciò occorrerà che non mai una superficie s_i venga infinitamente prossima ad una s_j.

Ulteriori generalizzazioni si potrebbero dare al caso in cui il corpo constasse di pezzi ciascuno per sè omogeneo, ma di conducibilità differente da pezzo a pezzo: ma tali generalizzazioni non presentano nuove difficoltà e noi ne taceremo.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 2 Febbraio 1908.

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. ARTURO GRAF

SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Renier, Pizzi, Carutti, Ruffini, D'Ercole, Brondi, Sforza e De Sanctis, Segretario.

Scusano l'assenza il Socio D'Ovidio, Presidente dell'Accademia, e i Soci Carle, Brusa, Chironi e Stampini.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 19 gennaio 1908.

Il Presidente comunica una lettera del Socio Manno, che ringrazia per la rielezione a membro della Giunta accademica per la biblioteca.

Il Socio Sforza presenta per l'inserzione negli *Atti* una nota del Dr. Giovanni Carbonelli, intitolata: *Il " Brachalis herniarum " nell'alto medio evo.*

Il Socio Pizzi comunica che il Dr. Luigi Suali ritira la sua memoria sul *Prameyaratnakoça di Candraprabha*, presentata nella seduta del 22 dicembre 1907.

LETTURE

Il " Brachalis herniarum „ nell'alto medio evo.

Nota del Dott. GIOVANNI CARBONELLI.

Nell'anno 1899, quando si fecero abbattere le vecchie case allo scopo di isolare la torre campanaria della Cattedrale di Torino, scavando quel tratto di terreno che va dalla torre alla antica cinta delle mura romane al nord della città, due importanti scoperte si rivelarono agli archeologi ed agli amatori di patrie memorie.

Il piccone escavatore scoprì gli avanzi delle mura di una delle antichissime basiliche che occupavano quella zona di suolo, e nel terreno poco distante i ruderi del teatro, col quale l'occupazione romana aveva abbellita l'Augusta Taurinorum.

Il taglio della trincea sotto le antiche chiese colpì una grande quantità di antiche tombe, irregolarmente disposte a piani, quasi come per mostrare la stratificazione delle genti che per lungo svolgersi di secoli si susseguirono nella vita della antica città.

Partendo dal suolo romano accanto alle mura perimetrali del teatro, forse già rovinato dall'incendio e fuori uso, per la incipiente decadenza dell'Impero, si trova il primo strato di tombe pagane. Numerose e povere, spoglie di suppellettile funeraria, sono costrutte con grossi embrici della solita forma, posati sopra un pavimento di cotto, inclinati e poggiati uno contro l'altro, collo spigolo scalpellato per dare un po' di stabilità alla costruzione; ricoprono il cadavere alla foggia di tenda militare. Alzandosi man mano gli strati di tombe, si arriva allo strato superiore sotto al suolo attuale profondo circa un metro,

nel quale sono tutte tombe cristiane povere ed anepigrafi, nella costruzione delle quali è largamente usato il materiale romano.

Una sola di grandi dimensioni, attirò specialmente l'attenzione; costruita con grandi lastroni di pietra, provenienti dal teatro, era divisa in due grandi scomparti da un setto in pietra. In uno eranvi molte ossa disordinate; nell'altro si rinvennero due scheletri di cattiva conservazione, colle ossa ordinate. Vicino alla testa di uno dei cadaveri si trovò un rozzo incensiere o brucia profumi in terra cotta greggia col coperchio traforato da piccoli fori simmetrici, contenente resti di carbone (V. Fig. 1), frammisti a larghi lembi di stoffa in lana color marrone scuro, rozzamente intessuta (V. Fig. 2), alcune grosse fibbie, delle quali due di bronzo e le altre di ferro, molto danneggiate dall'ossido (V. Fig. 3, 4, 5, 6); a metà distanza fra il cranio ed i piedi dello scheletro, sulle ossa polverizzate del bacino, un grosso frammento di ferro, che a tutta prima fu giudicato un manico da pentola frammentario (V. Fig. 7) (1).

Niun dato epigrafico di qualsivoglia maniera vicino o lontano dalla tomba fu trovato; non restano perciò se non i mezzi induttivi per poter anche approssimativamente stabilire l'età della tomba.

Tre chiese, rispettivamente intitolate a S. Salvatore, Santa Maria e S. Giovanni Battista, esistevano già nel V secolo, sullo spazio occupato attualmente dalla Cattedrale, dal Campanile e dalle case demolite nel '99. Il vescovo Landolfo verso il 1030 provvide alla ricostruzione di una di queste, perchè rovinata dalle scorrerie dei saraceni, e fu probabilmente il S. Giovanni, press'a poco sull'area della attuale (2).

Stando a questi fatti, la chiesa più al nord indicata dai frammenti di muro di indubbia destinazione ritrovati e dalle numerose tombe, sarebbe una di quelle che già nel 1000 erano rovinate e fuori di uso pel culto; e giudicando dallo strato di terreno di circa un metro di spessore depositato sul grande

---

(1) Attualmente si conservano tutti questi pezzi nella raccolta del R. Ufficio dei monumenti e scavi di Torino.

(2) Ferdinando Rondolino, *Il Duomo di Torino illustrato*, Torino, Roux e Frassati, 1898.

sarcofago, si può arguire che da molti anni si fosse cessato di usare il suolo della chiesa ed il chiostro adiacente come cimitero, arretrando così l'epoca della costruzione del grande sarcofago.

Di modo che si può senza tema di errare, assegnare la costruzione della tomba fra un minimo ed un massimo che vanno dal V al X secolo. L'esame della suppellettile conferma la supposizione: P. Orsi, nella relazione sugli scavi di una catacomba cristiana del VI secolo, rinvenuta a Molinella di Augusta, porta la figura di un coperchio d'incensiere simile a quello rinvenuto a Torino (1); la forma delle fibbie ricorda in tutto quelle trovate nella necropoli barbarica di Testona, conservate nel Museo di Torino (2), risalenti come età al più tardi al VII od VIII secolo; la suppellettile stessa attesta la conservazione di una usanza relativamente ancora recente quale era quella di deporre oggetti nelle tombe, il che viene a confermare la prova che si era ancora nell'alto medio-evo, quando il grosso lastrone di pietra ricoperse i due ignoti personaggi nel loro eterno sonno.

Ad arte ho voluto diffondermi, per quel tanto che era necessario, a stabilire entro limiti certi l'età della tomba ed in conseguenza della sua suppellettile, per potermi soffermare sopra un oggetto di ferro, del quale a tutta prima fu misconosciuto l'uso, interpretando fosse un volgare manico di pentola, mentre in verità la situazione stessa sul cadavere, nella quale fu trovato, doveva far sorgere subito forti dubbi.

Adagiato sulle ossa del bacino, ridotte in polvere, si trovò un pezzo di ferro, formato da una verga del diametro di un centimetro, abbracciante come un'ansa la metà destra del bacino; l'estremo anteriore è piegato a ginocchio ad angolo retto e porta una piastra piatta col contorno a forma di cuore; posteriormente finisce in una piccola superficie pianeggiante molto corrosa, la quale doveva essere un gancio o qualcosa di simile (V. Fig. 7).

---

(1) P. Orsi, *Notizie scavi,* anno 1902, pag. 431.

(2) Claudio ed Edoardo Calandra, *Di una necropoli barbarica scoperta a Testona,* " Atti della Società di Arch. e Belle Arti per la provincia di Torino ", vol. IV, pag. 17 e seg. Torino, 1882-85.

Le sue misure sono:

Sviluppo totale del perimetro . . .	*cm.*	51,5
Lunghezza dell'apertura	„	24
Diametro massimo della piastra . .	„	8
Diametro traverso all'altezza del collo	„	6
Peso	*gr.*	230

La curva non è geometrica ad arco di cerchio, è piuttosto un frammento di un elissoide irregolare, evidentemente modellata sulla curva esterna del fianco destro di colui al quale l'oggetto era destinato per l'uso.

La piastra si adatta perfettamente alla insenatura inguinale la sua rientranza all'interno per la piegatura del collo al quale è inserita, la rende adatta ad esercitare una pressione costante, lasciando libero il movimento della articolazione del femore nella deambulazione.

Dalla posizione occupata sullo scheletro, dalla forma tutta speciale, dal suo stato di conservazione stesso, non si può far a meno che riscontrare in questo strumento il *Ligamentum herniale* di Ezio ed il *Brachalis* del medio-evo.

Il meccanesimo atto a contenere l'intestino prolassato era conosciuto dagli Antichi; ne parla Ippocrate e specialmente C. Celso, il quale descrive un apparecchio formato da una palla di tela ravvoltolata e fissata a striscia di tela da applicarsi strettamente sulla rottura (1).

Celso dà la preferenza in ogni caso all'intervento chirurgico nella cura dell'ernia, come più sicuro nel suo risultato ultimo, limitando il bendaggio nella protesi dell' ernia nei bambini.

Ezio pel primo parla di bendaggi permanenti (perpetuis legamentis utatur), il che fa giustamente pensare a bendaggi costrutti con materiale solido perfettamente modellato sulla persona (commodis), atti ad essere continuamente portati; e

(1) C. Celsi, *De re medica*, Venetiis, Scotum, 1566. Vedi cap. XX e XXIV del libro VII. Sul significato della parola *Ramex*, cfr. Paolo Egineta (Basilea, 1538), p. 198, cap. 66; cfr. anche Heister, *Istituzioni chirurgiche*, trad. ital. (Venezia, 1782), T. II, pag. 60, cap. 116 in nota.

quantunque non nomini la materia impiegata nel costrurli, è logico dedurre non fossero nè di tela nè di cuoio, volendo col qualificativo " perpetui „ riferirsi all'impiego del metallo nella loro fabbricazione.

Per completare la cura dell'ernia col bendaggio, prescrive di applicare prima sulla pelle del paziente un empiastro composto con Sarco-colla, Gomma, Glutine bovino e di pesci, Carne di lumaca, Cinnabaro dei fabbri, oltre alla Mirra, Turi, Opoponace, Resina di pino, Bitume, ecc., in modo che faccia corpo col bendaggio stesso avvoltolato in tela, lana o pelle di agnello (1).

Avicenna ripete su per giù le parole di Ezio, seguendo le norme date da questi e sviluppandole nella parte chirurgica; insiste che nel bendaggio la piastra sia piana, dicendola, così fatta, più utile (2). Al quale proposito scrive un avvertimento ai malati, di rifuggire dalle cure praticate dagli empirici e di rivolgersi sempre ad abili chirurghi, per la cura di questa infermità. Queste parole provano come in quei tempi i malati ricorressero per soccorso ad una malattia tenuta come vergognosa piuttosto ai praticoni che non ai medici; e siccome la scuola si tramandava favorevole alla operazione, ciò spiega il perchè i chirurghi poco si occupassero di descrivere le forme dei bendaggi, interessandosi molto più allo studio chirurgico dei pochi malati che loro capitavano che non ai bendaggi degli empirici.

Difatto quando la barbarie dell'alto medio-evo sta per cessare, ed i primi albori del rinascimento dovuto allo studio dei classici sono per spuntare; negli scrittori di questo tempo, ancora preoccupati dalle consuetudini e dall'empirismo, si incontrano descrizioni di bendaggi. La preoccupazione di mostrarsi eruditi li fa cadere in oscurità e li rende astrusi, o li porta a rinnegare il loro presente copiando i classici.

Così accade a Lanfranco da Milano, il quale, volendo rifuggire dal descrivere il " braghiere „ degli empirici, e mostrarsi

(1) Aetii, *Medici*, etc. Lugduni Beringorum, 1549; Tetrab. IV, Sermo secundus, colonna 151 e 152.

(2) Avicenna, *Libri in re Medica omnes*, Venetiis, Valgrisi, 1564. — Fen. 2, trac. 1, cap. 6 e seg. fino all'11. Vol. 1°, pag. 949 e seg., come pure in Fen. 3, lib. 1°, Doctrina, 1, pag. 158.

nello stesso tempo erudito, associa a questo la placca mobile di Celso, ma fatta di ferro (1). Pietro de Largelata più schivo ancora ritorna indietro addirittura a Celso, facendo costrurre il cinto di panno triplicato " cum scuto parvo „, aborrendo da ogni aiuto solido, ripudiando gli ammaestramenti di Ezio (2).

Non è il caso di ricorrere a citazioni posteriori, le quali, oltre a non portare contributi maggiori, sono troppo lontane dall'epoca della tomba che rivelò questo cimelio fin ora unico in Italia (3).

Ho voluto dare la formola dell' " Unguentum Presbiteri „, consigliato da Ezio, perchè si trova nel suo uso la causa efficiente della conservazione quasi perfetta nella sua parte anteriore nel cinto descritto, sul quale sono ancora molto evidenti le traccie della tela che lo avvolgeva. Non è questo argomento degli ultimi ad avvalorare la mia affermazione. Per la stessa ragione si conservarono le fibbie appartenenti alle cinghie del cinto.

I lembi di stoffa trovati nella tomba nulla possono dire sulla qualità del personaggio: è una stoffa povera e grossolana, se si paragona alle ricche stoffe che si tessevano nei secoli posteriori; potrebbe essere stata distinta per quei tempi e per le costumanze d'allora, se si conoscessero con tutta esattezza.

Il primo a scrivere un lavoro completo sugli apparecchi profilattici nella cura dell'ernia, fu il Deneffe (4) di Gand. Nella sua dotta memoria riporta la figura di tre cinti erniari, due unilaterali destri ed uno bilaterale, avuta dal D.r Lambros di

---

(1) Lanfranco, *Chirurgia*, Lyon, De la Fontaine, 1490, cap. VII, 2ª Dottrina, 3° trattato, " ... et sur la platine (de fer) tu mectras le brayer auquel " on puisse attacher une corroye, etc. „.

A questo proposito erra il Boursier nel volere l'uso del ferro nel cinto come introdotto pel primo da Avicenna; questo autore non parla mai di ferro, l'uso di questo metallo era molto più antico. Vedi André Boursier, art. *Hernie*, in *Dict.* Dechambre, ser. 4ª, vol. 13, pag. 729.

(2) *Cyrurgia magistri* Petri de Largelata, Venetiis, Scotus, 1497, lib. V, Trac. XVII, fol. 112 *v*, 1ª colonna.

(3) Cfr. Heister, già citato, e Johannis Sculleti, *Armamentarium*, Amstelodami, 1741.

(4) V. Deneffe, *Les Bandages herniaires à l'époque Mérovingienne*, Anvers, Caals, 1900. Rimando a questo A. per la citazione del lavoro di Léon et Jules Rainal frères, *Le bandage herniaire autrefois-aujourd'hui*. Paris, 1899.

Atene, e su questi non nasconde i suoi dubbi. In compenso, e ciò è molto più interessante, offre la riproduzione fotografica di tre cinti in ferro, due destri, uno sinistro, trovati ad Euville (Meuse), a Marche-le-Pot e a Devise (Somme). Questi tre furono conservati; altri tre trovati a Noyon e a Fluy andarono distrutti.

Le ricerche fatte dal Deneffe in Germania, Inghilterra, Danimarca ed Italia, furono negative, inquantochè in nessuno dei musei di queste nazioni si conserva alcun apparecchio di questo genere e di questa antichità: dimodochè, essendo stati trovati tutti meno uno (Euville) nell'estremo nord della Francia, e tutti in necropoli franche dal V al VI secolo, conclude essere da considerarsi, fino a prova contraria, come limitato ai Franchi l'uso di bendaggi erniari costrutti in ferro.

Ciò potrebbe essere vero, inquantochè anche i Franchi calarono, come tanti altri popoli, in Italia, e l'epoca della loro dimora nei nostri paesi non sarebbe in disaccordo nè colla età assegnata dal Deneffe ai cinti da lui descritti, nè colla età che si può ragionevolmente assegnare alla tomba di Torino; può far nascere qualche dubbio il modo di fabbricazione dell'apparecchio, che restando identico nel principio fondamentale, varia nella conformazione. Infatti i tre cinti del Deneffe sono formati da una lamina di ferro, variante di spessore e di altezza, che è appiattita col martello nella sua estremità anteriore in modo da formare una placca, la quale si continua perciò colla superficie esterna ed interna di tutta la lamina, ed il suo diametro massimo viene ad essere orizzontale anzichè verticale.

Questa disposizione del metallo doveva nella pratica, perchè raggiungesse lo scopo a cui era destinato il cinto, essere corretta dalla forma del cuscinetto di rivestimento, dovendo per necessità essere molto sporgente per comprimere la piega dell'inguine.

Ciò non si osserva nel cinto da me descritto, inquantochè può dividersi in due parti distinte fra di loro quantunque continue: il cingolo dell'anca, formato da una verga di ferro a sezione circolare, la quale nella sua estremità anteriore si piega a ginocchio per inserirsi sul margine esterno della placca; questa foggiata col suo massimo diametro verticalmente, in modo da

sopportare un cuscinetto pianeggiante molto più efficace nella compressione sul canale inguinale.

Da ciò risulta che non esistesse una sola scuola di fabbricazione situata nel nord della Francia come suppone il Deneffe, ma un'altra se ne trovasse in altri paesi. Non si può in modo alcuno dire con sicurezza se la tomba di Torino sia stata costrutta per un Franco o per un indigeno, nè se costui sia stato uomo d'arme o di toga, non avendosi dati sufficienti neanche per stabilirne con sicurezza il sesso; tuttavia ciò che è certo si è che la tomba rivela una forma finora unica di cinto erniario, il quale ricorda bensì i suoi congeneri francesi, ma nella sua forma dimostra un'arte più progredita e scientificamente più razionale, escludendo la sua importazione dal nord della Francia.

Oltre a ciò d'un tratto si estendono i confini entro i quali erano fin'ora stati trovati simili apparecchi, dagli estremi confini della Francia si viene alla sponda del Po, dimostrando ancora una volta, se ve ne fosse bisogno, la grande analogia della civiltà borgognona e piemontese, non ancora ai nostri giorni spenta.

Si può essere grati ad ogni modo al caso che volle conservato il prezioso cimelio; o sia dovuto alla superstizione dei famigliari di non aver voluto svestire e lavare il cadavere per un pudore postumo di celare agli astanti la malattia vergognosa avuta in vita dal defunto; oppure sia dovuto ad una frettolosa inumazione del cadavere, in quei tempi di sommosse, guerre ed invasioni. Un documento sulla civiltà oscura e mal conosciuta dell'alto medioevo, che rivela il modo ed il mezzo di curare una malattia tanto diffusa, è sempre il ben venuto e merita tutta la considerazione che gli è dovuta.

È lecito pertanto concludere come il ferro, metallo d'ogni altro più adatto per la sua proprietà di poter essere modellato a freddo, veniva usualmente impiegato negli apparecchi per la protesi dell'ernia in tempi molto remoti.

Il cinto rinvenuto non può essere confuso con altri apparecchi, per la sua forma caratteristica; come pure non può essere un frammento di altro oggetto, avendo i suoi estremi terminali ben definiti nella loro forma.

Le due qualità di fibbie in bronzo e ferro possono confer-

Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 2.

Fig. 4.

A. — Estremo inferiore del cuscinetto.
B. — Resti del gancio che teneva la cinghia.

mare l'esistenza di cinghie annesse al cinto, specialmente per queste ultime, lasciando a quelle di bronzo la loro funzione per gli indumenti.

L'età della tomba non può essere messa in dubbio, avendo largamente computati i limiti di tempo nell'assegnargliene una; dal che ne emerge la importanza grandissima per la storia della Chirurgia.

La conclusione ultima non può essere che di meraviglia nel riscontrare in esso tanta precisione e competenza tecnica, nel modo razionale col quale fu costrutto: se le sue proporzioni possono parere esagerate, ciò non deve stupire, considerando il tempo in cui fu eseguito e l'uso al quale era destinate.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 9 Febbraio 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: SALVADORI, NACCARI, SPEZIA, SEGRE, FOÀ, GUARESCHI, FILETI, PARONA, MORERA, GRASSI, SOMIGLIANA. e CAMERANO Segretario. — Scusano la loro assenza i Soci FUSARI, GUIDI, MATTIROLO, PEANO, JADANZA.

Si legge e si approva l'atto verbale della seduta precedente.

Vengono presentate per gli *Atti* le note seguenti:

1° Prof. A. CESARIS-DEMEL: *L'origine endogena del grasso dimostrata sul cuore isolato di mammifero*, dal Socio FOÀ;

2° Dott[i] G. PONZIO e G. CHARRIER: *Derivati alogenici dei dinitroidrocarburi primarî*, dal Socio FILETI;

3° Dott[i] L. BOTTI e M. PONZO: *Sui rapporti tra movimenti oculari e scomparsa e movimenti delle immagini consecutive*.

LETTURE

L'origine endogena del grasso dimostrata sul cuore isolato di mammifero.

Nota preventiva del Prof. A. CESARIS-DEMEL.

Come è noto, la presenza di grasso che si può riscontrare in svariate condizioni patologiche in elementi cellulari che normalmente non ne contengono o non ne producono, fu interpretata dai patologi come una produzione in sito del grasso stesso, per un disturbo del ricambio, che fu ritenuto un vero e proprio fenomeno degenerativo. È noto però altresì, che specialmente i chimici biologi si opposero subito a questa interpretazione che faceva derivare il grasso direttamente dalle proteine cellulari, tantochè con analisi qualitative, quantitative e talora comparative, tra le sostanze adipose trovate negli organi ritenuti degenerati in grasso, dimostrarono, o credettero di dimostrare che nella massima parte dei casi il grasso era pervenuto agli elementi cellulari dall'esterno, aveva quindi una origine esogena e non endogena come si credeva, e si trattava dunque di un'infiltrazione piuttosto che di una degenerazione. Ora per quanto anche a questa ipotesi si siano fatte sperimentalmente valide opposizioni, il problema è ancora molto lontano dalla sua soluzione, e noi possiamo facilmente convincercene prendendo a mano qualcuna delle più recenti monografie dell'argomento o qualcuno dei più recenti trattati che ampiamente lo riassumono. Parmi dunque interessante rendere note alcune mie recenti osservazioni, istituite con un metodo non ancora adoperato per queste ricerche e che parmi portino un notevole contributo alla dimostrazione della diretta provenienza del grasso, per un vero e proprio processo degenerativo, dall'albumina cellulare.

È ormai conoscenza acquisita che alcuni tessuti, alcuni organi staccati dall'animale al quale appartengono, possono per un tempo vario vivere e mantenersi funzionanti. Possono vivere, e ne abbiamo numerose prove nelle osservazioni fatte sopra la sopravvivenza di tessuti vari staccati da animali di specie diversa ed adoperati poi, sia sperimentalmente, sia terapeuticamente, per innesti in animali omologhi od eterologhi: possono funzionare, e sopra tutti gli altri, l'apparato muscolare ce ne offre luminosissimi esempi. Infatti dalle antiche esperienze fatte sulle contrazioni dei gastrocnemi di rana, staccati dall'animale, al passaggio della corrente elettrica, alle esperienze più recenti fatte dai fisiologi sulla musculatura liscia e striata e sul cuore degli animali eterodermi, siamo arrivati alle moderne esperienze, rese possibili dopochè da Newel Martin e Langendorff ce ne fu indicato il tecnicismo sperimentale, sul cuore isolato di mammifero. Perchè però i tessuti a sè possano vivere, occorre si trovino in opportune condizioni di ambiente: perchè possano funzionare, occorre siano anche convenientemente nutriti. Si comprende quindi come solo con difficoltà si sia raggiunto questo duplice scopo e come, anche nelle condizioni più fortunate, il persistere della funzione in un organo così complesso ed a funzionalità così elevata come il cuore di un mammifero, non possa mai oltrepassare il limite di qualche ora. Ad ogni modo i fisiologi sul cuore isolato e pulsante nell'apparecchio, vedono un organo veramente vivo e funzionante, nè si peritano poi di estendere le conclusioni tratte dalle loro osservazioni, all'interpretazione di fatti che si svolgono nel cuore quando questo appartenga ancora all'organismo. Così ad esempio le ricerche intese a determinare l'azione della caffeina, della teobromina, dell'alcool, ecc. sono fatte per comprendere più intimamente il modo di azione di queste sostanze sul cuore dell'animale vivo, e l'artificio sperimentale è inteso unicamente ad eliminare le cause di errore che dall'organismo spesso possono intervenire a scemare la nettezza dell'esperimento. Ammesso questo, come possiamo immaginare noi una perfetta funzionalità, senza una corrispondente integrità degli elementi cellulari cui questa funzione è legata? E come possiamo immaginare che si possa questa funzione alterare senza una corrispondente alterazione degli elementi cellulari cui la funzione stessa è legata? Sono troppo

universalmente noti gli esempi che l'istologia patologica ci offre, di alterazioni morfologiche strutturali nelle cellule degli organi funzionalmente alterati, perchè noi dobbiamo ulteriormente insistere su questo concetto.

Ecco dunque un nuovo campo di ricerche che i fisiologi hanno aperto all'istopatologo. Ecco degli elementi staccati dall'organismo, che vivono, che funzionano, che si devono necessariamente alterare, sia per la morte alla quale vanno incontro, sia per l'azione tossica di sostanze varie che si possono far pervenire e circolare nel cuore insieme al liquido nutrizio che lo mantiene in vita. Noi dobbiamo studiarli coi metodi che l'istochimica ci offre, raccogliendoli in momenti vari, sia di perfetta funzionalità, sia di funzionalità più o meno alterata, per ricercare se esista un parallelismo tra le alterazioni funzionali che i moderni metodi grafici ci permettono di fissare, e la loro struttura; in altre parole, se alle alterazioni funzionali corrispondano veri e propri stati degenerativi dimostrabili istologicamente, sia negli elementi parenchimatosi, sia nell'apparato nervoso che ne regola la nutrizione e l'attività (1).

Il problema è certo vasto e di difficile soluzione, ma non cessa però per questo di essere meno interessante, e quello che si fa oggi sul cuore si potrà forse fare presto anche per altri organi ed altri tessuti.

Le mie prime esperienze furono rivolte a ricercare se nel cuore isolato di mammifero si potesse ottenere sperimentalmente una degenerazione grassa, con gli stessi veleni steatogeni che la producono nei tessuti dell'animale vivente. Mi parve utile cominciare da questa, come quella che è più facilmente dimostrabile nei tessuti, sia a fresco, sia nei preparati fissati, coi metodi istochimici ben noti, e come quella che si può specificamente produrre con ben determinate sostanze. Una volta tro-

(1) È noto come oggigiorno tra i fisiologi prevalga il concetto che la contrattilità cardiaca sia legata alla sostanza muscolare e non dipenda dai nervi. Col metodo di ricerca ch'io ho istituito, si potrà forse, dall'esame comparativo caso per caso, delle alterazioni istologiche eventualmente reperibili nella sostanza muscolare o nel suo apparato nervoso, portare un utile contributo a risolvere la controversa questione.

vata questa degenerazione, il campo sarebbe stato aperto alla valutazione di altre (torbida, glicogenica, ecc.), che si istituiscono tanto frequentemente in svariate condizioni patologiche. Il cominciare con queste esperienze, mi pareva anche interessante per abbordare direttamente la controversa quistione dell'origine endogena od esogena del grasso nelle cellule, alla quale ho in addietro rapidamente accennato. Noi infatti qui abbiamo dei cuori isolati di mammifero, nutriti da un liquido assolutamente privo di sostanze grasse e circolante in un sistema parte metallico, parte di vetro, parte di gomma, dal quale non può certamente assumerne, per apportarne al cuore ed infiltrarne gli elementi cellulari. Se alla fine dell'esperienza il cuore ci dimostrerà un maggior contenuto adiposo noi dovremo ragionevolmente concludere per la sua indubbia origine endogena. Per fare funzionare un cuore isolato io mi sono valso del metodo di Langerdoff, con l'apparecchio opportunamente modificato da Aducco (e quale fu adoperato dai molteplici allievi suoi, Panella, Camis, Brandini, in alcune interessanti ricerche), che volle cortesemente sorvegliare la costruzione del modello da me adoperato. Come liquido nutrizio io mi sono valso di quello di Ringer Locke, al quale aggiungevo il 10 per mille di sangue defibrinato.

Mi attenni costantemente a questa proporzione inferiore a quella del 20-30 per mille consigliata da Brandini e Panella come la migliore, perchè salassando i conigli prima dell'estrazione del cuore, difficilmente potevo ottenere una quantità di sangue superiore ai 30 cc., che aggiunti ai tre litri di liquido necessari all'esperienza, riducevano la proporzione della miscela al 10 $^0/_0$. Appena estratto il cuore, lo immergevo nel liquido nutrizio a 37°-38° e lo montavo all'apparecchio seguendo il ben noto e solito procedimento. Facevo poi circolare per 2-3 minuti il liquido nutrizio puro, fino a che il cuore per la regolarità del ritmo dimostrasse di non risentire più del trauma patito, poi vi immettevo la soluzione della sostanza tossica nel liquido nutrizio, che avevo precedentemente preparata.

Quali veleni steatogeni ho adoperato l'arsenico, la fluorizina ed una molto attiva tossina difterica cortesemente favoritami dal Prof. Belfanti dell'Istituto Sieroterapico Milanese. Con le stesse sostanze tossiche avvelenavo contemporaneamente altri animali, dai quali raccoglievo e fissavo il cuore per potere poi

istituire un confronto tra le eventuali alterazioni che i tossici iniettati avrebbero prodotte nel cuore di questi animali avvelenati e quelle sperimentalmente ottenute nel cuore isolato.

Per ognuno dei tre tossici, io ripetei parecchie esperienze variando la dose del tossico e la durata dell'esperimento. Feci anche talora circolare il puro liquido nutrizio raccogliendo i cuori o ancora regolarmente o irregolarmente pulsanti o assolutamente immobili. Raccolsi poi ancora e fissai parecchi cuori di conigli assolutamente normali per procurarmi una conoscenza precisa e personale sulla eventuale o possibile presenza di qualche traccia di grasso anche in queste condizioni. Come liquidi fissativi, adoperai costantemente quello di Altmann e quello di Müller, e talora anche quelli di Flemming e di Hermann. Diedi la preferenza a quello di Altmann per il suo forte contenuto di acido osmico e per l'opportunità che mi offriva di colorare anche le caratteristiche granulazioni del protoplasma e più precisamente per istituire delle ricerche sulla più o meno diretta derivazione del grasso stesso dai granuli fucsinofili: il liquido di Müller mi dava una buona fissazione e mi permetteva una successiva ricerca del grasso, quando avessi successivamente adoperato il fissativo osmico di Marchi.

Anche in queste mie prime esperienze registrai accuratamente i movimenti del cuore e ne conservai le grafiche e così di ogni caso raccolto io posseggo la indicazione precisa, nella grafica, dello stato funzionale del cuore nel momento in cui l'esperienza fu interrotta. Ma sulle modificazioni funzionali sotto l'azione delle sostanze tossiche da me usate e sul rapporto che legano queste alle alterazioni istologiche trovate caso per caso mi riservo di concludere quando il numero delle mie esperienze sarà maggiore, parendomi che solo così se ne potranno dedurre dei resultati attendibili. Dirò invece come io, a somiglianza dei precedenti osservatori, abbia anche osservato, che tra i cuori estratti nelle stesse condizioni da animali apparentemente normali, si hanno delle grandi variazioni di resistenza e di comportamento, variazioni individuali la cui causa ci sfugge, ma che indubbiamente esiste e della quale dobbiamo sempre tener conto per non cadere in grossolani errori di interpretazione.

Accade infatti spesso che il cuore appena montato mostri il V. S. immobile, paralitico, mentre permangono validamente

contrattili il V. D. e le orecchiette. Per vedere se si trattasse di una semplice inibizione nervosa o non piuttosto di un disturbo circolatorio (da trombi o da emboli nelle arterie del cuore) ho aggiunto al liquido nutrizio una tenuissima sospensione di carmino. Ho visto così che quando il cuore funziona in tutte le sue parti, a poco a poco si viene gradatamente colorando in un bel color roseo diffuso, poi rosso, mentre alle zone paralitiche corrisponde sempre un' area assolutamente incolora, segno evidente che il circolo non vi si compie e il carmino non vi si può depositare. È utile il ricordare come il carmino non modifichi sensibilmente la durata e l'esito dell'esperienza, e nei vasi e nei capillari del cuore, che all'esame istologico si presentano finamente iniettati di minuti granuli di carmino, evidentemente la circolazione artificiale, e quindi la nutrizione del cuore, è ancora possibile.

Non potendo nè volendo ora riferire sopra ogni mia singola esperienza, dirò come nei cuori da me studiati, che si contrassero nell'apparecchio per un tempo vario da mezz'ora a quattro ore e mezzo, nutriti dal Ringer Locke e sangue, addizionato da uno qualunque dei tossici steatogeni da me ricordati, costantemente potei dimostrare la comparsa di grasso nelle fibro-cellule muscolari, nelle quali, a condizioni assolutamente normali, come è noto, e come ho potuto personalmente convincermi, solo eccezionalmente in qualche elemento isolato è reperibile qualche gocciolina di grasso. Questo grasso vi compare dapprima a goccioline minute e rare in pochi elementi, poi rapidamente le goccioline si fanno numerosissime diffusamente e omogeneamente disseminate in tutti gli elementi, per fondersi anche, in periodi più avanzati, in goccioline sempre più grosse. Si ha, in altre parole, un'alterazione assolutamente simile a quella che vediamo istituirsi nel cuore dell'animale sotto l'azione degli stessi tossici iniettati in circolo, dove le goccioline adipose che vi compaiono presentano lo stesso aspetto, assumendo gli stessi rapporti e la stessa disposizione di quelle sopra ricordate. Di questa somiglianza ne ebbi una prova costante dai cuori degli animali di controllo da me intossicati. Ecco dunque che noi abbiamo l'esempio di una degenerazione che colpisce un tessuto staccato dall'organismo e funzionante, prodotta dalle stesse cause e svol-

tasi con lo stesso meccanismo e inducente allo stesso reperto di quella svoltasi nell'animale.

A questa identità si accompagna contemporaneamente un analogo comportamento del protoplasma, del nucleo, assolutamente identici nei due casi (sui quali non voglio ora scendere in minuta descrizione di dettaglio), come le ottime fissazioni con il liquido di Altmann, di Flemming, di Hermann permettono di dimostrare.

Il massimo potere steatogeno e per la rapidità e per l'intensità del fenomeno ottenuto, in rapporto alla piccolissima quantità di tossina adoperata, fu quello dato dalla tossina difterica, in ordine decrescente dall'arsenico e dalla fluorizina.

Un' obbiezione che facilmente può essere sollevata e che io stesso mi formulai fu questa: che l'aumento di grasso in questi cuori non fosse in rapporto ad un fenomeno vitale, ma ad un fenomeno di disfacimento post-mortale simile a quello che fu veduto avvenire nei tessuti morti da Virchow, Lindemann, Hauser, Kotsowsky e Wentscher.

Questa obbiezione cade da sè quando noi vediamo che il grasso si produce e compare negli elementi muscolari di cuori ancora validi e pulsanti, in un momento nel quale la grafica ci parla per una vera vitalità dell'organo.

Come ho detto, io ho raccolti per lo studio anche dei cuori per i quali passava il solo liquido nutrizio. Ora anche in questi e specialmente quando non aggiungevo il sangue defibrinato e l'esperienza era durata a lungo, frequentemente ho ritrovata una certa quantità di grasso negli elementi cellulari, a gocciole minutissime e diffuse, sicchè ne conclusi che anche in questi casi si istituisce nel muscolo cardiaco una vera e propria degenerazione grassa. Da chè questa dipende? Verosimilmente da una insufficiente nutrizione, perchè il liquido nutrizio, per quanto sapientemente combinato, non può certamente surrogare nella perfetta nutrizione del cuore il plasma sanguigno. Anche questa degenerazione grassa, la quale non raggiunge mai per intensità quella precedentemente descritta e derivante dall'azione specifica dei veleni steatogeni, è dunque indubbiamente di origine endogena. Se la constatazione della prima è di grande valore per il patologo, parmi che la constatazione di questa ultima lo debba essere per il fisiologo, il quale dunque, messo sull'avviso della

possibilità della sua comparsa, dovrà ad un certo tempo dell'esperienza (forse il comportamento della grafica potrà indicarlo) non più ritenere d'avere innanzi a sè un cuore normale, ma piuttosto un cuore grasso, e dovrà così, ad es. quando confronta il comportamento di un cuore reso grasso nell'animale per veleni precedentemente iniettati, con quello di un cuore normale staccato (1), pensare che anche il secondo si va riducendo nel corso della esperienza alle condizioni del primo. Il fisiologo ancora potrà col sussidio dell'esame istologico ricercare quale sia la composizione del liquido nutrizio che possa essere più a lungo adoperata e tollerata per ogni singola specie di animali senza che nel cuore di questi si istituiscano delle alterazioni degenerative tanto gravi da modificarne l'attività funzionale.

La degenerazione grassa da me descritta e quale si può vedere chiaramente nelle sezioni dei pezzi fissati in Altmann (senza aggiunta di sostanze coloranti) e nelle sezioni dei pezzi fissati in Müller e passati per 10 giorni in liquido di Marchi di frequente rinnovato, si può distintamente riconoscere anche a fresco adoperando il Sudan III, con la tecnica che si adopera nei metodi di colorazione a fresco del sangue. Relativamente poi al rapporto che le goccioline di grasso neoformate nei cuori da me studiati hanno coi granuli fucsinofili o bioblasti di Altmann io non posso formulare che una semplice ipotesi.

Il metodo di colorazione, per quanto diligentemente eseguito, non riesce mai a darci un reperto eguale per tutti i campi di osservazione dello stesso preparato: basta anche una lieve diversità nello spessore della sezione o nella durata della decolorazione per darci delle immagini sensibilmente diverse. Con tutto questo nelle fibre alterate che presentino ben distinte ed individualizzate le granulazioni fucsinofile, queste si presentano frequentemente ingrossate o uniformemente rosse o con un orletto più intensamente colorato. Un rapporto ben netto tra queste deformità granulari e le prime minutissime goccioline di grasso che compaiono nel protoplasma non è discernibile. Anche qui pare che il grasso si origini in gran parte nella porzione inter-

(1) Scaffidi. *Meccanismo di azione del Cesio sul cuore normale ed in degenerazione grassa*, " Arch. di farm. sperim. ", vol. VI, fasc. XII, 1907.

granulare del protoplasma, come del resto io stesso ho veduto avvenire del grasso che compare rapidamente negli epiteli renali resi ischemici dall'istituirsi di un infarto (1).

Riassumendo, allo stato attuale delle mie esperienze, lasciando per ora insoluti molti punti del problema che ho impreso a studiare, parmi di poter concludere che:

Le stesse cause che determinano nel cuore degli animali a sangue caldo la comparsa di una degenerazione grassa più o meno diffusa od intensa (insufficienza di nutrizione, veleni steatogeni), *la determinano anche nel cuore isolato, artificialmente nutrito ed avvelenato, e nei due casi la forma, il volume, la disposizione, i rapporti delle goccioline adipose, risultano all'esame istologico* (e sarà interessante farne l'esame comparativo anche per via chimica) *identiche.*

La comparsa e l'aumento talora considerevole di grasso nel cuore, nelle condizioni sovra ricordate, parla per la natura veramente degenerativa del processo, dimostrando così la produzione endogena del grasso dalle albumine cellulari.

La comparsa di una degenerazione grassa sperimentale nei cuori isolati di mammifero e nutriti semplicemente col liquido di Ringer Locke, fino ad ora insospettata ed in rapporto verosimilmente ad un semplice difetto di nutrizione, deve essere sempre tenuta presente nella valutazione delle grafiche che in queste prove si raccolgono, perchè non sia interpretato come una semplice alterazione di stimolo, ciò che riconosce a sostegno una profonda alterazione degenerativa quale è la comparsa di grasso nell'elemento cui la funzione è legata.

Istituto di Anatomia patologica della R. Università di Pisa.

(1) A. Cesaris-Demel, *Della rapida comparsa del grasso negli infarti renali ecc.*, " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XXX, 1895.

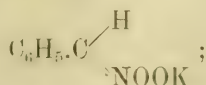
Derivati alogenici dei dinitroidrocarburi primarî.

Nota di G. PONZIO e G. CHARRIER.

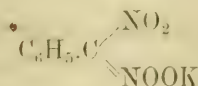
Mentre pel fenilmononitrometano si conoscono due forme

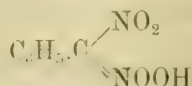
$$C_6H_5.CH_2NO_2 \longrightarrow C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup H \\ \diagdown NOOH\end{matrix}$$

la prima stabile, liquida, di un vero nitrocomposto; la seconda labile, solida, di acido nitronico, e capace di formare direttamente leucosali, come p. es.:

$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup H \\ \diagdown NOOK\end{matrix} ;$$

del fenildinitrometano $C_6H_5.CHN_2O_4$ (che uno di noi ha preparato per la prima volta dall' isonitrosometilbenzilchetone $CH_3.CO.C(NOH).C_6H_5$, e successivamente, in modo molto più conveniente, dalla benzaldossima $C_6H_5.CH:NOH$ per azione del tetrossido di azoto in soluzione eterea (1)) non si conosce che una sola forma, stabile, solida, fusibile a 79°.

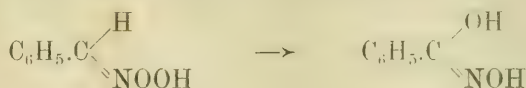
Ammettendo con Hantzsch (2) che il leucosale (instabile) del fenildinitrometano abbia la formola

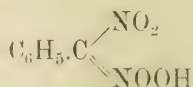
$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup NO_2 \\ \diagdown NOOK\end{matrix}$$

cioè derivi dalla forma nitronica

$$C_6H_5.C\begin{matrix}\diagup NO_2 \\ \diagdown NOOH\end{matrix}$$

(1) *Gazz. Chim. 31*, II, 133 (1901); *36*, II, 287 e 588 (1906).
(2) *Berichte 40*, 1533 (1907).

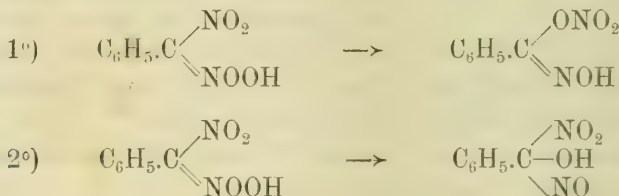
finora non isolata del dinitroidrocarburo (corrispondente alla forma labile del mononitroidrocarburo), bisogna evidentemente attribuire al sale stabile, *giallo,* del fenildinitrometano un'altra costituzione.

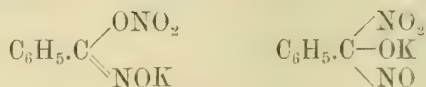
Ora, secondo Bamberger (1), trattando con acido cloridrico il sale potassico del fenilmononitrometano, la forma labile del mononitroidrocarburo, che in tal modo vien messa in libertà, si trasforma in parte in acido benzidrossamico, subendo una trasposizione molecolare

$$C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup H\\ \diagdown NOOH\end{array} \longrightarrow C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup OH\\ \diagdown NOH\end{array}$$

Si potrebbe per conseguenza ammettere che, mettendo in libertà dal suo sale potassico il fenildinitrometano, si formasse dapprima la forma labile

$$C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup NO_2\\ \diagdown NOOH\end{array}$$

ma che questa tosto subisse una analoga isomerizzazione secondo uno dei due sensi seguenti

$$1^{o})\quad C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup NO_2\\ \diagdown NOOH\end{array} \longrightarrow C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup ONO_2\\ \diagdown NOH\end{array}$$

$$2^{o})\quad C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup NO_2\\ \diagdown NOOH\end{array} \longrightarrow C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup NO_2\\ -OH\\ \diagdown NO\end{array}$$

Si arriverebbe così, pel sale *giallo* di potassio, alle due formole di struttura

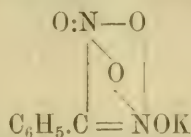
$$C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup ONO_2\\ \diagdown NOK\end{array} \qquad C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup NO_2\\ -OK\\ \diagdown NO\end{array}$$

La prima di queste fu proposta da uno di noi (2) già da

---

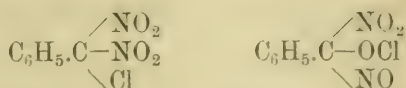
(1) *Berichte* *35*, 45 (1903).

(2) *Gazz. Chim.* *32*, I, 461 (1902); *33*, I, 412 (1903); *36*, II, 287 e 588 (1906).

parecchi anni e spiega bene talune proprietà del sale; essa però, come quella recentemente suggerita da Hantzsch (loc. cit.)

$$\begin{array}{c} O{:}N-O \\ | \quad\diagdown\quad | \\ | \quad O \quad | \\ C_6H_5.C = NOK \end{array}$$

contenendo il gruppo NOK non si accorda colle proprietà dei derivati alogenici che si ottengono dal sale stesso per azione degli alogeni in soluzione alcalina e che descriviamo nella presente Nota.

Infatti, come fu dimostrato da uno di noi (1), da Piloty e Steinbock (2) e da Forster (3), trattando con cloro le soluzioni alcaline dei composti contenenti l'aggruppamento $>C{:}NOH$ non si forma l'ipoclorito $>C{:}NOCl$, bensì un cloronitrosocomposto $>C\begin{smallmatrix} \diagup NO \\ \diagdown Cl \end{smallmatrix}$, poco stabile, di colore azzurro allo stato liquido, e capace di reagire col nitrato di argento. Per contro, il fenilclorodinitrometano $C_6H_5.CClN_2O_4$ è stabile, incoloro, e non reagisce nè col nitrito, nè col benzoato di argento: escludendo quindi per esso le formole col gruppo $>C\begin{smallmatrix} \diagup NO \\ \diagdown Cl \end{smallmatrix}$ rimangono a discutersi le seguenti

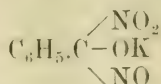
$$C_6H_5.C\begin{smallmatrix} \diagup NO_2 \\ -NO_2 \\ \diagdown Cl \end{smallmatrix} \qquad\qquad C_6H_5.C\begin{smallmatrix} \diagup NO_2 \\ -OCl \\ \diagdown NO \end{smallmatrix}$$

la prima delle quali però non ci sembra ammessibile, non permettendo di spiegare come, per azione della potassa alcoolica, dal fenilclorodinitrometano si ottenga, oltre al sale potassico del dinitroidrocarburo, anche benzoato, nitrato e nitrito potassico.

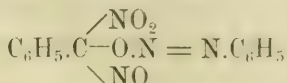
La seconda si accorda meglio con tale fatto ed inoltre con-

---

(1) *Gazz. Chim. 36*, II, 98 (1906).
(2) *Berichte 35*, 3099 (1902).
(3) *Journ. Chem. Soc. 75*, 1141 (1899).

duce ad ammettere pel sale potassico *giallo* del fenildinitrometano la struttura

$$C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup NO_2\\ -OK\\ \diagdown NO\end{array}$$

e pel sale giallo di fenildiazonio (il quale risulta dal sale potassico per azione dell'acetato di fenildiazonio) la costituzione

$$C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup NO_2\\ -O.N = N.C_6H_5\\ \diagdown NO\end{array}$$

colla quale la isomerizzazione di esso in benzoilfenilnitronitrosoidrazina (recentemente studiata da uno di noi (1))

$$C_6H_5.C\begin{array}{l}\diagup NO_2\\ -O.N = N.C_6H_5\\ \diagdown NO\end{array} \longrightarrow C_6H_5.CO.\begin{array}{c}N\\ |\\ NO_2\end{array}\!\!-\!\!-\!\!\begin{array}{c}N\\ |\\ NO\end{array}\!.C_6H_5$$

sarebbe in certo qual modo analoga alla trasformazione, osservata da Dimroth e Hartmann (2), di un azocomposto in un idrazone e che consiste nel passaggio di un radicale acido dal carbonio alifatico all'azoto:

$$\begin{array}{r}C_6H_5.CO\diagdown\\ C_6H_5.CO-\\ CH_5.CO\diagup\end{array}C.N = N.C_6H_5 \longrightarrow \begin{array}{r}C_6H_5.CO\diagdown\\ \\ C_6H_5.CO\diagup\end{array}C = N.\begin{array}{c}N\\ |\\ CO.CH_3\end{array}\!.C_6H_5$$

Fenilclorodinitrometano $C_6H_5.CClN_2O_4$. — Si separa immediatamente aggiungendo una soluzione diluita di fenildinitrometanpotassio $C_6H_5.CKN_2O_4$ ad una soluzione alcalina di cloro, raffreddata a 0°. Estratto con etere e seccato nel vuoto, costituisce un olio incoloro, di odore gradevole, più denso dell'acqua, stabile.

(1) *Gazz. Chim. 38*, I (1908).
(2) *Berichte 40*, 4460 (1907).

I. Gr. 0,1556 di sostanza fornirono cc. 17,5 di azoto ($H_0 = 737,87$ $t = 15°$), ossia gr. 0,020230.

II. Gr. 0,3009 di sostanza fornirono gr. 0,2023 di cloruro di argento (1).

Cioè in cento parti:

	trovato		calcolato per $C_7H_5ClN_2O_4$
	I	II	
Azoto	13,06	—	12,93
Cloro	—	16,62	16,69

Riscaldato con acqua svolge vapori nitrosi e si trasforma in acido benzoico; riscaldato con potassa alcoolica ridà nuovamente il sale potassico del fenildinitrometano $C_6H_5.CKN_2O_4$, il quale si separa, col raffreddamento, in laminette rosse, che raccolte diventano rapidamente gialle.

Gr. 0,1980 di sostanza fornirono gr. 0,0789 di solfato potassico.
Cioè su cento parti:

	trovato	calc. per $C_7H_5KN_2O_4$
Potassio	17,89	17,72

In questa reazione però si forma (oltre a cloruro potassico) anche benzoato potassico (che rimane disciolto nell'alcool) e nitrato e nitrito potassico i quali restano indisciolti e si possono riconoscere qualitativamente colle note reazioni.

Fenilbromodinitrometano $C_6H_5.CBrN_2O_4$. — È un olio leggermente giallognolo, di odore gradevole, più denso dell'acqua, e si ottiene in modo analogo al precedente, con una soluzione alcalina di bromo.

---

(1) La determinazione dell'alogeno in questo e negli altri derivati alogenici più avanti descritti, non si potè fare col metodo alla calce, poichè in tali condizioni la decomposizione della sostanza ha luogo violentemente. Si ebbero invece buoni risultati scaldando con precauzione la sostanza con idrato potassico in polvere entro un crogiolo di porcellana, con che tutto l'alogeno si stacca sotto forma di sale potassico che si dosa poi nel modo solito.

I. Gr. 0,1484 di sostanza fornirono cc. 14 di azoto ($H_0 = 737,82$ $t = 15°$), ossia gr. 0,016184.

II. Gr. 0,1749 di sostanza fornirono gr. 0,1272 di bromuro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_7H_5BrN_2O_4$
	I	II	
Azoto	10,90	—	10,72
Bromo	—	30,95	30,65

Sale di fenilidrazina del fenildinitrometano $C_6H_5.CHN_2O_4.H_2N.NHC_6H_5$. — Si separa in laminette gialle, fusibili a 87°, mescolando le soluzioni acquose di quantità equimolecolari di fenildinitrometanpotassio e di cloridrato di fenilidrazina.

Gr. 0,1029 di sostanza fornirono cc. 17,5 di azoto ($H_0 = 737,87$ $t = 15°$), ossia gr. 0,020230.

Cioè in cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{14}N_4O_4$
Azoto	19,66	19,31

È discretamente solubile a caldo e poco a freddo nell'alcool; poco solubile nell'etere e nell'acqua.

Anisilclorodinitrometano $CH_3O.C_6H_4.CClN_2O_4$. — Si forma aggiungendo ad una soluzione alcalina di cloro una soluzione acquosa del sale potassico dell'anisildinitrometano $CH_3O.C_6H_4.CKN_2O_4$. È un olio quasi incoloro, di odore gradevole, più denso dell'acqua e stabile.

I. Gr. 0,1373 di sostanza fornirono cc. 13,6 di azoto ($H_0 = 743,20$ $t = 15°$), ossia gr. 0,015662.

II. Gr. 0,1682 di sostanza fornirono gr. 0,0970 di cloruro di argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_8H_7ClN_2O_5$
	I	II	
Azoto	11,40	—	11,35
Cloro	—	14,25	14,40

Riscaldato con acqua svolge vapori nitrosi e si trasforma in acido anisico; riscaldato con potassa alcoolica ridà, parzialmente, il sale potassico dell'anisildinitrometano $CK_3O.C_6H_4.CKN_2O_4$ il quale si separa in lamine rosse che diventano poi lentamente gialle.

Gr. 0,2366 di sostanza fornirono gr. 0,0817 di solfato potassico.

Cioè in cento parti:

	trovato	calcolato per $C_8H_7KN_2O_5$
Potassio	15,50	15,60

Anisilbromodinitrometano $CH_3O.C_6H_4.CBrN_2O_4$. — Si separa solido, operando come nel caso precedente, ma si fonde a temperatura di poco superiore a 0°.

I. Gr. 0,1561 di sostanza fornirono cc. 13 di azoto ($H_0 = 734,48$ $t = 14°$), ossia gr. 0,015010.

II. Gr. 0,3527 di sostanza fornirono gr. 0,2073 di bromuro d'argento.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_8H_7BrN_2O_5$
	I	II	
Azoto	9,67	—	9,62
Bromo	—	27,08	27,48

Sale di fenilidrazina dell' anisildinitrometano $CH_3O.C_6H_4.CHN_2O_4.H_2N.NHC_6H_5$. — Si ottiene direttamente in laminette gialle fusibili a 79°, da anisildinitrometanpotassio $CH_3O.C_6H_4.CKN_2O_4$ e cloridrato di fenilidrazina in soluzione acquosa.

Gr. 0,1456 di sostanza fornirono cc. 22,8 di azoto ($H_0 = 725,12$ $t = 14°$), ossia gr. 0,025678.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{14}H_{16}N_4O_5$
Azoto	17,63	17,50

È molto solubile a caldo e poco a freddo nell'alcool; poco solubile nell'etere e nell'acqua.

Piperonilclorodinitrometano $CH_2O_2:C_6H_3.CClN_2O_4$. — Si separa immediatamente allo stato solido aggiungendo una soluzione acquosa del sale potassico del piperonildinitrometano $CH_2O_2:C_6H_4.CKN_2O_4$ ad una soluzione alcalina di cloro raffreddata in ghiaccio.

Cristallizza dall'alcool o dagli eteri di petrolio, in larghe lamine, leggermente giallognole, fusibili a 55° e decomponibili, con sviluppo gassoso, a temperatura superiore ai 100°.

Gr. 0,1895 di sostanza fornirono cc. 18 di azoto ($H_0 = 728,00$ $t = 15°$), ossia gr. 0,020300.

Cioè su cento parti:

	trovato	calc. per $C_8H_5ClN_2O_6$
Azoto	10,71	10,74

È solubile a freddo nell'etere, nel benzolo e nel cloroformio; molto a caldo e poco a freddo nell'alcool e negli eteri di petrolio.

Piperonilbromodinitrometano $CH_2O_2.C_6H_4.CBrN_2O_4$. — Si prepara, in modo analogo al precedente, con una soluzione alcalina di bromo, con che si separa subito allo stato solido. Cristallizza dagli eteri di petrolio in larghe lamine leggermente giallognole, fusibili a 81°.

Gr. 0,2328 di sostanza fornirono cc. 19 di azoto ($H_0 = 723,90$ $t = 18°$), ossia gr. 0,021045.

Cioè in cento parti:

	trovato	calc. per $C_8H_5BrN_2O_6$
Azoto	9,04	9,18

È molto solubile a caldo e poco a freddo nell'alcool; poco a caldo e pochissimo a freddo negli eteri di petrolio; solubile anche a freddo nell'etere, nel benzolo e nel cloroformio.

Torino — Istituto Chimico della R. Università. Febbraio 1908.

Sui rapporti tra movimenti oculari e scomparsa e movimenti delle immagini consecutive.

Nota dei dottori LUIGI BOTTI e MARIO PONZO.

Molti di coloro che si occuparono scientificamente delle immagini consecutive parlano nei loro lavori del suaccennato problema. Noi siamo ritornati sull'argomento con alcune osservazioni ed esperienze che ci sembrano portare qualche nuovo contributo alla spiegazione di questi interessanti fenomeni. Fra i molti autori (1) citiamo i seguenti, che più ci riguardano.

Wundt, che riassume brevemente la questione nel suo trattato, dice: " Auch die Bewegungen des Auges lassen sehr leicht " die Nachbilder verschwinden, was wohl zumeist von der durch " den Wechsel der Eindrücke eintretenden Störung der Aufmerk- " samkeit, vielleicht aber auch zum Theil von einer directen " physiologischen Wirkung der Augenbewegungen herrührt " (2).

Fick e Gürber (3), considerando l'immagine consecutiva come un fenomeno di stanchezza, vollero spiegare l'apparente contraddizione esistente tra il fatto del rapido stancarsi dell'occhio quando si fissi un oggetto luminoso, ed il fatto che non si hanno notevoli disturbi nella visione dopo la lunga esposizione della retina alla luce diffusa del giorno. Essi fecero varie esperienze sulle immagini consecutive, dalle quali dedussero che i movimenti oculari, l'accomodamento e il batter delle ciglia ne provocano la scomparsa, e attribuiscono questo fatto alla reintegrazione delle parti della retina affaticate; reintegra-

(1) Cfr. Helmholtz, *Handbuch der Optik*; Aubert, *Phys. der Netzhaut*; i lavori di Plateau, ecc.

(2) *Grundzüge der physiologischen Psychologie*, 5 Aufl., Bd. 2, p. 194, 1902.

(3) *Ueber Erholung der Netzhaut*, " Archiv für Ophthalmologie ", Bd. 36, Abt. 2, p. 245, 1890.

zione dovuta alla accelerata e facilitata circolazione sanguigna e linfatica nella retina per i movimenti oculari. Essi videro però che ciò si verifica più facilmente nelle immagini consecutive negative che in quelle positive.

Anche Fechner aveva già accennato prima di loro alla scomparsa delle immagini consecutive per le modificate condizioni fisiologiche della retina in seguito ai movimenti oculari. Egli dice: " Jede Bewegung des Auges oder der Augenlieder " disponirt das Nachbild zum Verschwinden: ja selbst eine " Bewegung des übrigen Körpers, überhaupt also alles, wie es " scheint, was die Gleichförmigkeit des Gefäss- und Nerven-Ein- " flusses auf das Auge stört „ (1).

Hering invece considera le immagini consecutive non come fenomeni di stanchezza ma di reintegrazione (Erholung) della retina. Egli ripetè le esperienze di Fick e Gürber, e ne fece altre nuove ed ingegnose, confutando punto per punto gli argomenti di Fick e Gürber, e dimostrando insussistente che le immagini consecutive subiscano influenza alcuna per i movimenti fatti dall'occhio. Egli poi dice: " Die Ansicht, dass Nach- " bilder durch Augenbewegungen zum Verschwinden gebracht " werden können, ist offenbar dadurch entstanden, dass bei " Blickbewegungen mit offenen Augen und in einem allerlei " Unterscheidbaren erfüllten Gesichtsfelde ein zuvor erzeugtes " Nachbild immer nur dann gesehen wird, wenn der Blick eben " still hält, und dass es dabei jedesmal von neuem zu entstehen " scheint. Dies würde freilich nicht für, sondern nur gegen " E. Fick's Hypothese angeführt werden können. Denn dass das " Nachbild nach einer Augenbewegung wieder gesehen wird, " beweist, dass die sogen. Ermüdungserscheinungen durch die " Bewegung nicht beseitigt werden können „ (2).

Egli descrive in seguito come nel comune uso dell'occhio ad ogni mutamento dello sguardo preceda un cambiamento di luogo dell'attenzione; dimodochè l'immagine consecutiva non può vedersi che quando il luogo ove è fissata l'attenzione coincide col luogo ove l'immagine è localizzata; durante il rapido mo-

(1) *Ueber die subjectiven Complementarfarben*, " Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie „, Bd. 44, p. 525, 1838.

(2) *Ueber Ermüdung und Erholung des Sehorgans*. " Archiv für Ophthalmologie „, Bd. 37, Abt. 3, p. 20, 1891.

vimento, non coincidendo quei due luoghi, l'immagine non è visibile.

A proposito dei cambiamenti di grandezza dell'immagine consecutiva, Hering osservò che, se dopo aver fissato su un punto di una superficie omogenea e piana l'immagine consecutiva, avvicinava questa superficie al viso, l'immagine consecutiva appariva più piccola; se la si allontanava, più grande. Eguale effetto otteneva nell'avvicinare ed allontanare il viso dalla superficie. L'accomodamento non ha, secondo lui, nessun effetto sull'indebolirsi e sullo scomparire dell'immagine consecutiva. Solo nei forti accomodamenti per la vicinanza egli nota, in certe condizioni, una diminuzione di chiarore nel campo visivo per il restringimento pupillare.

Exner (1) combatte egli pure l'ipotesi di Fick e Gürber e dice che la scomparsa delle immagini consecutive è solo un caso particolare della regola generale che tutti i fenomeni soggettivi visivi scompaiono durante i movimenti oculari. Così per i fasci di polarizzazione di Haidinger, la figura della fovea, la circolazione retinica, la macchia di Maxwell, l'anello di Löwe, in certi casi anche per la figura dei vasi retinici di Purkinje, fenomeni che non hanno nulla a che fare colla stanchezza della retina. Aggiunge ancora che l'immagine consecutiva non scompare quando si fanno dei movimenti oculari con gli occhi chiusi, perchè in questo modo si eliminano i disturbi provenienti da impressioni esterne.

Wirth in un suo lavoro (2) osserva che la percezione di una immagine consecutiva, come quella di qualsiasi oggetto esterno, non consiste nella sola presenza di differenze di sensazione, ma nella appercezione di queste differenze. Le immagini consecutive si comportano come gli oggetti esterni, in quanto subiscono una localizzazione nelle tre dimensioni dello spazio.

Sulle condizioni della percezione di queste immagini, Wirth riferisce una serie di osservazioni che qui sotto riassumiamo.

---

(1) *Das Verschwinden der Nachbilder bei Augenbewegungen*, " Zeitschr. für Psych. u. Phys., ecc. ", Bd. I, p. 47, 1890.

(2) *Der Fechner-Helmholtz'sche Satz über negative Nachbilder und seine Analogien*, " Wundt's Philosophische Studien ", Bd. 16, p. 487 e segg., 1900.

Già nell'occhio in riposo le condizioni, perchè queste immagini siano percepite, sono più sfavorevoli che per gli oggetti esterni, per il fatto che le parti periferiche di esse non si posson portare nel centro del campo visivo, col quale coincidono le condizioni più favorevoli di appercezione. Ed aggiunge che chi non conosce questo fatto, per portarne meglio i contorni nel centro visivo, ne provoca lo sfuggire dal punto in cui è diretta la appercezione. Dopo un movimento oculare, le condizioni per la percezione dell'immagine consecutiva, secondo Wirth, si rendon più complicate; poichè, per quanto non manchino qui nel campo visivo, le differenze di sensazione, l'appercezione è diretta su di un punto falso.

Dopo il movimento, l'immagine consecutiva non si trova più là, dove si troverebbe se fosse un oggetto reale; e quando la si ritrova, si ha la coscienza di non averla supposta momentaneamente nel luogo, nella forma e nella qualità in cui essa realmente si trova. Possono aversi poi nella immagine consecutiva, oltre che cambiamenti di luogo, anche cambiamenti di grandezza apparente, quando la si proietta su superfici diversamente lontane; il che fa sì che al primo momento essa non sia appercepita. Così, allorchè si proietta l'immagine ad una distanza maggiore, il soggetto s'aspetta che l'immagine consecutiva, pensata oggettivamente legata alla superficie di proiezione, appaia sotto un angolo visivo molto più piccolo, mentre in realtà all'angolo visivo rimasto costante, durante questo allontanamento, corrisponde perfino un ingrandimento dell'immagine. La diversità di luogo e di grandezza fa sì che la si perda per un certo tempo; e solo colla appercezione dei suoi nuovi contorni la si ritrova. Le difficoltà di ritrovarla, dopo un rapido movimento, crescono ancora nella vista binoculare, poichè nel cambiare superficie di proiezione di frequente succede che i contorni delle due singole immagini consecutive non cadano nel nuovo piano di proiezione sugli stessi punti oggettivi; ne segue, in un grande spostamento, la impossibilità di avere una sola e chiara immagine. Durante il movimento stesso, sempre secondo Wirth, le condizioni per l'appercezione dell'immagine consecutiva sono al massimo sfavorevoli, perchè, durante l'impulso al movimento, la capacità appercettiva (Leistungsfähigkeit der Apperception) è limitata, essendo unicamente diretta alla

meta del movimento stesso, che deve riuscire nel centro del campo visivo. Ma le immagini consecutive non possono essere scopo appercepito di un movimento senza che nel tempo stesso vengano tolte dal campo dell'appercezione momentanea.

Da quanto abbiamo riferito risulta che mentre Fechner e poi Fick e Gürber ritengono che i movimenti favoriscano la scomparsa delle immagini consecutive, mutando le condizioni fisiologiche della retina, Exner, Hering e poi Wirth li considerano solo come causa disturbante la loro percezione. Wundt sembra dare ancora qualche peso all'ipotesi di Fick e Gürber.

La questione dibattuta da tali autori ci indusse a ripetere alcune delle esperienze di Hering, per poterci fare un concetto esatto della medesima. Ora ci accadde, appunto durante tali ricerche, di osservare il seguente fatto: Ci trovavamo in una camera oscura, ove localizzavamo dinanzi a noi l'immagine consecutiva di una fiamma a gaz Auer, fissata per 30 secondi ca. con un occhio solo. Osservammo allora che mentre la si localizzava nel buio davanti a noi tenendo lo sguardo fisso, essa non rimaneva ferma ma si spostava compiendo lente escursioni in un medesimo piano perpendicolare alla linea visiva. Queste escursioni si effettuavano in varie direzioni, ma a preferenza verso il basso, ed erano talora più, talora meno ampie. Esse si compivano lentamente, e malgrado che l'osservatore si sforzasse di trattenere l'immagine in un punto fisso, le escursioni di questa si compivano egualmente. Durante questi spostamenti la immagine si manteneva costantemente visibile; però, giunta ad un dato punto della sua escursione, essa ad un tratto scompariva; e dopo un tempo breve tornava a mostrarsi in un punto davanti a noi.

Oltre a questi spostamenti che si verificavano in un medesimo piano davanti all'osservatore, si notò che a volte la medesima immagine consecutiva veniva spontaneamente avvicinandosi da un piano lontano verso un piano più vicino. Nel compiersi di tale spostamento l'immagine si avvicinava attraverso lo spazio vuoto ed oscuro assumendo l'aspetto di una fiamma isolata e librata nell'aria. Essa coll'accostarsi all'osservatore andava man mano rimpicciolendosi, pure serbandosi costantemente visibile. Avvicinatasi sino ad un certo punto, accadeva o che momenta-

neamente scomparisse per riapparire ingrandita e lontana; oppure che s'indugiasse in un piano vicino, compiendovi alternative piccole oscillazioni di avvicinamento e di allontanamento, o movimenti di lateralità.

Interessati da tali spostamenti di lateralità e di avvicinamento spontanei delle immagini consecutive, fummo spinti a fare alcune esperienze che potessero condurci ad una spiegazione di tali fenomeni. In tutte le esperienze da noi fatte e riferite in questo lavoro, noi studiammo il comportarsi dell'immagine consecutiva in tutto il periodo sia positivo che negativo della sua durata.

Fu nostro primo intendimento di separare, nello studio di questi fenomeni, le due specie di spostamenti osservati. Noi ottenemmo di potere escludere quasi completamente gli spostamenti di lateralità dell'immagine, nel modo seguente: ci valemmo di un tubo di carta bianca della lunghezza di circa 30 cm. e del diametro di 10 mm., aperto ad una estremità e terminante dall'altra in una cassetta oscura. L'osservatore che trovandosi in una camera illuminata applicava l'occhio all'estremità libera del tubo, ne poteva seguire coll'occhio un buon tratto, mentre non né vedeva il fondo perchè completamente oscuro.

Se ora, dopo aver fissato una sorgente luminosa attraverso un altro tubo di eguali dimensioni del precedente, si cercava di localizzare l'immagine consecutiva così ottenuta entro il primo tubo, la si osservava a volte nel fondo oscuro, donde talora si avanzava per entro il tubo avvicinandosi all'occhio dell'osservatore e man mano rimpicciolendo. Dopo di che scompariva e tornava a mostrarsi lontana e più grande; il che era possibile, dato il fondo oscuro, che permetteva l'accomodarsi dell'occhio a grande distanza. Rimanendo il tubo abbastanza illuminato nel suo interno, l'osservatore poteva seguire l'immagine nel suo spostarsi lungo l'asse del medesimo; ed essendo lo sguardo costretto a seguire costantemente la direzione di quest'asse, non si osservavano più i movimenti di lateralità dell'immagine.

Per meglio osservare i cambiamenti di grandezza dell'immagine, facemmo ancora le seguenti esperienze:

Dopo aver guardato con un occhio, tenendo l'altro chiuso, una sorgente fortemente luminosa (fiamma gaz Auer), attraverso un'apertura circolare del diametro di 15 mm., praticata in un

cartoncino, di modo che dinanzi all'occhio si presentava solo un disco luminoso, proiettammo l'immagine consecutiva su di un punto fisso di una parete bianca, alla quale ci andavamo lentamente avvicinando, mantenendo costante il punto di fissazione. Si osservò in tali prove che, coll'avvicinarsi dell'osservatore al punto di fissazione, l'immagine, restando sempre visibile, andava sempre più rimpicciolendosi, sino ad assumere proporzioni minime quando l'osservatore era vicino alla parete. Nell'allontanarsi dell'osservatore dalla parete, si osservava il fenomeno contrario (1).

L'osservatore, dopo aver ottenuta, nelle medesime condizioni, la stessa immagine consecutiva, la localizzava su di una parete a lui molto vicina; indi, dirigendo ad un tratto lo sguardo verso una parete più lontana, ritrovava su questa l'immagine consecutiva molto più grande di quella che aveva veduta sulla prima. Durante questi spostamenti rapidi del punto di fissazione da vicino a lontano, l'immagine si perdeva, e veniva ritrovata solo dopo un certo tempo. Facendo invece stare fermo il soggetto, e invitandolo a fissare con un occhio costantemente una croce nera disegnata sopra uno schermo bianco, e poi allontanando da lui lentamente lo schermo, egli poteva ininterrottamente seguire l'ingrandirsi dell'immagine consecutiva sullo schermo che si allontanava (2).

Ritornando ora all'altra specie di movimenti, cioè a quelli di lateralità, che sono i più frequenti e i più facilmente osservabili, riferiamo qui brevemente i risultati di alcune altre nostre esperienze:

(1) V. anche Hering, Op. cit., p. 21.

(2) Un fatto analogo si può osservare facilmente nel guardare il sole. Nel guardarlo un giorno poco prima del tramonto, osservammo il prodursi di parecchie immagini consecutive d'esso, le quali erano variamente distribuite nel campo visivo, e, localizzate sul cielo, apparivano su un piano più vicino che non fosse quello in cui si vedeva il sole. Le stesse immagini localizzate su oggetti vicini, apparivano più piccole che non quando si proiettavano su oggetti lontani o sul cielo. Il fatto della pluralità di tali immagini consecutive contemporaneamente presenti, si spiega facilmente, dati i movimenti involontarii che i nostri occhi avevano fatti mentre si guardava nella direzione del sole, e data l'intensità della sorgente luminosa capace di impressionare rapidamente e fortemente varii punti della retina durante gli spostamenti dell'occhio.

Dopo aver ottenuta l'immagine consecutiva di una fiamma a gaz Auer con un occhio solo, la si localizzava su una parete, mantenendo chiuso l'altro occhio. Il soggetto era invitato a fare movimenti volontari coll'occhio, percorrendo collo sguardo la parete in varie direzioni. Gli stessi movimenti vennero compiuti prima lentamente, e poi rapidamente, fermando ogni volta l'occhio nei punti estremi del movimento. I soggetti concordemente notarono quanto segue: *a)* durante i movimenti rapidi essi perdevano momentaneamente di vista l'immagine consecutiva, e la ritrovavano soltanto dopo il movimento; *b)* durante i movimenti lenti essi potevano seguire l'immagine durante tutto il suo spostamento.

L'osservatore fissava con un occhio solo un punto oscuro situato 15 mm. a sinistra di un foro del diametro di 15 mm. praticato in un cartoncino. Attraverso il foro era visibile una fiamma a gaz Auer. Per tal modo si otteneva una immagine della fiamma in un punto della retina a sinistra della fovea. In tali condizioni, proiettando poi con lo stesso occhio l'immagine consecutiva in una camera buia, si osservava come quella manifestasse continuamente la tendenza a spostarsi verso destra, malgrado gli sforzi che l'osservatore faceva per tenerla fissa dinanzi a sè. In tali condizioni si osservò pure come facilmente la si perdesse di vista, e come, non appena ritrovata, ricominciasse da capo la sua fuga.

Alcune esperienze abbiamo pure fatto sull'immagine consecutiva ottenuta coi due occhi. Osservammo così che l'immagine subiva spostamenti di lateralità e di avvicinamento con relativo impicciolimento, sia passivi che dipendenti da movimenti espressamente fatti. Tali spostamenti dell'immagine erano maggiori quando si era fissata la fiamma con la vista indiretta. Durante i movimenti rapidi di accomodamento e lateralità l'immagine era perduta di vista.

Dalle nostre esperienze appare ancora più chiaramente come l'ipotesi di Fick e Gürber non sia ammissibile, e come Hering e Wirth abbiano veramente ragione.

Noi osservammo il comportarsi delle immagini consecutive specialmente durante il movimento stesso (movimenti volontari e passivi lenti): e giungemmo alle stesse conclusioni di Hering.

Difatti durante i movimenti volontari lenti dell'occhio noi potevamo seguire lo spostarsi simultaneo dell'immagine sulla parete, su cui la localizzavamo. Nei movimenti spontanei, nei casi in cui l'occhio non aveva alcun reale punto di fissazione, come nella camera scura, il soggetto poteva seguire lo spostarsi dell'immagine in un medesimo piano. Solo dopo un ampio spostamento si perdeva momentaneamente di vista l'immagine per un tempo breve, riportandosi spontaneamente l'occhio con un movimento rapido nella posizione di prima. L'immagine veniva allora nuovamente localizzata in un punto corrispondente alla nuova direzione dello sguardo.

Una osservazione ugualmente continua dell'immagine consecutiva noi potemmo fare durante il lento avvicinarsi spontaneo di essa al soggetto. È questo un fenomeno assai interessante anche dal punto di vista degli apprezzamenti di distanza nella vista monoculare e che non crediamo sia stato da altri osservato e descritto.

È evidente che, se l'ipotesi di Fick e Gürber fosse vera, dovrebbero osservarsi, anche durante i movimenti lenti dell'occhio, dei disturbi nella visione dell'immagine consecutiva positiva e negativa, il che non avviene.

Exner nel riferire che durante i movimenti ad occhio chiuso l'immagine consecutiva non scompare, non specifica le condizioni sotto le quali furono fatte queste esperienze. Noi le abbiamo ripetute ed abbiamo potuto constatare che anche in questi casi la scomparsa dell'immagine consecutiva dipende dal modo in cui questi movimenti vengono eseguiti. Difatti l'immagine non scompariva, quando il movimento oculare era lento, ma scompariva invece, quando esso era rapido.

Noi pure tendiamo ad attribuire la massima importanza, nei disturbi che si notano nella visione dell'immagine consecutiva in dipendenza ai movimenti rapidi dell'occhio aperto o chiuso, piuttosto ai processi di appercezione. Difatti durante un movimento rapido dell'occhio è molto difficile l'appercezione sia di un oggetto esterno che di una immagine consecutiva. Tale disturbo non si ha più durante i movimenti lenti sia passivi che attivi dell'occhio, in cui si può accompagnare l'immagine in tutto il suo decorso.

Ma non sempre, come vuole Wirth, i nostri processi ap-

percettivi precedono il movimento stesso; essi possono anche seguirlo. Così l'occhio, dopo essersi spostato di un certo tratto dalla sua posizione durante i movimenti passivi, ritorna con un movimento a scatto in quella posizione, mentre i processi appercettivi rimangono certamente ancora, per un dato tempo, legati alla posizione in cui l'immagine fu vista prima di quel movimento. Ugualmente può dirsi nel caso dell'avvicinamento spontaneo dell'immagine, seguito dalla momentanea scomparsa di questa e dal ritrovarla in un punto più lontano. Anche in questo caso i nostri processi appercettivi sono ancora per un certo tempo legati ad un punto più vicino, mentre già l'occhio si è accomodato ad un punto più lontano.

Naturalmente sulla durata della scomparsa della immagine consecutiva ha influenza l'intensità del processo retinico stesso; poichè vediamo farsi più lunghi questi tempi di latenza negli ultimi periodi dell'immagine. Quand'esso invece è molto intenso, anche facendo un rapido movimento coll'occhio (aperto o chiuso), subito la si ritrova, e si ha quasi l'impressione di non averla perduta di vista. Certo il processo retinico, se intenso, richiama a sè più facilmente e più prontamente i nostri processi appercettivi, che non quando è debole. Quando si escludono i movimenti oculari di lateralità, localizzando l'immagine consecutiva su di un punto luminoso fermo, che si fissa con un occhio in una cassetta oscura, si osserva come anche qui negli ultimi periodi soltanto si abbiano dei tempi di latenza della immagine, che forse dipendono dalle oscillazioni dell'attenzione quando il processo retinico stesso va avvicinandosi ai limiti minimi della percezione visiva (1).

Sull'importanza dei processi appercettivi in questi fenomeni, riferiamo ancora un'esperienza che ci fu comunicata dal Prof. Kiesow.

Fissando coi due occhi attraverso due prismi una fiamma a gaz Auer in modo da vederla sdoppiata, noi otteniamo la formazione di due immagini consecutive distinte, che proiettate su una parete ci appaiono nei primi momenti, quando ancora sono

(1) Interessante è, a questo proposito, quanto dice Hering sulle cause che possono produrre, indipendentemente dal movimento, dei disturbi nella percezione dell'immagine consecutiva. (*Beitrag zur Lehre vom Simultankontrast*, " Zeitschr. f. Psych. u. Phys. ecc., „ Bd. 1, p. 21 e segg.).

molto forti, contemporaneamente e press'a poco della stessa intensità. Ma quando esse incominciano a indebolirsi, si osserva il fenomeno dell'alternativo e irregolare preponderare di una di esse, mentre l'altra va diminuendo di intensità fino a scomparire, per farsi poi di nuovo prevalente. Si ha tra le due immagini, sia positive che negative, una specie di lotta, che ricorda il fenomeno della lotta dei campi visivi. La appercezione, secondo noi, in questo caso si volge or all'una or all'altra immagine, e quella che non cade sotto la nostra appercezione, tende a scomparire. Anche qui certamente i processi appercettivi tendono a coincidere colla direzione della linea visiva.

Abbiamo dunque visto finora come l'ipotesi di Fick e Gürber non possa reggere, ed abbiamo veduto quale importanza debbasi attribuire alla direzione dei processi appercettivi nel fatto della scomparsa dell'immagine.

Rimane ora a indagare perchè si verifichino dei movimenti passivi o spontanei dell'immagine consecutiva. E, dicendo movimenti passivi dell'immagine, intendiamo dire movimenti passivi dell'occhio, giacchè, come si sa, le escursioni di quella non sono che un mezzo di controllo dei movimenti di questo.

Noi crediamo che il fatto di tali movimenti passivi, sia di lateralità che di avvicinamento, dell'immagine consecutiva, abbiano alcunchè di analogo con quelli che si osservano nella fissazione, con un occhio solo, di un punto luminoso isolato in un ambiente completamente oscuro (1). Però, in questo caso, i movimenti che si osservano nel punto sono assai più ridotti di quelli che si osservano nell'immagine consecutiva, a motivo della reale esistenza di un punto d'appoggio per la fissazione. Tali movimenti del punto luminoso fissato si osservano allorchè l'occhio è già alquanto stanco, e sono piuttosto movimenti circolari, lenti, irregolari. Anche i movimenti di avvicinamento, in questo caso, sono molto più limitati. Per tale analogia noi riteniamo che queste nostre osservazioni sui movimenti spontanei delle immagini consecutive vengano in appoggio di Hoppe (2), il quale attribuisce

(1) V. W. Nagel, *Handbuch d. Physiol. d. Menschen*, Bd. 3, 2. Hälfte, p. 374. 1905.

(2) Hoppe, *Die Scheinbewegungen*, 1879.

le cosiddette sensazioni autocinetiche visive a movimenti involontari dell'occhio.

Naturalmente nell'osservare un'immagine consecutiva di una fiamma in una camera oscura, mancando un punto reale di fissazione, e l'occhio venendo abbandonato a sè stesso, si rendono molto più facili tali movimenti passivi.

Ora tra le cause che si debbono riconoscere a tali movimenti passivi dell'immagine consecutiva, ci sembra si debbano considerare come più importanti le seguenti:

Nell'oggettivare l'immagine consecutiva, si dimentica facilmente che l'immagine consecutiva non è un oggetto del mondo esterno; e si cerca spesso di portare istintivamente nel centro visivo le parti che di essa più ci sfuggono, e ciò allo scopo di afferrarne meglio i particolari. Si comprende quindi uno spostamento della immagine simultaneo al movimento dell'occhio. Ma quando lo sguardo ha raggiunto un certo grado di deviazione, l'occhio automaticamente ritorna con movimento a scatto nella posizione di prima per esso più comoda. Più evidente ancora vedemmo questo fattore dello spostamento passivo dell'immagine nella esperienza, in cui veniva eccitata una parte della retina fuori della fovea; nel qual caso si osservavano aumentati questi spostamenti.

Un'altra di tali cause noi vediamo pure nella facilità che ha l'occhio a muoversi in certe direzioni. Così, ad esempio, essendo più facili i movimenti dell'occhio in basso che non in alto, si hanno preferibilmente degli spostamenti dell'immagine consecutiva verso il basso. Questa nostra ipotesi della direzione preferita del movimento oculare trova un appoggio anche in una osservazione di Hering (1). Egli notò che, facendo prima convergere le linee visive simmetricamente o verso sinistra e poi abbandonando gli occhi a sè stessi, essi scorrevano involontariamente in modo lento fino a un certo punto verso destra, come si poteva vedere dal regolare spostarsi della immagine consecutiva. Quel movimento spontaneo succedeva in lui esclusivamente in tale direzione; ed Hering ne ritiene causa probabile la posizione in cui egli tiene il capo nel leggere e nello scrivere, e dal conseguente uso asimmetrico dell'apparato motore.

(1) Op. cit., p. 21.

Finalmente colle variazioni di tonicità del muscolo ciliare e dei muscoli che entrano in funzione nei movimenti di convergenza e divergenza, noi crediamo di poter spiegare l'avvicinarsi spontaneo dell'immagine e le sue oscillazioni in diversi piani.

Riassumendo:

Noi non crediamo che i movimenti oculari abbiano alcuna azione sulla scomparsa del processo retinico, a cui è legata l'immagine consecutiva, sia positiva che negativa. I movimenti rapidi ne impediscono solo la percezione; ed i movimenti lenti (attivi e passivi) non ne disturbano la percezione e non ne modificano affatto la intensità e la chiarezza.

A loro volta i movimenti passivi dell'immagine consecutiva riconoscono, secondo noi, come cause l'involontario cercare dell'osservatore di portarne i contorni nel centro visivo; la facilità con cui l'occhio si sposta in certe direzioni; le variazioni di tonicità dei muscoli dell'occhio.

Al Prof. Kiesow esprimiamo qui i nostri ringraziamenti per i suoi consigli e per l'interesse con cui seguì le nostre esperienze.

R. Istituto di Psicologia sperimentale ed applicata (Fondazione E. E. Pellegrini), diretto dal Prof. F. Kiesow, in Torino.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 16 Febbraio 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Carle, Allievo, Pizzi, Chironi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Sforza e De Sanctis Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Brusa e Brondi.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 2 febbraio 1908.

Il Presidente comunica una circolare della Reale Società Romana di Storia patria in cui, rilevandosi come sovente amministrazioni governative provinciali e comunali abbiano cambiato antichi nomi di strade o paesi in nome moderni, si accenna all'iniziativa presa dalla Società stessa per provocare dal Governo provvedimenti legislativi che disciplinino la delicata materia e si chiede all'Accademia che avvalori con la sua adesione tale iniziativa. La Classe con voto unanime esprime la sua adesione a questo divisamento della Società Romana di Storia patria.

Il Socio Chironi offre in dono il *Discorso del Senatore O. Quarta per l'inaugurazione dell'anno giuridico alla Corte di Cassazione di Roma il 5 gennaio 1908* (Roma, 1908) e rileva la sapienza giuridica che lo informa.

Il Socio Stampini presenta per gli *Atti* una nota del Dr. Cesare Travaglio: *La scrittura latina volgare nei papiri dei primi cinque secoli dopo Cristo*. Questa nota è destinata a riassumere e sostituire la Memoria del Dr. Cesare Travaglio sullo stesso argomento che fu presentata nell'adunanza del 9 dicembre 1906.

Il Socio De Sanctis presenta pure per gli *Atti* le *Ricerche sui Tolemei Eupatore e Neo Filopatore* di Luigi Pareti.

Per le *Memorie* il Socio D'Ercole, d'accordo col Socio Allievo, presenta una dissertazione del Dr. Pietro Eusebietti intitolata: *Elementi di fasiopsicologia*. Il Presidente delega i Soci Allievo e D'Ercole a riferirne in una prossima adunanza.

LETTURE

Ricerche sui Tolemei Eupatore e Neo Filopatore.

Nota di LUIGI PARETI.

Le notizie che le nostre fonti ci dànno sui Tolemei Eupatore e Neo Filopatore, costituiscono uno dei più dibattuti e complicati problemi della storia dei Lagidi. Non sarà cosa inutile riesaminare la questione, prima di dichiararla irresolubile, come sembra voglia fare una critica un po' troppo scettica.

Pausania (1) dice ottavo dei Tolemei Filometore Sotere II. Strabone (2) ed Ateneo (3) dicono settimo Evergete II, che invece secondo Sparziano (4) ed Eusebio (5) sarebbe stato l'ottavo. Altre testimonianze ci sono fornite da epigrafi e papiri (6) sempre più numerosi, che ci dànno notizia di nuovi Tolemei, il cui nome non ricorre negli scrittori classici: Eupatore e Neo Filopatore. Tali nomi sono variamente collocati, in relazione con quelli degli altri Lagidi: per la loro posizione rimando alla ap-

(1) I, 9, 1.

(2) XVII, 795: Πτολεμαῖος γὰρ ὁ Λάγου διεδέξατο Ἀλέξανδρον, ἐκεῖνον δὲ [ὁ] Φιλάδελφος, τοῦτον δὲ ὁ Εὐεργέτης, εἶθ' ὁ Φιλοπάτωρ ὁ τῆς Ἀγαθοκλείας, εἶθ' ὁ Ἐπιφανής, εἶθ' ὁ Φιλομήτωρ, παῖς παρὰ πατρὸς ἀεὶ διαδεχόμενος. τοῦτον δ' ἀδελφὸς διεδέξατο ὁ δεύτερος Εὐεργέτης, ὃν καὶ Φύσκωνα προσαγορεύουσι τοῦτον δ' ὁ Λάθουρος ἐπικληθεὶς Πτολεμαῖος, τοῦτον δ' ὁ Αὐλητὴς ὁ καθ' ἡμᾶς, ὅσπερ ἦν τῆς Κλεοπάτρας πατήρ.

(3) IV, 184 *b*; V, 252 *e* (da Posidonio, v. *F. H. G.*, III, p. 254); XII, 549 *d* (da Posidonio, v. *F. H. G.*, III, p. 255).

(4) Caracalla, 6.

(5) I, p. 262, Schoene: dice che Trifena fu figlia di Tolemeo VIII.

(6) Cito un esempio fra tanti: Grenfell, I, 27 (= *An Alexandrian erotic fragment, etc.*, Oxford, 1896): βασιλευόντων Κλεοπάτρας καὶ βασιλέως Πτολεμαίου θεῶν Φιλομητόρων σωτήρων ἔτους η' [= 109 a. C.], ἐφ' ἱερέως τοῦ ὄντος ἐν Ἀλεξανδρείαι Ἀλεξάνδρου | καὶ θεῶν σωτήρων καὶ θεῶν ἀδελφῶν καὶ θεῶν εὐεργετῶν καὶ θεῶν φιλαπατόρων καὶ θεῶν ἐπιφανῶν καὶ θεοῦ εὐπάτορος καὶ θεοῦ φιλομήτορος | καὶ θεοῦ φιλοπάτορος νέου καὶ θεοῦ εὐεργέτου καὶ θεῶν φιλομητόρων σωτήρων, ἱεροπώλου Ἴσιδος μεγάλης μητρὸς θεῶν, ἀθλοφόρου Βερενίκης | εὐεργέτιδος, κανηφόρου Ἀρσινόης Φιλαδέλφου, ἱερείας..., etc.

pendice, nella quale ho creduto utile di enumerare i vari documenti, di cui ho potuto aver conoscenza (1).

Un primo punto da fissare è che col nome di Eupatore viene indicata una persona sola. Ognuna delle fonti non lo nomina che una volta, in nessuna tal nome ricorre in due luoghi distinti. Poichè è assai improbabile che ciò dipenda da pura combinazione, paiono da scartare le teorie che presuppongono la dualità di Eupatore (2), dualità cui si potrà ricorrere solo quando non si riesca altrimenti a spiegare in modo plausibile le fonti. Ma se Eupatore è una persona sola, perchè viene posto ora prima, ora dopo di Filometore? Quale collocazione è la vera? Dapprima alcuni storici credettero che Eupatore si dovesse identificare con Filometore (3), o con Evergete (4); ma queste spiegazioni, destituite di ogni verisimiglianza, e che si possono combattere con numerose e forti obbiezioni, sono ormai del tutto antiquate e dimenticate, cosicchè possono citarsi soltanto più come curiosità storiche. — Altri credettero che la vera collocazione di Eupatore fosse prima di Filometore. Si potrebbe adunque trattare di un fratello maggiore di Filometore, che l'avrebbe preceduto per breve tempo sul trono, e questa tesi appunto sostennero il Lepsius (5), il Franz (6), l'Huberts (7), il Gutschmid (8), il Grenfell (9), il Mahaffy (10). Ma si possono fare delle valide obbiezioni, di cui le principali sono: che un'iscrizione di Cipro (11) dice senz'altro Eupatore figlio di Filometore, e che

(1) Cfr. le precedenti liste date dallo Strack, " Ath. Mitt. ", XX (1895), p. 343 sgg., e dal Laqueur, *Quaestiones epigraphicae et papyrologicae selectae*, Argentorati, 1904, passim.

(2) Cfr. ad es.: Mahaffy, *The empire of the Ptolemies*, London, 1895, p. 329 n. 2; Strack, " Ath. Mitt. ", XX (1895), p. 221.

(3) Letronne, *Rec. des Inscript.*, I (1842), p. 365 sgg.

(4) Boeckh, *Erklär. einer Aegypt. Urk.*, 1821, p. 11.

(5) " Rev. Archéol. ", I (1844); " Abh. Berl. Ak. ", 1852, p. 465 sgg.; *Briefe aus Aegypten, etc.*, Berlin, 1852, pag. 95. 410.

(6) *C. I. Gr.*, III, p. 285.

(7) *Observationes chronologicae in Ptolemaeorum historiam*, Lugd. Batav., 1857.

(8) In: Sharpe, *Gesch. Aegyptens*, I, p. 242 n. 1. 255 n. 1.

(9) I, p. 53.

(10) Op. cit., p. 328 sgg. 374 n.

(11) Le Bas, III, 2809 = Strack, *Die Dynastie der Ptolemäer*, Berlin 1897. Appendice: *Sammlung griech. Ptolem.-Inschriften*, n. 101 = Dittenberger, *O. G. I.*, n. 125.

Giuseppe Flavio (1) dice che Epifane morendo lasciò soltanto due figli: Filometore ed Evergete. Inoltre sarebbe inesplicabile l'errore di moltissimi papiri, di cui pure alcuni risalgono fino al 150 a. C., quando pongono Eupatore dopo di Filometore, e non si intenderebbe perchè il suo nome compaia nei documenti solo col 150. E si può anche notare che le fonti classiche, che pure ci danno notizie minute sulla minorità di Filometore, ignorano l'esistenza di un regno intermedio tra quello di Epifane ed il suo. Meno improbabile sarebbe un'altra teoria del Franz che vede in Eupatore uno zio di Filometore, un cadetto di Epifane. Ma se il fatto di uno zio che frapponga il suo regno tra quelli del fratello e del nipote può trovare delle analogie (2), e se con tale ipotesi si evita il contrasto con Giuseppe Flavio, restano tutte le altre obbiezioni fatte alla teoria precedente, e non poche ancora che si possono assai facilmente trovare.

Un' altra ipotesi fu sostenuta dallo Champollion (3), ed accolta dal Saint-Martin (4), dal Letronne (5), dal Boeckh (6), dal Cless (7), dal Brunet de Presle (8), dal Revillout (9), dal Waddington, dal Dittenberger (10), dal Bouché-Leclercq (11). Essi considerarono Eupatore figlio di Filometore, e lo identificarono con quel figlio di quest' ultimo che, secondo Giustino (12), sarebbe sopravvissuto al padre, ma per breve tempo, perchè ucciso dallo zio Evergete. Ma in tal caso si intenderebbe difficilmente come tale nome ricorresse negli atti ufficiali del regno di Evergete, e si dovrebbero ritenere errati tutti quei documenti che pongono Eupatore prima di Filometore: eppure si tratta di fonti

(1) *Ant. Iud.*, XII, 4, 11 (235).

(2) Cfr.: Antigono Dosone, Attalo II, Evergete II (v. oltre).

(3) *Éclairciss. hist. sur le contrat de Ptolémaïs*, p. XXV; *Notice de deux papyrus Égypt.*, 1823, p. 10; " Journal Asiat. ", III, p. 43.

(4) " Journal des Sav. ", 1822, p. 559.

(5) *Recherch. pour servir à l'hist. de l'Égypte*, 1823, p. 124.

(6) *C. I. Gr.*, (1825), 2618.

(7) Art. " Ptolemaeus " in *R.-Enc.* del Pauly, tomo VI, 1852, p. 178-238.

(8) *Papyrus grecs du Musée du Louvre*, in " Notices et extraits des Mss. ", XVIII, II, 1865, p. 153.

(9) *Association de Ptolémée Epiphane, etc.*, in " Revue égypt. ", III, 1883, p. 6.

(10) *O. G. I.*, I, 125-127.

(11) *H. des Lagides*, II, 53. 56 sgg.

(12) XXXVIII, 8, 3 sgg., cfr. Orosio, V, 10, 7.

contemporanee (1). Inoltre se si accetta (e nulla ci autorizza a non accettarla) (2) la notizia fornitaci da un papiro demotico (3), secondo cui Eupatore nel 153/2 sarebbe già stato associato dal padre, e se d'altra parte, come vedremo, Eupatore fu associato in età abbastanza matura, ne viene che si devono considerare del 135/4, e non del 146/5, due documenti assai importanti, il che presenta, come vedremo, qualche difficoltà, e che si dovrebbero ritenere in errore Giustino e Giuseppe Flavio, quando dicon fanciullo (*puer*) il presunto Eupatore, che invece doveva aver circa venticinque anni (4).

Il Grenfell (5) propose un'altra spiegazione: egli crede che Eupatore, figlio di Filometore, sia stato associato nel 153/2, e sia premorto al padre. Se si ammettesse questa teoria, che a me pare indubitatamente la migliore, si riuscirebbe a spiegare, come vedremo appresso, ed i casi in cui Eupatore viene nominato prima di Filometore, e quelli in cui viene nominato dopo: infatti un associato che sia salito al trono dopo dell'associante, e ne sia disceso prima, può secondo criteri cronologici ugualmente legittimi, esser collocato nelle liste così prima, come dopo dell'associante. Ed una buona analogia si ha per il primogenito di Antioco III il grande, che associato dal padre e premortogli, viene, dopo la propria morte, collocato nelle liste anche prima del padre (6). A tale teoria il Grenfell stesso, che la pro-

---

(1) La spiegazione del Bouché-Leclercq, op. cit., II, 63 n. 1, che si tratti di un artifizio di Evergete per nascondere le traccie del suo assassinio, par improbabile, dato che tale artifizio sarebbe stato nullo per quelli appunto per cui sarebbe stato fatto; ossia pei contemporanei. Ma inoltre, anche senza considerare che il carattere di Evergete non pare il più favorevole per tali scrupoli (cfr. l'assassinio di Menfite), sta il fatto che la posizione: Eupatore, Filometore, ricorre già tra il 150 ed il 145, ossia prima della morte di Filometore. Quanto alla spiegazione del Laqueur, per non sminuzzare il ragionamento rimando a quanto ne dirò oltre.

(2) Infatti già nei documenti del 150 Eupatore viene detto dio.

(3) V. oltre.

(4) Su questo ed altri argomenti contro la teoria del Laqueur, vedi più innanzi.

(5) *Tebtunis papyri*, I, 1902, p. 554.

(6) Iscriz. sacerdotale di Seleucia, in *C. I. Gr.*, 4458 = Dittenb., *O. G. I.*, 245. Su questo figlio di Antioco III, vedi " Zeitschr. für Assyriol. ", VII, (1893), p. 108-113; Gutschmid, *Geschichte Irans*, 33 n. 3; Wilcken in *Real-Enc.*, di

pose, credette si opponesse Giustino. Egli essendo convinto che Eupatore premorisse al padre, dichiarò errato il racconto di Giustino, che fa invece morire un figlio di Filometore dopo di lui (1). Ma vediamo se esista realmente un disaccordo tra la ipotesi del Grenfell ed il racconto di Giustino. A questo punto, prima di procedere, dobbiamo tentare la questione della identità di Neo Filopatore: ed anche qui esamineremo le varie teorie proposte dagli storici moderni.

Una prima ipotesi è sostenuta da chi identifica Eupatore con Neo Filopatore (2). Ma bisognerebbe considerare errati i documenti, che nominano entrambi in luoghi distinti, come persone diverse. È vero che i sostenitori di tale teoria credono che siano esistiti due Tolemei col nome di Eupatore, e solo col secondo tra essi lo identificano; ma a parte l'improbabilità della distinzione di due Eupatori, e la difficoltà per ammettere che il primo fosse figlio di Epifane, bisognerebbe tuttavia ritenere come errati i documenti che pongono Eupatore e Neo Filopatore entrambi dopo di Filometore (3) come due persone distinte (4).

Un altro gruppo di ipotesi tendono a considerare Neo Filopatore come figlio di Evergete. Prima di discutere le singole identificazioni coi singoli figli veri o supposti di Evergete, si può in linea generale obbiettare che riesce assai difficile intendere, come mai solo le iscrizioni geroglifiche di tre templi, se pure esistono (5), ci diano Neo Filopatore dopo di Evergete, mentre tale collocazione sarebbe stata la regolare, viventi e morti en-

---

Pauly-Wissowa, vol. I, col. 2470; Kern, *Die Inschriften von Magnesia am Maeander*, Berlin, 1900, n. 61; Bevan, *The House of Seleucus*, 1902, II, p. 17; Niese, *Gesch. d. Griech. und Maked. Staat.*, II, 679 n. 3. 777; Bouché-Leclercq, op. cit., I, 284. 382. 396, II, 63.

(1) Veramente non solo Giustino, ma anche Giuseppe Flavio, *C. Apion.*, II, 51, ed Orosio, loc. cit., ostacolerebbero. Cfr.: Bouché-Leclercq, op. cit., II, 63 n.; Laqueur, op. cit., pp. 46-47. Giuseppe Flavio ci dice che Evergete, morto Filometore, voleva cacciarne i figli: ora poichè Cleopatra Thea non era in Egitto, si può spiegare il plurale solo ammettendo l'esistenza di un altro figlio oltre Cleopatra III.

(2) Mahaffy, op. cit., p. 329 n. 2. 374.

(3) Vedi l'appendice, n[i] 21-28 (forse anche i n[i] 11-20, vedi in seg.).

(4) Sarebbe anche di difficile spiegazione il n. 100 dell'appendice.

(5) Vedi oltre i dubbi sull'esistenza di tali documenti.

trambi (1), ove questo associato fosse premorto al padre; e l'unica legittima ove gli fosse sopravvissuto. Anche i motivi per cui si ricorre per Neo Filopatore all'identificazione con un figlio di Evergete, non sono molto validi. Giacchè in primo luogo si ritenne, erroneamente, secondo il mio modo di vedere, che essendo Eupatore figlio di Filometore, non potesse anche esserlo Neo Filopatore. L'altro motivo è connesso con questo: poichè, se si ammette che Filometore abbia associato un solo figlio nell'anno 153/2, l'iscrizione del Fayûm e la moneta di Pafo che parlano del 36° anno di regno di un associato e del 1° di un altro, non si possono riferire al 36° anno di Filometore (146/5), ma di Evergete (135/4), e quindi si viene a porre l'associazione di Neo Filopatore in tale anno. — Un altro motivo, ma indipendente dai precedenti, anzi in contrasto col secondo, è che una moneta di Pafo (2). porta scritto sul retro. oltre a ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΩΣ ch'è nel contorno. a sinistra di un'aquila LN e a destra ΠΑ. Evidentemente tale moneta spetta al cin-
*   *
Ȧ

quantesimo anno di Evergete (121/20), e inoltre la lettera A a sinistra dell'aquila pare indichi il primo anno di regno di un suo associato. Ma se anche non si condividono i dubbi del Bouché-Leclercq (3) che tale moneta non accenni realmente a due associati, nulla prova che il figlio di Evergete cui si alluderebbe, si debba identificare con Neo Filopatore (4).

Premesse queste obbiezioni di indole generale, se esaminiamo le singole identificazioni di Neo Filopatore coi figli di Evergete, vediamo che ognuna di esse va incontro anche ad altre difficoltà. Lo Strack (5) propose l'identificazione con Menfite, e tale

---

(1) Anche qui il Laqueur spiega colla sua teoria del posto d'onore, contro la quale vedi oltre.

(2) Riprodotta dallo Stuart Poole, *Catalogue of greek Coins, etc.*, *The Ptolemies Kings of Egypt*, London, 1883, Tav. XXIII, 4. p. LXXIII, 96. Vedi anche Strack, op. cit., p. 47. 78; Niese, op. cit., III, 266 n. 4; Laqueur, op. cit., p. 48.

(3) Op. cit., II, p. 81 n. 1.

(4) Si può benissimo trattare di qualche altro figlio di Evergete II e Cleopatra III, forse anche di qualche figlio illegittimo, e non è escluso Filometore Sotere stesso. Vedi Bouché-Leclercq, op. cit., II, 81. 82. Cfr. Paus., I, 9. 1.

(5) Op. cit., p. 179 n. 1.

ipotesi fu recentemente accolta e sviluppata dal Bouché-Leclercq (1). Ma se si crede che Menfite sia stato realmente associato (2), oltre al fatto che le nostre fonti non ci dicon mai ch'egli abbia regnato, assai male si comprenderebbe come Evergete associasse giovanissimo, ed a detrimento degli altri figli, quello appunto natogli da Cleopatra II, che egli aveva ripudiata e colla quale stava per venire a guerra aperta. Parrebbe ben più probabile attribuire un simile progetto a Cleopatra II, piuttosto che ad Evergete (3). Se poi col Bouché-Leclercq si crede che l'associazione non sia avvenuta, ma che si tratti solo di una deificazione postuma, posteriore alla rappacificazione con Cleopatra II, di una negazione ufficiale del misfatto commesso, si cade nella improbabilità, perchè si intende difficilmente come si deificasse un bambino che non aveva regnato, e perchè non pare che il violento ed autoritario Evergete potesse essere propenso a simili ritrattazioni ufficiali. — Anche l'identificazione di Neo Filopatore con un supposto secondo figlio di Cleopatra II e di Evergete, che fu sostenuta dal Revillout, dallo Stuart Poole, dall'Head, e dallo Strack (4), pare improbabile. Si può opporre infatti che nessuna fonte conosce un fratello di Menfite, e che anzi contro la sua esistenza si oppone il fatto che la convivenza di Cleopatra II con Evergete durò breve tempo, se, come pare, già nel 143 egli l'aveva ripudiata per sposare Cleopatra III (5). Inoltre, se si crede ch'egli sia stato realmente associato, si può porre questo fatto nel 135/4, e allora sussistono le obbiezioni fatte alla identificazione con Menfite; oppure si può porlo nel 121/0, ma in tal caso non si tiene conto di una serie di documenti in cui, come mi sembra, veniva già notato Neo Filopatore fino dal 128 (6), e inoltre non si spiegano quei documenti

(1) Op. cit., II, p. 82 n. 1.

(2) Si verrebbe a collocare tale associazione nel 133/4. Resterebbe impregiudicato il quesito dell'altra associazione del 121/0, poichè Menfite fu ucciso nel 130.

(3) Vedi l'assassinio di Menfite da parte di Evergete nel 130. Cfr. Revillout, *Mélanges sur la métrologie, l'écon. polit. et l'histoire de l'anc. Égypte*, Paris, 1895, p. 292 sgg., e Bouché-Leclercq, op. cit., II, 71 n. 2, che non obbietta nulla.

(4) Op. cit., p. 178 sgg.

(5) Vedi Bouché-Leclercq, op. cit., II, 64. 81; Strack, op. cit., 198, 20.

(6) Vedi appendice n[i] 11-20.

che parlano del 36° e del 1° anno di due associati. — E così pure non mi pare accettabile l'identificazione di Neo Filopatore con un presunto primo figlio di Cleopatra III ed Evergete, che viene esposta e nello stesso tempo combattuta dal Bouché-Leclercq (1). Qui infatti il silenzio delle fonti ha una riprova nella difficoltà di trovar posto per la sua nascita, se Sotere II era già nato, come pare, nel 142.

Un'altra spiegazione del problema concernente Neo Filopatore trovò per suoi sostenitori il Lepsius, il Franz, l'Huberts, il Grenfell, il Mahaffy, i quali lo identificarono con quel figlio di Filometore, che secondo le fonti classiche sarebbe stato ucciso da Evergete. Questa teoria che dai suoi sostenitori fu, se non erro, non bene collegata col problema di Eupatore, mi pare la migliore. Già vedemmo come il figlio di Filometore ucciso da Evergete non possa essere Eupatore, come quest'ultimo sia premorto al padre, e non possa identificarsi con Neo Filopatore; pare adunque che la spiegazione più semplice e probabile sia questa: Eupatore e Neo Filopatore furono entrambi figli di Filometore, il primo, associato dal padre gli premorì, il secondo, associato dopo la morte del primo, sopravvisse a Filometore, e fu tolto di mezzo dallo zio Evergete. In tal modo non vi è nessun contrasto tra la teoria del Grenfell, che abbiamo accolta, e le notizie forniteci dai classici, specialmente da Giustino. Vediamo ora se la nostra ipotesi possa trovare delle conferme, e come riesca a conciliarsi con le notizie forniteci dalle varie fonti.

Un papiro demotico di Gebelên, letto dal Griffith (2) ci informa che Eupatore era associato al padre nel 29° anno di quest'ultimo (153/2 a. C.); un altro papiro demotico del 4 Tybi dell'anno 31° (fine gennaio 150) (3) pone Eupatore prima di Filometore. Pare adunque probabile che Eupatore regnasse dal 153/2 almeno, fino forse al termine del 151, o ai primi giorni del 150: se agli ultimi di gennaio egli veniva già collocato prima del padre, ciò non significa altro se non ch'egli era già morto. In

(1) Op. cit., II, p. 82 n. 1.

(2) Vedi: Grenfell, *Tebt. Pap.*, I, p. 554; Niese, III, 206; Laqueur, op. cit., p. 46; Bouché-Leclercq, op. cit., IV, 321, che pare siasi dimenticato del passo del Grenfell.

(3) Vedi appendice, n. 30-31.

questo spazio di circa due anni cade, secondo noi, il papiro greco Amherst II 45 (1), la cui dedica è diretta a Filometore e ad Eupatore, viventi entrambi. Per questo motivo il Grenfell, che lo pubblicò, lo ritenne degli anni 150-145, ma se è vero quanto abbiam detto innanzi non par dubbio che vada riferito agli anni 153/2-151/0. Che Eupatore non fosse ancora re, non pare si possa dedurre dal documento: egli ha già ricevuto il suo nome ufficiale (2); il papiro non lo dice esplicitamente re, ma non dice tale neppure il padre. Così pure non pare si possa dedurre dal papiro che Eupatore non fosse ancora deificato, poichè, anche a parte il fatto che con ogni probabilità l'assunzione al trono e la deificazione dovevano essere contemporanee, si deve notare che il nostro papiro è monco in fine delle linee, e che appunto la linea in questione finisce così: Πτολε....... e la successiva incomincia con Εὐπάτ[ο]ρος. Il Grenfell supplì: Πτολε[μαίου δὲ] Εὐπάτορος, etc.; ma se si osserva che tanto la linea precedente, quanto la seguente, sembra presentino una lacuna di undici lettere, non pare improbabile che anche nella linea di cui si tratta la lacuna sia di tale lunghezza, per cui si potrebbe leggere: Πτολε[μαίου δὲ θεοῦ] | Εὐπάτορος, etc. Oltre questo papiro cadono, secondo la nostra ipotesi, tra gli anni 153/2-151/0 anche tre iscrizioni di Cipro (3).

Quale fu probabilmente il motivo occasionale dell'associazione di Eupatore? Circa quei tempi i desideri di Evergete, di Demetrio I e dei Romani erano rivolti a Cipro. Un tentativo di Demetrio per impadronirsene col tradimento (4) era fallito, ed i Romani nel 154/3 avevano tentato invano di porvi colla forza Evergete (5). La data ci è fornita dal sincronismo dell'arrivo di Evergete a Roma e della partenza del console Opimio contro gli Ossibi (6). La guerra non potè essere lunga, διὰ τὸ μέγεθος τῆς στρατιᾶς di Filometore (7): non si erra probabilmente po-

(1) Vedi appendice, n. 1.

(2) Vedi Bouché-Leclercq, op. cit., III, 75, 80.

(3) 1ª Le Bas, III, 2809 = Strack, n. 101 = Dittenb., *O. G. I.*, 125; 2ª *C. I. Gr.*, 2618 = Strack, n. 102 = Dittenb., *O. G. I.*, 126; 3ª Dittenb., *O. G. I.*, 127.

(4) Polibio, XXXIII, 3-4.

(5) Polibio, XXXIII, 5.

(6) Diod., XXXI, 83; Polibio, XL, 12. Cfr. Bouché-Leclercq, II, 42.

(7) Diod., XXXI, 33.

nendola nel 154-153. Ora poichè troviamo Eupatore associato nel 153/2, e tre iscrizioni secondo me degli anni 153/2-151/0 lo ricordano in Cipro come vivente e come re, pare evidente che la sua associazione sia collegata coi fatti di tale isola (1). Filometore, associando il figlio che allora poteva avere circa 17 o 18 anni (2), ed inviandolo, come pare probabile, a Cipro, veniva ad un tempo e ad assicurargli l'eventuale successione, che sarebbe probabilmente stata contrastata da Evergete, ove gli fosse sopravvissuto, ed a porre al governo della minacciata Cipro una persona fedele: il che si imponeva dopo ch'era stato tentato dallo stesso governatore dell'isola, di consegnarla per tradimento a Demetrio I (3).

Dalla morte di Eupatore a quella di Filometore, pare evidente che nei documenti, specialmente nelle liste di culto, che più che ai viventi si indirizzavano ai morti, Eupatore che finchè era vissuto era stato posto dopo del padre, dovesse invece venire enumerato prima di lui: il suo regno era compiuto e passato, quello del padre ancora vivente durava. Questa collocazione che pare logica si trova applicata nelle fonti appunto tra il 150 e il 145, che nominano sempre Eupatore prima del padre (4). L'analogia col caso già citato del primogenito di Antioco III è perfetta: anch'egli finchè visse fu nominato dopo del padre, ma quando gli fu premorto, lo si potè notare prima di lui (5). Di

(1) Il Bouché-Leclercq invece, che pone l'associazione di Eupatore nel 150, la collega colla posteriore guerra contro Demetrio I.

(2) Filometore quando sposò la sorella Cleopatra II (172 c.) poteva avere 14 o 15 anni: vedi Strack, op. cit., p. 31 sg.; Niese, III, 168 n. 3. 169 n. 4; Bouché-Leclercq, II, 5 sgg., IV, 319. Perchè Filometore associasse un figlio nel 153/2, si può ammettere o che gli sia nato circa il 170, quando egli stesso poteva avere a un dipresso 17 anni, o anche che lo associasse in età un poco inferiore ai 18 anni. L'una e l'altra spiegazione sono possibili: mi sembra che tutto lasci supporre che Eupatore fosse già in età tale da poter partecipare in modo attivo al regno.

(3) Nulla prova che Eupatore fosse eletto specificamente re di Cipro: egli dovette essere dal padre associato al trono di Egitto.

(4) Vedi appendice n[i] 29-38.

(5) Vedi: O. Kern, op. cit., p. 61 = Dittenb., *O. G. I.*, n. 233, e le iscrizioni cuneiformi enumerate dal Wilcken in *Real-Enc.* di Pauly-Wissowa, I, 2470, e dal Dittenb., *O. G. I.*, al n. 252. L'iscrizione dopo morte è in *C. I. Gr.*, 4458 = Dittenb., *O. G. I.*, 245. Vedi oltre.

tale analogia non si vale, anzi si pone da un punto di vista affatto diverso il Laqueur (1) per spiegare la collocazione di Eupatore prima di Filometore nei documenti degli anni 150-145. Ritenendo egli, probabilmente a torto, siccome tenteremo fra breve di dimostrare, che Eupatore sia sopravvissuto al padre, afferma: " ea praescriptorum lex vel norma observata est ex " qua rex primarius in fine nominatur, collega paenultimo loco „ e nella nota 1ª: " Quod nisi ita se haberet iam Ptolemaeo IV " regnante Φιλομήτορες ante Εὐπάτορα nominati essent „. Ma il Laqueur dimentica che il papiro greco Amherst II 45 sopra ricordato, ci dà appunto quest'ultima posizione, viventi padre e figlio. Inoltre, e lo vedremo tosto, è difficile ammettere col Laqueur che il figlio associato da Filometore nel 153/2 sia lo stesso che fu ucciso da Evergete, onde cadrebbe uno dei suoi presupposti, che cioè Eupatore sia sopravvissuto al padre. Ma anche per altra via mi pare improbabile la teoria del Laqueur, che assume troppo l'aspetto di postulato. Il culto dei re, specialmente ad Alessandria dove fu più regolare, fu sopratutto rivolto ai defunti, ch'erano disposti cronologicamente; i re ancora viventi venivano enumerati nella lista per onorarli certamente: ma l'ultimo posto era loro assegnato non perchè fosse considerato come il posto d'onore, ma perchè era quello che loro spettava virtualmente, secondo l'ordine cronologico che informava le liste (2). Che non si riguardasse come posto d'onore l'ultimo, lasciano supporre quelle liste in cui il nome del regnante non ricorre in fine, ma solo nella datazione e nella dedica (3): quelle che lo collocano in primo luogo, capovolgendo l'ordine dagli antenati (4): quelle che lo pongono in capo della enumerazione discendente, pur ripetendolo spesso anche in fine, onde il primo pare il posto d'onore, il secondo il cronologico (5): quelle infine che lo dànno subito dopo il nome del fondatore

(1) Op. cit., p. 48.

(2) Cfr. anche i documenti che non dànno l'appellativo divino ai viventi, pur ricordandosi di darlo agli estinti. Vedi Bouché-Leclercq, op. cit., III, 36; Strack, op. cit., n. 53. 63, e specialmente 72.

(3) Cfr. ad es. Laqueur, op. cit., p. 40 n. 2. 44 n. 1.

(4) Vedi qualche caso in Bouché-Leclercq, III, 35 n. 1.

(5) Bouché-Leclercq, III, p. 59 sgg.

della dinastia (1). Anche per questo motivo adunque mi pare improbabile che nei documenti degli anni tra il 150 e il 145 si ponesse Filometore per ultimo, solo per dargli il posto d'onore. Inoltre non mi sembra che tale sistema trovi delle analogie in documenti riguardanti i Tolemei in genere. Se, come vedemmo, base delle liste di culto era la successione cronologica, ne viene ch'esse dovevano presentare analogia con le dediche e le datazioni in cui si seguiva lo stesso criterio. Ed infatti noi troviamo che i documenti, riguardanti gli altri Tolemei, che ci ricordano accanto ai genitori regnanti i loro figli o non ancora o già associati, pongono naturalmente questi dopo di quelli (2). Lo stesso riscontriamo nei documenti spettanti proprio a Filometore, che menzionano con lui i suoi figli (3), nelle monete che pon-

(1) Bouché-Leclercq, II, 60, 62.

(2) Strack, op. cit., n[i] 57, 58, 59, 60, 70. Bouché-Leclercq, op. cit., I, 182 n. 1.

(3) Sarà bene enumerare i documenti che ci menzionano accanto ai Filometori i loro figli. Ad un solo figlio accennano: 1° Un'iscrizione di Tera: Strack, n. 60 = Dittenb., *O. G. I.*, 110; 2° Una base di statua di Hesseh: Strack, n. 82*a* = Dittenb., *O. G. I.*, 121. A più figli accennano: 3° Un'ara di Tera: Strack, n. 91 = Dittenb., *O. G. I.*, 112; 4° Una base di Cizio: Strack, n. 97 = Dittenb., *O. G. I.*, 113; 5° Un'iscrizione del tempio di Kom Ombos: Strack, 88 = Dittenb., *O. G. I.*, 114; 6° Un'iscrizione di Methona: Strack, 92 = Dittenb., *O. G. I.*, 115; 7° Una base di Kuklia in Cipro: Strack, 98; 8° Forse un papiro torinese: Brunet de Presle, op. cit., 30, 32 (dell'anno 165 probabilmente); 9° Una base di Kuklia in Cipro: Strack, 96; 10° Un papiro greco: " Bull. de la Soc. Arch. d'Alexand. ", 8 (1905), p. 120. La datazione di tali documenti è difficile: i primi due che parlano di un solo figlio posson essere i più antichi, sebbene possano anche benissimo riferirsi agli anni 150-146, quando di maschi non v'era che Neo Filopatore non ancora associato. Quanto agli altri si può credere che spettino tanto ad epoca anteriore al 153, come l'ottavo che è databile, quanto al periodo tra il 150 ed il 146, come l'epigrafe: Dittenb., *O. G. I.*, 111, su cui ci fermeremo tosto. L'opinione più probabile è che alcuni siano dell'un periodo, e gli altri dell'altro. Le uniche limitazioni cronologiche che mi paiono possibili sono: di escludere i primi anni di regno di Filometore, anteriori al matrimonio, e alcuni dei seguenti, in cui non poteva ancor esservi pluralità di figli: all'incirca adunque dal 181/0 fino al 165 al più; escludere gli anni in cui fu associato Eupatore (153/2-151/0), e quello in cui Neo Filopatore (146/5), perchè si fa cenno ai figli senza i titoli di re e di dio, e senza i nomi ufficiali. Ma anche così restano due lassi di tempo abbastanza lunghi: dal 165 al 153, e dal 150 al 146.

gono gli anni di regno dei suoi associati dopo dei suoi, e per citarlo ancor una volta nel papiro Amherst II 45, in cui, viventi entrambi, Eupatore vien nominato per secondo.

Negli anni tra il 150 e il 146 Filometore regnò da solo, forse anche perchè Neo Filopatore doveva essere ancor troppo giovane, per poterlo associare efficacemente. Con ciò bene si accorda l'iscrizione di una stela ora al Louvre (1), incisa in vita di Filometore, la quale pone Eupatore prima del padre, ossia è posteriore alla sua morte, ma nella dedica dice: Βασιλεῖ Πτολεμαίωι καὶ βασιλίσσηι Κλεοπάτραι τῆι ἀδελφ|ῆι θε|οῖς Φιλομήτορσ[ι] καὶ τοῖς τούτων τέκνοις καὶ Ἄμμωνι, etc. Poichè Eupatore era morto, e Cleopatra Thea andò sposa nel 150 ad Alessandro Bala, il plurale τέκνοις pare comprovare che oltre alla restante Cleopatra III, v'era almeno un altro figlio, e pare evidente si tratti appunto di Neo Filopatore. Il fatto poi che tali figli non ricevono nè il nome ufficiale, nè l'attributo regio o divino pare si accordi con quanto tentiamo di provare, ossia che vi fu un tempo in cui Eupatore era già morto, mentre Neo Filopatore non era ancora associato. Se poi colleghiamo questo con quanto ci dice ad esempio Giustino, sul figlio di Filometore, che cioè era *puer* quando fu ucciso da Evergete, possiamo credere probabile l'ipotesi già espressa, che uno dei motivi della tardata associazione dovette essere la tenera età di Neo Filopatore (2).

Per la cronologia dell'associazione di Neo Filopatore sono di importanza capitale due documenti. Di essi il primo, ch'è una iscrizione greca del Fayûm ora al Louvre (3), è così concepito: Εἰρήνηι τέκνον | πολλὰ χαῖρε | ὁ περιέχων μετε|λεύσεται τοὺς ἐπει|χάραντές σοι || ἔτους λς' τὸ καὶ α' L | εἰς θεοὺς ἐπείφ κη' (= 22 agosto). L'altro documento è una moneta di Pafo in Cipro (4), la quale nel retro oltre alla dicitura ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΩΣ porta scritto alla sinistra di un'aquila LΛΕ ed alla

(1) Vedi appendice, n. 29.

(2) Si veda forse anche il significato della parola *hunnu*, che si trova nei documenti geroglifici in corrispondenza del νέος dei documenti greci.

(3) " Rev. Archéol. ,, XVII (1901), p. 308; " Archiv für Papyrusforsch. ,, III, p. 128; Bouché-Leclercq, op. cit., IV, 321.

(4) Pubblicata per la prima volta dal Reichardt in " Numismatic Chronicle ,, N. S., IV, 189; e ripubbl. dallo Stuart Poole, op. cit., tav. XXXII, 9. pag. LXVII, 87. Cfr. Strack, op. cit., p. 37; Bouché-Leclercq, op. cit., II, 53 n.

destra KAI. Pare evidente che i due documenti ci diano entrambi
ΠA
una datazione diarchica (1); e che non si debbano staccare l'uno dall'altro (2). Molto si discusse se la moneta di Pafo dovesse attribuirsi al 36° anno di Filometore (146/5) o di Evergete (135/4); ma da quanto siam venuti esponendo non par dubbio che si debba intendere del 36° anno di Filometore e che si tratti appunto dell'associazione di Neo Filopatore, che come siam venuti per altra via a dimostrare cade appunto in quel torno d'anni (3). Lo Strack suppose che motivo occasionale dell'associazione da parte di Filometore di un figlio nel 146/5 (si può credere che sia avvenuta dopo l'agosto 146, se nell'agosto del 145 tale figlio era ancora nel suo primo anno di regno) sia stato il fatto che egli, movendo contro di Alessandro Bala, voleva lasciare un reggente in Alessandria, al quale nel tempo stesso potesse in tal modo assicurare l'eventuale successione. Sostituendo naturalmente all'Eupatore dello Strack, Neo Filopatore, pare probabile che il motivo dell'associazione sia stato appunto questo; inoltre si può credere che allora soltanto l'età di Neo Filopatore permettesse un' associazione di fatto col padre (4). E così pure

(1) I dubbi espressi dal Bouché-Leclercq, op. cit., II, 81 n. 1, sul significato di *A* nella moneta di Pafo, che di per sè non paiono sicuri, vengono resi improbabili dall'iscrizione del Fayûm.

(2) Come fa ad es. il Bouché-Leclercq, op. cit., IV, p. 321, che riferisce l'iscrizione al 36° anno di Filometore, e invece II, p. 53, la moneta al 36° anno di Evergete. (Anche lo Svoronos, p. 249 n., pone la moneta nel 135/4).

(3) Già lo Stuart Poole, op. cit., p. LXVII, e lo Strack, op. cit., loc. cit., posero nel 146/5 la moneta di Pafo; ma credettero trattarsi del primo anno di Eupatore, mentre pare sia il primo di Neo Filopatore. La spiegazione proposta dal Bouché-Leclercq, op. cit., IV, p. 321, che si tratti del 36° anno di Filometore già morto e del primo di Evergete pare artificiosa, ed è basata su presupposti indimostrati: che Filometore fosse già morto il 22 agosto 145; che Filometore non abbia associato nessun figlio circa il 146/5, giacchè egli pone l'associazione di Eupatore nel 150 (v. s.) ed identifica Neo Filopatore con Menfite (v. s.); che infine Evergete computasse il 146/5 come il suo primo anno di regno, mentre tutto lascia supporre, ch'egli partendo dal 170, lo computasse come il suo 25°.

(4) Una riprova che tanto Eupatore quanto Neo Filopatore morirono giovani sta nel fatto che tutte le nostre fonti li nominano sempre al singolare, ossia che non furono ammogliati. Non è necessario ricorrere col

specialmente dopo la pubblicazione dell'iscrizione del Fayûm, appare molto probabile l'opinione dello Strack, che tale figlio associato (Neo Filopatore secondo noi) sia stato re dell'Egitto, e non della sola Cipro, come non basta a dimostrare la moneta di Pafo. Anzi, non è neppure dimostrato che Neo Filopatore sia stato allora a Cipro: Giustino (l. c.) lascia supporre ch'egli fosse ad Alessandria, il che d'altronde pare evidente, se si accetta il motivo che accogliemmo per la sua associazione.

Concludendo: pare che nulla si opponga a credere che Neo Filopatore sia stato associato nell'anno 146/5, e sia precisamente il figlio di Filometore che secondo Giustino fu poco dopo ucciso dallo zio Evergete (1). Ciò spiega come il suo nome non compaia nei documenti per parecchi anni dopo la sua morte: egli doveva esser stato divinizzato regolarmente all'epoca della sua associazione, onde il suo nome avrebbe dovuto essere registrato nelle liste di culto; ma con ogni probabilità Evergete si sarà opposto a che il nome del nipote, da lui assassinato, fosse notato nei documenti, e non poco avrà contribuito il timore di notarlo da parte degli scribi. Ciò non toglie che nel partito contrario ad Evergete, che in un certo periodo venne a trovare un capo nella stessa Cleopatra II, madre dell'ucciso, dovesse esservi una tendenza, e nei desideri, e nei fatti, a conferire alla sventurata vittima l'onore che le spettava, forse anche collo

---

Bouché-Leclercq, III, 42 ad imitazioni dalle liste dei Seleucidi per spiegare come Eupatore e Neo Filopatore compaiano al singolare in mezzo alle liste di coppie regie; giacchè nulla prova che tali liste avessero come base il culto di tali coppie. Par probabile che esse seguissero i dati di fatto; a partire da Alessandro, venendo ad Eupatore, a Neo Filopatore, a Filometore, ad Evergete, ecc., si vede che le liste erano indirizzate alle coppie quando realmente e legalmente esistevano, ed ai singoli quando si trattava di un celibe, o di chi veniva, come Filometore ed Evergete in molti documenti, considerato come tale, essendo disciolta per varî motivi la sua coppia.

(1) Il Dittenberger ha attribuito a Neo Filopatore una base di statua di Salamina in Cipro: *O. G. I.*, 143 = Strack, op. cit., n. 161; ed una di Delo: *O. G. I.*, 144 = Strack, op. cit., n. 144. Innanzi tutto è dubbio se si debban riferire ad una stessa persona; inoltre, poichè la seconda, che ci fornisce maggiori notizie, è per un figlio di Evergete, si potrà benissimo trattare, come vuole il Dittenb., di quello stesso che secondo la moneta di Pafo sarebbe stato associato nel 121/0, ma dopo quanto dicemmo, non si può vedervi un'allusione a Neo Filopatore.

scopo di dimostrare l'illegittimità del regno di Evergete. Un ultimo resto di tale lotta si può forse rinvenire in parecchi documenti degli anni 128-120 (1), che sembra presentino una lacuna tra i nomi di Eupatore e di Evergete, la quale pare corrispondere al nome di Neo Filopatore, ed è forse dovuta ad abrasione. Il nome di Neo Filopatore ci appare per la prima volta nel 119/8 (2) e, se pure si tratta di un cambiamento nella politica di Evergete (3), si può credere ch'esso sia dovuto alla rappacificazione ufficiale avvenuta non molto prima tra Evergete e la sorella Cleopatra II: Evergete non si sarà forse più opposto ai desideri di lei e di quanti volevano si ricordasse lo sventurato Neo Filopatore, trattandosi di una accondiscendenza che mentre non gli costava nulla, poteva avere per lui delle conseguenze buone. Si può anche credere che vi sia una qualche connessione col raddolcimento che si nota nell'aspro e violento carattere di Evergete nei suoi ultimi anni (4).

Dopo quanto ho detto, e riferendomi ad esso, mi sarà forse più agevole esporre brevemente i principali motivi per cui respingo la spiegazione data dal Laqueur del nostro stesso problema: poichè sarà bene fare tale discussione in questo punto, prima di proseguire ad esaminare come si concili la nostra ipotesi coi documenti posteriori all'anno 145. Il Laqueur (5) crede che Eupatore sia stato associato da Filometore al trono di Egitto nel 153/2, e che poi, tolto per alcuni anni dal regno, sia stato mandato verso il 146/5 in Cipro. Ma se si crede che vi siano state due elezioni, l'una nel 153/2 e l'altra nel 146/5, si tratterebbe di uno strano gioco di associazioni, e non si intenderebbe come si sminuzzassero i computi cronologici, se si fosse tenuto conto e nel primo e nel secondo caso degli anni di regno dell'associato: anche più improbabile poi sarebbe che si fossero computati solo per la 2ª associazione. Se si crede poi che siavi

(1) Vedi appendice, nⁱ 11-20.

(2) Vedi appendice, n. 21.

(3) Si osservi che finora non si hanno, se pure non mi sono sfuggiti, documenti ufficiali del regno di Evergete, in cui ricorra il nome di Neo Filopatore, vedi appendice, nⁱ 21-22.

(4) Vedi ad es. i documenti raccolti dal Bouché-Leclercq, op. cit., II, p. 83 n. 1.

(5) Op. cit., p. 47 sgg.

stata una sola associazione nel 153 2, si va incontro a gravi obbiezioni, poichè in tal caso oltre al dover trasportare al 135 4 l'iscrizione del Fayùm e la moneta del Pafo, il che renderebbe anche più complicato il problema, si dovrebbe ammettere, contrariamente a quanto abbiamo sopra tentato di dimostrare, che Neo Filopatore sia stato figlio di Evergete. Il Laqueur inoltre collega la prima associazione cogli avvenimenti dell'Egitto, e la riassociazione del 146 5 cogli avvenimenti di Cipro, mentre vedemmo che pare più probabile proprio l'opposto; ossia che l'associazione del 153 2 vada collegata coi fatti di Cipro (1), e l'altra del 146 5 con quelli di tutto il regno d'Egitto. Egli poi si pone in contrasto con Giustino e con Giuseppe Flavio, che pur vuole spiegare, poichè essi dicono fanciullo il figlio di Filometore ucciso da Evergete, mentre pare che nel 146 5 Eupatore avrebbe avuto 25 anni all'incirca. Anche grave è il fatto che si trascura il papiro Amherst II 45, e si considera a torto come prima collocazione quella: Eupatore-Filometore, ricorrendo per spiegarla alla teoria poco sicura del posto d'onore; ma se anche si ammettesse contrariamente al Laqueur che viventi entrambi si sia usata prima la serie Filometore-Eupatore, poi quella Eupatore-Filometore, verremmo a trovare un cambiamento inesplicabile di collocazione. Per ultimo pare difficile da spiegarsi coll'ipotesi del Laqueur, la presenza del nome di Eupatore negli atti ufficiali, durante il regno di Evergete.

Chiusa questa parentesi, continuiamo il nostro esame della varia collocazione del nome di Eupatore nei documenti posteriori alla morte del padre. Durante la parte del regno di Evergete posteriore alla morte di Filometore i criteri per la collocazione nelle liste dei nomi di Eupatore e di Neo Filopatore potevano essere due: se si partiva dalla data di assunzione al trono si aveva: Filometore, Eupatore, Neo Filopatore, ed infine l'ancor vivente Evergete (2); se invece si partiva dalla data di morte

(1) Si aggiunga a quanto si disse sopra, che nulla prova che Filometore nel 152 si allontanasse personalmente dall'Egitto, per muover contro Demetrio, anche se si volesse collegare l'associazione di Eupatore con tale guerra; vedi sopra, e Bouché-Leclercq, op. cit., II, 47.

(2) Veramente partendo per Evergete dal 170, se si fosse tenuto conto solo dell'entrata in carica si sarebbe avuto: Filometore, Evergete, Eupatore, Neo Filopatore; ma è evidente, che dato il carattere delle liste di

si aveva: Eupatore, Filometore, Neo Filopatore, Evergete. L'una e l'altra disposizione era legittima; la prima poi aveva il pregio che partendo dalla data di assunzione pareva più adatta essendo ancor viva una delle persone da collocare (1); ma si differenziava dalle liste di culto che, essendo soprattutto liste di morti, dovevano preferire il criterio della data di morte. Questo pregio e non il primo aveva l'altra posizione, il cui uso poteva anche essere favorito dal fatto ch'era simile a quella del periodo precedente, onde facilmente gli scribi l'avrebbero riprodotta. Quanto abbiamo detto spiega come nei primi tempi almeno l'uso delle due formole si bilanciasse. In seguito pare che la prima sia divenuta prevalente, per motivi non facili ad esser colti (2); ma sembra certo che l'altra, benchè meno frequentemente, fosse usata anche in seguito. Mentre al primo sistema spettano quasi tutti i documenti tra il 145 ed il 116 (3), al secondo spettano finora due papiri demotici del 141/0 (4), uno greco del 140/39 (5), forse un altro del 138/7 (6), un'iscrizione di File (7), un papiro demotico del 131 (8), ed uno greco del 123 (9). Il Laqueur crede di poter dimostrare che durante il regno di Evergete fu in uso solamente il primo sistema. A tal uopo egli, esaminando ad uno ad uno i casi dell'altro sistema, li esclude

---

culto, e per perspicuità cronologica, Evergete avrebbe avuto l'ultimo posto, come nel caso degli altri re viventi. A questa stessa collocazione si veniva partendo per Evergete dal 145.

(1) Vedi la nota precedente.

(2) Se è lecito procedere tant'oltre colle ipotesi, si può credere che Evergete volesse reagire contro i metodi usati dal fratello, e preferisse una collocazione in cui il nome di Eupatore prima di Filometore potesse contribuire a far dimenticare il sopraffatto Neo Filopatore. Certo molto doveva dipendere dall'arbitrio di Evergete. Quel che è assai importante è l'analogia di tutto ciò col caso del figlio di Antioco III, il quale nei documenti posteriori anche alla morte del padre viene enumerato tanto dopo di lui, v. Dittenb., *O. G. I.*, 246, quanto prima di lui: *C. I. Gr.*, 4458 = Dittenb., *O. G. I.*, 245 (v. ind.).

(3) Vedi appendice, n[i] 11-22.

(4) Vedi appendice, n[i] 40-41.

(5) Ibid., n. 42.

(6) Ibid., n. 43.

(7) Ibid., n. 39.

(8) Ibid., n. 44.

(9) Ibid., n. 45.

per vari motivi. Sarà bene riesaminare la questione. Egli crede in primo luogo che i quattro casi dal 145 al 137 siano dovuti solamente all' errore degli scribi che copiarono la lista usata prima della morte di Filometore; ma se regge quanto dicemmo, che cioè entrambi i metodi essendo legittimi potevano venir adottati indifferentemente, non vi è bisogno di ricorrere al solito argomento delle fonti errate, tanto più che riuscirebbe assai difficile spiegare un tale errore in un documento della cancelleria regia, quale il papiro greco di Tebtunis I 6 (1). Il caso del 131 è esaminato a lungo dal Laqueur, il quale conclude che è senza analogie, che sta da sè, poichè trovandosi in esso la formola ἱερὸς πῶλος Ἴσιδος μεγάλης μητρὸς θεῶν fa capo a Cleopatra II, ed al breve regno ch'ella ebbe appunto intorno a quegli anni in Alessandria in opposizione al fratello Evergete. Quindi il Laqueur notando che tale formola ricorre nuovamente dopo la morte di Evergete, e che nell'uno e nell'altro caso si ha la collocazione: Eupatore, Filometore, crede che il mutamento del 131 si debba appunto a Cleopatra II. Ma innanzi tutto è dubbio se la formola citata alluda a Cleopatra II o a Cleopatra III (2); e così pure se il mancare esempi di tale formola dal 130 al 116 debba o no considerarsi come cosa puramente accidentale. Inoltre, in un documento risalente a Cleopatra II, più che novità rispetto ad Eupatore, che non aveva nulla a vedere con una opposizione ad Evergete, ce ne aspetteremmo rispetto a Neo Filopatore, che invece nel papiro in questione non viene nominato. Ed è degno di nota il fatto che un papiro demotico del 130 (3), ci dà la suddetta formola, ma non, a quanto pare, la collocazione: Eupatore, Filometore; e che un papiro greco del 123 (4) or ora pubblicato dal Kenyon, dà la collocazione Eupatore, Filometore, ma non tale formola. La recente pubblicazione di questo ultimo documento pare dimostri che è arbitrario separare l'uno dall'altro i casi che si hanno della collocazione: Eupatore, Filo-

---

(1) Ibid., n. 42; vedi: Bouché-Leclercq, op. cit., III, 42 n. 3.

(2) Per Cleopatra II stanno il Wilamowitz, " Nachricht. d. Gött. Gesellsch. ", 1894, p. 28 n. 1; il Laqueur, op. cit., p. 51 sgg.; il Bouché-Leclercq, op. cit., III, 53 n. 2 sgg., IV, 322-3. Per Cleopatra III il Wilcken, " Arch. f. Pap. ", IV, 1907, p. 264; il Gerhard, " Arch. für Religionw. ", VII, 1904, p. 520 sgg.

(3) Spiegelberg, " Z. Aeg. Spr. ", 1899, p. 38.

(4) Vedi appendice, n. 45.

metore tra il 145 ed il 116: si tratta secondo me di un unico indirizzo legittimo, e che poteva essere ancora favorito da pregi intrinseci e contingenze esterne. E si può credere con probabilità che i papiri che saranno pubblicati in futuro ci forniranno altri documenti di questa stessa serie, come ci hanno ora dato quello del 123. Se così è, viene anche a cadere l'unico motivo forte (1) per collocare l'iscrizione di File tra gli anni 143-139, a preferenza della cronologia assegnatale anteriormente (2) tra il 127 ed il 117; onde possiamo ritenere che i documenti degli anni 137-116 con la posizione: Eupatore, Filometore, siano già in numero di tre.

Dopo la morte di Evergete (3), se si partiva dalla data di assunzione, si venivano ad avere le seguenti posizioni: α) Filometore, Evergete, Eupatore, Neo Filopatore, se si poneva il principio del regno di Evergete nel 170; β) Filometore, Eupatore, Neo Filopatore, Evergete, se tale principio si fissava al 145. Si può intendere facilmente come il primo caso tendesse a trasformarsi nel secondo, perchè quest'ultimo era conforme al metodo predominante tra il 145 ed il 116, e perchè si doveva tendere, pur conservando in linea generale il principio della data dell'assunzione, a dare nel tempo stesso l'immagine della reale successione dei regni. Se poi si poneva come base della collocazione la data di morte, si aveva: Eupatore, Filometore, Neo Filopatore, Evergete. I due metodi erano legittimi entrambi, e così si spiega come nei documenti posteriori al 116 compaiano entrambi; d'altra parte la seconda collocazione era evidentemente più adatta per le liste di culto, che essendo dirette ai morti trovavano ottimo criterio cronologico appunto nella data di morte, e ciò spiega come la più gran parte dei documenti finora pubblicati ci presentino appunto questa collocazione, che si può anche credere fosse la ufficiale (4). Ma non mancano i

(1) Addotto dal Laqueur, op. cit., p. 36. 37; seguìto dal Dittenberger, *O. G. I.*, II, p. 545.

(2) Letronne, “ Notices et extraits, etc. „, XVIII, II, p. 168; Wilcken, “ Hermes „, 1887, p. 15 sgg.; Dittenb., *O. G. I.*, ai n[i] 137-39.

(3) Per la data precisa della morte di Evergete vedi le opinioni discordanti del Bouché-Leclercq, op. cit., II, 85; IV, 324, e del Reitzenstein, “ Nachricht. d. Gött. Ges. der Wiss. „, 1904, p. 324.

(4) Vedi appendice, n[i] 46-99.

documenti in cui ricorra la collocazione opposta: cinque papiri demotici di Strasburgo (1) e forse anche un sesto (2), degli anni tra il 112/11 e l'88/87, ed un papiro greco del 106/5 (3). Ed è forse pericoloso il voler togliere di mezzo questi documenti considerandoli o errati, o copiati da liste anteriori al 116: questa ultima spiegazione cui si deve ricorrere secondo il Laqueur, benchè non si debba escludere, non è necessaria, ove si creda che anche tale posizione era legittima (4).

Restano da spiegare alcuni casi di varia collocazione dei nostri due Tolemei. Un papiro demotico berlinese dell'anno 89 (5) pone Eupatore seguìto da Neo Filopatore prima di Filometore: si può spiegare il caso, o ammettendo che lo scriba li ponesse l'uno accanto all'altro sapendoli fratelli, ed associati entrambi

(1) Ibid., n[i] 23-27.

(2) Ibid., n. 28.

(3) Ibid., n. 10.

(4) Il Laqueur anche qui esamina in disparte i papiri di Strasburgo e li pone fuor di questione pel fatto che provengono tutti dalla stessa località; ma non è chiaro come basti questo fatto per spiegar la presenza in tutti essi, e pur si tratta di un lasso di circa 25 anni, di una collocazione che sarebbe errata. Quanto al papiro del 106/5 egli lo considera copiato da un documento anteriore al 116, ma se pur si riconosce la possibilità di questo fatto, non mi pare che le prove che ne adduce il Laqueur siano di carattere assoluto. È vero infatti che vi è omesso Neo Filopatore come prima del 118, ma questo stesso avviene in un papiro demotico del 107/6 (vedi appendice, n. 46) ed in uno greco del 114/10 (vedi appendice n. 53). È vero che sono omessi i Filometori Soteri, mentre si trovano nelle liste a partire dal 116; ma si tratta dei regnanti, che come vedemmo, e come ammette il Laqueur stesso (cfr. p. 40), possono esser nominati solo nella dedica e non nella lista: si vedano i casi analoghi di due papiri demotici di Strasburgo, uno del 95/4 (vedi appendice, n. 26) ed uno dell'88/7 (ibid., n. 27). Che poi vi si trovi l'ordine: Filometore, Eupatore come prima del 116, vedemmo come fosse legittimo anche dopo di tale anno, e come altri cinque documenti degli anni 112/11-88/7 diano questo stesso ordine. Quanto al plurale: θεῶν Εὐεργετῶν, esso ricorre in tutti i documenti enumerati in app. dal n. 83 al 93, posteriori al 116. Per ultimo non prova nulla il fatto che manchi la formola ἱεροῦ πώλου Ἴσιδος μεγάλης μητρὸς θεῶν come prima del 116/15, poichè innanzi tutto non è sicuro che tale formola non fosse usata anche prima del 116/15, e poi il Laqueur stesso ammette che non si trova più dopo del 107/6, ed il nostro papiro appunto è posteriore a tale epoca (106/5).

(5) Vedi però i dubbi del Laqueur, p. 49 sulla lettura fattane dal Lepsius. Vedi anche oltre.

da Filometore, senza accorgersi che tale collocazione era giusta soltanto per il primo; o anche pensando che si tratti di azione analogica esercitata da quei documenti, che anche dopo del 116 ponevano, se non ufficialmente, almeno tradizionalmente dopo di Filometore l'uno accanto all'altro i nomi di Eupatore e Neo Filopatore, su quegli altri che invece ponevano Eupatore prima del padre (1). — Due papiri demotici pongono Eupatore prima degli Epifani (2), ma in primo luogo è noto come siano irregolari le collocazioni nelle liste di culto di Tolemaide (3) secondo cui essi sono datati, in secondo luogo si può credere che il ripetersi nella lista dei Tolemei dei nomi di Evergete I e II, di Filopatore I e II, di Filometore I e II, abbia potuto attrarre Eupatore, per errore, nel gruppo formato da quelli che per primi ebbero tali nomi. — Il Lepsius (4) dice che in due templi di Tebe ed in uno di Ombos ricorre il nome di Neo Filopatore dopo quello di Evergete. La cosa non sarebbe inesplicabile: si potrebbe pensare ad un errore dello scriba, indotto per analogia dalla posizione reciproca di Evergete I e Filometore I; e anche col supporre che partendo dalla data di assunzione si fosse posto naturalmente, morti entrambi, prima Evergete, perchè salito al trono nel 170, e poi Neo Filopatore perchè nel 146/5. Ma ho dei forti dubbi sulla reale esistenza delle liste con tale collocazione. Il Lepsius rimanda alla Tav. V, unita al suo studio, in cui riproduce le varie liste, ma in nessuna tra esse, se pur non si tratta di insufficienza mia, ravvisai Evergete prima di Neo Filopatore, e neppure ne trovai esempio nella grande pubblicazione dei *Denkmäler* (5).

---

(1) Tale spiegazione fu già addotta, sebbene sotto forma alquanto diversa, dallo Strack, op. cit., 177 n. 2. Il Laqueur, p. 49 respinge la spiegazione dello Strack perchè crede improbabile che i documenti del 119-116 influissero su quelli dell'89: e spiega il fatto come un errore. Errore v'è certamente, ma mi pare che la causa di esso proposta dallo Strack regga, e perchè non è dimostrato che non potesse influire su di un documento dell'89 uno del 119-116, e meglio perchè non è dimostrato che la collocazione: Filometore, Eupatore, non si trovi anche dopo del 116.

(2) Vedi appendice, n[i] 101-102.

(3) Vedi Lepsius, op. cit.; Strack, p. 180 n. 2; Bouché-Leclercq, op. cit., II, 47 n. 2. 58 n.

(4) Op. cit., p. 468.

(5) *Denkmäler aus Aegypten und Aethiopien*, (1849 sgg.), vol. IX: *Denkmäler der Ptolemäer und röm. Kaiser*. — Si cfr. quanto scrisse lo stesso

Dall'esame dei documenti, mi pare si possa concludere, che la ipotesi che presento, come probabile soluzione dei problemi relativi ad Eupatore ed a Neo Filopatore concili e spieghi tutte le notizie che ci pervennero su di essi. E se torniamo al punto donde abbiam preso le mosse vediamo: che non erravano Strabone ed Ateneo, quando consideravano Evergete II come settimo dei Tolemei, poichè tra Tolemeo Filometore sesto e lui non aveva regnato nessuno, ove si ponga regolarmente al 170 l'inizio del suo regno; che invece Sparziano ed Eusebio dicendo ottavo dei Lagidi Evergete, dovevano computare tra Filometore sesto ed Evergete ottavo, appunto Neo Filopatore come settimo: che infine Pausania dicendo ottavo Filometore Sotere II, non computava Neo Filopatore, il quale non regnò mai da solo.

Se poi, per chiudere il mio lavoro mi presento la domanda, quale notazione numerica dobbiamo far corrispondere ai Tolemei che studiammo, mi pare che la soluzione migliore sia di dare l'appellativo di sesto a Filometore, e di settimo ad Evergete, senza introdurre nella lista dei Tolemei, nè Eupatore, nè Neo Filopatore, i quali, come vedemmo, non ebbero un regno da sè (1).

Lepsius, *Briefe aus Aegypt.*, p. 410: Neo Filopatore... " wird in den hiero- " glyphischen Inschriften in der Reihe der übrigen Ptolemäer an seinem " Platze zwischen Philometor und den Euergeten besonders genannt... Unter " vierzehn hieroglyphischen Ptolemäerlisten welche wenigstens bis zu den " zweiten Euergeten herabgehen, führen sieben den Philopator II auf: in " vier andern Listen, in denen sein Name erscheinen konnte, wird er über- " gangen.... "

(1) In questo mi accordo colla vecchia enumerazione, e col nuovo indirizzo segnato dal Niese, op. cit., III, p. 266 n. 4 e dal Bouché-Leclercq, op. cit., V, 324.

APPENDICE

Posizioni varie dei nomi di Eupatore e di Neo Filopatore nei documenti.

I Categoria.

I Serie: FILOMETORE, EUPATORE.

1 (Prima del 145) P. G. (1): *Amherst Pap.*, II, 45 (2).

II Serie: EPIFANI, FILOMETORE, EUPATORE, EVERGETI.

2	142/1	P. D. Berl. 3113: *N. Chrest.*, 65, 79 = SPIEGELB., p. 11 (4).
3	139/8	P. G. GRENFELL, II, 15 (5).
4	137/6	P. D. Berl. 3098: SPIEGELB., p. 11.
5	134/3	P. D. Berl. 3080: *N. Chrest.*, 157 = SPIEGELB., p. 13.
6	128/7	P. G: *B. G. U.*, 993 (6).
7	126/5	P. G: *Stud. z. Pal., etc.*, IV, p. 53 (7).
8	120/19	P. D: *N. Chrest.*, p. 118.
9	[145-116]	P. G. GRENFELL, I, 24 (8), in lacuna: Evergete al singolare.
10	106/5	P. G. LEEMANS, N (9).

III Serie: EPIFANI, FILOMETORE, EUPATORE, ..., EVERGETI (10).

11	128/7	P. D. Leyd.: “ Rev. „, I, 130 (11).
12	127/6	P. D. Louvre 2420: *Chrest.*, 358 (12).

(1) P. G. = papiro greco, P. D. = papiro demotico, Iscr. Ger. = iscrizione geroglifica.

(2) Editi da GRENFELL e HUNT, II, 1901.

(3) REVILLOUT, *Nouvelle Chrestomathie démotique*, Paris, 1878.

(4) SPIEGELBERG, *Demotische Papyrus aus den Königl. Mus. zu Berlin*, Lipsia e Berlino, 1902.

(5) *New classical fragments, etc.*, (= *Greek Papyri*, II), Oxford, 1897.

(6) *Aegyptische Urkunden aus den Kgl. Mus. zu Berlin: Griechische Urkunden...*, vol. I, II, III e parte del IV, Berlino 1892-1907.

(7) *Studien zur Paläographie und Papyr.*, I-VI, (WESSELY).

(8) *An Alexandrian erotic fragment, etc.*, Oxford, 1896.

(9) LEEMANS, *Papyri graeci mus. antiquarii publici, etc.*, Lugd. Batav., 1843. In questo documento manca Neo Filopatore. Non si tratta probabilmente che di omissione dello scriba, come nei n[i] 46 e 53.

(10) Vedi STRACK, “ Ath. Mitt. „ XX, p. 344. Pare dubbia però l'esistenza di questa lacuna nei nn. 15, 16, 21.

(11) “ Revue égyptologique „, Paris, 1880 sgg.

(12) REVILLOUT, *Chrestomathie démotique*, Paris, 1880 = *Études égyptologiques*, 13-16 livrais.

13 127/6 P. D. Torin. 174.23: *N. Chrest.*, 103.
14 } 15 } 125/4 2 P. D. Berl. 3099: *Chrest.*, 312 = SPIEGELB., p. 12.
16 125/4 P. D. Louvre: *Chrest.*, 303.
17 [128-120] P. D. Vienna 26: *N. Chrest.*, 89.
18 " } 19 " } 2 P. D. Louvre 2410, 2418: *Chrest.*, 85.
20 119/18 P. D. Berl. 3102: *N. Chrest.*, 148 = SPIEGELB., p. 14.

IV Serie: EPIFANI, FILOMETORE, EUPATORE, NEO FILOPATORE, EVERGETI.

21 } 22 } 119/18 2 P. D. Berl. 3101 A, B.: *N. Chrest.*, 59 = SPIEGELB., p. 13.

V Serie: EPIFANI, FILOMETORE, EUPATORE, NEO FILOPATORE, EVERGETI.

23 112/11 P. D. Strasb. 7: SPIEGELB., p. 25 (1).
24 107/6 P. D. Strasb. 6: SPIEGELB., p. 25.
25 100/99 P. D. Strasb. 43: SPIEGELB., p. 27.
26 95/94 P. D. Strasb. 44: SPIEGELB., p. 30.
27 88/87 P. D. Strasb. 8: SPIEGELB., p. 32.

VI Serie: EPIFANI, EUPATORE, NEO FILOPATORE, EVERGETI.

28 105/4 P. D. Strasb. 9: SPIEGELB., p. 22 (2).

II Categoria.

I Serie: EPIFANI, EUPATORE, FILOMETORE.

29 (150-146) Stela d'origine incerta, ora al Louvre: STRACK, n. 95 (3) = DITTENB., *O. G. I.*, 111 (4).
30 } 31 } 150 2 P. D. Berl. 3097, 3070: SPIEGELB., tav. 15-16 e pag. 9.
32 150-146 P. Bilingue 218 Bibl. nat.: *Chrest.,* 62.
33 146 P. D. Berl. 3119: SPIEGELB., p. 10.

(1) SPIEGELBERG, *Die demotische Papyrus der Strassburg. Bibl.*, Strassburg, 1902.

(2) Filometore, come osserva a ragione il LAQUEUR, op. cit., p. 34, non vi è nominato per pura omissione dello scriba.

(3) STRACK, *Die Dynastie der Ptolemäer*, Berlin. 1897: Appendice: *Sammlung griechischer Ptolemäer-Inschriften.*

(4) DITTENBERGER, *Orientis graeci Inscriptiones selectae*, I, II, Leipzig, 1903-1905.

34	150-146	P. G. GRENFELL, I, 12.
35	149/8	P. G. GRENFELL, I, p. 24 (pubblicato in parte).
36	146/5	P. D. Torin.: PEYRON, in "Mem. Acc. Scienze di Torino ,, 31, p. 150.
37		Iscr. Ger. di File: LEPSIUS (1), Tav. V, n. 3 = *Denkm.*, IX, 39. b (2).
38		Iscr. Ger. di File: LEPSIUS, Tav. V, n. 4 = *Denkm.*, 39 a.

II Serie: EPIFANI, EUPATORE, FILOMETORE, EVERGETI.

39	(145-116)	Iscr. di File: STRACK, n. 103 = *C. I. Gr.*, 4896 = DITTENB., *O. G. I.*, 137-9.
40	141/0	2 P. D. Berl. 3090-3091 : *N. Chrest.*, 32 = SPIEGELB., p. 12.
41	141/0	
42	140/39	P. G. *Tebtunis pap.*, I, 6 (3) (Filometori al plurale).
43	138/7	P. G. *Amherst Pap.*, II, 44 (in lacuna).
44	131	P. D. Louvre (?): "Rev. Égypt. ,, I, 91.
45	123	P. G.: *Greek Pap.*, III, p. 7, n. 879 (4).
46	107/6	P. D. Berl. 3104: *N. Chrest.*, 21 = SPIEGELB., p. 16 (5).
47		Iscr. ger. di File: LEPSIUS, Tav. V, n. 5 = *Denkm.*, IX, 36 a.
48 e 49		2 Iscr. ger. di Dakkeh: LEPSIUS., Tav. V, n. 6 = *Denkm.*, IX, 38 g. h.
50		Iscr. ger. di Karnak: LEPSIUS, Tav. V, n. 7.
51		Iscr. ger. di Karnak: LEPSIUS, Tav. V, n. 8 = *Denkm.*, IX, 36 e.
52		Iscr. ger. di Karnak: LEPSIUS, Tav. V, n. 9 = *Denkm.*, IX, 36 d.

III Serie: EPIFANI, EUPATORE, FILOMETORE, EVERGETE.

53	114/3	P. G. Casati = Parig. 5: BRUNET DE PRESLE, p. 130 (6).

(1) LEPSIUS, "Abh. Berl. Ak. ,, 1852.

(2) Vedi indietro.

(3) *The Tebtunis Papiri*, GRENFELL, HUNT, SMYLY, I, 1902; GRENFELL, HUNT, GOODSPEED, II, 1907. Per il plurale vedi la spiegazione che ne dà il BOUCHÉ-LECLERCQ, op. cit., III, 53 n. 1, contrariamente al GRENFELL ed al LAQUEUR che lo considerano errato.

(4) KENYON, *Greek Papyri in the British Museum*, I, 1893; II, 1898; III, 1907.

(5) Vedi indietro. Lo Spiegelberg lo data al 103 a. C.

(6) BRUNET DE PRESLE, *Papyrus grecs du Musée du Louvre*, in "Notices et extraits des mss. ,, XVIII, II, 1865. Per questo papiro vedi indietro.

IV Serie: Epifani, Eupatore, Filometore, Neo Filopatore, Evergete.

54	115 apr.	Stela di Assuan IV: Strack, n. 140 = Dittenb., *O. G. I.*, 168. II, p. 545 = Wilcken, " Archiv. f. Pap. ", III, pp. 325-34 (1).
55	115 sett.	Stela di Assuan II: ibid.
56	115 sett.	Stela di Assuan III: ibid.
57	115/14	P. G. Grenfell, I, 25.
58	115/14	P. G. Strasb. 59: Laqueur, o. c., p. 34.
59	115/14	P. G. Strasb. 62: Laqueur, o. c., p. 33.
60	114/13	P. G. Grenfell, II, 20.
61	114/13	P. G. Strasb. 56: Laqueur, o. c., p. 33.
62	113	P. G.: *Greek Pap.* (Kenyon), III, p. 8, n. 880.
63	113	P. G.: *Greek Pap.* (Kenyon), III, p. 10, n. 1204.
64	113	P. G.: *B. G. U.*, 994.
65	113/12	P. G. Reinach, I. 9 (2).
66	112	Iscr. bilingue, ora al Cairo: Strack, " Arch. f. Papyr. ", II, 551 n. 33 = Dittenb., *O. G. I.*, 739.
67	112/11	P. G. Strasb. 57: Laqueur, o. c., p. 33.
68	111	P. G. Reinach, I, 10.
69	110	P. G. Reinach, I. 14.
70	110/9	P. G. Grenfell, I. 27.
71	110/9	P. G.: *B. G. U.*, 995.
72	109	P. G. Reinach, I. 15.
73	109	P. G. Reinach, I. 16.
74	108	P. G.: *Greek Pap.* (Kenyon), III, p. 12, n. 881.
75	108	P. D. Reinach-Spiegelb., I, n. 4.
76	108	P. G. Reinach, I. 20.
77	107/6	P. G.: *B. G. U.*, 996 (3).
78	105	P. G. Reinach, I, 23.
79	105	P. G. Reinach, I, 24.
80		Iscr. ger. di Ombos: Lepsius, o. c., Tav. V, n. 15 = *Denkm.*, 49. a (4).
81		Iscr. ger. di Ombos: Lepsius, o. c., Tav. V, n. 16 (5).
82		Iscr. ger. di Ombos: Lepsius, o. c., Tav. V, n. 17.

(1) In questo documento i Filometori sono al plurale: vedine la spiegazione del Laqueur, op. cit., p. 39.

(2) Reinach, Spiegelberg, De Ricci, *Papyrus grecs et démotiques*, I, 1905.

(3) Vi è detto: ... καὶ θεοῦ εὐπάτορος, καὶ θεοῦ φιλομήτορος νέου, καὶ θεοῦ εὐεργέτου.... Evidentemente lo scriba omise Filometore per il fatto che cominciando entrambi con φιλο- passò senza avvedersene dal 1° al 2°, cosicchè pose accanto al nome di Filometore l'appellativo di neo. Vedi anche Laqueur, op. cit., p. 32.

(4) Manca Filometore.

(5) Lacuna fino a Neo Filopatore, leggibile in parte.

V Serie: Epifani, Eupatore, Filometore, Neo Filopatore, Evergeti.

83	114/13	P. D. Berl. 3103: *N. Chrest.*, 121 = Spiegelb., p. 15 (1).
84	112/11	2 P. D. Gizê: *Chrest.*, 401.
85	112/11	
86	110	P. D. Reinach, I. 1.
87	104/3 ?	P. D. Berl. 3105: *N. Chrest.*, 20 = Spiegelb., p. 15.
88	104/3	P. D. Berl. (?): *N. Chrest.*, 20. V. Laqueur, o. c., p. 38.
89	104/3	2 P. D. Louvre 2436 a, b: *Chrest.*, 110.
90	104/3	
91	99/8	P. D. Berl. 3106: Spiegelb., p. 16.
92	89	P. D. Torin.: "Abh. Berl. Ak.", 1852, p. 462 (Filometori al plurale).
93		Iscr. ger. di Karnak: Lepsius, o. c., Tav. V, n. 10 (2).
94		Iscr. ger. di Karnak: Lepsius, o. c., Tav. V, n. 11 (3).
95		Iscr. ger. di Karnak: Lepsius, o. c., Tav. V, n. 12 (4).
96		Iscr. ger. di Karnak: Lepsius, o.c., Tav. V, n. 13 = *Denkm.* 37a.
97		Iscr. ger. di Ombos: Lepsius, o. c., Tav. V, n. 14 (5).

VI Serie: Epifani, Eupatore, Filometore, Neo Filopatore, Evergete, dea Filometore.

98	109/8	P. D. Vatic.	"Rev.", III, 25 = Spiegelb., "Rec.", XXV, p. 13 (6).
99	109/8	P. D. New-York 375	

VII Serie: Eupatore, Neo Filopatore, Filometore .....

100	89	P. D. Berl. (16 secondo la numerazione del Lepsius): Lepsius, o. c., p. 468. 493, Tav. X, 32.

VIII Serie: Eupatore, Epifani ....

101	150 genn.	P. D. Berl.: Spiegelb., Tav. 15-16 e pag. 9.
102	146	P. D. Berl.: Spiegelb., Tav. 17-18 e pag. 10.

(1) Il Lepsius, "Abh. Berl. Ak.", 1852, pp. 468 e 493 vi aveva letto Neo Filopatore prima di Filometore come in questa appendice, n. 100. Ne dubitò lo Strack, op. cit., p. 117 ed i suoi dubbi furono confermati dalla riedizione dello Spiegelberg. Vedi Laqueur, op. cit., p. 49.

(2) Neo Filopatore si può leggere, benchè il passo sia lacunoso.

(3) Il nome di Neo Filopatore è leggibile, quello di Evergete è in lacuna.

(4) Lacuna fino ad Eupatore.

(5) Lacuna fino ad Eupatore.

(6) "Recueil des travaux relatifs à la philologie et à l'archéol. égypt. et assyr.", XXV, 1903.

La scrittura latina volgare nei papiri dei primi cinque secoli dopo Cristo.

Nota del Dr. CESARE TRAVAGLIO.

Pochi sono i monumenti dell'antica scrittura latina che il tempo ci ha conservati quali documenti irrefragabili delle tendenze grafologiche dei primi secoli dell'Era volgare. Documenti però importantissimi sotto ogni riguardo ne sono senza dubbio i papiri, dacchè in essi più che non incisa sul bronzo si rivela evidente la tradizione del linguaggio d'un popolo. E così è dei papiri latini. La lenta e pur continua opera di distruzione, che il corso di tante età così tra loro diverse ha compiuto sui diversi capolavori dell'arte antica, segnò parimenti il suo fatale passaggio sulle opere della letteratura; tuttavia non potè del tutto sopprimere questi antichi monumenti grafici, i quali anzi, rivelandosi al mondo in un tempo di così affannosa ricerca com'è il nostro, sono venuti ad assumere un'importanza forse più unica che rara nell'ambito della letteratura antica.

È noto che la coltura dei primi tempi dell'Evo volgare ebbe a svolgersi in un'orbita essenzialmente, profondamente romana, sia per lo spirito della legislazione come per le imprese contemporanee; ed è pur noto del pari che una tale coltura fu importata nelle provincie dell'Impero nel momento fortunato in cui, in seguito alla conquista immediata, si affermava il predominio romano. Laonde i provinciali dell'Impero, che di tale importazione ed influenza da parte di Roma ebbero a subire una parte ben più notevole che non i loro stessi dominatori, dovettero pure seguitarne man mano lo sviluppo che compievasi nei loro paesi. Perciò — a poco a poco — mercè la politica prodigiosa dei loro governanti, attesero a modificare l'antico indirizzo del pensiero indigeno, attratti sempre più in quello accentratore dei Romani. Ma d'altra parte (è ovvio il pensarlo) coloro che lasciavano il paese ov'eran nati, per servire nell'esercito

ed avviarsi nelle lontane provincie per una dimora alquanto prolungata, non potevano evidentemente nel nuovo paese conservare a lungo le tendenze e le attività della madre patria, trovando un complesso di dati e di fatti in opposizione alle abitudini precedenti. Ond'è che se nei costumi e nei rapporti sociali il legionario romano, pur conservando il suo carattere, non poteva dimostrarsi troppo restìo alle consuetudini della provincia in cui dimorava, coll'andar del tempo il suo stesso linguaggio doveva risentire delle mutate condizioni di vita. Di qui tutti quei cambiamenti della lingua parlata che sarebbero passati a noi inosservati e si sarebbero perduti affatto se solamente fossero stati affidati alla tradizione orale, ma che son rimasti invece documento di gran valore per l'evoluzione fonetica della lingua latina nelle provincie, essendosi conservati in modo da riprodurre intatto e sicuro il pensiero fuggente che li aveva manifestati. Tale è appunto l'importanza che hanno oggidì per noi i papiri — purtroppo frammentari — che portano le traccie dell'antica scrittura latina (1).

Scarso invero è il loro numero, e questo ancora deve ridursi di non poche unità, qualora si vogliano adoperare i papiri per lo studio limitato della lingua latina tal quale era parlata nelle provincie, siccome è l'argomento del quale c'intratteniamo. Occorre infatti a tal uopo prescindere da quei documenti che per la natura degli scritti che contengono possono aver subìto, anche indirettamente, l'influenza della scuola contemporanea, come sarebbero, a mo' d'esempio, i papiri *letterari* propriamente detti, che riportano brani d'autori accuratamente trascritti o citazioni giuridiche fedelmente riprodotte. Ma solo fondandosi su documenti la cui indole sia schiettamente volgare, senza influsso dottrinario di sorta, tornerà possibile la presente ricerca, la quale tende sostanzialmente ad assodare quale fosse l'impronta caratteristica della scrittura e per conseguenza della pronunzia di alcuni elementi costitutivi della latinità volgare.

E — anzitutto — ci sia lecito di riportare qui in seguito per ordine cronologico la serie dei papiri latini che fanno al caso nostro.

---

(1) Riservo ad un altro mio lavoro, di prossima pubblicazione, la trattazione completa dell'argomento.

N° 1. — Frammento d'una lettera famigliare di un legionario romano, degli anni 17-14 av. Cr. — v. CARLO WESSELY, *Schrifttafeln zur älteren lateinischen Paläographie*, tav. 1, n. 1.

N° 2. — Frammento contenente due lettere famigliari di un legionario romano in Egitto. Dai caratteri di alcune voci greche ivi riportate si ritiene che sia stato scritto al tempo d'Augusto. — v. ID., *Schrifttafeln, etc.*, tav. 1, n. 2.

N° 3. — Frammento di una lista di soldati romani residenti in Egitto, dell'anno 1 p. Cr. — v. B. GRENFELL & J. HUNT, *The Oxyrhynchus Papyri*, vol. IV, n. 737.

N. 4. — Tre frammenti concernenti l'amministrazione militare in Egitto, degli anni 98-99 p. Cr. — v. J. NICOLE & CH. MOREL, *Archives militaires du premier siècle*. Gênes, 1900, vol. I.

N° 5. — Frammento di una lunga lista di soldati romani appartenenti alla legione II Cirenaica e XXII. Anno 108 p. Cr. — C. WESSELY, *Schrifttafeln, etc.*, n. 8.

N° 6. — Frammento contenente un elenco di soldati e di tribuni militari. Anno 140 p. Cr. — v. *Aegyptische Urkunden der Kön. Museen zu Berlin*, vol. II, n. 7428.

N° 7. — Scarso frammento in cui è contenuta una lista di legionari. Anno 143 p. Cr. — v. C. WESSELY, *Schrifttafeln, etc.*, n. 9.

N° 8. — Frammento di una leva militare, scritto in due colonne, in caratteri nitidi. Anno 156 p. Cr. — v. T. MOMMSEN, *Ephem. Epigr.*, vol. VII, pag. 457; C. WESSELY, *Schrifttafeln, etc.*, n. 6; *Aegypt. Urk. Kön. Museen*, vol. II, n. 696.

N° 9. — Frammento di un atto notarile in cui è ricordata la compera di uno schiavo in Siria, nell'anno 166 p. Cr. — v. C. WESSELY, *Schrifttafeln, etc.*, n. 7.

N° 10. — Frammento di una lettera famigliare scritta nell'anno 167 p. Cr. — v. GRENFELL & HUNT, *Greek Papyri*, ser. II. Oxford, 1897, n° 108; C. WESSELY, *Schrifttafeln, etc.*, n. 10.

N° 11. — Frammento di un elenco di legionari scritto in tre colonne, dell'anno 180 p. Cr. — v. BERN. GRENFELL, *Fayum towns and their papyri*, 1900.

N° 12. — Frammento di una lettera indirizzata da un soldato romano ad un tribuno militare, probabilmente del Sec. II p. Cr. — v. GRENFELL & HUNT, *The Oxyrhynchus Papyri*, vol. I, n. 32; TAMASSIA e SETTI, (“ Atti R. Istit. Veneto ”, 1900, pag. 64); C. WESSELY, *Schrifttafeln, etc.*, n. 50.

N° 13. — Frammento contenente una serie di operazioni concernenti probabilmente la contabilità militare del Sec. II p. Cr. — Vedi C. Wessely, *Schrifttafeln, etc.*, n. 14.

N° 14. — Frammento di una lista di persone (schiavi?) probabilmente del Sec. II p. Cr. — v. Grenfell, Hunt & Goodspeed, *Tebtunis Papyri*, 1907, n. 687.

N° 15. — Frammento di un contratto tra Sesto Fusco ed un tal Pseukebkis, dell'anno 20/21 p. Cr. — v. Id., op. cit., n. 586.

N° 16. — Frammento di una lista di pagamento del Sec. II-III p. Cr. — v. Id., op. cit., n. 686.

N° 17. — Frammento contenente un elenco di soldati romani e barbari, composto nell'anno 205 p. Cr. — v. Grenfell & Hunt, op. cit., vol. IV, n. 735.

N° 18. — Frammento di una lettera famigliare scritta nell'anno 243 p. Cr. — v. J. Nicole (" Revue de Philologie ", 1896, vol. 20).

N° 19. — Frammento d'indole incerta, del principio del Sec. III p. Cr. — v. Grenfell & Hunt, op. cit., vol. I, n. 30.

N° 20. — Frammento contenente vocaboli greci e latini, dell'anno 247 p. Cr. — v. Id., op. cit., vol. IV, n. 720.

N° 21. — Frammento di una ricevuta dell'anno 293 p. Cr. — Vedi Grenfell & Hunt, *Greek Papyri*, Ser. II, n. 110; C. Wessely, *Schrifttafeln, etc.*, n. 12.

N° 22. — Frammento di una stipulazione (?) tracciata in greco ed in latino al principio del Sec. III p. Cr. — v. C. Wessely, *Schrifttafeln, etc.*, n. 23.

N° 23. — Frammento scritto in greco ed in latino contenente una stipulazione dell'anno 321-322 p. Cr. — v. H. Bresslau, "Archiv für Papyrusforschung und verwandte Gebiete ", vol. III (1905), fasc. 3.

N° 24. — Scarso frammento in cui si legge solo la data dell'anno 396 p. Cr. — v. C. Wessely, *Schrifttafeln, etc.*, n. 19.

N° 25. — Frammento di una lettera famigliare scritta da un legionario, probabilmente nell'anno 362 p. Cr. — v. H. Bresslau ("Archiv für Papyrusforschung, etc. ", vol. III, 1904, fasc. 2).

N° 26 e N° 27. — Due scarsi frammenti contenenti il saldo di una ricevuta dell'anno 398 p. Cr. — v. C. Wessely, *Schrifttafeln, etc.*, n. 17 e n. 18.

N° 28. — Frammento di una favola di Babrio trascritta da un amanuense poco esperto della lingua latina; contiene però spropositi interessanti per la fonologia nel Sec. IV (prob.) p. Cr. — Vedi Grenfell, *The Amherst Papyri*, vol. II, n. 26.

N° 29 — Scarso frammento di una lettera latina scritta probabilmente nel Sec. IV p. Cr. — Grenfell, Hunt & Goodspeed, op. cit., n. 688.

N° 30. — Frammento di un glossario greco-latino ad uso dei viaggiatori, composto probabilmente nel Sec. IV p. Cr. — v. J. Brunet de Presle, *Notices et Extraits des MSS. de la Bibliothèque impériale de Paris*, vol. XVIII, n. 165; Id., Id., recensiti da Ph. Haase; Fr. Buecheler (" Jahrbücher für Philologie, 111 (1875), p. 309); Loewe-Götz, *Corpus Glossariorum Latinorum*, v. II, pag. 563; C. Wessely, *Schrifttafeln, etc.*, n. 20.

N° 31. — Frammento di un glossario greco-latino scritto con caratteri greci probabilmente nel Sec. IV p. Cr. — v. J. Kenyon, *Greek Papyri*, n. 481.

N° 32. — Frammento di un glossario greco-latino composto assai verosimilmente nel Sec. V p. Cr. — v. Th. Bernd (" Rheinisches Museum ", vol. V (1837), pag. 301); C. Wessely, *Schrifttafeln, etc.*, num. 44.

***

Trentadue frammenti, di cui la maggior parte è logora e guasta, ecco l'unico retaggio sinora a noi pervenuto del latino volgare parlato nelle provincie, specialmente in Egitto: patrimonio scientifico senza dubbio scarsissimo, quasi insufficiente qualora si pensi a quel periodo così segnalato della coltura antica in cui i Romani si erano accorti di una doppia via che loro si affacciava, o di calcare le orme antiche o di procedere risolutamente nel cammino del rinnovamento. Era allora il tempo in cui i Romani nell'ambito della stessa loro lingua parlata avevano già sentito il bisogno di seguitare o l'una o l'altra delle due vie, cosicchè, rendendosi seguaci o dell'una o dell'altra, affidavano inconsapevolmente il loro modo diverso di pensare e di scrivere alla scrittura giornaliera, a seconda dell'uso o del gusto di ciascuno.

Il che facilmente noi siamo indotti a ritenere pel fatto che in documenti di natura tutt'altro che dotta o letteraria, in documenti di scrittura comune, quotidiana, si hanno ad osser-

vare forme affatto speciali: indizi questi irrefragabili della doppia tendenza che allora agitava le menti.

Convien dunque porgere, almeno nei tratti più evidenti, un quadro sufficientemente completo di tali τεκμήρια, considerandoli però a seconda dei principî diacritici oggidì adottati dagli studiosi di filologia latina.

Elementi grafici dell'alfabeto. — Tra le varie particolarità che vi si possono agevolmente considerare, notiamo che la lettera Y, straniera all'alfabeto latino, è conservata assai spesso nelle voci trascritte dal greco: così nel sec. I p. Cr.: LYCISCO = n° 2: nel sec. II: CYR = n° 5; DIONYSIVS = n° 7; HERMACISAPYNI = n° 8; DIONYSI = n° 14; HYLEOS = n° 16. — La si riscontra pure nel sec. III in: PHRYGIA = n° 19; nè difettano della stessa i papiri del sec. IV, come, p. es.: DYSCOLI = n° 24; EYTYCHIANI = n° 26. Un tale uso che si tramanda ancora nel sec. V in abbondanti esempi, che qui appena mette conto di accennare, è notevole in special modo per la pronunzia della Υ greca nel latino provinciale dei primi secoli dopo Cristo.

Quanto poi alla lettera Z, straniera come la precedente alla lingua latina, possiamo arguire che della medesima si servissero continuamente i provinciali romani nella trascrizione dei nomi greci che la contenevano, nè mai avessero pensato di sostituirla con un segno grafico diverso da quello che la tradizione costantemente ci ha tramandato. Vero è che nessuna traccia purtroppo della Z a noi è sinora pervenuta dai papiri del sec. I; però nel sec. II abbiamo a menzionare: ZENON = n° 5. — Mancano altri esempi nelle età successive; tuttavia è più che ovvio il supporre che — nei primi cinque secoli almeno — la pronunzia della lettera Z fosse tale nella provincia romana d'Egitto, da non poter essere scambiata facilmente nella scrittura con un altro suono dell'alfabeto latino, siccome si volle pretendere da alcuni grammatici, troppo ligi alla tradizione arcaica (cfr. Velio Longo, *Gramm. Lat.*, ed. Keil, VII, 21).

Anche i papiri ci confermano pure indirettamente la scarsa diffusione che ebbero nelle provincie dell'Impero quei nuovi caratteri alfabetici che la fantasia di un imperatore grammatico, Ti. Claudio, aveva escogitato. Mancano affatto esempi del

segno Ɔ per indicare con una sola lettera la Ψ dei Greci: altrettanto possiam dire riguardo alla espressione grafica ⊢ significante un suono intermedio tra la I e la U. Nè tampoco ci fu dato di rintracciare nei nostri documenti un vestigio del terzo segno Ⅎ usato ad indicare la pronunzia della V consonante.

Notevole è poi il fatto che nei nostri papiri, specialmente in quelli dei primi due secoli, trovasi indifferentemente usata la scrittura della I sia normale (I) che allungata (|) ad indicare tanto la vocale pura e semplice quanto la I in funzione di consonante. Convien dunque ritenere che l'uno e l'altro segno grafico servissero allora al medesimo scopo.

Solo nei papiri letterari si riscontrano esempi degli espedienti cui si ricorreva ai tempi d'Augusto per esprimere la funzione consonantica distintamente da quella vocalica, raddoppiandone cioè la scrizione.

Ma di ciò — ripeto — difettano i nostri documenti volgari.

Quanto all'uso degli *apici* ben poco possiamo affermare: ci pare abbastanza probabile l'opinione che tali segni grafici fossero adoperati piuttosto dai dotti che non dal popolo minuto, il quale, sebbene fosse notevolmente partecipe della coltura comune, tuttavia, come sempre, non badava troppo a che le modificazioni della lingua scritta e parlata, volute dai grammatici e dai retori, venissero sempre rispettate. Di ciò invero può suggerir conferma il fatto che nei nostri documenti non si riscontra traccia veruna di apici. Del resto è noto che nei sec. III, IV e V l'uso di siffatte note scrittorie venne man mano scomparendo: solo qualche vestigio isolato si può osservare ancora in qualche tarda iscrizione.

È noto del pari che gli antichi per significare la vocale ɪ lunga (in prosodia) scrivevano per lo più un apice sopra la medesima, nei primi tempi dell'Impero: però in età più remote facevano uso del nesso ᴇɪ. Nel rifiorire dell'arcaismo, ai tempi d'Augusto, ne troviamo ancora esempi, in special modo nelle iscrizioni ufficiali, tanto da giustificare l'asserto di un grammatico del sec. IV, Mario Vittorino, secondo il quale una tale usanza sarebbe durata assai lungamente (v. *Gramm. Lat.*, ed. Keil, VI, S. 14).

A confermare siffatta opinione stanno notevoli tracce di tale gratia che si riscontrano precisamente in un papiro dell'età augustea, in una voce ripetuta per ben quattro volte: CONDVCTEI = n° 1. — Ora, una simile rappresentazione grafica della I lunga ci fa arguire ad evidenza una pronunzia della medesima non del tutto conforme a quella della I comune o breve: il papiro che la contiene è poi tale per sua natura che torna impossibile il ravvisare in esso l'influenza di alcuna scuola speciale. Nei secoli successivi, mancano del tutto esempi di tale arcaismo.

Nulla possiam dire dell'uso del *sicilico*, del quale non si ha traccia alcuna nei nostri documenti, come pure in essi mancano esempi di quelle notazioni tachigrafiche tanto in uso nei primi secoli dell'Èra volgare: vi si leggono solamente la solite abbreviature dei nomi proprii e quelle delle date come, p. e., K ovvero KAL = kalendas, di ben scarsa importanza.

Vocalismo. — Se è vero che nelle lingue nostre l'anima — per così dire — di una parola sta tutta nella espressione fonetica delle sue vocali, altrettanto vero è per la lingua latina qualora noi prendiamo ad esaminarne i vocaboli che i provinciali romani hanno tracciato all'improvviso, senza studio o preconcetto di sorta, niente ad altro badando che a significare tosto sul papiro quello che loro si presentava spontaneo alle labbra. È questo senza dubbio un campo nuovo che si schiude alla indagine dello studioso, al quale da una parola frettolosamente tracciata, forse erroneamente scritta, si apre una fonte nuova di osservazione. È lo spirito — diciamo noi — di tutta una parte del mondo romano che si rivela sotto una nuova luce in uno dei suoi tanti e svariati aspetti. Un tale compito, per lo meno siffattamente inteso, è assai difficile ad essere degnamente assolto: nè tutto il buon volere di chi scrive e la sua minuta indagine possono essere per ora sufficienti a sciogliere la quistione da questo lato. Tuttavia, lungi dal voler chiarire senz'altro non pochi punti oscuri della complicata trama del linguaggio parlato dai nostri antichi, lungi dall'aver siffatta pretesa allo stato presente dell'indagine scientifica, ho creduto di non durar fatica vana nell'investigare i pochi avanzi di una coltura tanto

gloriosa e feconda, considerandola anche dal lato puramente fonetico-grammaticale.

Veniam dunque a considerare una copiosa serie di vocaboli, i quali nell'intimo loro vocalismo ci presentano notevoli divergenze da quella scrittura e pronunzia, che la tradizione e l'uso di tanti secoli ci hanno tramandato.

Nella latinità provinciale è assai raro lo scambio della vocale E col dittongo AE: per l'età di Augusto ne mancano del tutto esempi nei papiri volgari, mentre invece non difettano in quelli di contenuto letterario. Solamente sullo scorcio del sec. III una tale confusione fonetica si accentua notevolmente, come ad es.: DATE FIDEI = n° 21, fino a diventare pressochè generale nelle età successive. Così si hanno VBE (uvae) = n° 30; LEBA (laeva) = n° 16. Le quali voci servono ad indicarci ad evidenza quale fosse la pronunzia del dittongo AE nei primi secoli dell'Era volgare, mentre nei documenti del sec. IV appare addirittura identica a quella della semplice vocale E, nelle seguenti voci: SPAEARVM (sperum) = n° 28; SERENAE (serene) = ibid.

Un indizio notevole di arcaismo si riscontra ai tempi di Adriano nelle voci TRADEDISSE = n° 9: VENDEDI = ibid. Riguardo però allo scambio tra la I e la E *ante vocalem* rammentiamo che (almeno nei papiri) non è rimasta traccia alcuna da confermare quella tale pronunzia rusticana che fu adottata da non pochi oratori romani del sec. IV, che profferivano *doleum*, *paleum*, *alteum*, ecc., secondo la testimonianza del grammatico Carisio (*Gramm. Lat.* ed. KEIL, I, 71).

Arcaismo pure evidente è l'uso della vocale V in luogo della I, di cui ci resta un solo esempio nella grafia VBSE per *ipse* = n° 12, del sec. II; mentre nelle iscrizioni contemporanee si leggono voci simili in quantità notevolissima. Nella trascrizione di nomi greci non meno notevoli per la pronunzia della υ dopo Adriano sono le scrizioni seguenti: AEGVPTI = n° 8, due volte; DIONVSIVS = n° 11, due volte.

Contrariamente mancano indizi dello scambio tra la I e la V nei papiri dei primi tre secoli: solamente nel IV possiam rammentare: MIACI (μυακιν) = n° 31: TIRA (θυρα) = ibid.; importantissimi indizi che attestano quale fosse la pronunzia contemporanea della υ greca presso i Romani d'Egitto.

Nè meno importante ci pare la sostituzione della vocale o alla v nei seguenti vocaboli del sec. IV; CIRCOMITTI = n° 28; OCVLOS = n° 30; MANOS = ibid.; COLOMBV = ibid., dei quali il primo è indizio vero e proprio di arcaismo (?).

A noi non è pervenuta (nei papiri almeno) alcuna traccia della grafia AI per il dittongo AE, che pur si trova comunissima nelle iscrizioni arcaicizzanti del I sec.: nè della sostituzione del dittongo AE ad AV; tuttavia è pur sempre degna di nota per la pronunzia contemporanea la voce CODAM (caudam) = n° 28 del sec. IV, in cui già si osserva la contrazione del dittongo AV in O, contrazione rustica e volgare al dire dei grammatici di quel tempo.

Ma fra tutte la più importante al caso nostro è senza dubbio la scrizione SEIDES = n° 11, che si riscontra in sulla fine del sec. II, arcaismo notevole per il nesso EI, di cui in seguito troveremo tracce nella flessione nominale latina.

Ricordiamo ancora — benchè sia di scarsa importanza — la scrittura ADDATIOVR (addatur) = n° 28, che si trova in un frammento molto sgrammaticato del sec. IV.

Mancano a noi purtroppo tracce di una grafia assai curiosa, cioè della tripla geminazione della vocale I in alcuni verbi composti, come p. es., CONIIICIT, la quale dev'essere relegata piuttosto alla fantasia pura e semplice di alcuni grammatici, come Velio Longo (*Gramm. Lat.*, ed. KEIL, VII, 54).

Consonantismo. — Sin dal tempo di Adriano noi troviamo copiosi esempi della sostituzione della labiale B alla V, come p. es., BALINI = n° 5; SALBAS = n° 10 (1).

Una confusione pressochè completa dei due elementi fonetici si riscontra poi nel sec. IV: vi leggiamo infatti BVLPECVLA = n° 28; BINEARIS = ibid.; BINV (vinum) = n° 30; LEBA; VBE; CIBITAS; BENTRE; LABA; BILLOSA (villosa) = ibid.

(1) Scrizioni queste importantissime perchè confermano quanto già avevano congetturato il BRAMBACH (*Die Neugestaltung der lateinischen Orthographie*, Lipsia, 1868, pag. 238) e lo SCHUCHARDT (*Der Vokalismus des Vulgärlateins*, I², 68 e segg.).

Nè la sostituzione contraria, cioè della labiale B alla V, manca nei papiri del sec. V, come p. es.: PROBERBIVM = n° 32; anzi diviene addirittura frequente nelle scritture latine volgari sino al sec. X dell'Èra nostra.

Com'è noto - lo spirito aspro dei vocaboli greci si soleva da tempo immemorabile indicare in latino per mezzo della lettera H. Un tale uso, costante nell'antichità, è pure confermato dai nostri documenti; abbiamo infatti nel sec. II le trascrizioni seguenti: HERACLIANO = n° 7; HERCVLANI = n° 8; HERACLAMMON = ibid.; HERMACISAPYNI = ibid.; HERMOFILVS = n° 11; HORVS = ibid.; HYLEOS = n° 16; HERMAISCVS = n° 11. Mancano esempi per l'età successive. Dalle quali voci è lecito arguire che nel sec. II lo spirito aspro dei Greci doveva essere fortemente indicato nella pronunzia dei provinciali d'Egitto, se la sua rappresentazione grafica ricorre così ben definita in documenti che per la loro natura sono più che alieni dalle distinzioni grammaticali contemporanee.

Qualora poi ci facciamo a considerare la geminazione delle consonanti nasali nelle parole latine d'origine greca, ben poco servono i nostri papiri ad illuminarci in proposito. Leggiamo solamente, nel sec. II, le voci: AMMONIVS = n° 6; AMMONIVS = n° 8; COMMODVM = ibid.; AMMONIVS = n° 14, che offrono alla presente indagine un valore molto scarso. Mancano poi del tutto esempi analoghi nell'età successive.

Quanto alla trascrizione di alcuni nessi sillabici derivati dal greco, nulla di notevole appare nei nostri documenti: vi si trova tra l'altro la scrizione OPXARIM = n° 30, del IV secolo, unico e singolare esempio donde non è lecito argomentare alcunchè di probabile, nonostante che nelle iscrizioni contemporanee non manchino esempi di vocaboli in cui il lapidicida latino abbia riprodotto la ψ greca col nesso PX anzichè col solito PS.

Degna invece di particolare menzione è la grafia OPTALMOS = n° 30, che per noi è indizio tutt'altro che trascurabile dell'affievolita pronunzia latino-ellenica dell'aspirata greca φ innanzi a consonante durante il sec. IV. — Notiamo però che riguardo

alla trascrizione della φ non mancano esempi in cui è resa col suono della labiodentale spirante f sin dal sec. II p. Cr., come HERMOFILVS; NEFEROS = n° 11. — Un siffatto modo di trascrizione dovette andare tutt'altro che in disuso nell'età successive, se, p. es., ne troviamo copiose traccie durante il sec. IV nelle voci: ADELFOS; CEFALEN; SIFRIN; TEOFANEM; FILIPPI; ? ARAFICEN (prob. Ἀραβικὴν) = n° 30, che ci mostrano ad evidenza come in quel tempo il nesso grafico *ph* fosse assai frequentemente sostituito dalla semplice lettera *f* anche in nomi d'origine greca.

Notiamo ancora che nel sec. V si osserva uno scambio frequentissimo tra il nesso PT e quello BT, come in SVPERSCRIBTIONES, CONSCRIBTA, etc. Il che del resto non deve far meraviglia qualora si pensi al faticoso periodo di transizione che allora appunto la scrittura e la pronunzia latina veniva percorrendo prima di costituirsi in una forma nuova e ben delineata.

Venendo ora a considerare le consonanti dentali, di buonora già troviamo scambiate tra loro le lettere D e T per l'omofonia della stessa pronunzia; così nel sec. II leggiamo: ED EVTICHEN = n° 9; al contrario SET = n° 10; AT · TE = n° 12; QVITQVIT = ibid.; cui si aggiunge nel sec. IV: FRIGITIS = n° 28.

È cosa notoria che per la trascrizione della Θ greca i Latini usavano il segno TH, per esprimere, evidentemente, una pronunzia diversa da quella della semplice lettera T. E ciò è tanto vero che un legionario romano al tempo d'Augusto scrivendo alla sua famiglia sentiva la necessità di scrivere TH anzichè T: ANTHO... = n° 2. È evidente dunque che nell'età augustea la θ dei greci veniva fortemente aspirata dai legionari romani. Anche nei secoli posteriori una tale aspirazione dovette senza dubbio conservarsi, se chiaramente troviamo THEBAIDIS, THVBVRSI = n° 8; THEONEM = n° 12; THEMES (due volte) = n° 17; THRACES = n° 26; PANTHERA = n° 32.

Avremmo desiderato che nella dibattuta quistione cronologica concernente l'intacco della vocale I preceduta da una dentale (iotacismus) i papiri volgari avessero portato nuova luce; ma purtroppo finora nulla ci è rivelato.

Non mancano invece esempi — sebbene in scarso numero a noi siano pervenuti — i quali attestano la forte esplosione della x nella pronunzia dei provinciali romani: così possiamo ricordare SEXS = n° 13; ? EXSIGNIFER... = n° 6, dei quali l'ultimo mi pare assai dubbio (EX SIGNIFERIS?). — Del resto nessuna meraviglia di tale scrittura qualora si pensi che una pronunzia così arcaicizzante si riscontra in documenti contemporanei a Frontone.

Nè io sarei alieno dal ritenere la voce EVTICEN = n° 8 come esempio della grafia arcaicizzante dello stesso periodo, anzichè crederla una scrittura errata, in cui si osservi puramente e semplicemente l'omissione dell'aspirata H. Vero è — e conviene notarlo — che non mancano esempi nella medesima epoca e località del nostro documento, nei quali il segno dell'aspirazione sia mantenuto, come nelle voci seguenti: EVTYCHEN = n° 9; ANTIOCHUS = ibid.; EVTYCHEN = ibid.; CHARES = n° 11; EPONYCHOS = n° 11; cui possiamo aggiungere nel sec. III: ANTIOCHVS = n° 19; BARICHIVS = ibid; PULCHERI = n° 21; e nel sec. IV: EYTYCHIANI = n° 26.

Notevole è il doppione grafico CAIVS e GAIVS nel medesimo documento n° 10, per la pronunzia del famoso prenome romano.

Le voci che siamo venuti finora menzionando costituiscono, come ognuno vede, lo scarso materiale che si può raccogliere dai papiri di natura prettamente volgare, sinora rinvenuti, riguardo la scrittura e la pronunzia del latino provinciale contemporaneo, considerato nella sua parte essenzialmente ortoepica. Facciamoci ora a considerarne il divario, pur lievemente delineato il più delle volte, dalla lingua ufficiosa, in quanto la svariatezza delle sue tinte ce lo rivela nel suo processo lento ma costante attraverso la speciale flessione dei sostantivi. In essi notevoli tracce di arcaismo potremo assai facilmente rinvenire, tracce di peculiare importanza, perchè non sono già le vestigia dubbie od isolate di una grafia a bella posta incerta ed oscillante, ma sono anzi i documenti che meglio ne attestano l'evoluzione storica nelle sue forme volgari.

Flessione nominale. — Circa la flessione dei nomi greci da parte dei legionari romani in Egitto ben poco noi abbiamo ad

osservare: in generale prevale l'uso della flessione latina, sebbene non manchino esempi di declinazione alla greca. Ne dànno infatti testimonianza tutt'altro che dubbia i seguenti nomi propri in cui l'elemento latinizzato prevale sulla forma prettamente grecizzante: nel sec. II: DIONVSIVS = n° 11; AMMONIVS = ibid.; POSIDONIVS = ibid.; HELIVS = ibid.; HORVS = ibid.; ARGOTIVS = ibid.; ALEXANDRVS (*sic*) = n° 11. Quanto alla flessione nominale del III sec. sono a noi pervenuti: ANTIOCHVS = n° 18; BARICHIVS; ZEBIDIVS; PSENOSIRIVS = n° 17; PHILIPPVS = n° 18. Ma nello stesso frammento n° 11 — testè citato — non mancano, in casi alquanto diversi, esempi di una flessione nominale alla greca, come NEFEROS; EROS; APOLLOS, ecc.

Mentre che nelle iscrizioni latine del sec. II sono assai abbondanti i vocaboli appartenenti alla cosiddetta III declin., che al caso nominativo sing. escono in ES anzichè in IS (forma reg.), nei papiri contemporanei tali voci sono in difetto: anzi, si può dire che manchino del tutto, se si eccettui l'espressione TALES OMO = n° 11, di assai scarso valore.

Maggiormente degna di nota per attestare la sopravvivenza degli arcaismi nelle provincie dell'Impero è la grafia seguente, che per ben sei volte si riscontra ripetuta in un papiro del sec. I: CONDVCTEI (per *conducti*) = n° 7. Altri esempi però difettano in proposito riguardo ai secoli successivi. Laonde, sulla sola e semplice scorta dei documenti di natura irrefragabile che attualmente possediamo, ci è lecito ritenere solamente che tracce di antichità remota si hanno ancora e assai notevoli in tempi in cui tanto la lingua quanto l'arte si erano avviate ormai in Roma per una nuova via, lasciando dietro a sè, quale unico retaggio di pochi, l'arcaismo dell'età anteriori. Nella voce or ora riportata, non ci consta affatto che ci troviamo di fronte ad un *lapsus calami* puro e semplice, in quanto che l'essere tale voce ripetuta per ben sei volte di seguito può offrirci un'arra tutt'altro che improbabile.

A conferma del nostro assunto noi avremmo desiderato che, riguardo alla flessione nominale dei sostantivi appartenenti alla III declin., per il caso nominativo plurale non ci fossero mancati esempi speciali; senonchè nei papiri di natura volgare che pren-

demmo a fondamento della nostra ricerca, non ci fu dato purtroppo di scoprirne alcuna traccia, sebbene se ne trovino copiosissimi esemplari nelle iscrizioni contemporanee.

Un punto notevolissimo che da secoli è controverso nella ormai famosa quistione dell'analogia e dell'anomalia della scrittura latina e che in tempi recentissimi ha sollevato una non men famosa discussione tra i cultori della classica filologia, si è quello che consiste nella desinenza speciale al genitivo sing. dei sostantivi propri in -IVS appartenenti alla II declinazione, come ad es.: GAIVS, POMPEIVS, ecc. — È un fatto che le ricerche condotte al riguardo dagli eruditi, fondate in special modo sulle testimonianze dei grammatici latini dei primi secoli, non sono approdate a risultati definitivi, come del resto da quanto ci è stato tramandato dalle iscrizioni contemporanee non si può dedurre alcuna illazione appieno soddisfacente. E purtroppo, conviene ora aggiungere, in tale quistione neppure i papiri possono attualmente darci l'ultima parola. — Invero solamente nei papiri volgari del tempo d'Adriano ricorre la scrittura della I geminata; così in FANII = n° 5. Si noti però che nel medesimo frammento di papiro ricorre ben tre volte il genitivo uscente nella sola e semplice I, come in CERELI, ANTONI, ACVLI. Potremmo perciò essere indotti a ritenere che, ai tempi di Frontone, prevalesse la forma anomala presso i provinciali romani? Non pare: la scarsità dei nostri documenti è tale da non autorizzarci affatto ad illazioni così recise: tutt'al più c'induce a credere che la controversia sta ancora *sub iudice*. Nè diversamente ci è dato d'argomentare riguardo all'età successive: dacchè un indizio tutt'altro che sufficiente ci è pórto dalla sola voce IMPERII = n° 18, appartenente al sec. III. Speriamo che una messe copiosa di documenti abbia a venire alla luce quanto prima, sì da lasciarci l'ultima parola in proposito.

Circa poi la flessione latinizzata dei nomi propri greci, per il caso genitivo sing., si ricorda la voce seguente tolta da un papiro del sec. II: THEBAIDIS = n° 8: la quale, unica allo stato presente delle nostre ricerche, non può esser a noi indizio bastevole di una probabile deduzione. Per il caso accusativo singolare nel medesimo sec. II abbiamo riscontrato un solo doppione:

due volte ABBAN allato ad ABBAM = n° 8; tre volte EVTICHEN = n° 9; ed EVTICEN = ibid.

Quanto alla flessione nominale latina ben poco ci è dato di osservare: restano pel caso dativo plur. la grafia antiquata di AVXILIEIS = n° 19 e la forma SPEBVS = n° 28: nè mai negli scarsi frammenti finora rinvenuti abbiam potuto trovare tracce della terminazione arcaica -VBVS usata in cambio della desinenza -IBVS al dativo plurale.

Senza dubbio notevole per la finale in I dell'ablativo sing. degli aggettivi a due terminazioni è la voce OMNI = n° 3, in quanto ci dimostra la somma accuratezza d'espressione che si praticava sì nello scrivere come nel parlare da parte dei legionari stanziati nelle provincie. Il che pure è a mio avviso confermato dall'altra voce non meno notevole MAIORE = n° 8, del sec. II, riguardo al medesimo caso degli aggettivi di grado comparativo, la cui uscita — come ognun vede — era in *-e* anzichè in *-i*, come talora si riscontra erroneamente nelle iscrizioni.

Un esempio elegante di arcaismo, al tempo di Tiberio, ci è dato dall'agg. superlativo OPTVMVS = n° 1; ma — notiamo — non occorre farvi sù troppa fidanza, essendo l'unico del genere a noi sinora pervenuto. Di più rammentiamo che al tempo dello stesso Augusto, non mancano nei nostri papiri esempi della scrittura opposta, come VALDISSIME = n° 2; nel sec. II: MAXIMUS = n° 5, n° 6, n° 11; e nel sec. III: NOBILISSIMORVM = n° 21. Sgraziatamente la penuria dei nostri esemplari non ci consente d'indugiarci di più sopra tali forme, indici, come ognun sa, importantissimi per la disamina della scrittura latina.

Quanto agli aggettivi numerali nulla di notevole ci è rimasto, come appare evidentemente dalle voci: VNO = n° 13; TRIBVS = ibid.; QVATVOR = ibid.; SEXS = ibid.; SEPTEM = n° 9; OCTO = n° 13; VIGINTI ET QVINQVE = ibid.; DUCENTIS = n° 8; DVCENTORVM = ibid. — Così pure per il sec. III: DECEM = n° 21; CENTVM ET VIGINTI = ibid.; NVM HS OCTOGENTVM VIGINTI = ibid.; e per il sec. IV: DVOCENE (*duodenae*?) = n° 24 e QVATERNAS = n° 25.

Riguardo alla flessione pronominale ben poco ci è dato di affermare sulla semplice testimonianza dei nostri documenti: infatti appena degne di essere menzionate ci paiono le seguenti voci del pronome relativo: QVOT, QVIT e del pronome dimostrativo: EIS = n° 4. Quest'ultimo invero assume notevole importanza in quanto che trovandosi in un documento dell'età di Traiano viene a smentire l'opinione sostenuta già dal Brambach, il quale, fondandosi sulle sole iscrizioni, riteneva che la forma EIS fosse scomparsa dall'uso comune sin dal principio dell'età augustea (1).

Quanto ai rimanenti pronomi dimostrativi, un solo esempio ci resta nel vocabolo IPSISMET [IPSIS] = n° 26, di assai scarso valore.

Flessione verbale. — Un materiale altrettanto scarso di documenti si trova pure nelle nostre fonti riguardo alla flessione verbale; il che è tanto più deplorevole in quanto non ci è dato di rinvenire alcuna traccia fededegna degli arcaismi che pure dovevano essere molto in fiore nei primi tempi dell'Impero. Così per l'età augustea non è possibile sinora incontrare terminazioni arcaiche di verbi uscenti, alla 3ª pers. plur. dell'indic. pres., in -ONT anzichè in -VNT. Il che potrebbe evidentemente dimostrare che presso i provinciali, specialmente d'Egitto, fin dai primi tempi dell'occupazione romana doveva esser scomparso ogni vestigio di siffatto arcaismo. Altrimenti — ed è ben lecito il supporlo — accanto a tante altre forme di voci arcaiche ed arcaicizzanti, un resto di tale scrittura ne sarebbe per lo meno in qualche parte sopravanzato. Tant'è che abbiamo a ricordare: FASTIDIVNT = n° 4; ..... GIVNT = n° 4; del tempo di Traiano. — Scarse sono pure le contrazioni dei verbi, come in COMPLESSE = n° 17; DORMISSET = n° 26; meno rare sono invece le forme speciali dei perfetti con raddoppiamento con vocale caratteristica arcaicizzante, come, p. es., in VENDEDI = n° 9; TRADEDISSE = ibid., che del resto sono comunissime nelle iscrizioni contemporanee.

Da ultimo, tanto per completare questi brevi cenni sulla fles-

(1) V. BRAMBACH (*Die Neugestaltung der laitenischen Orthographie*, Lipsia, 1868, pag. 140).

sione verbale che si riscontra nei nostri papiri volgari, non sarà del tutto inutile riferire ancora alcune voci notevoli per la loro forma piuttosto unica che rara: VOLVTOR = n° 1; HIBERNATVR = n° 9, ecc.

Composizione. — Sinora noi siamo venuti esaminando le varie grafie dei vocaboli latini, per poter argomentare se coloro che le avevano usate, obbedendo ad un impulso istintivo, spontaneo del linguaggio parlato, potessero darci indizio sufficiente riguardo alla forma di scrittura che prevaleva al tempo loro. Abbiamo visto che i papiri da noi esaminati additano, almeno nel loro complesso, una prevalenza manifesta della tendenza arcaicizzante presso i provinciali romani, tendenza che perdura ancora a lungo mentre nella metropoli da tempo è già venuta declinando. Ora, una nuova conferma a questa nostra affermazione ci è data dalla composizione dei vocaboli quale si riscontra nei nostri frammenti papiracei.

E noto a tutti che nelle voci composte l'assimilazione consonantica è indizio presso gli scrittori latini di una tendenza pronunciata verso l'anomalia: laddove la dissimilazione è caratteristica notevolissima del fenomeno contrario. Pertanto facciamoci ad esaminare partitamente i singoli casi in cui ci è dato di riscontrare o l'una o l'altra forma linguistica. E senz'altro incominciamo dalle parole composte con

preposizione *AB*: Degna di particolare menzione è la scrittura AB . STE (abs - te) = n° 1; mancano però altri esempi di composti analoghi.

preposizione *OB*: Dai tempi di Adriano in poi nessun esempio; solo nel secolo III si osservano: OBSERVANDIS = n° 18; OBSERVATIS = ibid., in cui — come ognun vede — è conservata la grafia degli anomalisti. — Un caso di dissimilazione si nota però nel sec. V: OBREPERE = n° 32; ma non ha importanza alcuna.

preposizione *SVB*: Si può menzionare SVSPICOR = n° 3, dei tempi d'Augusto; mancano altri esempi insino al sec. III in cui

si ricordano: SVCCESSIO = n° 18; SVPPLENDIS = ibid., e nel sec. IV: SVGGERERE = n° 22; SVGGESTIONE = n° 24; SVCCENSVS = n° 28; SVPPLICATIONIS = n° 30, i quali del resto ben poca luce ci possono fornire.

preposizione *AD*: Abbiamo parecchi esempi di assimilazione: al tempo di Traiano: ACCEPIT = n° 3; quindi ACCEPIT = n° 9; ACCESSER = n° 10; ACCEPISSE = n° 12. Mancano esempi nei papiri dei secc. III e IV; nel sec. V si ricorda solamente ALLEGATIONIS = n° 30. — Mancano invece del tutto nei nostri papiri volgari, esempi di dissimilazione nei primi quattro secoli; solamente nel quinto si notano: ADFERATVR = n° 30; ADLEGANDI = ibid.; ADLEGANDI = ibid. — Degna tuttavia di particolare menzione è la scrittura AT-TE (ad te) = n° 1; segno evidentissimo della forza di assimilazione che aveva il volgo provinciale anche ai tempi d'Augusto, così propizi all'analogia!

preposizione *CVM*: Mancano affatto esempi di composti, se pur si vuole eccettuare la forma regolare COEGERVNT = n° 31 del sec. V, comune del resto ai seguaci delle due tendenze così confuse in quel tempo.

preposizione *IN*: Elegante esempio di dissimilazione si riscontra nella voce frammentaria ...ENLA... = n° 13, pel sec. II; INPLE... = n° 23, nella prima metà del sec. IV; cui possiamo aggiungere la sgrammaticatura IMFRASCRIPTIS = n° 23. — Nel sec. V ci è dato solamente di menzionare INLVSTRIS = n° 30.

preposizione *PER*: Mancano esempi sì dell'una come dell'altra scrittura.

preposizione *EX*: Un solo esempio in EFFVGISSE = n° 3, poco notevole del resto.

preposizione *TRANS*: La scrittura comune vi si riscontra conservata pienamente senza alterazioni notevoli: così ad es.: TRANSLATVS (bis) = n° 10; TRANSFLVMINIANVS = n° 11; TRADO = n° 4; TRADVNTVR = ibid.; TRADEDISSE = n° 9.

prefisso *DIS*: Mancano del tutto esempi sì dell'una come dell'altra tendenza.

prefisso *RE*: Nel sec. I mancano siffatti composti e così pure nei sec. II e III; nel sec. IV: RESPICERE = n° 23, di nessuna importanza.

E questo è tutto il materiale finora a noi pervenuto circa le tendenze grafiche che si osservano nella scrittura latina volgare, tratto dai frammenti di papiro dei primi cinque secoli dopo Cristo.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo delle LL. MM. e RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 23 Febbraio 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: NACCARI, SPEZIA, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, MORERA, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e CAMERANO, Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica il R. decreto del 23 gennaio u. s. col quale fu approvata l'elezione del Socio NACCARI a Direttore della Classe.

Il Socio SPEZIA presenta in omaggio tre note del Dr. COLOMBA di argomento mineralogico.

Vengono presentate per gli *Atti* le note seguenti:

1° Dott. Galeazzo PICCININI: *Idrolisi di nitrili ossi-idropiridinici*, Nota 2ª, dal Socio GUARESCHI;

2° Luigi SAUDINO: *Nuova pila elettrica costante ed economica*. La Classe in seguito a relazione favorevole dei commissari all'uopo nominati, Soci NACCARI e GRASSI, approva la stampa del lavoro del sig. L. SAUDINO;

3° *Il Quagga del Museo Zoologico di Torino*, del Socio CAMERANO.

Raccoltasi la Classe in seduta privata, procede alla nomina della Commissione per il conferimento del premio Vallauri per le scienze fisiche (quadriennio 1907-1910). Riescono eletti i Soci Naccari, Spezia, Camerano, Grassi e Somigliana.

Il Socio Guareschi propone che l'Accademia si faccia iniziatrice per la nomina di un Comitato internazionale per le onoranze da tributarsi ad Amedeo Avogadro nel 1911.

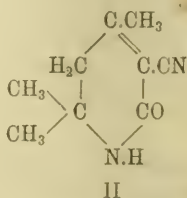
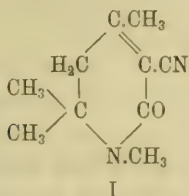
La Classe invita la Commissione precedentemente nominata a volersi riunire per le opportune proposte.

LETTURE

Idrolisi di nitrili ossi-idropiridinici.

Nota II del Dr. GALEAZZO PICCININI.

In una nota precedente (1) sull'idrolisi dei nitrili ossi-idropiridinici (n-metilciantrimetilpirideone I e ciantrimetilpirideone II) ho dimostrato che l'acido cloridrico concentrato ($d = 1{,}19$) a temperature superiori ai 130° idrata facilmente e in modo completo questi composti

```
            C.CH3                          C.CH3
           /  \\                           /  \\
       H2C      C.CN                   H2C      C.CN
 CH3\   |        |               CH3\   |        |
     >C          CO                  >C          CO
 CH3/    \      /                CH3/    \      /
          N.CH3                            N.H
            I                               II
```

e trasforma gli acidi ossi-idropiridin-carbonici, prima generati, nelle due corrispondenti *ossi-idropiridine*. Operando in tal modo non potei isolare questi acidi. Inoltre l'acido cloridrico non attacca questi nitrili che pochissimo a 120°-125°; a 110° li lascia del tutto inalterati. In nessun caso, anche usando acido più diluito, si possono separare i prodotti intermedi dell' idratazione, cioè le amidi.

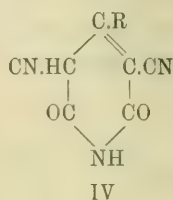
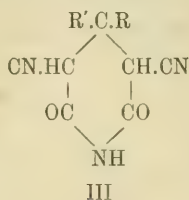
L'uso dell'acido cloridrico poi è poco comodo per la necessità di dover effettuare le reazioni in tubi chiusi; con ciò viene a mancare ogni criterio per giudicare in quale momento si debba interrompere la reazione per avere una idratazione solo parziale.

D'altra parte, pensando che nella condensazione dell'etere cianacetico con le aldeidi, chetoni, eteri chetonici, ecc. in presenza di ammoniaca o delle amine, si ha un mezzo così facile, rapido per ottenere, spesso con ottimo rendimento, nitrili di

(1) " Atti R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XLII.

acidi piridinici e idropiridinici, salta subito agli occhi, quale importanza abbia in questi casi uno studio sistematico degli agenti idrolizzanti, per trovare un metodo generale, pratico e acconcio a produrre la graduale idrolisi del —CN e condurre in modo facile e piano alle *amidi* e agli *acidi*.

Le nozioni ancora molto incomplete degli acidi ossigenati della serie di- e tetra-idropiridinica e lo scopo di dare alle mie ricerche un carattere più generale mi hanno indotto a studiare l'idrolisi di quattro serie di nitrili (tutti riferibili ai composti idropiridinici) e cioè alle serie rappresentate dalle formule I, II, III e IV

```
        R'.C.R                    C.R
         /  \                    /  \\
  CN.HC      CH.CN        CN.HC      C.CN
     |        |              |        |
    OC       CO             OC       CO
      \     /                 \     /
        NH                      NH
       III                      IV
```

I composti III furono scelti anche per studiare quale ufficio ed importanza abbia il —CN in questi corpi in relazione alla facilità, colla quale in soluzione neutra liberano sotto forma di idrocarburo l'alchile a peso molecolare più elevato R', trasformandosi nei composti di tipo IV.

Fra i vari idrolizzatori del —CN, ho scelto l'acido solforico concentrato al 95-96 $^0/_0$ per varie ragioni.

La potassa alcoolica, in genere, non dà buoni rendimenti, spesso non attacca i nitrili terziari difficili ad idratarsi; inoltre essa non poteva servire nel caso delle *dician-diossi-dialchil-idropiridine* III, perchè apre il nucleo colla massima facilità.

Lo stesso si dica dell'acido solforico al 60 $^0/_0$ che all'ebollizione dà gli acidi β-dialchilglutarici con i nitrili III e gli acidi *alchilcianvinilacetici* con i nitrili IV.

Il metodo di Radziszewski (1), come ha dimostrato il Deinert (2), non è generale; alcuni nitrili si comportano in modo molto diverso, a seconda della loro costituzione.

---

(1) B. *18*, pag. 355.

(2) J. prak. Ch. *52*, pag. 431.

Il metodo di Bouveault (1) è ora più generalmente adoperato, come quello che permette anche di separare i prodotti intermedi dell'idratazione, le *amidi.*

Fu messo in pratica per qualche nitrile della serie piridinica con buon risultato da Errera (2) e da Moir (3), i quali non tennero molto conto delle due condizioni essenziali per l' idratazione e cioè la temperatura e il tempo: manca del tutto uno studio sistematico accurato dell'azione di H_2SO_4 conc. sulle varie serie di nitrili piridinici.

Adoprando l'acido solforico al 95-96 %, anzichè al 90 % come consiglia Bouveault, si ha il vantaggio di sciogliere meglio le sostanze, di produrre una reazione più veloce senza pericolo che si formino dei solfoacidi.

Esso agisce ugualmente bene idrolizzando i composti riferibili alle quattro serie suaccennate, senonchè l'idrolisi, che avviene già a 100°, e a temperature superiori è troppo profonda per i nitrili di tipo III e IV, ha luogo molto più lentamente a tale temperatura per i nitrili I e II; questi s'idratano facilmente a 150°-160° e in modo molto rapido.

Anzichè usare per 1 p. di nitrile 15-20 p. di acido solforico, come adoprava Bouveault, val meglio sciogliere il nitrile in 2 p. di acido; la reazione ha luogo benissimo anche in queste condizioni e si evita un fastidioso eccesso di acido.

Comunque sia, l'idratazione di questi nitrili non è completa (4); il —CN, come avviene anche per la maggior parte dei nitrili della serie aromatica, è trasformato in $—CONH_2$ con rendimento quasi teorico pure nel caso dei di-nitrili III; per avere gli acidi conviene ricorrere o all'azione dell'acido nitroso sulle amidi o idratare queste con acidi più diluiti.

Questo fatto può essere vantaggiosamente utilizzato per separare le *amidi* ed ecco come io ho proceduto per quanto concerne l'idrolisi del *ciantrimetilpirideone* e del suo *n-metilderivato,* studio che forma l'argomento di questa nota.

---

(1) Bull. *9*, pag. 368 (1893).

(2) B. *31*, pag. 1941. — Gazz. *31*, I, pag. 170 e 176.

(3) J. Ch. Soc. *81*, pag. 100 (1902).

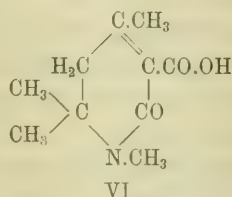
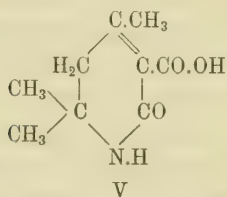
(4) Tuttavia l'acido *n-metil*-α'α'γ-*trimetil*-α*cheto-idropiridin*β*carbonico* si ha anche con piccolo rendimento (10 %) durante l'idrolisi del n-metilciantrimetilpirideone.

Si sciolgono (1) gr. 10 di sostanza in 10 cm^3 circa di acido solforico concentrato al 95 %, si scalda la soluzione a bagno d'olio, o anche a fuoco diretto, sino a 150°-160° e vi si mantiene per 10 minuti circa. La massa vischiosa, un po' fluorescente, che si ha per raffreddamento, si diluisce con 5-6 volumi di acqua; si raffredda (2), si neutralizza il liquido acido con barite o con latte denso di carbonato di bario. Si filtra a caldo e si evapora il filtrato a piccolo volume a b. m.

Per raffreddamento delle soluzioni acquose cristallizzano le amidi, già abbastanza pure. Il rendimento in amide è del 90-95 % del teorico.

In un giorno si possono preparare con questo metodo notevoli quantità delle *amidi* suddette.

Gli acidi α'-α'γ-*trimetil*-α-*ossi-idropiridin* β *carbonico* (V) e *n-metil*-α'α'γ-*trimetil*-α *cheto-idropiridin*-β-*carbonico* VI furono preparati facendo agire sulle amidi, sciolte in 10 p. di acido solforico al 95 %, una soluzione concentrata di nitrito di sodio (1 : 3) in quantità esattamente calcolata e scaldando a 50°-60°, oppure anche a 80°-90° per brevissimo tempo.

```
            C.CH3                          C.CH3
           /  \\                          /  \\
       H2C      C.CO.OH              H2C      C.CO.OH
 CH3\   |       |              CH3\   |       |
     >C         CO                 >C         CO
 CH3/   \     /                CH3/   \     /
          N.H                           N.CH3
           V                             VI
```

In questa nota descriverò queste amidi e questi acidi non ancora noti e che si possono preparare con metodo così semplice; l'acido rappresentato dalla formula VI è il 3° acido della serie *tetraidropiridica* (3) sinora noto; il suo omologo inferiore l'ot-

---

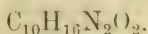
(1) I due nitrili si sciolgono nell'acido solforico con forte sviluppo di calore, ma senza idratarsi; perchè le soluzioni solforiche lasciano riprecipitare il nitrile inalterato per diluizione con molta acqua.

(2) Nell'idrolisi dell'*n-metil-ciantrimetilpirideone* si separa così l'acido cristallino; altra porzione si può avere estraendo con etere il liquido solforico diluito.

(3) Al composto spetta la formula chetonica, per il modo di formazione, per le relazioni che ha con l'omologo acido *n-metil*-α'α'*dimetil*-α*cheto-idropiridin* γ-*carbonico*, per il quale dimostrai la funzione secondaria dell'azoto mediante il comportamento alla fusione con potassa caustica (" Atti R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XLII).

tenni nell'ossidazione dell' n-metilciantrimetilpirideone con permanganato di potassio. Degna di nota, per i due acidi suddetti, è la mobilità del carbossile, che viene staccato già per ebollizione con acidi diluiti, o per evaporazione delle soluzioni alcaline a b. m.

Dalle amidi suaccennate con ipobromito di potassio ho ottenuto le *aminoossiidropiridine*, composti che per il loro comportamento molto interessante saranno studiati ulteriormente. In altro lavoro riferirò varie esperienze, che ho in corso, sul meccanismo dell'azione dell'acido solforico concentrato sui nitrili, dacchè non mi risulta che questo sia stato ancora ben messo in chiaro.

Amide dell'acido
n-metil-α'α'γ trimetil-α cheto-idropiridin β-carbonico
$C_{10}H_{16}N_2O_2$.

Si ha con rendimento del 90 % del teorico dal n-metilciantrimetilpirideone.

È in cristalli incolori, brillanti a rosetta se si hanno dall'alcool assoluto, o in grossi prismi monoclini dall'acqua.

Fonde a 195°-196° (1). È anidra.

---

(1) Quando è mescolata con un po' di nitrile fonde a 185°-186° e allora è così difficile separarla, che anche dopo varie cristallizzazioni dall'alcool assoluto, mantiene inalterato il punto di fusione; così impura, l'amide è molto più solubile in acqua e in alcool: tanto che dapprima credetti si trattasse di un isomero; forse in condizioni analoghe era quella sostanza fondente a 129°-131° che Pollak considerò, senza ulteriore prova, come l'isomero (imidoidrato) dell'amide dell' acido nicotinico (M. *16*, pag. 61). Un campione di amide, che avevo ottenuto scaldando la soluzione solforica del nitrile a 100° per circa un'ora, dopo quattro cristallizzazioni dall' alcool assoluto aveva ancora il punto di fusione 185°-186°. All'analisi mi diede:

C % 61,70
H „ 7,93
N „ 14,69 e 14,72.

Soltanto dopo varie estrazioni con etere, ottenni un prodotto insolubile in etere, che ricristallizzato fondeva a 194°-195° e che conteneva 14,3 % di N ed era amide pura; mentre dagli estratti eterei per cristallizzazione dall'acqua, ebbi una piccola porzione di nitrile col suo punto di fusione 143°5. Da queste considerazioni risulta la necessità di effettuare l'idrolisi a 150°-160°; perchè in tali condizioni tutto il nitrile resta trasformato.

All'analisi diede:

I. Gr. 0,1236 = cm^3 15,4 di N a 17° e 743^{mm};

II. Gr. 0,1449 = gr. 0,1085 di H_2O e gr. 0,3265 di CO_2.

	trovato	calcolato per $C_{10}H_{16}N_2O_2$
C °/₀	61.45	61.22
H „	8.31	8.16
N „	14.17	14.28

Solubile molto in acqua e in alcool assoluto bollenti; solubilissima in alcool metilico e cloroformio, poco o niente in etere, benzene, acetone.

La soluzione acquosa ha reazione neutra; l'amide mostra tuttavia una certa funzione basica sia nella facilità con cui si scioglie negli acidi concentrati e diluiti, sia perchè in soluzione cloridrica precipita con alcuni reattivi degli alcaloidi (acido fosfomolibdico, picrico, ioduro di potassio iodurato).

Col reattivo Nessler dà un abbondante precipitato bianco, distinguendosi in ciò dal nitrile, da cui deriva, il quale collo stesso reattivo dà un precipitato colorato intensamente in giallo.

Non si colora che pochissimo col cloruro ferrico; non dà sali con le soluzioni saline dei metalli pesanti.

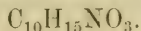
Quello che più interessa è il fatto che questa amide mostra una grandissima resistenza all'azione degli alcali caustici; il gruppo $—CONH_2$ svolge ammoniaca solo per ebollizione con potassa caustica al 50 °/₀ (1).

L'idratazione del $—CONH_2$ a COOH si ha molto facilmente per ebollizione con gli acidi minerali (H_2SO_4 al 20 e al 45 °/₀; HCl al 25 °/₀); senonchè in queste condizioni l'acido piridinico si scompone facilmente in CO_2 e *n-metil* γ-α'α'*-trimetil-*α *cheto-idropiridina.*

L'acido solforico al 95-96 °/₀ a 100° è senza azione sull'amide; anche dopo riscaldamento di varie ore con forte eccesso di acido si riottiene la sostanza inalterata; indirettamente ciò risulta anche dal metodo di preparazione dell'amide.

Non sono riuscito a separare il *nitrosoderivato* di questa amide, che deve essere molto instabile.

(1) Moir ha fatto una osservazione analoga, per quanto riflette la stabilità verso gli alcali, rispetto all'amide dell'acido *lutidin-*α*-ossi-*β *carbonico* (Cfr. J. Ch. Soc. *81*, pag. 100).

Acido
n-metil-α'α'γ-trimetil-αcheto-idropiridinβ-carbonico
$C_{10}H_{15}NO_3$.

Oltre che coi metodi descritti ottenni quest' acido anche scaldando l'*n-metilciantrimetilpirideone* con acido cloridrico ($d=1{,}19$) in tubi chiusi a 120°-125° per qualche ora. Seguendo questo metodo riesce un po' più lunga la separazione; a questo scopo si diluisce la soluzione cloridrica con 3-4 vol. di acqua e si lascia riposare. Precipita così l'acido mescolato a gran parte del nitrile, rimasto inalterato; si separa la parte insolubile e, sospesa in acqua, si neutralizza con carbonato di sodio, si filtra per separare il nitrile indisciolto, e il liquido filtrato, concentrato nel vuoto, si precipita con acido solforico diluito. L'acido ricristallizzato dall'acqua bollente presenta tutti gli stessi caratteri di quello avuto con gli altri metodi. Rendimento scarso.

D'altra parte ho provato anche a idratare l'amide con l'acido solforico al 45 e al 20 %, usando un apparecchio che mi permetteva di osservare, se nella reazione si svolge anidride carbonica e di dosarla: per 1 gr. di amide usavo cm³ 5 di acido solforico al 45 %; scaldando, già prima che si sia raggiunta la temperatura d'ebollizione, il liquido fa effervescenza; se si continua il riscaldamento per circa 1 ora, la decomposizione secondo l'equazione:

$$C_{10}H_{15}NO_3 = CO_2 + C_9H_{15}NO$$

raggiunge quasi il 70 %. Diluendo il liquido, cristallizza l'acido piridinico (25 % del teorico); neutralizzando il liquido e dibattendo con etere si estrae la *trimetil-n metil-α cheto-idropiridina* $C_9H_{15}NO$, che fu caratterizzata mediante il cloroplatinato e picrato.

Dal liquido reso neutro ed evaporato a secco, mediante ripetute estrazioni con etere ebbi ancora una piccola porzione di amide indecomposta. Questo dimostra chiaramente che l'acido si scompone in gran parte per la temperatura piuttosto elevata, quando ancora l'idratazione non è totale.

Risultato ancora peggiore ottenni bollendo 1 gr. di amide con 10 cm^3 di acido solforico al 20 %; operando così il rendimento in acido è più scarso, perchè l'amide anche dopo ebollizione di 1 ora rimane inalterata per circa il 60 % e per la reazione, del resto, valgono le osservazioni fatte con l'acido al 45 %.

Il miglior mezzo per prepararlo è questo: alla soluzione ben fredda dell'amide (1 p.) in 6-8 p. di acido solforico concentrato si aggiunge a poco a poco la quantità esattamente calcolata di soluzione, ben fredda, di nitrito di sodio (1 : 3); si scalda poi a 50°-60° per circa mezz'ora; infine si spinge il riscaldamento sino a 80°-90°. Raffreddando e diluendo la soluzione con 5-6 vol. di acqua si precipita la maggior parte dell'acido, che si purifica ricristallizzandolo dall'acqua bollente. Altra porzione si può avere estraendo il liquido acido con etere. Rendimento 50 % del teorico.

È cristallizzato in prismi striati incolori, bellissimi.

È anidro. Scaldato a 100° non si scompone e non si colora; scaldato rapidamente, può anche sublimare.

Fonde con schiumeggiamento a 125°-126°, se il riscaldamento è piuttosto rapido; altrimenti già a 118°-120° svolge CO_2 e dà la *ossidropiridina* $C_9H_{15}NO$.

All'analisi diede:

I. Gr. 0,108 = cm^3 6,8 di N a 13°,5 e 729^{mm},6;
II. Gr. 0,1373 = gr. 0,3062 di CO_2 e gr. 0,944 di H_2O;
III. Gr. 0,1197 = gr. 0,2671 di CO_2 e gr. 0,083 di H_2O.

	trovato			calcolato per $C_{10}H_{15}NO_3$
	I	II	III	
C %	—	60.81	60.85	60.91
H „	—	7.64	7.70	7.62
N „	7.12	—	—	7.11

Solubile in alcool, poco in etere, etere di petrolio, benzene.

È monobasico ai vari indicatori. Forma sali solubilissimi in acqua; per averli cristallizzati occorre evaporarne le soluzioni nel vuoto. I sali alcalini in soluzione, specialmente in presenza di un po' di alcali libero, si scompongono per lunga evaporazione

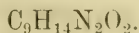
a b. m. bollente in carbonato e nella *n-metil-α'α'γ-trimetil-α-cheto-idropiridina*. Questa base fu identificata mediante il punto di ebollizione (260°) e il punto di fusione del cloroplatinato (205°) e del picrato (126°).

I sali alcalini sono anche facilmente solubili in alcool e hanno reazione neutra.

Sale di bario $(C_{10}H_{14}NO_3)_2Ba$. — Si ha neutralizzando la soluzione dell'acido purissimo con acqua di barite ben pura, evaporando a secco sul vuoto; lavando il sale con etere e lasciando indi seccare all'aria. Scaldato a 100° non si scompone. Solubile abbastanza in alcool a 95 %.

All' analisi gr. 0,3452 di sale asciutto a 100° diedero gr. 0,1512 di $BaSO_4$.

	trovato	calcolato
Ba %	25.76	25.89

Amide dell'acido α'α'γ-trimetil-α-ossi-α'β'-idro-piridin-βcarbonico $C_9H_{14}N_2O_2$.

Si ha dal ciantrimetilpirideone con rendimento del 95 % del teorico.

È in cristalli prismatici incolori, o solo leggermente colorati in giallognolo, grossi 4-5 mm. se sono ottenuti dall'acqua, fondenti a 199°-200° (corr.).

Il punto di fusione così vicino a quello del ciantrimetilpirideone (195°), fa dubitare che durante l'idrolisi si abbia anche una isomerizzazione, probabilmente passaggio dalla forma chetonica a forma ossidrilica del gruppo in α.

Si distingue dal ciantrimetilpirideone per la maggiore solubilità in acqua e perchè col reattivo di Nessler dà precipitato bianco, mentre il ciantrimetilpirideone dà collo stesso reattivo precipitato colorato intensamente in giallo.

Solubile bene in alcool assoluto, in cloroformio, alcool metilico, acetone; poco solubile in etere e benzene.

È anidra. All'analisi ha dato:

Gr. 0,1038 = cm^3 14,3 di N a 22° e 740^{mm};
Gr. 0,1570 = gr. 0,1058 H_2O e gr. 0,3404 CO_2.

	trovato	calcolato per $C_9H_{14}N_2O_2$
C °/$_0$	59.13	59.34
H „	7.48	7.69
N „	15.26	15.38

In soluzione acquosa ha reazione neutra; si scioglie facilmente negli acidi concentrati: la soluzione acquosa acida per HCl precipita col reattivo fosfomolibdico, fosfotungstico, con acido picrico; con ioduro di potassio iodurato dà dopo qualche minuto dei bellissimi cristalli brillanti di color rosso bruno.

È attaccata piuttosto difficilmente dagli alcali; meglio tuttavia del composto n-metilico.

Con acido nitroso dà facilmente l'acido corrispondente.

Non ha potere riduttore.

Acido
α'-α'γ-*trimetil*-α*ossi-idropiridin*-β*carbonico* $C_9H_{13}NO_3$.

Si ha sciogliendo l'amide suaccennata in 10 p. di acido solforico al 95 °/$_0$ raffreddando e versandovi a poco a poco la quantità teorica di nitrito di sodio in soluzione concentrata (1:3) e ben raffreddata; indi scaldando a 50°-60° per circa 15-20 minuti; in fine si può scaldare qualche minuto a 80°-90°.

Il liquido solforico diluito con 5-6 volumi di acqua si lascia a sè 2-3 giorni; l'acido precipita allora ben cristallizzato. Altra porzione se ne ottiene estraendo il liquido acido con etere. Il rendimento è di circa 50 °/$_0$ del teorico.

Senza separare l'amide dalla soluzione solforica si può idrolizzare il ciantrimetilpirideone con 2 p. di acido solforico a 150°-160°, alla soluzione aggiungere ancora 8 p. di acido solforico al 95 °/$_0$ e indi la soluzione di nitrito di sodio (quantità calcolata) colle avvertenze surricordate.

Ricristallizzato dall'acqua bollente, è in prismi incolori brillanti molto sottili e lunghi: solubili bene in alcool concentrato, cloroformio, poco in benzene.

Fonde a 116°-117° (corr.) schiumeggiando e scomponendosi in CO_2 e $\alpha'\alpha'\gamma$-*trimetil*-α-*ossi-idropiridina*.

È anidro. All'analisi diede:

I. Gr. 0,1376 = cm³ 9,2 di N a 15° e 742mm;

II. Gr. 0,1068 = gr. 0,2312 CO_2 e gr. 0,0696 H_2O;

III. Gr. 0,148 richiedono per la neutralizzazione cm³ 8 NaOH $\frac{N}{10}$.

		trovato	calcolato per $C_9H_{13}NO_3$
C	%	59.03	59.01
H	„	7.24	7.10
N	„	7.73	7.67
NaOH	„	21.62	21.85

È dunque anch'esso monobasico.

In soluzione acquosa non precipita colle soluzioni saline; la soluzione del suo sale sodico pure non precipita nè con nitrato d'argento, nè acetato di Pb, nè con sali di rame, ecc. Non si colora con cloruro ferrico.

I sali alcalini e il sale di bario sono estremamente solubili in acqua e anche molto solubili in alcool; per averli occorre evaporare nel vuoto le loro soluzioni acquose sino a secchezza, lavare con etere, oppure sciogliere in alcool e precipitare i sali con etere.

Sale di sodio $C_9H_{12}NO_3Na + 2H_2O$. — Si ha in bei cristalli incolori evaporando la sua soluzione acquosa sino quasi a secco nel vuoto, riprendendo con poco alcool ed etere, e asciugando all'aria il sale raccolto.

I. Gr. 0,7094 di sale secco all'aria perdettero a 100° gr. 0,1069 H_2O;

II. Gr. 0,305 di sale secco all'aria diedero gr. 0,922 di Na_2SO_4.

		trovato	calcolato per $C_9H_{12}NO_3Na + 2H_2O$
H_2O	%	15.06	14.93
Na	„	9.77	9.56

Sale di bario $(C_9H_{12}NO_3)_2Ba + 3H_2O$. — Si prepara come il sale di sodio; è in polvere cristallina bianchissima; è molto solubile, oltre che in acqua, anche in alcool a 95 % e in acetone. All'analisi il sale secco all'aria diede:

I. Gr. 1,1952 persero a 100° gr. 0,116 di H_2O.
II. Gr. 0,310 di sale diedero gr. 0,1294 di $BaSO_4$.

	trovato	calc. per $(C_9H_{12}NO_3)_2Ba+3H_2O$
H_2O %	9.95	9.72
Ba „	24.51	24.68

Laboratorio di Chimica Farmaceutica e Tossicologica
della R. Università di Torino.

Nuova pila elettrica costante ed economica.

Nota di LUIGI SAUDINO.

Malgrado il gran numero di pile fin qui inventate, siamo ancora a questo punto, che, occorrendo di avere una corrente costante con servizio prolungato, non abbiamo nulla di meglio della pila del genere Daniell, più o meno modificata, il di cui depolarizzante, come è ben noto, è il solfato di rame.

Larga prova di questo si è il fatto che tutti i telegrafi e gli apparati di segnalazione a distanza del mondo intero, sono ancora azionati da questo genere di elemento o dalle sue modificazioni (Callaud, Meidinger, Kelvin, ecc.).

Su qualche linea telegrafica, specialmente in quelle destinate alle ferrovie con poco lavoro di trasmissione, si tenta di usare la pila del genere così detto Leclanché, ma, come è ben noto, questo elemento non reggerebbe ad un lavoro prolungato.

In alcuni grandi centri si è tentato di sostituire gli accumulatori alle pile, ma questi tentativi non avrebbero altrimenti ragione di farsi, se le pile usate avessero una tensione più alta, vicina alla teorica, vale a dire quella ottenuta calcolando le calorie libere svolgentisi per le reazioni chimiche nell'interno dell'elemento e che secondo i classici lavori di Favre, Reynier, Raoult, Tommasi, ecc., nel sistema Daniell sarebbero 50,5; ora

il volt corrispondendo a calorie 46,3, la tensione normale o teorica dovrebbe essere di volt 1,09.

Sono poi abbastanza noti gli inconvenienti degli accumulatori, ed è facile comprendere come non potranno mai venire adoperati se non nei grandi centri, richiedendo essi per la loro manipolazione operai, macchine e cure che non possono aversi in ogni luogo.

Sul nuovo dispositivo (Brev. federale n° 17050). — Chiunque abbia maneggiato la pila a solfato di rame, dovette osservare come il basso rendimento che essa dà in lavoro, sia dovuto alla diffusione del solfato di rame, che, malgrado i tanti ripieghi fin qui escogitati, non si è mai potuto impedire di arrivare allo zinco, sul quale esso si decompone nei proprî componenti, di cui l'acido solforico si unisce allo zinco, formando solfato di zinco che si scioglie a misura che si forma, ed in rame metallico più o meno ossidato, che aderisce sull'elettrodo negativo, formando un deposito bruno rossastro, che si comporta in parte come un polo positivo chiudente un circuito di piccole correnti parassitarie a danno della corrente principale, la cui tensione viene così ridotta.

In dipendenza di questo fatto abbiamo:

1° perdita di solfato di rame;

2° perdita continua anche di zinco, senza che la pila produca lavoro esterno di sorta ed abbassamento della tensione, come fu detto.

Il problema del perfezionamento di questa pila, riducendosi adunque ad impedire la diffusione del sale depolarizzante, da circa vent' anni io avevo fatto prove a questo scopo, sempre con esito non soddisfacente, quando nel 1898 avendo interposto fra i due elettrodi di un elemento Daniell una parete formata con perossido di piombo, ottenni non solo un abbassamento della resistenza interna, ma quel che più importa, potei impedire l'arrivo della soluzione rameica sullo zinco, in un modo quasi assoluto per diversi mesi e mantenere così la tensione normale dell'elemento a volt 1,09 circa.

Di questi miei risultati avendo riferito all'Ill. Sig. Preece, Direttore dei telegrafi inglesi, autorità universalmente conosciuta in questa materia, con sua lettera in data 27 gennaio 1899,

egli mi faceva osservare che da oltre 25 anni i Sigg. Siemens e Halske di Berlino avevano tentato questa via, ma senza risultati soddisfacenti.

Ora io ci tengo assai a dichiarare che non ebbi mai contezza dei tentativi fatti dai due celebri elettricisti tedeschi in questo senso; l'unico lavoro di questo genere che mi fu noto, perchè descritto in quasi tutti i trattati sulle pile, fu quello di Varley, che consisteva nel separare i due liquidi della pila con una parete di ossido di zinco, provvedimento affatto effimero, poichè questa sostanza, in presenza dell'acido solforico libero della pila, scompare formando del solfato di zinco, che a sua volta si scioglie nel liquido che lo contiene.

Il dispositivo da me creato, in conseguenza delle mie esperienze, è cosa semplicissima. Esso si compone di due vasi porosi cilindrici (che possono avere anche altra forma) di diametri diversi, in modo che messi uno nell'altro, rimanga fra di essi uno spazio anulare od intercapedine, dello spessore di circa dieci millimetri, che viene riempito con una pasta fatta col detto perossido di piombo.

Questi due vasi devono però subire una precedente operazione allo scopo d'impedire la loro frattura, essendo di pareti assai sottili.

Questo dispositivo che viene poi introdotto in uno dei soliti vasi esterni di vetro, può comportare lo zinco tanto nel suo interno, come all'esterno, secondo i casi.

Il suo valore venale si aggira intorno ad una lira, per un modello di cent. 15 d'altezza e 9 di diametro.

Esperienze. — Le esperienze compiute su elementi montati col mio dispositivo con soluzione di SO^4Cu, quasi satura e SO^4Zn, a metà saturazione, quest'ultima come eccitante dello zinco, con modelli di 15 cent. d'altezza circa, furono le seguenti:

a) Presso la Direzione Federale dei telegrafi a Berna, dal sig. Direttore tecnico, Ingegnere Luigi Vanoni.

b) A Zurigo presso il Politecnico, dal prof. di fisica Ingegnere Pernet.

c) A Ginevra, presso l'Ufficio centrale dei Telegrafi, dal sig. Luigi Curtet.

d) Pure a Ginevra, dal sig. Rilliet, professore di fisica all'Università.

e) A Parigi, presso il Ministero delle Poste e Telegrafi, dal sig. Ingegnere Bellugu, capo del Servizio elettrico.

f) A Bellinzona, presso la Scuola di Commercio, dal sig. prof. Giorgio Bertolani, docente di fisica.

Risultati. — Di quanto risultò dalle menzionate esperienze una parte è comprovata da documenti di cui ho dato comunicazione. La morte improvvisa del prof. Pernet del Politecnico di Zurigo, mi ha privato del migliore degli attestati, poichè colà solo le prove si erano fatte con un modello definitivo e pratico.

Dai diversi esperimentatori, la tensione del mio elemento fu trovata fra volt: 1,05 e volt: 1,10.

La resistenza interna variante da un modello all'altro diede ohm: 1,3 a 5.

Notevole è l'attestato del prof. Rilliet di Ginevra, con cui dichiara: che il mio elemento chiuso sopra una resistenza di 13 ohm circa, durante il lavoro continuo di circa mille ore, non ha variato la sua tensione più di $^1/_{100}$ di volt.

Credo pur degna di nota la dichiarazione del sig. prof. Bertolani, affermante che durante l'esperienza di 20 giorni nessuna traccia di sale rameico arrivò sullo zinco.

Vantaggi pratici. — Attualmente un'amministrazione telegrafica, per esempio, che abbisogni di una tensione di 80 volt, deve servirsi di una batteria di 100 elementi, essendo la tensione delle pile attualmente in uso di circa volt: 0,80: coll'elemento da me modificato, basterebbero 73 unità; in questo caso si risparmierebbero adunque 27 elementi: a voler esser molto prudenti, si può ammettere che si risparmierebbero almeno il 25 % degli elementi.

In causa della diffusione del sale rameico, le pile attuali sprecano circa l'80 % dei materiali in esse usati (è questa un'affermazione gratuita, ma che afferma un fatto riconosciuto dai pratici ed è di facile controllo).

Ora, col mio sistema essendo impedita la diffusione rameica, causa unica di questo spreco, si può ritenere che, se un elemento comune consuma, fra sale e zinco, per circa 80 cent. all'anno, col mio dispositivo si avrebbe un risparmio di almeno lire 0,50 per elemento.

Torino, 31 gennaio 1908.

Il Quagga del Museo Zoologico di Torino.

Nota del Socio LORENZO CAMERANO.

Il Quagga è una specie di Zebra estinta da oramai lungo tempo. Secondo le ricerche fatte dal viaggiatore Bryden (Kloof an Karoo, 1889) gli ultimi individui sono stati uccisi nel 1858 a Tygerberg nel distretto di Aberdeen (provincia della regione centrale della Colonia del Capo).

L'ultimo esemplare vivente fu una femmina che il Giardino zoologico di Londra ebbe nel 1851 e che morì nel 1872 (1).

E. L. Trouessart nella sua nota recente: *Le Couagga e le Zèbre de Burchell de la collection du Muséum* (2), parlando dell'esemplare posseduto dal Museo di Parigi, dice: " Les autres musées qui en possèdent des dépouilles sont ceux d'Edimbourg, de Tring, de Bâle, de Berne, de Francfort, de Mainz, de Berlin et de Vienne. Le Musée de Capétown lui-même ne possède qu'un jeune poulain, datant d'une époque indéterminée, mais antérieure à 1862. Ces onze peaux bourrées et quelques crânes sont tout ce qui reste de cette intéressante espèce „.

Ai musei sopra menzionati è d'uopo aggiungere il Museo zoologico di Torino, il quale possiede una femmina e il relativo cranio. Questo esemplare venne acquistato nel 1827 dal sig. S. Leadbeater (3), allora ben noto negoziante inglese di oggetti di storia naturale.

---

(1) " Proc. Zool. Soc. „, Londra, 1901, I, pag. 165.

(2) " Bull. Muséum d'hist. nat. „, 1906, 7, p. 449.

(3) Nel recente lavoro di R. Bowdler Sharpe, " *The History of the Collections contained in the Natural History Departments of the British Museum*, 1906, pag. 411, si legge intorno al Leadbeater quanto segue: " The Leadbeaters, father and son, were for many years the leading natural history agents in London, and had a shop in Brewer-Street, Golden Square, which at my early days I used to visit in search of African birds. The father, after whom *Cacatua leadbeateri* was named by Vigors, was a scientific man, and wrote several papers on ornithology. — After the death of the father and son the business was continued for a short time by a nephew „.

I quagga dei musei sopra indicati vennero studiati da varî autori dal punto di vista dei loro caratteri specifici ed è fra gli altri principalmente da ricordarsi il lavoro di R. I. Pocock: *The Races of Cape Colony Quaggas* (1). — Questo Autore considera le forme seguenti di quagga:

Equus quagga Gmelin. Sub. sp. *tipica.*
" " " " " *Danielli* Pocok.
" " " " " *Lorenzi* Lydd.
" " " " " *Greyi* Lydd.

Il Trouessart nel lavoro sopracitato riferisce l'esemplare del Museo di Parigi alla sotto specie *Greyi* Lydd.

Dopo il lavoro del Trouessart il Pocock pubblicò una nota relativa all'esemplare di quagga del Museo di Parigi, in cui discute le conclusioni del Trouessart e in parte le modifica (2).

In " The Bulletin du Museum d'histoire naturelle ", pp. 449-452 (1906), dice il Pocock: " Dr. Trouessart has given an account, illustrated by two admirable photogravures, of a quagga and a Burchell's Zebra preserved in the Paris Museum. The quagga especially proves to be a specimen of considerable systematic importance....... In a paper on the Cape Colony quaggas (3) with which Dr. Trouessart does not appear to be acquainted, I pointed out that two forms named respectively by Mr. Lydekker E. *quagga Greyi* and E. q. *Lorenzi* resemble each other and differ from E. q. *quagga* and E. q. *Danielli* in having the stripes brown and the interspaces creamy yellow; and, further, that they may be distinguished from each other by certain characters, of which the width of the stripes on the neck is one. In *Lorenzi* the neck-stripes are exceedingly wide, the interspaces forming distinct but very narrow pale lines, whereas in *Greyi* the interspaces are relatively broad and the stripes correspondingly narrow ".

" So far as the width of the neck-stripes is concerned the

(1) " Ann. and Magaz. Nat. Hist. " 7 ser., vol. 14, p. 318 e seg. (1904).

(2) R. I. Pocock, *Notes on the Quagga and Burchell's Zebra in the Paris Museum*, " Ann. and Mag. Nat. Hist. ", 7 ser., vol. XIX, 1907, pag. 516.

(3) Op. cit.

Paris specimen is more like the type of *Lorenzi* than is any other recorded specimen. But the stripes are even wider and the intervening areas narrower than in the Vienna example. In the latter, as in the Paris example, the pale intervening areas are distinct upon the withers; but behind the withers in the Paris example they die out, the flanks being only indistinctly striped and the hind-quaters practically unstriped. In *Lorenzi*, on the other hand, the intervening spaces persist in such a manner as to leave no doubt that both in pattern and posterior extension the stripes were, to all intents and purposes, like those of typical Burchell's zebra (E. *quagga Burchelli*), the so called " saddle „ (" selle „ of Trouessart), characteristic of that animal and the more northern forms related to it, being quite evident. Herein lies the chief difference between the Paris and Vienna specimens. Tho the type of *Greyi*, on the contrary, the Paris specimens shows a close resemblance in the obliteration of the stripes on the body and hind-quarters „.

Il Pocock conchiude: " the chief interest of Dr. Trouessart's paper upon the Paris specimen lies in the fact that it has proved the former existence of a quagga intermediate in coloration between two specimens that have been made the types of distinct subspecies, namely *Greyi* and *Lorenzi* „.

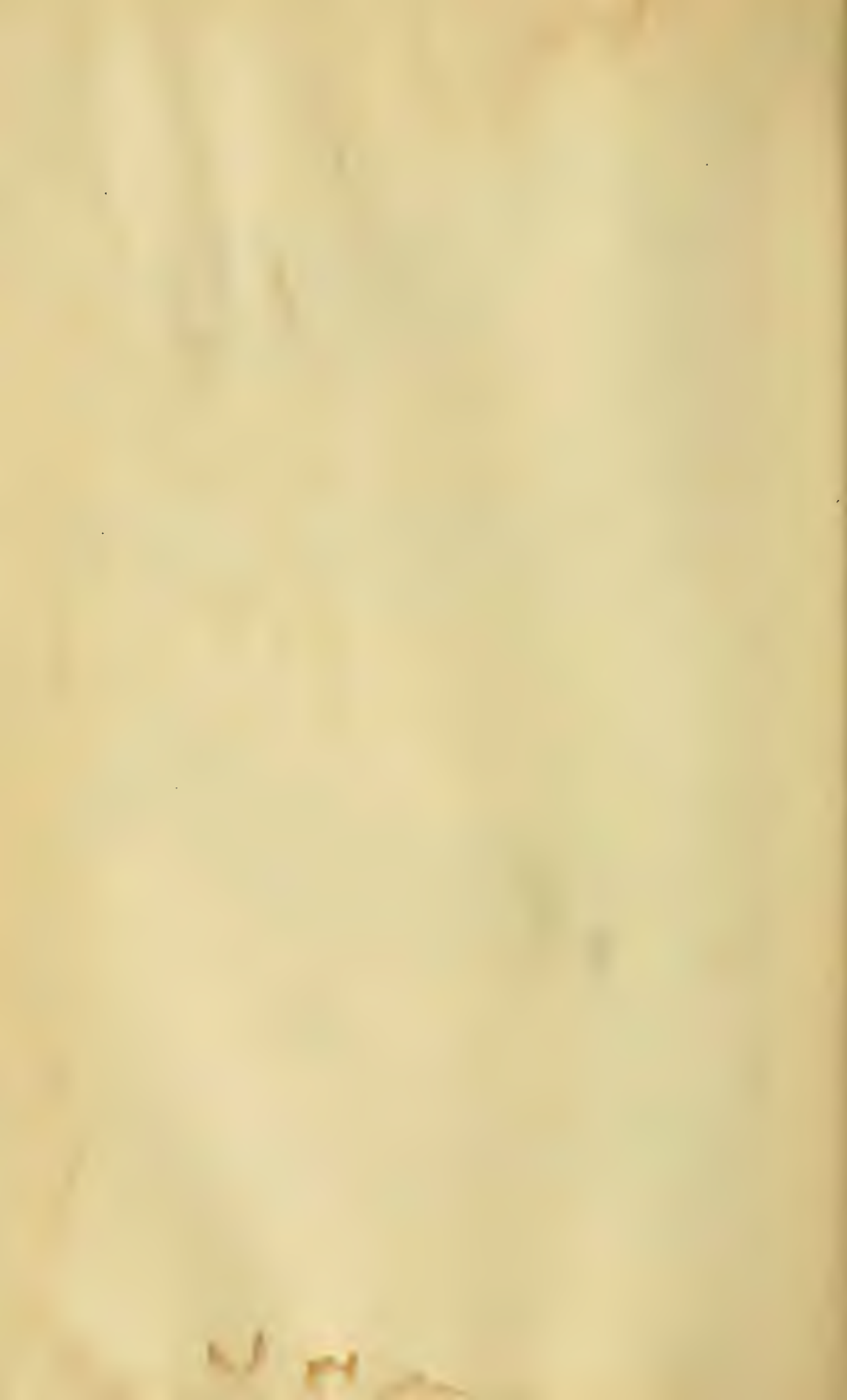
L'esemplare di quagga del Museo zoologico di Torino è molto simile a quello del Museo di Parigi descritto e figurato dal Trouessart e in egual modo si differenzia dall'E. q. *Greyi* e dall'E. q. *Lorenzi* (1).

Anche all'esemplare del Museo di Torino si può applicare l'espressione usata dal Trouessart per quello del Museo di Parigi: " ce Couagga a l'apparence *d'un Cheval alezan*, *rayé de blanc*, et non d'un Cheval blanc rayé de noir, comme les autres Zèbres „.

La forma di Quagga del Museo di Parigi è così rappresentata, per quanto se ne sa ora, da due esemplari, la qual cosa accresce il valore sistematico della forma stessa.

Io non entrerò qui nella controversa questione del valore

(1) Confr. figure dell'*Eq. Greyi.* " Proc. Zool. Soc. „, Londra 1901, I, pag. 166, fig. 47. — " Proc. Zool. Soc. „, Londra 1904, I, pag. 430, fig. 86 e figura dell'Eq. *Lorenzi* " Proc. Zool. Soc. „ Londra 1902 ,I, pag. 33, fig. 7.

Off. Fototecnica Ing. G. Molfese - Torino

sistematico da assegnarsi alle varie forme di Quagga, se esse siano, vale a dire, da considerarsi come specie, o come sottospecie. Credo tuttavia utile designare la forma di Quagga del Museo di Parigi e del Museo di Torino con un nome che, per ora provvisoriamente, potrà essere di sottospecie. Io propongo di chiamare questa forma col nome di E. q. sub. spec. *Trouessarti*.

I caratteri delle tre sottospecie di Quagga, E. q. *Lorenzi* Lydd., E. q. *Greyi* Lydd., E. q. *Trouessarti* Camer. si possono riassumere nel modo seguente:

A — Le striscie scure e chiare oltrepassano notevolmente il garrese sul dorso e sui fianchi e presentano ben visibile la " sella ".

Le striscie scure del collo sono relativamente grandi e le striscie chiare intercalate sono relativamente strette.

E. q. sub. sp. *Lorenzi* Lydd.

B — Le striscie scure e chiare arrivano solo al garrese, o l'oltrepassano di poco, senza presentare in ogni caso traccia di " sella ".

a) Le striscie scure del collo sono relativamente assai grandi e le striscie chiare intercalate sono relativamente molto strette. E. q. sub. spec. *Trouessarti* Camer.

b) Le strisce scure del collo sono relativamente strette e le strisce chiare intercalate sono relativamente larghe.

E. q. sub. spec. *Greyi* Lydd.

Nella tavola unita a questa nota è riprodotta la fotografia dell'esemplare di Quagga del Museo di Torino visto dai due lati.

Una piccola figura del cranio di questo esemplare venne da me pubblicata nel lavoro intitolato: *Materiali per lo studio delle zebre* (1).

---

(1) " Atti R. Acc. Scienze di Torino ", XXXVII, 1902.

CLASSI UNITE

Adunanza del 1° Marzo 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Direttore della Classe, Camerano, Segre, Jadanza, Guareschi, Parona, Mattirolo, Morera, Fusari;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Boselli, Vice-presidente dell'Accademia, Manno, Direttore della Classe, Pizzi, Stampini, Brondi, Sforza e De Sanctis, Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Allievo, Foà, Carutti, Ruffini, Somigliana e D'Ercole.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente a Classi Unite, 16 giugno 1907.

Il Presidente dà la parola al Socio Morera, il quale legge la commemorazione del compianto Socio nazionale non residente Francesco Siacci.

Invitato dal Presidente, il Socio Naccari legge la relazione della 2ª Giunta per il XV premio Bressa (quadriennio 1903-1906). La Giunta propone senza alcuna distinzione di merito Guglielmo Roux pei suoi lavori sulla biomeccanica, Ernesto Rutherford pei suoi lavori sulla radioattività.

Il Presidente dichiara aperta la discussione, ma nessuno domandando la parola, si deciderà senz'altro nella prossima adunanza dell'8 marzo.

Il Socio De Sanctis, a nome del Socio Cipolla assente, legge la relazione della Commissione per il premio Gautieri per la storia (triennio 1904-1906).

La Commissione propone che il premio venga conferito al prof. Adolfo Venturi per la sua *Storia dell'arte italiana*. Nessuno dei Soci prendendo la parola per fare osservazioni in proposito, anche per il premio Gautieri si procederà senz'altro alla votazione nella prossima seduta.

Il Presidente dà poi la parola al Socio Stampini, relatore della Commissione pel premio Vallauri di letteratura latina (quadriennio 1903-1906), il quale riferisce in latino sui risultati dei lavori della Commissione.

La Commissione propone che il premio venga diviso tra i professori Paolo Monceaux per l'opera *Histoire littéraire de l'Afrique chrétienne* e Martino Schanz per l'opera *Geschichte der römischen Litteratur*.

Nessuno dei Soci facendo osservazioni o proposte, il Presidente dichiara definitivamente chiuso il campo delle proposte pel premio Vallauri e avverte che si voterà intorno al suo conferimento nell'adunanza dell'8 marzo. La commemorazione del Socio Siacci e le relazioni delle tre Commissioni sono inserite negli *Atti*.

Il Presidente presenta quindi lo scritto offerto in omaggio all'Accademia dal Socio senatore Mosso su *Le armi più antiche di rame e di bronzo* (estr. dalle " Memorie della R. Accad. dei Lincei ", ser. V, vol. XII, Roma 1908).

LETTURE

FRANCESCO SIACCI

Commemorazione
letta alla R. Accademia delle Scienze di Torino nella seduta del 1° Marzo 1908
dal Socio Prof. GIACINTO MORERA

Nacque Francesco Siacci in Roma il 20 aprile 1839 da un antico soldato del primo Napoleone, Matteo Siacci nativo della Corsica, e da Beatrice Badaloni anconitana. In età giovanissima perduto il padre, restò affidato alle sole cure della madre, donna di tempra virile, che nell'educazione del figlio seppe vincere gli ostacoli frapposti dall'avversa fortuna.

Portato da naturale inclinazione allo studio delle matematiche, si iscrisse il Siacci all'Ateneo Romano, ove ben presto emerse per le sue singolari attitudini: il primo lavoro da lui dato alle stampe appartiene al periodo de' suoi studi universitari. Il principe Baldassarre Boncompagni, il ben noto patrizio romano, appassionato e dotto cultore delle matematiche, che apprezzava i giovani, fu il protettore di Francesco Siacci (*).

Nel 1860 conseguì il Siacci alla Sapienza la laurea *ad honorem* nelle matematiche, distinzione a quei tempi molto ambita, ma difficilmente e raramente conferita.

Gli avvenimenti politici di quei tempi eccitavano grandemente gli animi, e sovratutto infiammavano la gioventù studiosa; sicchè la Sapienza era diventata il focolare delle manifestazioni patriottiche.

I più animosi fra i giovani che apertamente anelavano all'unione di Roma colla risorgente Italia venivano perseguitati dalla polizia pontificia; e i meno prudenti fra essi furono esi-

(*) Raffaele De Cesare, *Roma e lo Stato del Papa*, vol. I, pag. 97.

liati; mentre non pochi altri preferirono lasciare spontaneamente Roma e riparare in Piemonte o nelle provincie annesse. Di questi ultimi fu Francesco Siacci (*); il quale nel 1861 emigrò a Torino e prese servizio nell'esercito italiano; ove, a cagione de' suoi studi, fu nominato sottotenente d'artiglieria ed ammesso alla Scuola d'artiglieria e genio.

Nel 1866 prese parte alla guerra contro l'Austria, e come tenente dei pontieri, vi fece prova di eccellenti qualità militari.

Ma ancor prima che la campagna fosse terminata egli veniva chiamato a Torino ad insegnare la balistica alla Scuola di applicazione d'artiglieria e genio, colla qualifica di professore aggiunto. Egli fu poi, nel 1872, nominato professore titolare di balistica, ed in tale insegnamento continuò nella scuola stessa fino all'epoca del suo ritiro dal servizio militare attivo, avvenuto nel 1892, dopo avervi raggiunto il grado di tenente colonnello.

Nell'anno accademico 1871-72 la nostra Università lo chiamò a sè affidandogli l'incarico di insegnare la *meccanica celeste*. Nel 1875 il titolo dell'insegnamento impartito dal Siacci all'Università fu mutato in quello di *meccanica superiore*, ed egli ebbe il grado di professore straordinario; nel 1879 poi fu nominato professore ordinario.

Resasi vacante nel 1891 la cattedra di *meccanica razionale*, al Siacci fu dato pure l'incarico di tale insegnamento. Continuò il Siacci ad insegnare nel nostro Ateneo fino all'anno 1893, nel quale fu trasferito a Napoli e nominato in quell'Università professore ordinario di meccanica razionale e incaricato di meccanica superiore; uffici che egli conservò fino alla di lui morte avvenuta in Napoli il 31 maggio 1907.

Fu il Siacci insegnante valente ed efficace, sia per limpidezza di pensiero e solidità di dottrina, sia per precisione, chiarezza e sobria eleganza nella esposizione. Le sue lezioni erano seguite con intensa attenzione e vivo interesse dai suoi allievi, tanto all'Università quanto alla Scuola d'artiglieria e genio.

Tali pregi si rivelano pure nelle numerose pubblicazioni del Siacci, nelle quali mai fa difetto originalità di pensiero e accuratezza di forma.

(*) Ibidem, vol. II, p. 20 e 27.

Uno degli argomenti prediletti dal Siacci, che formò oggetto frequente delle sue lezioni di meccanica superiore e di non poche reputate pubblicazioni, è la teoria delle cosiddette equazioni canoniche della dinamica; teoria fondata da W. R. Hamilton e grandemente perfezionata da C. G. Jacobi.

Jacobi nelle sue celebri " Vorlesungen über Dynamik „, nel 1866 pubblicate da A. Clebsch, aveva messo in luce il vantaggio che si può trarre in molte questioni di alta dinamica dall'impiego sistematico del metodo di Hamilton da lui stesso completato; ma al tempo in cui Siacci iniziò il proprio insegnamento universitario le lezioni di Jacobi, da poco tempo apparse, erano da noi scarsamente conosciute e solo pochi eletti matematici si rendevano ragione della grande importanza che quel metodo stava per assumere nella dinamica e segnatamente nella meccanica celeste.

Jacobi aveva riconosciuto l'importanza, sia per la dinamica, sia per l'analisi pura, della teoria delle equazioni differenziali Hamiltoniane in unione a quella delle equazioni a derivate parziali del primo ordine. Egli aveva compiute intorno a questi argomenti molteplici ed estese ricerche, i risultati delle quali in parte non furono pubblicati da Jacobi, ma resi di pubblica ragione dal Clebsch dopo la morte dell'autore; è quindi ragionevole pensare che il profondo analista considerasse i risultati da lui conseguiti come non ancora perfetti e si ripromettesse di completarli.

Era riserbato al sommo geometra norvegio Sophus Lie di dare a quelle dottrine il loro definitivo assetto mercè la scoperta delle trasformazioni di contatto, le quali tanto intimamente collegano le equazioni differenziali Hamiltoniane e le equazioni a derivate parziali del primo ordine.

Fra i lavori dati alle stampe dal Siacci in quest'ordine di ricerche egli attribuiva speciale importanza alla memoria: *Teorema fondamentale nella teoria delle equazioni canoniche del moto*, pubblicata nel 1882 fra le memorie dei Lincei. Il teorema in parola, sebbene di aspetto dissimile, nella sostanza è equivalente a quel teorema fondamentale della teoria delle trasformazioni di contatto, il quale tutte le somministra sotto forma finita.

Tale teorema, è ben vero, fu dato da S. Lie molto prima

ed in modo perfetto (1873-1874): ma ciò non toglie a Siacci il merito di averlo ritrovato per proprio conto e di averne riconosciuta l'importanza nella teoria delle equazioni Hamiltoniane. Le memorabili scoperte di S. Lie si diffusero lentamente fra i matematici a cagione non soltanto dei metodi impiegati da quell'eminente geometra, ma altresì della forma poco attraente con cui sono redatti i lavori di lui.

Le scoperte di Lie si divulgarono soltanto dopo la pubblicazione della " Theorie der Transformationsgruppen „ fatta colla valida collaborazione di F. Engel, e in seguito agli insegnamenti dal Lie stesso dati all'Università di Lipsia; ma anche oggidì l'opera del profondo matematico norvegio non è forse completamente conosciuta e utilizzata.

Anche gli altri lavori di meccanica del Siacci, che non riguardano le equazioni canoniche del moto, sono ricchi di pregi: fra questi mi piace di qui ricordare soltanto i seguenti.

Le due memorie " *Sulla rotazione dei corpi* „, inserite fra quelle della Società Italiana delle Scienze, nelle quali sono contenuti risultati di cui Hermite diede notizia all'Accademia delle Scienze di Parigi in una di quelle sue ben note comunicazioni " Sur quelques applications des fonctions elliptiques „ (*).

La memoria " *Le quaterne statiche nei sistemi di forma invariabile* „, pure inserita fra le memorie della Società dei XL, ove sono stabilite delle eleganti proprietà geometriche dei quattro assi attorno ai quali girando un corpo rigido sollecitato da forze vettorialmente invariabili ed avente un punto fisso, può passare da una qualunque posizione ad una di equilibrio.

La nota " *Il pendolo di Leone Foucault e la resistenza dell'aria* „, lavoro pregevole per elegante semplicità, che procurò all'autore in seno alla nostra Accademia un'aspra polemica col conte di Saint-Robert.

Le due note intitolate: " *Del moto per una linea piana* „ e "*Del moto per una linea gobba* „, nelle quali viene risoluta colla massima generalità la questione di determinare le forze atte a far percorrere ad un dato punto una data traiettoria.

La memoria: " *L' iperboloide centrale nella rotazione dei corpi* „, nella quale l'autore diede una nuova generazione cine-

---

(*) C. R., T. 85, p. 1188 (an. 1877).

matica del moto spontaneo di rotazione di un corpo rigido. avente un punto fisso; il quale risultato fu generalizzato dal Gebbia con un suo elegante teorema, che somministra come casi particolari quelli di Poinsot e Siacci. — Altri interessanti e più generali modi di generare questo moto furono in seguito indicati dallo stesso Siacci nella nota " *Sulla rotazione di un corpo attorno ad un punto* „.

Assunto dal Siacci l'insegnamento della meccanica razionale, egli molto curò l'esposizione dei principî su cui questa scienza riposa. — Di ciò fanno fede le lezioni da lui pubblicate a Torino e a Napoli, le due note " *Sulla composizione delle forze e sui suoi postulati* „, e infine quelle " *Sul principio dei lavori virtuali* „. A proposito del principio dei lavori virtuali Siacci fece ritorno alle antiche dimostrazioni di Lagrange, opportunamente da lui modificate, a ciò indotto dal desiderio di dedurre il principio da postulati fisici di immediata intuizione e somministrarne una dimostrazione più semplice di quella attualmente in uso. Per quanto tali dimostrazioni possano sembrare convenienti per un insegnamento elementare della statica, non cessano di essere imperfette e insufficienti per uno studio approfondito della meccanica, giacchè, non foss'altro, esse non mettono in luce la vera essenza del principio dei lavori virtuali, che è di costituire in ultima analisi *un processo algebrico di eliminazione* delle reazioni vincolari, incapaci di lavoro negli spostamenti compatibili del mobile.

Nelle applicazioni della meccanica alla scienza degli artiglieri, e cioè nella **balistica,** Siacci fu sommo maestro.

Il *Trattato di balistica* del Siacci, nella sua forma definitiva (1888), è, a giudizio dei competenti, opera veramente magistrale, molto pregiata in Italia e fuori. Questo trattato ebbe l'onore di una traduzione francese per opera dell'Ing. Laurent. Ma il lavoro principale del Siacci, quello che più contribuì a renderlo noto agli artiglieri di tutti i paesi, è il metodo da lui ideato fin dal 1880, e successivamente perfezionato, per risolvere i problemi del tiro mediante una *tavola balistica.* Questo metodo, che fu universalmente adottato, così viene giudicato nel recente " Traité de balistique extérieure par le Commandant P. Charbonnier „ (Paris, 1904): " On peut dire que cette manière d'en-
" visager d'ensemble le problème balistique, jointe à la solution

" approchée qui a pu être donnée dans certains cas spéciaux, " constitue un des progrès les plus considérables qui aient été " faits en balistique extérieure. Le mérite doit, pour la plus " grande partie, en être reporté au colonel Siacci „ (*).

Quale sia l'importanza dei contributi apportati da Francesco Siacci al progresso della balistica risulta dai moderni trattati su questa materia e specialmente da quello or ora ricordato del comandante Charbonnier, non che dalla recentissima opera dello stesso autore intitolata: *Balistique extérieure rationnelle, problème balistique principal* (Paris, 1907).

Ma anche fuori del campo della meccanica la mente acuta e operosa del Siacci ha saputo cogliere allori. Nel campo delle matematiche pure ricordo i bei teoremi da lui trovati sui *determinanti*; nel campo delle applicate la memoria " *Sulla costituzione atmosferica quale risulta dalle osservazioni aereostatiche di James Glaisher e sopra una nuova formula barometrica* „, ove in base alle osservazioni è stabilita un'equazione differenziale fra la temperatura e l'altezza ed una finita fra la pressione e la tensione del vapore, equazioni che conducono Siacci alla sua formula barometrica per la misura delle altezze.

L'insigne opera scientifica di F. Siacci procurò a lui meritati onori. Fin dal 1876 venne eletto socio residente della nostra Accademia; fu socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società italiana delle Scienze. Socio della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli e dell'Accademia Pontaniana; corrispondente del R. Istituto lombardo di Scienze e Lettere, e dell'Accademia delle Scienze di Bologna.

I suoi concittadini lo elessero deputato al Parlamento per le legislature XVI (1886) e XVII (1890); nel 1892 fu elevato alla dignità senatoriale.

Collocato nella riserva d'artiglieria col grado di tenente colonnello nel 1892, vi fu in seguito nominato colonnello, e poi, poche settimane prima della sua morte, maggior generale.

Nella nostra Università, dopo il di lui trasferimento a Na-

(*) Per ulteriori dettagli vedi la *Commemorazione di Francesco Siacci*, pubblicata dal Maggiore d'Artiglieria GIULIANO RICCI nella " Rivista d'artiglieria e genio „, vol. II (1907).

poli, ebbe il titolo di *professore onorario*; nell'Università di Napoli negli ultimi tempi ebbe la carica di *Preside* di quella Facoltà matematica.

Colpito da malattia di cuore, sebbene sofferente, continuò il Siacci ad attendere ai propri doveri di pubblico insegnante fino a poche settimane avanti la di lui morte, avvenuta in Napoli per paralisi cardiaca il 31 maggio dello scorso anno.

Negli ultimi momenti della sua vita volle riesaminare il volume delle proprie lezioni di meccanica razionale, ma le forze non glielo consentirono e pochi istanti dopo era spento!

Francesco Siacci percorse a Torino la maggior parte della sua luminosa carriera scientifica; ai lavori della nostra Accademia egli partecipò largamente e degnamente per quasi un ventennio.

Qui, ove molti lo ebbero a collega, altri a maestro, e tutti ad amico, rimarrà vivo il desiderio e il rimpianto di lui.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI

DI

FRANCESCO SIACCI

Giornale Arcadico.

Intorno a tre problemi proposti nella Raccolta " Nouvelles Annales de mathématiques ". Roma, 1859.

Intorno ad una linea di quart'ordine. Roma, 1861.

Annali di Matematica pura ed applicata.

Sulla somma delle potenze intere dei numeri naturali. Roma, 1861.

Sull'uso dei determinanti per rappresentare la somma delle potenze intere dei numeri naturali. Roma, 1865.

Degli invarianti e covarianti delle forme binarie ed in particolare di quelle di 3° e 4° grado. Roma, 1865.

Intorno ad alcune trasformazioni di determinanti. Milano, 1874.

Giornale di Matematiche.

Intorno ad una serie e ad una funzione dei coefficienti binomiali. Napoli, 1873.

Questioni. Napoli, 1872 e 1873.

Bullettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche e fisiche.

Sul teorema del Conte di Fagnano. Roma, 1870.
Sopra una memoria di Gilbert. Roma, 1878.

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.

Sur un théorème de Mécanique céleste. Paris, 1873.
Sur le problème des trois corps. Paris, 1874.
Un théorème de Dynamique. Paris, 1879.
Sur un théorème de Mécanique. Paris, 1896.
Sur un problème de D'Alembert. (Due Note). Paris, 1901.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.

Intorno ad alcune trasformazioni delle equazioni differenziali del problema dei tre corpi. Torino, 1871.
Intorno ad una trasformazione simultanea di due forme quadratiche ed alla conica rispetto a cui due coniche date sono polari reciproche. Torino, 1872.
Teorema sui determinanti ed alcune sue applicazioni. Torino, 1872.
Il Pendolo di Leone Foucault e la resistenza dell'aria. Torino, 1878.
Il Pendolo di Leone Foucault. Poche parole di risposta al Conte di S.t Robert. Torino, 1878.
Relazione intorno ad una memoria del Sig. E. Jung intitolata “*Nouveau calcul des mouvements elliptiques*„. Torino, 1879.
Del moto per una linea piana. Torino, 1879.
Del moto per una linea gobba. Torino, 1879.
Intorno ad una legge di reciprocità dinamica. Torino, 1880.
Un teorema di Meccanica analitica. Torino, 1880.
Gli assi statici di un sistema di forma invariabile. Torino, 1882.
Alcuni teoremi sulla resistenza incontrata da una superficie in moto dentro un fluido. Torino, 1884.
Sulla rotazione di un corpo intorno ad un punto. Torino, 1886.
Alessandro Dorna. Commemorazione. Torino, 1886.
Sulla compensazione delle poligonali nei rilievi topografici. Torino, 1888.
Enrico Narducci. Breve commemorazione. Torino, 1892.

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino.

Un nuovo metodo per determinare la resistenza dell'aria sui proietti (Due Memorie). Torino, 1877-1878.
Giovanni Cavalli. Commemorazione. Torino, 1885.
Angelo Genocchi. Commemorazione. Torino, 1889.

Atti della R. Accademia dei Lincei.

Intorno alle forme quadratiche. Roma, 1872.
Sopra una proposizione di Jacobi. Roma, 1880.
Teorema fondamentale nella teoria dell'equazioni canoniche del moto. Roma, 1882.

Sugli angoli di massima gittata. Roma, 1888.
Il Conte Paolo di S.t Robert. Commemorazione. Roma, 1889.
Sulle forze atte a produrre eguali spostamenti. (Due Note). Roma, 1889.
Sulle tensioni nei sistemi elastici articolati. (Due Note). Roma, 1893 e 1894.
Sulla stabilità dell'equilibrio e sopra una proposizione di Lagrange. Roma, 1896.

Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL).

Della rotazione dei corpi liberi. (Due Memorie). Napoli, 1877.
Le quaterne statiche nei sistemi di forma invariabile. Napoli, 1882.

Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli.

Sulla resistenza dell'aria al moto dei proietti. Napoli, 1896.
Carlo Weierstrass. Breve Commemorazione. Napoli, 1897.
Francesco Brioschi. Breve Commemorazione. Napoli, 1897.
Sulla composizione delle forze e sui suoi postulati. (Tre Note). Napoli, 1899.
Sulla integrazione di una equazione differenziale e sull'equazione di Riccati. Napoli, 1901.
Sul principio dei lavori virtuali. (Due Note). Napoli, 1905).

Atti della R. Accademia delle Scienze di Napoli.

Sulla funzione caratteristica del moto di rotazione di un corpo non sollecitato da forze. Napoli, 1893.
Sulla costituzione atmosferica quale risulta dalle osservazioni aereostatiche di Glaisher e sopra una nuova formola barometrica. Napoli, 1897.

Atti del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli.

Sopra una nuova formola barometrica per la misura delle altezze. Napoli, 1896

In memoriam Dominici Chelini Collectanea Mathematica.

L'iperboloide centrale nella rotazione dei corpi. Milano, 1881.

Rivista Militare Italiana.

Della resistenza dell'aria sopra i proietti oblunghi e della loro trajettoria. Firenze, 1868.
La Clessidra elettrica del Sig. Capitano P. Leboulengé. Firenze, 1869.
Delle esperienze eseguite a Metz nel 1856-57 sulla resistenza dell'aria contro i proietti sferici. Firenze, 1870.

Giornale d'Artiglieria.

Della resistenza dell'aria sui proietti oblunghi e della loro trajettoria (2a edizione). Torino, 1868.
Regole pratiche per determinare alcune circostanze del tiro. Torino, 1872.
Tavole generali pel tiro ficcante del cannone da c. 16 G R, compilate secondo il sistema prussiano. Torino, 1873.

Giornale d'Artiglieria e Genio.

Dei principî del tiro. Roma, 1874.
Sul calcolo delle tavole di tiro. Parte I. Roma, 1875.
„ „ Parte II. Roma, 1875.
„ „ Parte III. Roma, 1879.
Le tavole del tiro indiretto del cannone da c. 16 G R e dell'obice da c. 22 B R precedute da una istruzione sul loro impiego e da una relazione delle sperienze. Roma, 1876.
Rendiconto delle sperienze pel tiro di lancio dei cannoni da c. 16 G R, 12 B R e 12 G R. Roma, 1877.
Rendiconto delle sperienze pel tiro indiretto dei cannoni da c. 12 B R e 12 G R. Roma, 1877.

Rivista d'Artiglieria e Genio.

Balistica e Pratica. Nuovo metodo per risolvere i problemi del tiro. Roma, 1880 (*).
Addizione al nuovo metodo per risolvere i problemi del tiro. Roma, 1881.
Perfezionamenti vari al nuovo metodo per risolvere i problemi del tiro. Roma, 1885.
Balistica elementare. Roma, 1882.
Alcune proposte sul puntamento e le correzioni del tiro. Roma, 1880.
Sulle tavole di tiro delle batterie da costa. (Due Note). Roma, 1884 e 1885
Sulla costruzione delle tavole del tiro arcato. Roma, 1885.
Sul tiro indiretto. Roma, 1886.
Sugli assi delle rose di tiro. Roma, 1883.
Nota sugli assi delle rose di tiro. Roma, 1884.
Ancora sugli assi delle rose di tiro. Roma, 1884.
Una comunicazione del Gen. Mayevski sugli assi delle rose di tiro. Roma, 1884.
Sulla resistenza dell'aria e sulle recenti esperienze olandesi. Roma, 1884.
Intorno ad alcune pubblicazioni di balistica. (Due Note). Roma, 1884 e 1885.
Teoremi sulla resistenza obliqua. Roma, 1884.
Una protesta del Prof. Bashforth " Sic vos non vobis „. Roma, 1885.
Il potenziale della resistenza. Roma, 1887.
Spazio battuto ed errore battuto. Roma, 1888.
Sugli angoli di massima gittata ed altre quistioni. Roma, 1887.
Sugli angoli di massima gittata e sul tiro curvo. Roma, 1889.
Sulla soluzione rigorosa del problema balistico. Roma, 1889.
Sulla resistenza dell'aria. Risposta al Capitano Zaboudski. Roma, 1890.
Sull'angolo di rilevamento e sulla sua misura. Roma, 1892.
Sopra un contributo alla soluzione razionale del problema balistico. Appunti. (Due Note). Roma, 1896 e 1897.
Sulla resistenza dell'aria al moto dei proietti. (Tre Note). Roma, 1896.
Nuova Tavola Balistica Generale. Roma, 1896.

(*) Questa memoria fu tradotta nei principali periodici scientifico-militari d'Europa e d'America, ed il nuovo Metodo è stato universalmente adottato.

Nuova Tavola della funzione β. Roma, 1897.

I Parametri complementari nella Balistica Razionale. (Due Note). Roma, 1898.

Sulla velocità minima. Roma, 1901.

La velocità minima ed alcuni articoli del Sig. Colonn. N. Zaboudski. Roma, 1901.

Alcune nuove forme di resistenza che riducono il problema balistico alle quadrature. " Paullo majora canamus „. Roma, 1901.

Revue d'Artillerie.

Des principes du tir. Paris, 1874.

Expériences de balistique exécutées en Hollande. Traduit et résumé par le Capitaine Chapel. Paris, 1884.

Sur les axes de groupement. Paris, 1884.

Un procédé d'intégration des formules balistiques. Paris, 1886.

Pubblicazioni a parte.

Corso di Balistica teorico-pratica. Torino, 1870-1885. Tre volumi con atlante.

Balistica. 2ª edizione. Torino, 1888.

Balistique extérieure. Avec notes de M. Laurent, Ingénieur, et de M. Chapel, Chef d'escadron d'artillerie. Paris, 1891.

Tiro di Guerra (assedio e campagna). Torino, 1879.

Il volume VII delle Istruzioni pratiche d'artiglieria. Nozioni generali sul tiro dell'artiglieria da campagna e d'assedio. Roma, 1882.

Compendio di balistica pratica. Torino, 1893.

Lezioni di Meccanica Razionale. Torino, 1891. (Lit.).

" " " Napoli, 1901-1902. (Lit.).

Relazione sul XV Premio Bressa.

Chiarissimi Colleghi,

La prima Giunta, ch'ebbe dall'Accademia l'incarico di esaminare le opere presentate al concorso del XV premio Bressa aperto agli scienziati di tutte le nazioni, lesse la sua relazione nella seduta del 9 giugno 1907 tenuta dall'Accademia a classi unite.

Da quella relazione risulta che gli autori delle opere, che la Giunta stessa ritenne degni di essere presi in considerazione per il premio, sono i seguenti:

Guglielmo Coblentz,
Francesco Doflein,
Guglielmo Roux,
Ernesto Rutherford,
Girolamo Vitelli.

Nessun altro nome essendo stato proposto nella seduta anzidetta, si dichiarò chiuso il concorso.

La seconda Giunta prese in esame le opere degli autori ora nominati. Essa mi ha incaricato di esporre all'Accademia i suoi giudizi e le sue proposte.

1. — L'opera presentata a questo concorso dal Coblentz consiste in un ampio studio delle radiazioni ultrarosse compiuto nell'Istituto Carnegie di Washington.

Il Coblentz si propose di esaminare quali relazioni possano esistere tra la costituzione dei corpi e la loro attitudine ad assorbire le radiazioni ultrarosse, ad emetterle e a rifletterle. Un tale studio esigeva metodi di osservazione delicatissimi e do-

veva venir esteso ad un gran numero di sostanze per trarne conclusioni sicure.

L'opera si compone di quattro memorie.

La prima tratta degli spettri d'assorbimento, vale a dire esamina in qual grado le singole radiazioni spettanti alla parte oscura e meno rifrangibile dello spettro, vengono trattenute da uno strato delle varie sostanze posto sul cammino di esse.

Per lo studio spettroscopico dei corpi composti lo spettro d'assorbimento è particolarmente opportuno in quanto che la sostanza assorbente vien mantenuta alla temperatura ordinaria e non viene quindi alterata o dissociata, come può avvenire quando la si riscalda fortemente per averne lo spettro d'emissione.

Come strumento misuratore dell'intensità delle radiazioni il Coblentz, come già il Nichols, si servì d'un radiometro opportunamente modificato. Il prisma era di salgemma e in una vaschetta di salgemma ponevasi la sostanza da studiarsi quando era liquida. La sorgente delle radiazioni era una lampada Nernst.

L'autore spinse l'esame dello spettro molto al di là dei limiti ch'erano stati prima raggiunti in simili studi.

Il tracciare per ogni sostanza la curva che dà l'intensità delle radiazioni ultrarosse corrispondente alle singole lunghezze d'onda era opera lunga e difficile.

Le sostanze sottoposte ad esame furono 130. Fra queste erano degli isomeri, i cui spettri mostrarono differenze tali da confermare l'asserzione del Julius, che lo spettro dipende dalla struttura della molecola anzichè soltanto dalla natura degli atomi.

Quanto alla questione se il crescere del peso molecolare in una data serie di composti sia accompagnato dallo spostamento progressivo in un dato senso della banda di massimo assorbimento, l'esperienze furono favorevoli a tale asserzione per gli xileni e per certi gas e contrarie negli altri casi.

Il riscaldamento del corpo assorbente per una ventina di gradi non portò mutamento notevole nello spettro, salvo nel caso del timol allo stato solido. Quando ad un atomo di idrogeno si sostituiscono in un composto certi gruppi di atomi, come, ad esempio, NH_2 e CH_3, appaiono nello spettro delle

bande d'assorbimento caratteristiche di quei gruppi; ma non si possono ancora trarre dai fatti osservati delle conclusioni sicure intorno all'influenza dei singoli componenti sulle vibrazioni della molecola.

La seconda memoria tratta degli spettri ultrarossi di emissione nel caso di un arco voltaico con elettrodi metallici o con carboni impregnati di cloruri di metalli alcalini e nel caso di tubi contenenti gas e vapori rarefatti.

La parte dello spettro, che fu esaminata, corrisponde a lunghezze d'onda maggiori di due millesimi di millimetro.

Con l'arco voltaico lo spettro fu sempre continuo. Con i tubi s'ebbe per tre gas una forte linea di emissione corrispondente ad una lunghezza d'onda eguale a 4,75 millesimi di millimetro.

La terza memoria tratta ancora di spettri di trasmissione e riguarda i minerali che contengono ossigeno e idrogeno. L'autore si propose di confrontare particolarmente gli spettri dei cristalli, che hanno acqua di cristallizzazione, con quelli di cristalli, che hanno acqua di costituzione. Furono studiati circa cento corpi.

Nei minerali con acqua di cristallizzazione era da prevedersi che comparissero le striscie d'assorbimento dell'acqua sovrapposte ad un altro spettro. Così infatti avvenne, salvo qualche eccezione di poca importanza.

I minerali contenenti acqua di costituzione non mostrarono le linee dell'acqua. salvo uno solo. I minerali, che contengono degli ossidrili, hanno una banda comune e due ne hanno i solfati. I silicati non hanno bande caratteristiche comuni.

L'ultima memoria contiene gli studi fatti sul potere riflettente d'un certo numero di sostanze rispetto ai raggi ultrarossi. È noto che le singole sostanze riflettono in grado diverso tali radiazioni. Con più riflessioni sopra superficie d'una medesima sostanza si può ridurre quasi monocromatiche le radiazioni. A seconda delle sostanze il fascio così modificato ha diversa rifrangibilità.

Furono studiate così più di 40 sostanze.

Le esperienze mostrarono ch'esiste una relazione fra la riflessione e l'assorbimento. Altro risultato notevole è che la regione della riflessione elettiva comincia per onde più lunghe di

sette millesimi di millimetro. Fu pure studiato il potere riflettente di parecchi metalli e di alcune soluzioni.

In generale tutto il lavoro è molto pregevole per l'accuratezza, per la sua ampiezza e per l'importanza dei risultati.

2. — L'opera *Brachyura* del D.r Francesco Doflein è uno studio sopra i crostacei raccolti nel viaggio fatto nel 1898 per esplorare il fondo del mare da naturalisti tedeschi.

L'opera è divisa in tre parti. La prima è un contributo importante alla conoscenza dei crostacei sia pel numero dei nuovi generi e delle nuove specie che vi sono descritte, sia per lo studio critico dei generi e delle specie già conosciuti.

La seconda parte ha speciale interesse per le notizie, che vi si trovano, intorno alla vita dei crostacei che abitano grandi profondità. Molto notevole è in particolare lo studio dell'apparato visivo.

Nella terza parte l'autore esamina la distribuzione geografica dei Brachyuri sia orizzontalmente, sia rispetto alle varie profondità e giunge a conclusioni notevoli e nuove. L' opera è accompagnata da stupende tavole, che saranno di grande utilità a chi voglia occuparsi di tali studi.

3. — Il libro presentato dal Prof. Guglielmo Roux e intitolato:

Vorträge und Aufsätze über Entwickelungsmechanik der Organismen.

Esso riassume gli studi dell'autore e de' suoi discepoli sullo sviluppo degli organismi.

Le indagini, che tennero dietro alla grande opera del Darwin, mostrarono che il principio della scelta naturale serve bensì a spiegare la sopravvivenza del più adatto nella concorrenza vitale, ma non vale a spiegare il fenomeno intimo delle variazioni.

Nel 1881 Guglielmo Roux pubblicò la sua teoria dell'*autodeterminazione*, con che si ammette che l'organismo abbia in sè per gran parte le ragioni della propria struttura. Entrano a far parte di questa teoria i principî della lotta delle molecole nelle cellule, della lotta delle cellule fra loro e della lotta dei tessuti e degli organi.

Un altro principio di grande importanza venne introdotto nella scienza dal Roux, ed è l'azione *morfogena* ossia quella degli *eccitamenti funzionali.* Secondo il Roux si può dire che l'organismo si crea con le proprie forze. Per mezzo della lotta delle sostanze chimiche e delle cellule esso produce il differenziamento delle sue cellule e delle sue funzioni elementari, per opera dell'azione trofica degli eccitamenti funzionali determina la struttura de' suoi tessuti, la forma e la costituzione dei propri organi e la loro disposizione.

Il Roux ammise pure che all'*autoformazione* si aggiunga un'*autoregolarizzazione* permanente dell'organismo.

La scelta organica del Roux vale a spiegare molti fatti che la scelta naturale del Darwin non ispiegava. L'uno di questi principî teorici va a compimento dell'altro. La scelta organica ci dà la differenziazione delle cellule, degli organi e delle funzioni, ma senza tener conto degl'interessi generali dell'organismo: la scelta naturale sopprime le differenziazioni e le disposizioni organiche nocive e protegge quelle che sono utili all'individuo: essa non lascia persistere che gli esseri, la cui costituzione fisico-chimica elementare è tale che gli eccitamenti funzionali, determinando la differenziazione degli elementi istologici, la struttura degli organi e la loro disposizione, conducono alla costituzione d'un vivente compatibile con le condizioni della sua esistenza.

La lotta delle parti dell'organismo, l'azione morfogena dell'eccitamento funzionale, l'autodifferenziamento delle funzioni e quello degli organi nella loro struttura e nella loro forma sono i nuovi fattori dell'evoluzione degli organismi, la cui conoscenza è dovuta per gran parte a Guglielmo Roux. Egli può dirsi creatore d'un nuovo ramo delle scienze biologiche che fu chiamato *biomeccanica.*

4. — Ernesto Rutherford, ora professore di fisica a Manchester, fu allievo di Giuseppe Giovanni Thomson nell'Università di Cambridge. Già in quel laboratorio egli aveva fatto parecchi studi sperimentali sui fenomeni di ionizzazione e di radioattività. Nelle radiazioni dell'uranio aveva distinte due specie, che egli chiamò α e β, separandole per mezzo della loro diversa attitudine ad attraversare foglie sottilissime d'al-

luminio. Più tardi furono scoperti dal Villard i raggi γ ancora più penetranti.

Nominato professore di fisica nell'Università di Montreal al Canadà, si diede con ardore a proseguire quelle ricerche. Esaminò in particolare le proprietà del torio e dimostrò che dai composti di questo metallo svolgesi continuamente qualche cosa, cui diede il nome di emanazione. Questa ha le proprietà di un gas radioattivo, passa attraverso le sostanze porose, vien trascinata dalle correnti d'aria e si condensa a bassissima temperatura. Il Rutherford notò che essa rende radioattivi i corpi, su cui si depone, il che era stato osservato poco prima dai coniugi Curie per il radio.

Continuando le sue indagini il Rutherford pose in chiaro che il torio dà origine continuamente a minime quantità di una sostanza diversa da esso, che egli chiamò torio X. Questa può essere separata dal torio e va secondo una certa legge trasformandosi nell'emanazione. Allora per la prima volta s'ebbe il concetto che certi corpi possano lentamente trasformarsi, dando origine a sostanze dotate d'altre proprietà chimiche e che il fenomeno della radioattività accompagni tali mutamenti.

Secondo questo concetto un corpo è radioattivo perchè alcuni dei suoi atomi subiscono un'alterazione perdendo alcuna delle loro parti costituenti e in tali cangiamenti si producono delle minime quantità di una nuova sostanza, che può a sua volta trasformarsi dando segni di radioattività in una nuova sostanza e così via.

Questa teoria enunciata dal Rutherford insieme col Soddy, parve dapprima molto ardita, ma il Rutherford la sostenne con sempre nuove esperienze e riuscì a renderla generalmente accetta.

Nel 1903 il Rutherford dimostrò che i raggi α emessi dal radio sono costituiti da corpuscoli elettrizzati positivamente. Nell'anno stesso esaminò se il calore prodotto dal radio dipendesse dall'emanazione e dimostrò che in fatto questa dà origine a gran parte del calore emesso dal radio. Ciò è d'accordo con l'opinione che l'emissione di calore sia accompagnata nel radio dall'espulsione di raggi α e vada di pari passo con questa. A compimento di questa ricerca il Rutheford esaminò l'effetto termico dei raggi γ emessi dal radio, le proprietà dei raggi α e β e il

ritardo che avviene nelle particelle dei raggi α quando attraversano la materia.

Nell'ultimo quadriennio il Rutherford, oltre a molti studi sperimentali pubblicò due opere importanti. L'una è intitolata " Radioactivity ": ebbe due edizioni in un anno e fu tradotta in tedesco.

Essa espone tutte le cognizioni raccolte sinora intorno ai fatti della radioattività ed è l'opera più ricca e più autorevole su questo argomento, che sia stata pubblicata.

L'altra opera intitolata " Radioactive Transformations " contiene una serie di lezioni fatte col proposito di spiegare e difendere la teoria sopra accennata.

Si può asserire che se gli studi sulle radioattività fecero così rapidi progressi, per buona parte il merito va attribuito a questo indefesso e ingegnoso sperimentatore.

5. — Fra le opere accolte dalla prima Giunta per il concorso vi è infine la pubblicazione dei papiri greco-egizi iniziata sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei. Di quest'opera venne alla luce un volume in due fascicoli (Firenze, 1905-1906), contenente documenti pubblici e privati dell'età romana e bizantina, editi dal Prof. Girolamo Vitelli. Il Prof. Vitelli, che si recò anche in Egitto per farvi ricerca ed acquisto di papiri, dedicò a questa pubblicazione assidue cure, superando gravi difficoltà di lettura e d'interpretazione. Il volume, che è arricchito di numerosi facsimili e di copiosi e diligentissimi indici, contiene ben 105 papiri greci, dei quali molti assai importanti per lo studio del diritto ellenistico-romano. Vi sono tra essi documenti svariatissimi: contratti d'affitto, schede di censimento, ricevute di tasse, atti concernenti divisioni di proprietà, locazione d'opere, prestiti in danaro, ecc. Tutti questi documenti sono pubblicati con un commentario sobrio e dotto, che ne esamina dal punto di vista filologico le principali difficoltà, agevolando così la via ai giuristi che vorranno farli oggetto di studio. È questa insomma una pubblicazione di gran pregio e degna d'essere incoraggiata, ed è da augurarsi che, procedendo felicemente, essa contribuisca a ridare ai filologi italiani quel posto eminente, che nella prima metà del secolo XIX essi avevano fra gli studiosi dei papiri greci dell'Egitto.

Dopo aver discusso il merito assoluto e relativo delle varie opere, la Giunta unanime riconobbe che esse, benchè tutte molto pregevoli, potevano venir divise in due gruppi.

Stanno nel primo gruppo i libri e le memorie di

G. Roux, sulla *Biomeccanica*,

e di

E. Rutherford, sulla *Radioattività*.

All'altro gruppo, che, a parer della Giunta, comprende opere, il cui merito è certamente grande, ma un po' minore, spettano i lavori del Coblentz, del Doflein e del Vitelli.

Le opere del Roux e del Rutherford sono ambedue eminenti e riguardano argomenti affatto diversi. Non potendo confrontarle l'una con l'altra, la Giunta Vi presenta i nomi dei due autori in ordine alfabetico, senza distinzione di merito, affinchè scegliate fra i due scienziati quello che stimate più degno.

Il Segretario della Giunta
A. Naccari.

Relazione della Commissione dei Premii Gautieri (Anni 1904-1906).

Egregi Colleghi,

La storia dell'arte in sè e nelle sue molteplici e intime relazioni colla storia religiosa, letteraria, politica della Nazione, è ai giorni nostri coltivata da una plejade di lavoratori, i quali studiano i monumenti, ne indagano ad una ad una le parti, ricercano assiduamente i documenti che li riguardano. Tentano così di ricostituire idealmente lo svolgimento del sentimento artistico, attraverso ai secoli, e la sua efficacia nella società.

Adolfo Venturi, col periodico l'*Arte*, e colla collezione, pur troppo ora interrotta, intitolata *Le Gallerie Nazionali*, promosse le speciali monografie e raccolse intorno a sè non pochi gio-

vani volonterosi, che seguono le vie del Maestro. Egli si accinse a raccogliere i risultati delle ricerche analitiche, proprie ed altrui, in un'opera di gran lena, che intitolò *Storia dell'Arte Italiana*, e della quale sono usciti finora cinque grossi volumi, che conducono la narrazione fino al cadere del sec. XIV. I primi due volumi escono, per la data di loro pubblicazione, dal periodo di tempo cui si riferisce il premio che la nostra Accademia deve ora concedere. Solo in quanto costituiscono col seguito del lavoro un tutto unico essi possono essere presi da noi in considerazione. Il 1º volume uscì nel 1901 ed espone la nostra storia artistica dal periodo delle Catacombe fino a quello di Giustiniano. Molto pensiero c'è in questa parte dell'opera, ma rispetto ai particolari nessuno potrebbe affermare ch'essa sia esente da sviste o da omissioni rilevanti. Nel II volume del 1902 che va dall'età barbarica alla romanica il Venturi dimostra di essersi famigliarizzato vieppiù alla difficile arte di una esposizione larga e comprensiva. La cognizione dei monumenti si fa più sicura e più vasta. Un nuovo miglioramento segna il III volume, stampato nel 1904, che è dedicato all'arte romanica. In esso assistiamo all'origine della nuova arte scultoria e al rinnovarsi dell'architettura nell'Italia settentrionale, nella media, nella meridionale, nella Sicilia. Vediamo l'arte romanica che, penetrando nell'Italia centrale, ottiene un rapido sviluppo nella Toscana, di qui giunge fino nella Sardegna per mezzo di Pisa; l'arte medesima vigoreggia splendidamente in Roma, dove si associa a quella degli antichi marmorari locali. Un nuovo indirizzo ci viene poi trasmesso dalla Francia, per mezzo dell'Ordine Cistercense, ed esso si manifesta, nei suoi inizi, a Fossanova. Così è aperta la via allo stile gotico.

A questo punto il Venturi si vide crescere fra mano il materiale di studio, e abbandonando le linee ristrette fra le quali si era fin qui rinchiuso, allarga la sua tela e dà alla medesima una espansione corrispondente alla vastità del soggetto che gli presenta il Trecento.

Nel 1906 uscì il IV volume, appunto dedicato a narrare le vicissitudini della scultura del Trecento e a sviscerarne le origini. Qui ci compariscono dinanzi personaggi famosi, ai quali il Venturi dedicò cure amorose. Nicola d'Apulia e Giovanni Pisano suo figlio creano in Pisa una scuola; Arnolfo di Cambio

ha Firenze per centro principale della sua attività, la quale si distende fino a Roma. La scultura senese del Trecento divulga l'arte Pisana, ed ha per suo principale rappresentante Tino di Camaino.

Alla scuola pisana si collegano le sculture che adornano quel mirabile capolavoro, che è il duomo di Orvieto. E l'arte Pisana continua di più in più a diffondersi, si distende per tutta la Toscana, s'inoltra nel Veneto e nella Lombardia. Il pisano Giovanni Balducci eseguì a Milano l'arca di S. Pietro Martire, meravigliosa per la finitezza del lavoro, come per la venustà e la varietà delle figure. La scuola di Balduccio fece sentire la sua azione a Genova, a Pavia, a Bergamo, a Brescia, a Verona: così l'arte signorile ed idealistica dei Pisani conquistò buona parte dell'Italia superiore, combattendo contro le tradizioni locali, le quali tuttavia diedero ancora bellissime opere, specialmente a Padova ed a Verona. Da Venezia ricevette Bologna insegnamenti, che alla sua arte impressero decise note caratteristiche. Intanto a Firenze cominciava a fiorire l'arte di Andrea Orcagna, che fu ad un tempo musicista, scultore, architetto, e che in tal modo personificò in sè stesso l'unità delle arti.

Il Venturi non trascurò le arti minori e sulla fine del volume parla quindi, con sufficiente larghezza, della scultura e dell'intaglio in legno, della lavorazione del ferro battuto, e con amore speciale discorre dell'oreficeria, sopratutto dell'oreficeria fiorentina.

Non sappiamo se esca dal periodo cui si riferisce l'attuale premio Gautieri il vol. V, perchè esternamente porta bensì la data del 1906, ma internamente ha quella del 1907. Esso s'intitola " La pittura del Trecento e le sue origini „ e tratta, con novità di risultati, della scuola romana di Pietro Cavallini; illustra l'arte di Cimabue e di Giotto, e dimostra come la scuola fiorentina per mezzo di questi due grandi suoi figli si affermasse non solo in patria, ma in Assisi, in Padova, in Napoli, diffondendo dovunque la sua azione, e ritemprando a nuovi ideali e a nuovi metodi tecnici le varie regioni della Penisola. La pittura educò a Siena un'altra scuola, che fiorì in Duccio di Buoninsegna e nei suoi discepoli, e che, uscendo pur essa dalle mura della città nativa, emulò dovunque la scuola fiorentina, la quale ebbe,

mezzo secolo dopo di Giotto, un altro rinnovatore, nella persona di Andrea Orcagna. Attorno alle scuole toscane, altre scuole fioriscono, specialmente a Verona ed a Modena.

Il IV ed il V volume, che per l'argomento trattato sono fra loro indissolubilmente collegati, ci fanno vedere come l'arte occidentale, se talvolta, abbagliata dalle forme e dai colori di Oriente, si sentì disposta all'imitazione, seppe finalmente svincolarsi dalle influenze altrui: essa per tal modo riuscì a crearsi una propria fisonomia; diede alle figure bizantine un'energia sconosciuta in Oriente, infuse movimento nelle sue produzioni, diede loro l'espressione di un sentimento cristianamente forte e delicato. Così fu creata l'arte nuova, che signoreggia la materia, che fa sviluppare l'unità del pensiero nella moltiplicità delle figure, e riesce ad armonizzare l'elevatezza del pensiero colla morbidezza della forma.

Le arti minori, come la miniatura, il ricamo, lo smalto, la coloritura dei vetri, seguirono la via delle arti maggiori.

Noi non affermiamo che l'opera del Venturi sia senza difetti. I primi volumi potrebbero essere con vantaggio ritoccati qui e colà. Alcuna volta avviene che le descrizioni dei monumenti sembrino fermarsi alla esterna apparenza, senza penetrare sempre l'intima indole della tecnica personale di ogni singolo artista. Diciamo tuttavia che il Venturi conosce ampiamente il nostro materiale artistico, sia quello che resta fra noi, sia quello che gli eventi hanno trasportato in tante regioni di Europa. Via via di volume in volume la *Storia* del Venturi attesta un progresso, sì nella larghissima cognizione dei fatti come nel loro esame, nella disposizione della materia, nella valentia spiegata coordinando le cause agli effetti, nella chiarezza del dire.

Per tutti questi motivi pare ai sottoscritti che l'opera del Venturi sia di tal valore da potersi accordare alla medesima senza esitazione il premio Gautieri per la storia. E questo nostro parere resterebbe immutato anche se si volesse escludere dalla considerazione nostra il V volume dell'opera.

A. Manno,
G. De Sanctis,
C. Cipolla, *relatore*.

De Vallauriano praemio adiudicando litteris latinis in quadriennium 1903-1906 proposito (Kal. Mart. An. MCMVIII).

Mandatum nobis est, collegae clarissimi, ut vobis denuntiaremus cui potissimum litterarum latinarum studioso praemium testamento Thomae Vallauri institutum tribuendum esse iudicaremus. Ut igitur magnum id atque arduum munus expleamus, ob eamque causam vobis declaremus quid de doctis hominibus sentiamus, qui sua de latinis litteris scripta superiore quadriennio in vulgus proposuerint, eos primum scriptores nominabimus qui, libris suis ad Academiam nostram missis, se ad Vallaurianum praemium contendere aperte professi sunt. Duo enim opera accepimus, quorum unum, a Paulo Monceaux compositum, inscribitur *Histoire littéraire de l'Afrique Chrétienne depuis les origines jusqu'à l'invasion arabe* et tribus voluminibus continetur; alterius vero, a Martino Schanz confecti et in quinque volumina digesti, inscriptio est *Geschichte der römischen Litteratur bis zum Gesetzgebungswerk des Kaisers Justinian.*

Sed primum omnium animadvertendum est tria Pauli Monceaux volumina in frontibus annum exhibere 1905, quasi eo anno simul aut parvo interiecto intervallo foras data sint. Cum vero primum et secundum volumen contulissemus cum illis quae, annis edita 1901 et 1902, legimus in bibliotheca publica Regiae Universitatis, patuit nobis secundum volumen, anno 1902 in fronte signatum, nulla re plane differre ab eo in quo annus adscriptus sit 1905; primum autem, quod est de Tertulliano, hoc tantum ab exemplari nobis misso discrepare vidimus, quod praefationem proferat kalendis octobr. anni 1901 conscriptam. Quo consilio id factum sit, investigare nostrum non est. At vero tertium vo-

lumen anno 1905 vulgatum est, idque non solum exquisitam quandam reconditamque scriptoris Francogalli doctrinam prodit, sed et uberrima materia et gravitate rerum, quas subtili investigatione conquisitas lucido ordine exposuit, dignissimum est, quod cum optimis libris conferatur, meritisque omnino respondet priorum voluminum, quibus boni aestimatores non mediocrem laudem impertierant. Neque est silentio praetereundum Paulum Monceaux eodem temporis spatio in inscriptionibus Africae primi aevi christiani colligendis illustrandisque multam operam consumpsisse. Testis est eius commentatio *Enquête sur l'épigraphie chrétienne d'Afrique*, cuius tres partes editae sunt in *Revue archéologique* (ann. 1903-1906), quarta autem superiore anno in commentarios Academiae *des Inscriptions et Belles-Lettres* recepta est.

Quae si vera sunt, ut nobis persuasissimum est, tamen ea non ita dicta esse volumus, quasi minori laude Martinus Schanz ornandus esse nobis videatur. Non omnia quidem volumina magni illius operis, quo Schanz eximiam Guillelmi Teuffel famam obscuravit, superiore quadriennio primum in publicum prolata sunt; anno certe 1904 ea pars edita est, qua 469 paginis historiam latinarum litterarum quarti saeculi christiani singillatim ac distincte est persecutus; ad annum autem 1905 referendum est volumen, secundis curis recognitum, quo latinarum litterarum historiam ab anno p. Chr. n. 117 usque ad 324 diligentissime explicavit. Addite volumen, mense decembri anni 1906 emissum, quod etiamsi eam partem complectitur historiae litterarum quae ab originibus usque ad annum circiter 88 a. Chr. n. pertinet quamque professor Germanus iam semel iterumque typis exscribendam curaverat, at tantopere tamen immutatum atque auctum esse liquet, ut novus plane liber esse videatur, et is quidem magna doctrina, magna rerum copia, acerrimo iudicio distinctus. His igitur voluminibus Martinus Schanz famam sibi ante partam mirum in modum amplificavit. Quapropter nos in ea sumus sententia, ut putemus doctissimum virum praeclare de latinis litteris meritum esse. Hoc enim opus semper magna cum utilitate ante oculos habebunt qui in litteras latinas incumbunt, nec solum qui se ad profanorum scriptorum studium contulerunt, verum etiam qui christianos illos Latinitatis scriptores legere et cognoscere malunt, quorum quidem studio cum universam litterarum

latinarum doctrinam, tum fere romanae humanitatis disciplinam nostris temporibus magnopere explanatam provectamque esse constat.

Itaque, Pauli Monceaux et Martini Schanz operibus diligenter examinatis, reliquum erat ut alios libros, qui quidem superiore quadriennio typis vulgati essent, consideraremus, si quem forte digniorem inveniremus qui praemio decoraretur. Quo in genere illud nobis pro certo affirmare licet, nos nullum librum neque in Italia neque in exterarum gentium regionibus animadvertisse, qui omni ex parte cum iis operibus conferri posset quae nuper laudavimus. Equidem multum tribuimus operi a Friderico Marx in duo volumina distributo, cuius inscriptio est *C. Lucilii carminum reliquiae*, latino sermone satis emendate scripto: sed hoc, quantum iudicamus, ab ea absolutione perfectioneque aliquantulum distat, ad quam, ut nostra fert opinio, proxime accedunt Monceaux et Schanz: in Marxiano enim opere sunt quaestiones quae ad exitum nondum adductae sint; sunt quae speciosiora sint quam veriora; ut non dicamus scriptorem in re versatum esse angustioribus finibus circumscripta, quam quos Paulus Monceaux tertiae operis sui parti constituisset. Omnium quoque laudem undique collegit Hermannus Peter doctissimo illo opere in duas partes diviso, quod inscribitur *Historicorum romanorum reliquiae*; sed prior nimio spatio a nostris temporibus distat, utpote quae anno 1870 typis mandata sit; altera autem sterilitate rei, ut ipsius scriptoris verbis utamur, non ea est quam aliis doctorum libris anteferre audeamus.

Fuerunt etiam nobis in manibus libri quos composuerunt Franciscus Skutsch, cuius est *Gallus und Vergil. Aus Vergils Frühzeit. Zweiter Teil*; Carolus Lécrivain, cuius operi index est *Études sur l'histoire Auguste*; I. Vessereau, qui librum scripsit de *Cl. Rutilio Namatiano*; A. Cartault, qui anno 1906 magnum volumen emisit *A propos du Corpus Tibullianum*; Georgius Lafaye, a quo Ovidii Metamorphoses illustratae sunt ea commentatione quam inscripsit *Les Métamorphoses d'Ovide et leurs modèles grecs*; alia denique opera, quae memorare longum est. Italos non nominamus. Multi quidem sunt apud nos qui ingenio, doctrina, scriptis, patriae sint ornamento; sunt qui haec studia ita colant, ut cum eruditissimo quoque exterarum gentium certent — nos enim nostra non spernimus —; sed tamen dolendum est nullum

opus hisce annis in Italia scriptum editumque exstare, cui in hoc litterarum latinarum certamine priores partes concedere possimus.

Sed ut ad scripta redeamus, de quibus modo mentionem fecimus, ea profecto non comparanda sunt cum Paulo Monceaux et Martino Schanz. Cum vero, ut sententiam nostram apertissime expromamus, neminem inveniamus, quem toto praemio dignum non dubitanter iudicemus, cumque Monceaux et Schanz multis rebus, etsi diversam viam ingressi sint, parem laudem consecutos esse persuasum habeamus, nobis, si non verba ac litteras, at certe sententiam testamenti doctissimi huius Academiae sodalis sequi videmur, si Paulo Monceaux et Martino Schanz ita praemium adiudicandum esse censemus, ut iis aequabiliter dispertiatur. Equidem speramus fore ut, post hoc quadriennium, quod a kalendis ianuariis superioris anni initium sumpsit, intra annos 1911-1914 tale quoddam opus exsistat, ad litteras latinas pertinens, cui ab illis, penes quos huius certaminis arbitrium sit futurum, palma totumque praemium sine ulla dubitatione deferatur.

Scripsit et de praemio ad Sodales Academiae rettulit Hector Stampini.

Subscripserunt:

Henricus D'Ovidio
Praeses Academiae.

Iosephus Carle
Dominicus Carutti di Cantogno
Caietanus De Sanctis *a commentariis Sodalium*
Hector Stampini
Sodales ordinarii Taurinenses.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 1° Marzo 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-Presidente dell'Accademia, Manno, Direttore della Classe, Pizzi, Stampini, Brondi, Sforza e De Sanctis Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Allievo, Carutti, Ruffini e D'Ercole.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 16 febbraio 1908.

Il Presidente presenta lo scritto del Socio corrispondente prof. Filippo Porena, *L'antropogeografia nelle sue origini e nei suoi progressi* (estr. dal " Bollettino della Società Geografica italiana ", fasc. II, Roma, 1908), offerto in omaggio dall'Autore.

Il Socio Stampini presenta per l'inserzione negli *Atti* una nota del prof. Oreste Nazari su *L'iscrizione della colonna traiana* ed una del prof. Clemente Merlo intitolata: *Forficula auricularia e bricciche romanze.*

Il Socio Sforza offre pure per gli *Atti* un suo saggio sopra *Il falso sultano Jachia.*

LETTURE

L'Iscrizione della Colonna Traiana.

Nota del Prof. ORESTE NAZARI.

Veramente questo studio dovrebbe piuttosto intitolarsi le peripezie di un monte, che si credette esistito fino a questi ultimi tempi, fu negato dal Boni il quale gli sostituisce il vicino Quirinale, fu idealmente ricostituito dal Comparetti con marmi fatti venire dall'Egitto dalla Libia e da altri lontani e vicini paesi, divenne per opera del Ramorino una montagna di capolavori artistici, fu inalzato dal Sogliano scaricando immondizie e detriti portati poi via da Traiano, e finalmente fu ridotto ad un bastione dal Mau.

La formula magica, operatrice di tanti incantesimi, è nelle due ultime linee della iscrizione murata sulla base sostenente la colonna Traiana.

L'iscrizione dice:

SENATVS. POPVLVSQVE. ROMANVS
IMP. CAESARI. DIVI. NERVAE. F. NERVAE
TRAIANO. AVG. GERM. DACICO. PONTIF
MAXIMO. TRIB. POT. $\overline{\text{XVII}}$. IMP. $\overline{\text{VI}}$. COS. $\overline{\text{VI}}$. PP
AD. DECLARANDVM. QVANTAE. ALTITVDINIS
MONS. ET. LOCVS. TAN*tis oper*IBVS. SIT. EGESTVS

Secondo l'interpretazione tradizionale la colonna starebbe ad indicare da quale altezza fu da Traiano spianato uno sprone del colle Quirinale a fine di ottenere spazio sufficiente per tutte le opere del novo Foro.

Se non che, esaminatone il sottosuolo, " constatai (scrive il Boni in *Nuova Antologia*, 1 nov. 1906, p. 26 dell'Estratto) che... la sostruzione in pietrisco della colonna scende entro terra di

riporto mista a frammenti di lucerne fittili e di vasi aretini della tarda repubblica e dell' incipiente impero. Un metro e mezzo circa sotto il piano del cortile rinvenni una strada selciata a poligoni, marginata da avanzi di caseggiato a *lorica testacea* del sec. I..... Sotto la strada, a m. 3,15 di profondità e su *parimenta* di tufo e terreni più arcaici, una cloaca, d' *opus incertum,* scendente da un caseggiato demolito „. Inoltre (p. 19) " a dodici metri dal piedestallo della colonna, in direzione del Quirinale le sostruzioni della biblioteca, di calcestruzzo a palizzata verticale, penetrano in terreni di età repubblicana contenenti vasellame etrusco-campano. E, alla distanza di novanta metri, in direzione del Campidoglio, lo stereobate del monumento di Bibulo, oltre un terrapieno alto m. 3,60, raggiunge una strada antica scendente al piano del *vicus* sotto la platea del Forum Ulpium „. Infine esistono (p. 19) " in tutta la larghezza della valle finora esaminata gli avanzi di più antichi edifizi e stratificazioni „. Da ciò si trae la conclusione che in tutta l'area del Foro Ulpio non esisteva nè un monte nè una parte di monte e che perciò l'iscrizione si deve intendere diversamente, e il Boni (p. 23) traduce le ultime due linee: " per mostrare di quanto venisse sopraelevato, con sì grandi opere, il monte e il piano „, dando ad *egerere* il significato di 'innalzare' per analogia di altri verbi composti colla preposizione *e*, quali *emergo educo egigno emoveo enascor eveho* e consimili, e trovando, se non intenzionale, spontanea ed efficace l'antitesi *de/ex* di *declarare* ed *egerere.* Per lui dunque il vertice della colonna traiana, al quale si accede per una lunga scala interna scavata nei massi della colonna stessa, sarebbe una vedetta fatta per offrire all'ammirazione dei visitatori il panorama delle superbe costruzioni traianee.

Anche il Comparetti (in *Acc. d. Lincei, Rendic.* XV, 1906, p. 575 segg.) non crede all'esistenza d'un monte e ciò desume dalle stesse parole dell'iscrizione, giacchè il senato romano, se in quel luogo fosse veramente stato asportato un monte, per ricordare ai posteri il fatto, avrebbe dovuto scrivere *ad memorandum,* non essendo necessario di dichiarare ai contemporanei

ciò che ognuno sapeva, e d'altra parte se il senato nell' iscrizione avesse voluto alludere ai lavori di sterro e di spianamento, avrebbe dovuto dire *solo aequatus* o meglio *in planitiem redactus*. Egli inoltre trova non solo ozioso ma anche senza senso quell'*et locus* aggiunto a *mons*, se l'iscrizione si dovesse interpretare nel modo tradizionale. Infine il *mons egestus* accenna evidentemente a marmi estratti ed asportati ed è espressione corrispondente a quella, che poco prima aveva usato Plinio il vecchio (XXXVI. 1) disapprovando il sempre crescente lusso di marmi (*montes caedimus trahimusque*).

Laonde pel Comparetti le parole *ad declarandum* ecc., sarebbero state dettate dall'architetto del Foro, Apollodoro di Damasco, per dare la misura della massa di marmi di varie specie estratti dalle cave di Egitto di Numidia di Frigia di Luni ecc., e esportati a Roma per servire alla costruzione del marmoreo Foro. Tutti quei marmi idealmente ammonticchiati blocco su blocco (*mons* dell'iscriz.) in un gran cubo avrebbero misurato quanto l'altezza della colonna traiana moltiplicata per una base quadrata avente per lato l'altezza della colonna stessa, giacchè l'*et locus* dell'iscrizione ha una ragione matematica, traducendo χωρίον dei matematici greci, significante l'area di una figura piana. Perciò, essendo 38 metri quell'altezza, nella costruzione di tutti gli edifici del Foro furono impiegati 54.872 metri cubici di marmi. Tuttavia, non essendo di dominio popolare il valore del gergo matematico adoperato da Apollodoro, l'idea che un monte fosse stato asportato e spianato si fece presto strada nelle generazioni seguenti a quella che fu testimone della costruzione del Foro e, secondo il Comparetti, Cassio Dione la raccolse circa un secolo dopo l'inizio di quei lavori.

Nè fa meraviglia se da Cassio Dione a noi nessuno più, eccettuato il Comparetti, capì le parole di colore oscuro dell' iscrizione, giacchè, nota il Sogliano (in *Atti d. Accad. di Napoli*, XXVI, 1907, p. 11 dell' Estratto), " la nostra iscrizione, intesa nel modo come il Comparetti vuole, diventa un indovinello vero e proprio; e ciò lo stesso autore non si dissimula, quando parla di minor chiarezza dell'iscrizione e del facile frainten-

derla, di tenore che si presta veramente ad essere frainteso e di matematici che avrebbero inteso trattarsi di una misura cubica. In secondo luogo il Comp. sostituisce all'idea concreta del *mons et locus* un'idea del tutto astratta, qual'è quella del suo monte ideale di marmi, che egli stesso dice della più varia provenienza, di Egitto, di Numidia, di Frigia, ecc. Ora chi non sa quanto poco conforme allo spirito latino fosse l'astrazione? „. Secondo il Sogliano, la parola *opus opera* si riferisce certamente alle costruzioni traianee, le quali erano fatte di marmo e di tufo e di lava e di mattoni, ma non di solo marmo. Il fulcro poi di tutta l'argomentazione del Comp. sta nel *locus*, che tradurrebbe il χωρίον dei matematici greci: ora χωρίον significa bensì l'area di una figura piana, ma non necessariamente quadrata, nè è possibile al nesso *mons et locus* attribuire il significato matematico, che vuole il Comp. E contrasta col rigore scientifico, che il Comp. trova nella supposta formola di Apollodoro, la parola *mons*, nel significato altezza, unita colla parola *altitudinis* dell'iscrizione stessa. Infine *montem egerere* non equivale al pliniano *montes caedere et trahere*, ma solo 'cacciar via, asportare il cumulo'. Infine il Sogliano si fece fare dal cav. Salv. Cozzi, ingegnere degli scavi di Pompei, il calcolo più largo della quantità di marmo che sarebbe potuto essere adoperato nella costruzione del Foro e tale quantità di marmi greggi calcolata nella misura più ampia e con percentuali di sfrido portate oltre il verisimile ammonterebbe ad un totale di metri cubi 25.938,57, cioè a meno della metà dei 54.872 m. cubici calcolati sul cubo dell'altezza della colonna traiana (1).

Confutata così l'interpretazione del Comp., il Sogliano ne mette innanzi una sua, con cui si propone di conciliare dall'una parte le testimonianze dell'iscrizione e di Dione, dall'altra le denegazioni dei geologi circa l'esistenza dell'intermonte e i risultati degli scavi fatti dal Boni.

Perciò egli si rifà ad un uso, ch'ei dice applicato nell'antichità su vasta scala, e cita fra i molti esempi offerti da Pompei

---

(1) A cifra press'a poco uguale, cioè a mc. 26.600 giunge il Mau nel calcolo da lui fatto, indipendentemente dal Cozzi, della quantità di marmi adoperati nella costruzione del Foro.

quello d'una piazzetta sita nel cuore della città nell'angolo nord-est dell'isola III della regione III, la quale piazzetta è occupata per l'estensione di m. 27,70 per m. 16,30 da un cumulo di terra antica, di sotto al quale sporgono le soglie e i ruderi di case demolite. L'altezza massima attuale del cumulo è di m. 1,70, ma si può calcolare che quella originaria del cumulo lasciato colà dagli antichi ascendesse a due buoni metri.

Quanto a Roma ricorda il monte Testaccio presso gli scali del Tevere, probabilmente sorto sui ruderi di antichi magazzini distrutti, e opina che, distrutto per cause a noi ignote il *vicus* che si stendeva appiè dei quattro colli (Capitolino ad ovest. Quirinale a nord, Esquilino ad est e Palatino a sud) e molto prestandosi il luogo, perchè in basso, quell'area cominciò, in tempo che non possiamo determinare, forse negli ultimi tempi della repubblica, a servire di luogo di scarico, sinchè il cumulo raggiunse l'altezza di 38 metri (quella della colonna) e Traiano risanò quel luogo, sostituendo all'alto cumulo (*mons*) formato dagli scarichi, il suo Foro marmoreo di straordinaria magnificenza.

***

A risanare la fama dei Romani dalla taccia di sporcizia, per aver accumulato in un quartiere del cuore stesso dell'Urbe presso il sacro Campidoglio un monte di detriti, provvide il Ramorino, il quale in un articolo pubblicato il 7 nov. '07 nella " Nazione „ interpretò le controverse parole *ad declarandum* ecc., " per far vedere che alta montagna (di marmo) e che alto spazio si dovette cavar fuori per sì grandi opere „. Non avendo potuto leggere lo scritto del Ramorino sulla " Nazione „, ma avendone solo letto un cenno sulla Rassegna " Classici e Neolatini „, pregai il dotto professore di Firenze di spiegarmi il suo pensiero, locchè egli fece gentilmente con una lettera che dice:

" Quando il Boni dimostrò che un monte alto come la colonna Traiana là sul luogo dove essa sorse non poteva esserci in nessun modo, e che perciò il *quantae altitudinis mons et locus tantis operibus sit egestus* doveva interpretarsi ben diversamente dal modo tradizionale, io considerai che una colonna eretta per ordine del Senato nella piccola piazzetta tra le due Biblioteche,

e istoriata nello splendido modo che tutti sanno per una linea spirale di così largo sviluppo, doveva essere essenzialmente una colonna onoraria per celebrare la gloria di Traiano e ricordare ai posteri le gesta della guerra Dacica. Quest'idea di istoriare gesta guerriere su una colonna, quindi non orizzontalmente ma verticalmente, era una vera novità artistica. Per l'esecuzione di questo originalissimo disegno si dovettero lavorare dei blocchi enormi di marmo, all'esterno colle figurazioni relative alla guerra, all'interno colla preparazione dei gradini da formare poi una scala interna di accesso all'alto della colonna. Tali blocchi si dovevano sovrapporre senza cemento in modo che perfettamente combaciassero, come venne fatto. E ancor oggi si ammira questa meravigliosa sovrapposizione e quasi ammucchiamento di sassi a eterno onore di Traiano e a sfida dei secoli. Ancora io riflettevo che mentre Traiano stesso aveva costruito il suo grandioso Foro colle Biblioteche, colla Basilica, coi grandi porticati, questa colonna era stata posta là in mezzo non da lui ma dal Senato e certo per onorare lui, non per altra ragione. E non era mica il caso di fargli onore perchè aveva costruito il foro, chè ciò si vedeva senza bisogno di richiamarvi su l'attenzione dei cittadini, ma sì erano da onorare le gesta daciche, titolo di gloria ben maggiore che l'abbellimento della città. Tutte queste considerazioni mi fecero pensare che l'iscrizione non dovesse riferirsi ad altro che alla colonna stessa. E così fui condotto a pensare che *ad declarandum* ecc., dovesse significare " per far vedere che alto mucchio (di blocchi marmorei) e spazio per sì grandi figurazioni (la linea spirale istoriata) si sia dovuto tirar su „. Un po' strana può parere questa espressione, ma non ha nulla che ripugni alla latinità e non si spieghi benissimo al principio del 2. sec. dell'êra volgare, La frase *montem egerere* ' tirar su un mucchio ' poteva anche essere interpretata in un altro modo, cioè ' scavar un monte ', e questo bastò perchè in seguito, oscuratasi la giusta interpretazione, si immaginò quello che Dione Cassio attesta già nella 1. metà del 3. secolo. Ancora si noti che l'espressione *locus tantis operibus* doveva essere considerata come apposizione di *mons*, il mucchio di blocchi essendo per appunto lo spazio voluto per le figurazioni daciche. L'*et* non sarebbe necessario: *ad declarandum q. altit. mons, locus tant. oper., sit egestus.* Può forse esser indizio di ciò

il fatto che nell'iscrizione della colonna l'*et* tra *mons* e *locus* occupa spazio tanto ristretto, forse aggiunto dopo? Nè affermo nè nego.

" So bene che questa interpretazione a molti non è piaciuta; so che i migliori (Sogliano, Mau, Leo, Pistelli) ritengono che l'interpretazione tradizionale sia sempre da difendersi; il *mons* scavato non si intenderebbe esistesse nel luogo stesso della colonna, ciò non si può dir più, ma alquanto più a sud dove si eresse poi la Basilica in parte e il porticato del Foro. Ma a me rimane sempre un grave dubbio; forsechè per indicare che lì s'è scavato un monte si erige una colonna istoriata dei fatti dacici? Come si proporziona qui il mezzo al fine? Ed essendo la colonna alta cento piedi romani per l'appunto, com'è da credere che proprio di cento piedi di altezza fosse il terreno scavato nello spazio del foro? E se alto si dice il *mons*, come può venir detto alto anche il *locus tantis operibus*, lo spazio degli edifici traianei? Tutto ciò è talmente strano che la bizzarria della interpretazione da me proposta può parere la più ragionevole delle idee. Comunque io riconosco che è cosa controversa e non intendo neanche ora aver dato altro che un piccolo contributo allo studio della quistione „.

***

Al Ramorino a proposito di *egerere* si può far notare quanto il Mau osserva al Boni. " Il significato d'una parola così comune come *egerere*, scrive il Mau (Mitteilungen K. D. Archaeologischen Instituts, XXII, 1907, p. 187 sgg.), si può desumere solo dall'uso, non dall'analogia, come vorrebbe il Boni. Ammesso pure, egli continua, che *egerere* abbia il significato voluto dal Boni, *quantae altitudinis* appartiene aggettivamente a *mons* nè è prossima determinazione del verbo, inoltre *locus* non può valere ' p i a n u r a ', infine, fatta astrazione della stranezza dell'espressione che gli edifici inalzati formano come un alto monte, il *locus* rimane una aggiunta senza senso „.

Il Mau, come già notammo, concorda col Sogliano nel trovare esagerato circa del doppio il computo, fatto dal Comparetti, del volume dei metri cubi di marmo impiegati nella costruzione

del Foro, dato che la colonna colla sua altezza volesse rappresentare lo spigolo d'un ipotetico cubo.

Pel Mau, le parole *locus tantis operibus* sono strettamente congiunte e significano ' lo spazio per così grandi edifici '. Questo, secondo lui, deve essere il punto fondamentale per l'intelligenza di tutta l'iscrizione: il monte è portato via e (con ciò) fu fatto lo spazio per così grandi edifici. La costruzione grammaticale (son parole del Mau) è certo non totalmente semplice e corretta, giacchè non possiamo agevolmente risolvere la proposizione con due soggetti in due proposizioni con un soggetto ciascuna: *quantae altitudinis mons sit egestus* è esatta, ma non già *quantae altitudinis locus tantis operibus sit egestus,* ma tuttavia il congiuntivo in *locus sit egestus* è solo legittimato perchè appartiene alla domanda indiretta cominciante con *quantae altitudinis.* Sarebbe invece corretto *ad declarandum quantae altitudinis mons sit egestus et locum tantis operibus egestum esse,* però *egerere*, usato propriamente con *mons*, sarebbe improprio con *locus*, perchè il monte è rimosso e il luogo è procurato colla rimozione, laonde per essere totalmente esatti dovremmo risolvere *et locum tantis operibus egerendo factum esse.*

Si potrebbe anche formulare la cosa un po' diversamente: il doppio soggetto *mons* e *locus tantis operibus* sono tutt'uno, onde rettamente s'accompagna il verbo *sit egestus* al singolare, il monte era lo spazio destinato agli edifici o almeno una parte di esso, il *quantae altitudinis* si riferisce propriamente a *mons* e il *locus tantis operibus* si connette con *mons* come apposizione (1), onde si deve tradurre " quale alto monte — località destinata agli edifici — fu rimosso „. Or non si può negare, confessa il Mau, che l'espressione, intesa nell'uno o nell'altro modo, è parecchio strana. E invero la stranezza consiste nell'esagerata brevità, in un non bell'accozzamento di quanto avrebbe dovuto essere detto alquanto più estesamente. Perchè non si è detto semplicemente e chiaramente: *quantae altitudinis mons sit egestus, ut locus fieret tantis operibus*? Semplice-

(1) In questo caso che sta a fare l'*et* dell'iscrizione? obbiettiamo al Mau.

mente per mancanza di spazio, io penso (!!!). Il Senato, quando decise d'innalzare la colonna, difficilmente aveva fissato il testo dell'iscrizione, o, ciò che a noi basta, assai verisimilmente non lo fece, e l'architetto apprestò sulla base una tavola, dove c'era spazio per sole sei linee. Una richiedeva il S P Q R. tre i titoli dell'imperatore, e così restavano due linee, nelle quali non trovò posto una più larga e chiara espressione, laonde si ebbe questa forma alquanto mal riuscita, e come la collocazione delle lettere così anche la dicitura è quanto mai compatta.

Cercando dove poteva essere questo — qual si fosse — monte, il Mau trova che fuor dalle mura Serviane, cioè a nord d'una linea dall'altezza di via Marforio fino alla salita del Grillo, esso è inammissibile ed escluso anche dagli scavi. A sud di questa linea troviamo i Fori di Cesare e di Augusto, luogo in piano già molto prima di Traiano. Pel monte dell'iscrizione non rimane dunque altro posto che la stretta striscia di suolo fra la segnata linea delle mura Serviane e quei due più antichi Fori. perciò segnando quella linea il fronte delle mura, il *mons* sarebbe formato dalla terra addossata dietro ad esse per formare l'*agger*. Questo fu il monte rimosso da Traiano per costruire la parte meridionale del suo Foro.

Certamente questo terrapieno non poteva essere alto quanto la colonna, ma neppure un monte naturale di tanta altezza poteva esserci in quella località.

La colonna misura 38 m. dai gradini in basso al sommo dell'abaco e ciò sul suolo del tempo traianeo, anche un po' più sul suolo originario. laddove il tratto di mura conservato presso la stazione ferroviaria misura solo 10 m. di altezza. Sarebbe dunque un'iperbole se l'iscrizione dicesse che il monte, cioè l'*agger*, era alto quanto la colonna. L'altezza della colonna dal piede del plinto al sommo dell'abaco s'avvicina tanto ai 100 piedi romani (m. 29,723 Piranesi, 29,91 Aurés) che si deve ritenere che questa altezza fosse voluta, e naturalmente essa fu scelta come misura tonda e non come precisa indicazione dell'altezza del *mons*. Or potrebbe la differenza tra 100 piedi e l'altezza del monte essere rappresentata dalla base (*nun könnte ja freilich die Differenz zwischen 100 Fuss und der Höhe des Berges durch die Basis dargestellt sein*); pare che questa nè per sè nè coi gradini, che una volta portavano a essa, indicasse una misura tonda

in piedi romani, giacchè secondo il Piranesi, essa senza i gradini è alta m. 5,273 = piedi romani 17,8 e coi gradini è alta m. 6,949 = piedi rom. 23,5. Certamente questo è possibile. Ma potrebbe pure essere possibile che la colonna di 100 piedi indicasse un'altezza appositamente arrotondata e perciò molto esagerata. Si potrebbe difatti addurre in appoggio che il pensiero di designare l'altezza del monte con una colonna non si ebbe forse prima della rimozione del monte, ma più tardi (il Boni dimostrò che per la colonna fu tagliata la platea del Foro), e perciò quando la colonna fu inalzata l'altezza del monte difficilmente era conosciuta con precisione. E se noi d'altra parte ammettiamo che in fatto l'antica fortificazione e il monte da lei sorto erano assai alti, forse la spiegazione che ne risulta non è da respingere incondizionatamente, se anche io volentieri riconosco, ch'essa non è senza riserva.

Ma si può anche tentare un'altra spiegazione. Il Bunsen congetturò — nè io potrei respingere questa congettura così del tutto, come ora generalmente si fa — che l'altezza del monte fosse designata non dall'altezza della colonna, ma dalla base. Certamente il monumento è la colonna, non la base, ma si può credere che la colonna indica bensì l'altezza del monte, ma non colla propria altezza, ma colla sua collocazione, in quanto sta sull'antico livello, così alto, come anche le colonne del Foro — alcune almeno di esse — sarebbero dovute stare, se non si fosse fatta la rimozione.

Si potrebbe opporre che l'altezza del monte rimosso risulta così piuttosto piccola, mentre pel *quantae altitudinis* dell'iscrizione noi propenderemmo a pensarla realmente più grande. A questa difficoltà non possiamo sfuggire in nessun modo; l'iscrizione attesta un monte; un alto monte qui non fu mai nè l'iscrizione lo dice, e perciò dovette essere più basso. E infine la base si eleva sui suoi nove gradini col plinto della colonna quasi 8 m. sul suolo del tempo traianeo, certo almeno 8 m. sul suolo del tempo anteriore, perciò press'a poco fino alle finestre d'un secondo piano di una casa moderna di giusta altezza. Noi siamo invero totalmente autorizzati, sotto questo punto di vista, a computare il plinto colla base, alla quale esso a colpo d'occhio decisamente appartiene. La cornice della base non forma il suo finimento superiore, ma segue ancora una gola *(Uebergangsglied)*,

colle cui superfici laterali sol poco sporgenti il plinto finisce non ad angolo retto ma con una curva. Le facce della gola sono ornate con ghirlande, sul cui punto di attacco, agli angoli, sta un'aquila che forma l'angolo del plinto: gola e plinto con questa ornamentazione sono indissolubilmente uniti, formando un insieme, donde si stacca nettamente il toro. Ne risulta a dir vero la conseguenza che il plinto dev'essere computato colla colonna per dare i cento piedi della colonna, colla base per indicare l'altezza del colle.

Che si celebrasse la rimozione d'un colle sia pur considerevole e discretamente esteso, mediante una colonna e un'iscrizione, o piuttosto che si utilizzasse l'erezione di una colonna onoraria per l'imperatore a fine di celebrare questo fatto, può sembrare a noi strano, ma non oserei dire impossibile. Questo, come qualche altro caso, ci sarebbe più comprensibile se ci fosse nota la sua preistoria. Se anche il monte era più alto, era tuttavia un singolare pensiero quello di celebrare nell'iscrizione in prima linea la sua rimozione anzichè i grandiosi edifici, e devono a ciò aver condotto circostanze forse speciali a noi ignote.

Delle riferite interpretazioni nessuna, a parer nostro, si regge. Per tacere di quella del Comparetti, già esaurientemente confutata dai calcoli recati dal Sogliano, vediamo il tallone di Achille delle altre.

Quella del Boni incontra due difficoltà, l'una lessicale, architettonica l'altra. *Egerere* in latino vuol dire e disse sempre e solo 'portar via' e non mai 'elevare'. Anche l'*egestis molibus* citato dal Boni non si può tradurre, com'egli fece, 'sollevando grandi massi terrestri', giacchè il testo (Plinio, Hist. Nat., II, 82) parlando dei terremoti dice: *varie igitur quatitur* (*terra*), *et mira eduntur opera, alibi prostratis moenibus, alibi hiatu profundo haustis, alibi egestis molibus, alibi emissis amnibus*, ecc., dove l'*egestis molibus* vale 'trasportando massi', facendoli o rotolare o franare. Il prof. Adolfo Cinquini per appoggiare l'interpretazione del Boni mi citò il Pliniano (Hist. Nat., XXXVI, 24) *corrivatio aquarum egereretur in vertice machinis*, dove a prima giunta pare bensì che si voglia dire che

un'accolta d'acqua è levata in alto con pompe, ma, esaminato bene il testo, si scorge subito che si tratta di asportare con pompe messe in alto dell'acqua impaludata, giacchè lo scopo dell'imperatore Claudio, cui accenna Plinio, non era di sollevare l'acqua del Fùcino, ma di portarla via per prosciugare il lago. Dice infatti il testo: *eiusdem Claudii inter maxime memoranda duxerim, quamvis destitutum successoris odio, montem perfossum ad lacum Fucinum emittendum, inenarrabili profecto impendio, et operarum multitudine per tot annos; cum aut corrivatio aquarum, qua terrenus mons erat, egereretur in vertice machinis, aut silex caederetur: omniaque intus in tenebris fierent, quae neque concipi animo, nisi ab iis qui videre, neque humano sermone enarrari possunt.*

Ma dato pure e non concesso, che l'*egerere* dell'iscrizione valga ' elevare ', la sommità della colonna non sarebbe potuta servire da vedetta, perchè da essa nulla si sarebbe potuto vedere se non il tetto della vicina Basilica, essendo la visuale intercettata da esso senza poter giungere al Foro e alle superbe costruzioni che lo circondavano. Si noti che la colonna traiana era incassata in un cortiletto dietro il Foro propriamente detto fra le Biblioteche e la Basilica Ulpia, la quale per la sua mole doveva essere l'edificio maggiore di tutto il Foro, più alto del portico e della *exedrae*. Ora ci dice Ammiano Marcellino (XVI, 10) che l'imperatore Costanzo, quando visitò per la prima volta Roma, ammirò via via tutti i monumenti dell'Urbe, credendo via via di nulla poter vedere di più eccelso, ma che quando, dopo il Pantheon ed altre costruzioni, giunse al Foro Traiano rimase attonito davanti a quella sfilata di giganteschi edifici. *Intra septem montium culmina*, egli dice, *per adclivitates planitiemque posita urbis membra conlustrans et suburbana, quidquid viderat primum, id eminere inter alia cuncta sperabat: Iovis Tarpei delubra, quantum terrenis divina praecellunt: lavacra in modum provinciarum extructa: amphitheatri molem solidatam lapidis Tiburtini compage, ad cuius summitatem aegre visio humana conscendit: Pantheon velut regionem teretem speciosa celsitudine fornicatam: elatosque vertices scansili suggestu consulum et priorum principum imitamenta portantes, et Urbis templum forumque Pacis et Pompei theatrum et Odeum et Stadium aliaque inter haec decora urbis aeternae. Verum cum ad Traiani forum venisset, singularem sub*

omni caelo structuram, ut opinamur, etiam numinum adsensione mirabilem, haerebat adtonitus per giganteos contextus circumferens mentem nec relatu effabiles nec rursus mortalibus adpetendos. È perciò evidente che tra questi giganteschi edifici del Foro Traiano il più gigantesco per ragioni di proporzioni dovesse essere la Basilica Ulpia, che aveva la base più ampia in lunghezza e larghezza; essa doveva dunque essere più alta del Pantheon, e, elevandosi il Pantheon ben 43 metri sul suolo, si comprende come chi fosse stato sulla colonna traiana alta m. 38 e posta dietro alla Basilica, ne avrebbe potuto a pena vedere la cupola da una sola parte senza potere spaziare coll'occhio sul Foro e sui circostanti edifici.

* * *

Il Sogliano a sostegno della sua interpretazione invoca tra i molti esempi offerti da Pompei quello di una piazza, su cui trovasi un mucchio di detriti alto m. 1,70, di sotto al quale sporgono le soglie e i ruderi di case demolite (io direi crollate), e da ciò inferisce che nell'antichità ci fosse l'uso di adibire a luogo di pubblico scaricatoio le aree libere nell'interno dell'abitato.

Questa volta il dotto Pompeianista è venuto meno a se stesso, giacchè l'esempio di Pompei è quello che meno si può invocare, date le condizioni edilizie degli ultimi anni di questa città. Difatti quando il 24 agosto del 79 d. Cr. la città fu sepolta sotto cinque metri di cenere sabbia e lapilli eruttati dal Vesuvio, essa era appena finita di ricostruire (se d'una città ciò si può dire) dopo il crollo causato dal terremoto del 5 febbraio del 63 d. Cr. (sedici anni innanzi!), per il quale, dice Tacito (Ann. XV, 22), *celebre Campaniae oppidum Pompei magna ex parte proruit.* Comprendiamo la rapida ricostruzione di S. Francisco oggidì, ma allora, che non c'era nè telegrafo per chiamare operai nè piroscafi e ferrovie per trasportarli, Pompei dovette essere ricostrutta abbastanza lentamente dopo il terremoto, sicchè è naturale che nell'interno della città nel 79 rimanessero ancora alcuni mucchi di detriti della diruta città, i quali a poco a poco sarebbero stati asportati.

Per quel che riguarda Roma, anzitutto è inammissibile che i Romani tollerassero nel cuore della città un pubblico scari-

catoio; ma c'è di più, ciò era impossibile per ragioni finanziarie e private e pubbliche. Gli scavi han dimostrato che nell'area del Foro Traiano preesistevano edifici, i quali, secondo il Sogliano, sarebbero stati distrutti o da incendi o da terremoti o da altra causa a noi ignota, lasciando l'area per lo scaricatoio. Ma crollati tali edifici, gli obbiettiamo, i loro proprietari o gli eredi di questi rimanevano pur sempre i padroni delle aree, le quali nel centro di Roma dovevano avere un valore grandissimo: or è egli ammissibile che essi rinunciassero al loro diritto abbandonando le aree stesse, o che il governo di Roma le riscattasse per far il comodo di chi avesse da scaricare detriti? Le espropriazioni si fanno per ragioni di pubblica utilità, vuoi d'igiene o vuoi di estetica o vuoi di viabilità, e chi ha detriti o immondizie da scaricare se ne liberi come può. Potè bensì il monte Testaccio sorgere sui ruderi di antichi magazzini distrutti, ma fuori di Roma, sul Tevere, e quei magazzini dovettero essere stati pubblici e resi inservibili o per crollante vetustà o perchè il commercio aveva preso altro recapito, ma ciò non potè accadere nella valle tra il Campidoglio e il Quirinale.

Anche l'interpretazione del Ramorino pecca per il significato attribuito, sull'esempio del Boni, ad *egerere*, e pecca ancora contro l'estetica, pure volendo fare della colonna il monte dell'estetica. Per il R. in fondo in fondo l'iscrizione direbbe che il Senato innalzò la colonna per dimostrare quanto spazio ci voleva per illustrare le gesta daciche di Traiano; ma nessun Baedeker illustrò mai un quadro dicendo p. es.: questo quadro fu dipinto per dimostrare quanto alta cornice e ampia tela ci volle per rappresentare in tutti i suoi aspetti, puta caso, una battaglia.

Pel Mau il Senato romano scrisse il suo latinuccio dell'iscrizione in costruzione grammaticale certo non totalmente semplice e corretta (testuale!), mentre avrebbe dovuto scrivere *ad declarandum quantae altitudinis mons sit egestus et locum tantis operibus egerendo factum esse.* Ben è vero che il Senato ha un'attenuante: l'architetto Apollodoro apprestò per l'iscrizione

una tavola marmorea troppo stretta, sufficiente appena per sei linee, la stamperia del Senato non possedeva caratteri più piccoli, e il Senato fece del suo meglio col pigiare quante più lettere potè nell'ultima linea e coll'usare la massima brevità anche a danno della chiarezza e dell'esattezza.

Per rendermi conto del grado d'imputabilità del Senato volli esaminare attentamente sul posto la faccenda e trovai che l'iscrizione è in basso, che le dimensioni delle lettere di essa sono grandissime tanto che riducendole un pochino si potrebbero leggere comodissimamente facendo posto ad un paio di linee ancora, che è rilevante l'intervallo fra linea e linea e più ancora lo spazio marmoreo sopra la prima linea e ancor più sotto l'ultima, e infine che l'ultima linea è in lettere di formato minore delle sovrastanti. L'insieme grafico dell'iscrizione apparisce poi studiato in tutti i particolari: la prima linea ha 24 lettere, la seconda 27 (però con quattro I, che sono esili naturalmente), la terza 26, la quarta 29 (però con sette I), la quinta 31 e la sesta in carattere un po' più piccolo 35, cosicchè a colpo d'occhio la scritta apparisce chiara e bella, essendo le lettere gradatamente tanto più spazieggiate quanto più sono in alto e distanti dall'occhio, e essendo le lettere dell'ultima linea di formato un po' più piccolo perchè più vicine all'occhio del lettore.

Quanto all'altezza del monte, cioè del tratto di muro coll'*agger* addossatovi, il Mau ne dà tre misure: 1ª la base è uguale alla differenza tra i cento piedi della colonna e l'altezza del monte, calcolo facilmente eseguibile da chiunque, come si vede; 2ª forse, quando la colonna fu innalzata, l'altezza del monte non era più conosciuta con precisione, e perciò la misura della colonna rappresenterebbe un'a l t e z z a a p p r o s s i m a t i v a arrotondata e perciò molto esagerata (come possa essere approssimativa e insieme molto esagerata non riusciamo a comprendere, come non riusciamo a comprendere che l'architetto del Foro ignorasse a lavoro compiuto l'altezza dell'*agger* asportato, quasi non avesse dovuto fare il conto preventivo e poi consuntivo delle spese di tutti i lavori, compresa la rimozione dell'*agger*); 3ª l'altezza del monte può essere rappresentata dalla base, che, essendo piccola, ha bisogno dell'aggiunta del plinto per non fare sfigurare tanto Traiano d'avere portato

via un mucchio di terra sì basso. Così la colonna non rappresenta, per chi è addentro alle segrete cose, l'altezza del monte, ma significa che il monte era alto fin sotto ad essa. In tal modo il Senato romano o a bella posta o senza volerlo trasse in inganno i posteri non solo quanto all'altezza del monte ma anche quanto alla sua ampiezza, giacchè d'un basso e stretto e corto bastione con quell'apposizione di *locus tantis operibus* a *mons* (mentre solo una breve striscia dell'area del Foro sarebbe stata occupata dall'*agger*) creò la leggenda d'un alto monte a larga base. Ben è vero ch'è strana un'apposizione preceduta dall'*et*, tanto più che (come pretende il Mau) lo spazio per le lettere non sovrabbondava, ond'esse furon pigiate l'una contro l'altra; ma abbiamo visto che il Senato non sapeva bene il latino e perciò anche questa è possibile!

* * *

La nova interpretazione, che tentiamo, dovrà, acciò sia attendibile, non contraddire a due attestazioni: l'una il noto luogo di Cassio Dione, il quale accenna alla colonna Traiana e al contenuto della sua iscrizione, l'altra i dati di fatto offertici dagli scavi eseguiti sul posto dal benemerito architetto Giacomo Boni.

Noi non possiamo credere col Comparetti che Cassio Dione, solo perchè scriveva un secolo dopo l'erezione della colonna, non ne avesse bene intesa l'iscrizione o che al tempo di Dione già si fosse perduta la memoria di quello ch'era stato il luogo dove sorgeva il Foro Traiano, giacchè Dione nell'anno 186 si recò a Roma dove divenne anche senatore e potè essere informato dai figli di quelli i quali furono testimoni dei lavori del Foro, e quando più tardi in Campania attese alla composizione delle sue Storie potè facilmente attingere informazioni su un fatto, ch'era relativamente recente.

Occorre pertanto interpretare la notizia dataci da Dione rettamente e perciò nel modo più ovvio.

Dione scrive di Traiano (68, 16): καὶ ἔστησεν ἐν τῇ ἀγορᾷ καὶ κίονα μέγιστον, ἅμα μὲν ἐς ταφὴν ἑαυτῷ, ἅμα δὲ ἐς ἐπίδειξιν τοῦ κατὰ τὴν ἀγορὰν ἔργου· παντὸς γὰρ τοῦ χωρίου ἐκείνου ὀρεινοῦ ὄντος κατέσκαψε τοσοῦτον ὅσον ὁ κίων ἀνίσχει, καὶ τὴν ἀγορὰν ἐκ τούτου πεδινὴν κατεσκεύασε. E il Comparetti traduce: “ ed

innalzò nel Foro una grandissima colonna, sì perchè gli servisse di sepolcro, come anche per dar saggio del lavoro pel Foro; imperocchè, essendo tutto quel luogo montuoso, lo abbattè di tanto di quanto la colonna si solleva, e così costrusse in piano il Foro „. Il Sogliano invece traduce κατέσκαψε con 'scavò'. In verità 'abbattè' è troppo generico e perciò poco esatto, 'scavò' non risponde al testo, poichè κατασκάπτω vale bensì originariamente 'scavare sotto', col quale significato etimologico è ancor usato, p. e., da Teofrasto in Hist. Pl., 4, 13, 6, però è più frequentemente usato nel significato di 'demolire': κατασκάπτειν πόλιν 'demolire una città' troviamo in Euripide Tr. 1263, — τείχη 'demolire mura' in Tucidide, 4, 109 e in Isocrate, 303, *b*, — οἰκίαν εἰς ἔδαφος 'demolire una casa fino alle fondamenta' in Plutarco Pobl., 10, ecc.; ecc.; laonde, lasciando per ora impregiudicata la questione dell'interpretazione dell'iscrizione traianea, credo si debba tradurre le parole di Dione: " e innalzò nel Foro anche una colonna grandissima, sia per propria sepoltura, che per dimostrazione del lavoro fatto pel Foro; giacchè, essendo montuoso tutto quel luogo, demolì da tanta altezza a quanta la colonna si eleva e con ciò spianò il Foro „.

D'altra parte gli scavi del Boni non solo hanno trovato " in tutta la larghezza della valle finora esaminata gli avanzi di più antichi edifizi o stratificazioni „, ma anche che l'area del Foro prima non era piana, giacchè " alla distanza di novanta metri dalla colonna, in direzione del Campidoglio, lo stereobate del monumento di Bibulo, oltre un terrapieno alto m. 3,60, raggiunge una strada antica scendente al piano del *vicus* sotto la platea del Forum Ulpium „, e il Boni rinvenne " a un metro e mezzo circa sotto al piano del cortile (tra le due Biblioteche e la Basilica) una strada selciata a poligoni, marginata da avanzi di caseggiato a *lorica testacea* del sec. I „, la quale " strada o *clivus* è a moderata pendenza (del 3,7 per cento) „. Del resto, basta girare un po' Roma per trovare dislivelli continui, sicchè sulla base di quanto gli scavi attestano ed attesta la natura del suolo di Roma anche odierna, possiamo inferire indubbiamente che l'area, che fu poi del Foro Traiano, doveva prima essere ondulata con varia pendenza, onde ben si comprendono le parole di Dione: παντὸς τοῦ χωρίου ὀρεινοῦ ὄντος.

Quant'era dunque l'altezza del dislivello del luogo nel punto più elevato? Una siffatta domanda ce la moviamo noi, dimenticando che quel quartiere nel centro di Roma era abitatissimo; ma chi dettò l'iscrizione della colonna e aveva avuto sott'occhio quel luogo fitto di alti edifizi, pensò non solo al lavoro di sgombero di un po' di terra ma anche e più a quello di demolizione rimozione e spianamento, laonde, ciò tenuto presente, dal κατέσκαψε τοσοῦτον ὅσον ὁ κίων ἀνίσχει 'demolì quant'è alta la colonna' risulta chiaro che l'altezza dell'elevazione del suolo con quella degli edifizi (che Traiano κατέσκαψε) doveva nel punto più alto raggiungere il livello della sommità della colonna. Le parole di Dione κατέσκαψε... καὶ τὴν ἀγορὰν πεδινὴν κατεσκεύασε traducono e spiegano assai bene l'*egerere* dell'iscrizione, il qual verbo include la rimozione del materiale demolito e la colmatura fatta con esso nei punti più bassi dell'area a fine di spianarla. La rimozione riguarda il *mons*, la colmatura il *locus*, sicchè in *mons et locus* dobbiamo vedere un costrutto καθ'ὅλον καὶ κατὰ μέρος, in quanto il *mons* è bensì la parte più rilevante dell'opera di sventramento del *vicus* compiuta da Traiano, ma è solo una parte, la quale è compresa nel *locus*, che si estende a tutto il *vicus* demolito dal Cesare Romano.

Se gli scavi fatti hanno da una parte dimostrato che un vero *mons* non esisteva nell'area del Foro Traiano, hanno da l'altra pure dimostrato che il luogo era accidentato con varie e moderate pendenze, il che costituiva appunto la natura collinosa del terreno. Siccome poi la colonna si eleva insieme colla base ben 38 m., era necessario che altissimi fossero gli edifici per toccare colla loro sommità quella della colonna. Nè ciò ci deve far meraviglia, poichè Vitruvio (II, 8) ci dice: *in ea maiestate urbis et civium infinita frequentia innumerabiles habitationes opus est explicare. Ergo cum recipere non posset area plana tantam multitudinem ad habitandum in urbe, ad auxilium altitudinis aedificiorum res ipsa coegit devenire.* E per la scarsità e il caro prezzo delle aree fabbricabili in Roma si giunse ad edificare a tanta altezza che le case spesso rovinavano e gli incendi riuscivano tanto più disastrosi quanto più esse erano alte. Ἐπεμελήθη μὲν οὖν, dice a questo proposito Strabone, V, 1, 7, ὁ Σεβαστὸς Καῖσαρ τῶν τοιούτων ἐλαττωμάτων τῆς πόλεως, πρὸς μὲν τὰς ἐμπρήσεις συντάξας στρατιωτικὸν ἐκ τῶν ἀπελευθεριωτῶν τὸ βοηθῆσον, πρὸς

δὲ τὰς συμπτώσεις τὰ ὕψη τῶν καινῶν οἰκοδομημάτων καθελών, καὶ κωλύσας ἐξαίρειν ποδῶν ἑβδομήκοντα τὸ πρὸς ταῖς ὁδοῖς ταῖς δημοσίαις (' Pertanto Cesare Augusto si preoccupò di tali sinistri della città organizzando contro gli incendi un corpo di libertini che corresse in aiuto, e contro i crolli togliendo il permesso di edificare alti i novi edifizi e impedendo di elevare oltre 70 piedi (= m. 20,71) gli edifizi sulle pubbliche vie '). Rimasero dunque ancora in Roma dei vecchi edifizi in confronto dei quali erano bassi i nuovi di m. 20,71 (ciò dice il τὰ ὕψη καθελών), e poichè Traiano nel costruire il suo Foro scelse certo un quartiere vecchio e da risanare e non uno adorno di monumenti e di belle costruzioni, è da credere che egli compì un'opera, noi diremmo oggidì, di sventramento (*egerere*) d'un *vicus* a viuzze strette e slivellate e fiancheggiate da catapecchie e vecchie case ammonticchiate e lanciate a grande altezza (cfr. Vitruvio).

Quest'opera estetica e igienica doveva pure essere attribuita ad onore a Traiano; e poichè le nove costruzioni del Foro tutti le possono vedere ergersi gigantesche al cielo basterà accennarle nell'iscrizione con *tantis operibus*; le imprese daciche del capitano sono già rappresentate stupendamente sulla colonna nè hanno bisogno di illustrazione scritta; quella che più non si vede ed è una benemerenza civile non inferiore alle guerresche ed artistiche, è lo sventramento del vecchio quartiere, che deve essere ricordato ai posteri nella iscrizione.

La quale non dice *ad memorandum* ecc. ma *ad declarandum*, perchè coll'altezza della colonna non si vuole ricordare ma dimostrare, dandone la misura, l'ingente opera di risanamento compiuta col demolire e spianare il *vicus*.

Nè si opponga che la colonna non può indicare una misura, avendone essa una sua propria solenne tonda di 100 piedi, poichè nulla toglie che la colonna, pur essendo di 100 piedi, possa colla sua sommità segnare il culmine più alto del quartiere sventrato, costruendole sotto, come nel caso nostro, una base di tal altezza che con quella della colonna raggiunga la voluta misura.

Concludendo, le due ultime linee dell'iscrizione della colonna Traiana vogliono significare che questa fu innalzata per indicare a quanta altezza si spingevano gli edifici ch'erano sul monte e sull'area demolita per far posto a sì grandiose costruzioni, quali furono quelle del Foro Traiano.

Forficula auricularia e bricciche romanze

Nota di CLEMENTE MERLO.

I.

Nel nome scientifico è la storia dei nomi volgari del piccolo insetto. Due ne sono le fonti, anzi una sola: la coda che ricorda una piccola pinza di squisita fattura, e una superstizione che ne germoglia. Crede il popolo che la forfecchia prediliga i meandri dell'orecchio umano e con la piccola acuta pinza pizzichi, tagli, faccia ira d'Iddio dell'organo delicatissimo.

Con un nome che variamente traduce la ingiusta, quanto radicata e diffusa (1), leggenda, la chiamano gli abitatori della Francia pressochè intera, di qualche vallata delle Alpi lombarde, della Rumenia. Povera, innocua bestiola! cui s'addirebbe un nome che suonasse 'la timida' come a quella che vive tranquilla nel ricettacolo dei frutti, specie dei fichi, nell'interno dei fiori, sotto la corteccia degli alberi morti, o vicini a morire, e scoperto che sia il suo rifugio, si fa più addentro, più sotto, con febbrile attività, come impazzita. Nella nostra penisola è per lo più 'la forbicina', 'la forbicetta' e non è senza importanza il veder come si intreccino i due filoni che fan capo a forfex e all'ipotetico *forbex (2). Ma non mancan pur leggiadre creazioni, per lo più scherzose: '*taglia, o forbice*', '*pizzica, o forbice*', e l'*ammola-fuorfeče*, *arrǫta-fọ́rbęčę* " arrotino " del mezzogiorno.

---

(1) Si vedano il ted. *Ohrwurm*, l'ingl. *earwig*, ecc. in Rolland " Faune pop. " III, 303.

(2) Forma nata da dissimilazione, secondo il Salvioni (v. " Note lomb.-sicule " 83, n. 4).

***

A l'insetto dalla coda biforcuta a guisa di forbice, forca, tenaglia:

1 '*bruco forcuto*': sard. campid. *cugurra furcaxada* (v. *cugurra* bruco e *furcaxau* forcuto).

2 '*apri coda*': sard. logod. *isperracòa* (v. *isperrare* fendere, aprire e cfr. gli it. *batticoda*, *squassacoa*, ecc.).

3

a) '*coda forcuta*' : m. prov. *co-besso*, marsigl. *couebesso* s. f. (v. *bes besso* double, fourchu); valles. *karoua bècha* (1).

b) ═══ : Orne *cu fourché* Roll.

4 '*coda forbice*' : sard. gall. *codifólvicia* Spano V. It.-S., p. 199 (2) (v. *archibanco*, *galliparo*, ecc.: M. Lübke II, § 554) (3).

5

a) *forbice*, *forbici*:

basso engadin. *forš* **forbš* Pallioppi.

lucch. *fòrbicia* Nieri; parmg., bologn., ferr. *forbsa*, Travo (piac.) *fórbśa* r. pr.; ═══ sicil. *fòrficia* Traina.

nap. *fuòrfece* s. f. sg. Puoti (4); calabr. *fuòrfice* s. f. sg. Accatt. (5); —— Bosa (sard.) *folfighes* Rolla.

---

(1) Devo questa e le altre voci della Svizzera francese alla molta bontà e cortesia del Tappolet, uno degli egregi collaboratori del " Glossaire des patois de la Suisse romande ".

(2) Vi sta scritto *codifolvícia*, ma è da emendare certo in *codifólvicia* (v. la parte sarda-italiana e Guarn. in A. G. XIV, 161).

(3) A Manoppello (abruzz.) '*rrétafròffece*' dietro + forbice ' è lo scorpione; dove è da notare l'avverbio, fatto femminile (?), che precede il nome (v. abruzz. *a' rréte cule* " a ritroso ").

(4) Forma di numero plurale passata al singolare, secondo mostra l'*uó* che parla di -ī (cfr. il bar. *fuęrcęuę*; Nitti, p. 10).

(5) L'*uó* parla di -ī, l'-*e* di -ᴇ. Al plurale suona *fuorfici*, ed è di genere maschile.

Sannio *fórfeca* s. f. Nitt. (ma *fuòrfece* ‘ forbici ’) (1).

∼∼∼∼

piac. *sizôra* caesōria For.

b) un diminutivo di forbice:

∼∼∼∼: metaur. *forbícchia* *forbīcula Conti; ∼∼∼∼ it. lett. *forfẹ́cchia* forfĭcula D’Ovidio in A. Gl. XIII, 380 (2).

‘*forbicetta*’ (3): trent. *forbeśeta* Ricci; teram. *furbęćętte* Savini; Lugano *furbiśẹta* r. pr., com. *forbesèta*, Brianza *forbesètta*, mil. *foresètta* Cherubini (v. *fores* Salv. o. c.), paves. *forbeseta*, *forbseta*, ferrar. *forbsette* s. pl. Ferraro, imol. *furbseta*, faent. *furbsetta*; ∼∼∼∼ galles. *furfiźiéta* -ĭtta (v. *tiéta* *tĭtta), piran. *furfiđéta*, pol., vall., siss. *forfiźéta*, dign. fas. *furfeźita* Ive “ Lad. ven. „ 137, trevig. *forfeseta* Zoppelli, padov. *forfeseta* Patr., ven. *forféta* (v. *fọrfe* forbice; Ascoli in A. Gl. XIII, 281); — Bosa (sard.) *folfighitta* -ĭtta Rolla.

∼∼∼∼ rovign. *furfiźitula* *-ĭttula Ive l. c.

‘ forbicina ’: it. lett. *forbicina*, Bironico (lugan.) *furbiśín* s. pl., alto milan. *forbeśina*, bresc. *forbizina* Melch., mantov. *forbsina*, parmig. *forbsén’na*, moden. *furbśéna*, mirandl. *furbsinna*; ∼∼∼∼ berg., bresc. *forvesina* Tirab., Gagl.

‘ forbicella ’: imol. *furbsèla* Matt.; ∼∼∼∼ nap. *furfecella* Andr.

∼∼∼∼: sen., pist. *forbicicchia* *-icīcula Pianig., Nieri; ∼∼∼∼ lecces. *furfecicchia* Mor. in A. Gl. IV, 140, sicil. *furficicchia* Tr.; — venez. *forfesigola*.

∼∼∼∼: volterr. *forbićískịa* *-iscula? r. pr.

∼∼∼∼

∼∼∼∼: genov. *teświẹ́tta* (v. *teświe* forbici); spagn. *tijereta* (v. *tijera* forbice) (4).

---

(1) V. più sotto forfĭcula e forbīcula. A Maglie *fórfica*, *forfaca* è una specie di scorpione innocuo; Panareo com.

(2) V. qui sopra *fórfeca*.

(3) Qui compaiono assieme i suff. -ĭtta ed -ĕtta, la distinzione non essendo sempre possibile.

(4) Anche lo sp. *tijera* dev’essere un *tesoria (tosoria rifatto su cæsoria; v. Parodi in A. Gl. XVI, 149).

6

a) *forca*:

m. prov. *fourco*, *fourcha* Mistr., Honn., guasc. *hourco*, ecc.

b) un diminutivo di forca:

'forchetta': Rivera, Taverne, Agno, ecc. (Lugano) *furkẹ́ta* r. pr.; Thônes, Annecy (sav.) *forçhtá* (v. *beltá* 'belette', ecc.); valdost. *fortsetta* s. f. Çerlogne (1); Neuchâtel *froutchèt*, Berne *foértchat* s. f., Vaud *fòrtsèta*; Messin *fourchette* s. f.

≈≈≈: Bosco Marengo (aless.) *furtícula* *-*kítula*? r. pr.

≈≈≈: sard. logod. *forchiddádule*, -*ádile* Sp. (2).

furcula: friul. *fórcule* s. f. Salv. N. P.

≈≈≈: Frugarolo (aless.) *furčẹ́ta* *-c(ŭ)lĭtta r. pr.

≈≈≈: Casal Cermelli (aless.) *furčẹ́la* *-c(ŭ)lĕlla r. pr.

≈≈≈: piem. *fu(r)čẹlíña* *-c(ŭ)lĕllina e *furčulíña* *-c(u)lŭlīna Gavuzzi (3).

'forchelletta': valdost. *fortseletta* s. f. Çerlogne (4).

≈≈≈ : Vaud. *fòrtsâola* s. f. *-i̯ŏla (5).

7 *la piccola tanaglia*:

it. lett. *tanagliuzza* (6).

8 *la pizzicatora*:

piem. *pẹsiọ́ira* (v. *pẹsié* 'pizzicare').

---

(1) "Dictionnaire du patois Valdôtain" Aoste 1907.

(2) Strano il suffisso; anche il Guarnerio mi scrive di non conoscerne altro esempio.

(3) Movendo da furcula, anche codeste voci piemontesi della cui schiettezza dubitò il Toppino in A. Gl. XVI, 338, rientreran nella norma; cfr. paves. *barčẹla* Salv. in Rivista di Filologia, XXXV, p. 84.

(4) Il monferr. *purslette* pare un **furslette* 'forcellette' (v. *fursliñe* 'forcelline' forchette) con immissione di 'porco': le forbicine son grasse lucenti.

(5) Deve essere voce di Thièle o vicinanze; v. a Th. *fẹlyāọla* filiŏla, ecc. in Odin "Phonol.", p. 50.

(6) Nel Foresti, e in qualche altro vocabolarista dialettale. Un *tramagliuzze* (?) in Ungarelli.

9 *l'insetto che danneggia gli erbaggi, i frutti*:

a) '*taglia cipolle*': m. prov. *taio-cebo* Mistr. II, 945.

b) '*taglia pere*': m. prov. *taio-pero*, ling. *talhoperos*, ecc. M. II, 946.

'*guasta pere*': m. prov. *curo-pero* M. (1).

c) '*taglia-piede*': Bocche del Rod. *coupo-pè* Roll. (2).

'*fora-piede*': m. prov. *trauco-pèd* Mistr. II, 1030, Tarn *traouco-pè* Roll. (v. *traucá*, ecc. " traverser, percer ") (3).

10 voci scherzevoli:

a) '*taglia, o forbice*':

triest. *taia-forfe* (v. *forfe* forbice); Teora (Sannio) *taglia fruòrfece* Nitt. (4); nap. *tagliafòrfece*, *taglia fuorfece*; molfett. *tagghiafuerce* Scardigno (5), bar. *taĝĝia fuérčeue* r. pr. (6).

b) '*pizzica, o forbice*': tarant. *pizzica fuerfici* De Vinc.

c) ~~~~~: Frascati *mazzatenála* r. pr.; Castelmadama (Roma) *mazzatenaja* Norreri (7).

---

(1) Il verbo *curá* 'curare' può avere senso cattivo negli odierni dialetti provenzali: v. *cura de nis* " détruire des nids ", *cura lis uei* " pocher les yeux ", *lou diable te lou cure!* " la peste te crève! "; M. I, 691.

(2) V. St. Romanzi IV, p. 157.

(3) Che la forbicina tagli le cipolle, che recida al piede le tenere piantine degli orti, come il grillotalpa (v. St. Rom. IV, p. 149), è una calunnia bell'e buona; più che altro, danneggia i fichi di cui è ghiotta. È strano anzi che una " bestiola dei fichi ", un " guasta fichi ", o qualcosa di simile, non s'abbia in nessuna parte.

(4) All. ad *ammola fuòrfici* " arrotino ".

(5) All. ad *emmula fuerce* " arrotino ".

(6) Di *fuérčeue* che non è f o r c i p e ma forma metatetica, v. Salv. l. c., n. 3.

(7) A Castelmadama *tenaje* son le forbici, e così a Subiaco (*tenale* Lindsstr. in St. Rom. V, 296); non so se a Frascati. Io intendo 'dagli, o forbice'; ma potremmo anche avere un 'dagli, taglia (o attanaglia)'; come un 'dagli, picchia' pare l'it. *mazzapicchio* (o è *mazza* + *picchio*?) e 'dagli, frusta' il *mazzafrustu* " correggiato " di Castelmadama (v. per altro *fusta* e *mazzafusta* " correggiato " ad Agnone).

d) *l'arrotino*: sor. *arrota fórbeçe* r. pr.
: nap. *ammola fuorfece* D'Ambra, Puoti.

e) *mozza cime*: spagn. *cortapicos* (v. *cortapiés*, *cortaplumas*, ecc. e *pico* " parte saliente, sobresaliente en la superficie de algunas cosas „ Acad.).

f) '*taglia code*': genov. *taggiacôe* Casaccia.

g) *fendi casse*: sard. sassar. *jparracaši* (v. *jparrá* spaccare (1) e *caši* 'casse').

h) ≈≈≈≈ : Maglie (lecc.) *pizzica madonne* Panareo com.

i) ≈≈≈≈ : Guernesey (norm.) *pinche-tchu* (v. *pinches* 'pinze') Métiv.; Vogesi *pince-cul* Roll.

B l'insetto che insidia l'orecchio dell'uomo:

1 '*la bestia delle orecchie*': Valtourn. (Aosta) *lă bękie dĭ buíñŏ* (v. *buíño* orecchio; Zauner " Körpert. „, p. 78).
≈≈≈≈ : valles. *lè bèdiètè di jòourèlyè* s. pl.

2 'un derivato di orecchia':

a) auricularia:

m. prov. *aurihiero*, delf. *aurlhèiro*, ling. *aurelhèiro* Mistr. I, 181 (2): Valtourn. (Aosta) *ǫl̃éę* s. f. (3), fr. *oreillère* s. f. (s. XVI *oreilliere* Du Pinet) D. Gén., Guernesey (norm.) *orillère* Mét.

b) ≈≈≈≈ : Poschiavo, Bormio *urelána* (-ana) Salv. " Posch. „ § 129.

---

(1) Il verbo manca allo Spano, ma non al sassarese, secondo m'avverte cortesemente il Guarnerio.

(2) Ling. *aourelièro* in Rolland.

(3) Voce affatto normale (v. *sęśę* cerĕsea, *paç̃* parĕntes, ecc.; *sǫlęlá* *solĭclata, ecc.); tanto più notevole in quanto che orĭcla è una delle basi latine che mancano al valdostano (v. qui sopra).

c) ≈≈≈≈ : Loire *oreillarde* s. f. (germ.-*ard*: M. Lübke II, § 519).

d) ≈≈≈≈ : valles. *oureilyön* s. m. (-one dimin.?).

e) ≈≈≈≈ : rum. *urechélniţa* (*urechérniţa*) s. f. Puşc. Et. W., p. 171.

3 *penetra orecchie*: Ban de la Roche (Lor.) *mouss-èrraïe* Oberlin (cfr. a. fr. *mucier* ecc., loren. *meusser*, *musser*, ecc. " se cacher, se fourrer dedans, entrer „; God. V, 439); Belmont („) *müs-ạrai̯* (1).

4 *attanaglia orecchie*: Gatin. *pince-oreille* R. phil. franc.-pr. X; Côte d'Or *pince-airoille* Roll.; Genève *pincé-orelié*.

5 *buca orecchie*: fr. *perce-oreille* s. m. D. Gén., saint. *p'rce-oreille* Jôn.; Vaud *pèç-orolhe*, *perc'orollie* s. f. e m., Berne *pouàch àrèy* s. m., Neuchâtel *páche aureuille* s. m., Genève *pérf -orẹlyẹ* s. m., valles. *perche orélé* s. f.

: Vienne, Deux Sèvres *creuge-oreille*, *cruge-oreille* Lalanne (v. *cruger* " creuser, faire des crus, des trous en terre „ Beauch.-Fill., 77) (2).

6 *scava orecchie*: mesolcin. *škawrḗžå* Salv. " Posch. „ § 129.

7 *rovina orecchie*: prov. *cura aurelha* Honn., prov. *curo auriho* s. m., ling., delf. *curo-aurelho* s. m. M. (3).

C voci oscure:

1 guasc. *cagno-berbero* s. f. M.

La prima parte è 'cagna' e vedine St. Rom. IV, p. 157, n. 2; e la seconda?

---

(1) Vo debitore dell'etimo e delle voci di Belmont alla benevolenza dello Horning. Anche a Belmont il verbo ha la sorda: *müsí*; la sonora di *muś-arai̯* non è chiara.

(2) Devo la notizia alla cortesia squisita del Thomas. Il quale m'avverte che il *gruge-or.* del Rolland è un errore di stampa.

(3) V. qui sopra p. 7, n. 1.

2 Rouchi *michoréle* Hécart, Fiandra *michorelle* Vermesse (1).

3 svizz. franc. *arithala, aréthala* (v. St. Rom. IV, p. 165, e Schuchardt in Z. Gröb's XXXI, p. 30).

4 valles. *téroula* s. f., *eđeroulè.*

5 valles. *bregantala* s. f.

Pare un derivato in -ĕlla di *bregandá* (Vionnaz *bregãda*), " tourmenter, maltraiter " e sarebbe " *la tormentatrice* ".

6 valles. *sorda* s. f.

Avrei voluto leggervi " *la bestiola che assorda* " ma un **sordá* " assordare " di cui la nostra voce potrebb'essere il deverbale, il Tappolet non sa che viva in nessun punto della Svizzera francese.

7 arum. *gudžufoarticǎ* Pușc. Et. W., p. 171.

8 mgl. *žegavitsǎ* Pușc. l. c.

---

(1) L'ill. prof. Thomas non crede vi si debba leggere il *michier* " ridurre in briciole ", di cui un esempio incerto è in Godefroy ma che vive in parecchi dialetti moderni a lato di *minchier*, *michier*. L' Hécart annota: " peut-être aurait-il fallu dire *niche-oreille*, parce qu'on prétend que cet insecte se niche dans l'oreille " (?) e il Vermesse: " qqfois *nichorelle,* cet insecte se nichant dans l'oreille ".

II.

BRICCICHE ROMANZE

a. it. adonare.

Fu ricondotto recentemente dal Tobler, in Sitz.'s Ber. dell'Accademia di Berlino, vl. XXXIX, p. 747, a un lat. *addominare: il quale non poteva dare alla nostra lingua che **addonnáre* (si confrontino *addáre* e *donna*). La base è ad-donare e la voce un francesismo, o un provenzalismo, come mostra il *-d-* invece di *-dd-*. Esiti foneticamente normali ci offrono i dialetti del mezzogiorno: abruzz. *addunárse*, agnon. *adduneáie*, napol. *addonarese*, calabr. *se addunare*, sicil. *addunarisi*, i quali tutti dicono " avvedersi, accorgersi, addarsi ".

lat. axio.

Axio -onis Plin. nat. 10, 68 " otus bubone minor est,..... quidam latine axionem (actionem codd.) vocant " — 29, 117 " felle recentis axionis (asionis Barb.), noctuarum id est genus ". Così in Thes. linguae lat. II, p. 1635.

Che i Latini dicessero axio, e non actio e nemmeno asio, provano il sor. *áše* e il nap. *ascio* (1), nomi dello Strix otus; v. sor. *buše* bŭxeu (2), *ruše* *rŭsseu, di contro a *pęzzę* 'pezzo', *puzzę* 'pozzo', *kaće* 'cacio', *ųaće* 'bacio'; nap. *avuscio*, *abbascio* ad *bassju Parodi in A. Gl. XIII, 299, di contro a *piezzo, puzzo, caso, vaso* (3).

Nell'it. letterario, e toscano in genere, da *axiŏlu ci aspetteremmo *asciolo*, invece che *assiolo*; e un fiorent. *usciolo* Scops Giu non manca difatti al Giglioli " Avif. ital. ", p. 228.

---

(1) Anche, e più spesso, *ascetiello* (-itĕllu).

(2) Manca al lessico del Körting, ma è dell'abruzz., nap., calabrese.

(3) Anche nell'*ašu* del sublac. *talášu* (St. Rom. V, p. 296) sarà da leggere il lat. axio; ma il *tal-* che sarà mai?

Per la via di **ašutu*, potrebbe rivenir qui anche il calabr. *šutu* (v. *arúšu*, *abbašu*), ma il suffisso non è chiaro; noto, per quel che può valere, che nel napoletano, allato ad *ascio*, *ascetiello*, s'ode *ascio cornuto*.

vegl. ćaklo.

Voglio essere generoso e additare io stesso al Bartoli una delle " concordanze fra l'Italia e la penisola sorella „ ch'ei va cercando con tanto amore: a Veglia *ćaklo* " fignolo „ Dalm. II, 176, e negli Abruzzi *cècule*, a Sora *ćẹ́kᵘ̥ẹrẹ̥*, a Subiaco *ćẹ́kuji* s. pl. " foruncolo, fignolo „ (1). Moviam da cæculu, come mostra la tonica (v. vegl. *ćant* cĕntum, abr. *cènde*, sor. *ćẹ́ntẹ̥*, Subiaco *ćẹntu*): cæculu si sarà detto primamente quella specie di fignolo che vien sull'occhio e fa quasi ciechi.

Il friulano ha *uarbítt* " fignolo „. L'idea è la stessa, ma la base è mutata: non più cæcus ma orbus (friul. *uárb*). Quanto al suffisso, si veda Salvioni in A. Gl. XVI, p. 226 (2).

bar. ghizzẹ̥, ecc.; valtourn. kröblo, ecc. gheppio.

Come l'ital. *ghẹ́ppio* un *aegy̆́pius ⟨ gr. αἰγυπιός M. Lübke I, 31, così il bar. *ghízzẹ̥* del Giglioli " Avif. „ 260 e il sic. *izzu* **jizzu* del Traina (3) ci continuano bellamente il lat. aegy̆́ptius ⟨ gr. αἰγύπτιος: l'*í* della voce barese è metafonetico. Nè pur manca, tra i nomi del gheppio, un esito, prezioso davvero, del lat. aegy̆́ptiăcus, il molfett. *ízzeche* che ho dal Vocabolario della Scardigno.

A Valtournanche il gheppio è " il vaglio „: *kröblo*. Par di vederlo, librato nello spazio, gli occhi fissi sulla preda, agitar

(1) A Velletri, in forma doppiamente diminutiva, *ćẹkoliño*; e così a Cori: *ćekoino*, v. St. Rom. V, p. 69. Il Crocioni qui, e altrove (" Dl. di Arcevia „, p. 77), accomuna gli esiti di *cĕculu con quelli dell'ipotetico *cīculu (march. *cígolo*, sor. *ćikᵘ̥ẹrẹ̥* " lardello „, ecc.).

(2) Il Salvioni, ibid., vede in *uarbítt* " un **uardítt* in cui si è immesso *uarb* orbo „ e la stessa vicenda nel vic. *orbígolo*. Ma l'acuta dichiarazione forse più non occorre, ora che Veglia e l'Italia centrale ci dànno cæculu.

(3) È dato come voce di Modica; v. Schneegans § 15, 3.

con moto alterno, rapidissimo, le forti penne. La bella creazione ritorna altrove: il Giglioli o. c., pp. 259-260 ricorda un piem. *crivèla* (a Novi e a Tortona *chérvêla*) e un sicil. *crivéḍḍu* ' crivello '.

it. innanzi.

Non sto a ricordare i molti e diversi tentativi fatti fin qui per ispiegare l'-*i* e lo *z* della voce italiana. Certo cotesto -*i* deve essere antico, se intacca l'*a* tonico nè più nè meno che l'-ī di latino classico: a Teramo, per esempio, ' para innanzi ', il grembiule, suona *parnínze* come *pinne* ' panni ' (1). Il fr. *puis* fu ricondotto dal Mohl in "Introd. à la Chron. du L. v. „, p. 9, a pŏsteīs *postịīs e par l'etimo migliore (v. anche D. Gén. II, 1834): l'it. *innanzi*, io mi chiedo, non può essere da *in-anteīs *-antịīs? (2).

sor. íuẹrẹ s. m. pennecchio.

È una cosa sola con l'aret. *légolo*, lucch. *légoro* che il Salvioni, in A. Gl. XVI, 451, mandò con lĭgula; l'*í* è metafonetico e v'è la solita aferesi di *l* creduto l'articolo. La voce è assai diffusa nell'Italia centrale e mi spiace di non essermene accorto prima, chè nel mio saggiuolo sui continuatori di ille poteva figurar degnamente: Castelfrentano (abr.) *lévule* " piccola quantità di lino non filato e attortigliato a spira „, Pesco Costanzo *lihuore* " spago „, Tocco, Castiglione Casauria *lèvïe* " pennecchio „ (3), Subiaco *jíuju* e *ụíuju* " stoppa „ (4). Il -L-[u] ci appare ancor qui intatto, rotacizzato, jotizzato, secondo i luoghi, conforme a quanto fu detto: con Castigl. Casauria (v. *chèrïe* ' cavoli ') va dunque anche Tocco, di dove mi mancavano esempi. L'*j*- e

(1) [A Castro de' Volsci *annẹ́nze*, secondo mi scrive il Prof. Vignoli].

(2) In Z. Gröb.'s XXXI, 103 ponevo un ántịī da ánte(h)īc.

(3) Dal Finamore (Voc. 205); il quale avverte che le forme *leolo, leulo, levole, legolo* son frequenti negli ant. protocolli notarili dell'Abruzzo.

(4) Pur nel faent. *légul, ligul* " pennecchio „ Morri. Strano il *ko*- del *corivolo* " pennecchio „ ch'è in " Racc. di voci romane e marchiane „ p. 57; anche a Velletri *korìvola* " stoppa „, a Baúco *kolivre* " canapa „ (Crocioni in St. R. V, p. 70).

l'*u*- dell'esito sublacense son prostetici, o per meglio dire epentetici; v. Lindsstr. in St. Rom. V, 259.

Per quel ch'è della origine prima della voce, io non vorrei leggervi addirittura il lat. lĭgula che dice " cucchiajo ", e va con lingo, o pur " linguetta ", e par dovuto a confusione con lingula, ma un *lĭgulu che stia a lĭgo come, p. es., cĭngulum a cĭngo: è la piccola quantità di lino o canapa che si attorciglia a spira, che si mette, cioè si gira, attorno alla rocca; è lo spago, ecc., ecc.

it. mer. **langélla** mezzina.

" *Langella* = **lagella* (da lagen'la lagenula dim. di lagena), come *lampazzo* lapathium, *mengràneja* = *emicrania*, ecc. ecc. ".

Così il Flechia in " Nn. llcc. napolet. da gentilizî italici ", p. 37; e gli tennero dietro il D'Ovidio in A. Gl. IV, 156, lo Scerbo in " Dl. cal. " 99, il De Bartholomæis in A. Gl. XV, 346. Ma è etimologia che urta contro gravi difficoltà di natura fonetica. Anzitutto, il *n* che è di tutti gli esiti, senza eccezione: sor. *renģęlla*, abruzz. *langèlle* (1), agnon. *langella*, camp. *rungięllę* s. m., nap. *langella*, calabr. *lancedda* Scerbo, *lançella* Accattatis. S'ha a ritener l'epentesi già latina volgare? E allora, come si spiegheranno la voce sorana, la abruzzese, la napoletana, ecc., ecc.? A Sora spongia, plangere, tingere, ungere, mungere suonano *spǫña*, *kjańę*, *tęñę*, (*pan*)*ǫñę*, *mǫñę*; negli Abruzzi *spógne*, *pragne*, *tégne*, *rógne*, *mógne*; a Napoli *spogna*, *chiagnere*, *tegnere*, *ognere*, ecc. Dato un *langella, qui non si poteva aver che **lañęlla* o, col L- dissimilato, **rañęlla*.

La base da postulare è, secondo me, il lancella che ricorre nel Codex Cavensis (2); un derivato in -ĕlla di quel lanx che tra i Latini disse " piatto, bacino, vaso da cibi largo e cavo " e nel composto bilanx si continua fra tutti i Romanzi. La sorda che segua a N s'attenua, da Roma in giù, in un suono che non è più la sorda e non è nemmeno la sonora e che, or con la sorda, or con la sonora, vien reso nella scrittura (3).

(1) In documenti di Atessa del 1676 " tre *langelle* "; Fin.

(2) 'Una *lancella* di mele' Anno 1052.

(3) L'Accattatis lo scrive ç: v. *cançiellu*, ecc.

Invece di *lanǵella*, a Castiglione Casauria abbiam *langióle*, con altro suffisso (v. *relangióle* piccola bilancia); ad Ari, con aferesi del L-, *'ngióle* **angiole*.

lat. mormyr.

È un'altra voce da aggiungere al lessico latino romanzo. Al mormyr s. f. “ sorta di pesce screziato „ di Ovidio “ Halieut. „ 110 e Plinio “ H. nat. „ XXXII, 54, o per dir meglio a un normalissimo *mōrmŭra (v. gr. μόρμυρος), rivengono così il livorn. *mórmora* come il genov. *mármua*, Pagellus mormyrus degli ittiologi; v., per quest'ultimo, Parodi in A. Gl. XVI, §§ 32, 159.

Il nap. *mármoro* si risente di ‘ marmo ’: è un bel pesce grigio-argenteo lucente, striato di bruno.

vegl. vet s. m.

È nel manoscritto del Cubich che si conserva alla Ambrosiana: “ la biada *el vét* „ (v. Bartoli “ Dalmatisch „ II, cll. 136 e 234).

Il Bartoli (I, cl. 243) così ne scrive: “ *vet* aus kr.-slow. *oves* (Hafer.): *-t* werschrieben? „. Ma non v' è proprio bisogno, mi sembra, di incomodar lo slavo e, men che mai, di dubitare del povero Cubich. *Vet* va col rum. *vipt* s. m. che ha lo stesso significato “ Nahrung, Getreide (Pusc. “ Etym. W. „ 1905); è l'esito normale del lat. vīctus (cfr. *frete* ‘ fritte ’ frittole; Dalm. § 299, 2), è un nuovo anello tra veglioto e rumeno e, quel ch'è più, un nuovo e bell'esempio di quell'esito veglioto di lat. -ct- che il Bartoli, come ho notato altrove (Riv. di Filologia XXXV, 478), ha trascurato del tutto.

Il falso sultano Jachia.

Nota del Socio GIOVANNI SFORZA.

Il sig.r di Lansac, vecchio gentiluomo francese, nel settembre del 1615 diceva in Parigi al conte Carlo Moretta, ambasciatore del Duca Carlo Emanuele I di Savoia presso la Corte di Francia, che " ne pouvant trouver nul vray repos qu'en l'excerçant en " des choses tres autes et glorieuses „, aveva finalmente, " avec " un grandissime contentement „, rinvenuto il mezzo di rendere " quelque bon service „ a quel Principe; del quale si professava " tres affectioné et zelant serviteur „, per averlo conosciuto nel suo ultimo viaggio nella Spagna; aggiungendo, che se questo " bon service „ fosse per incontrare il gradimento del Duca, sarebbe morto " le plus heureux homme du monde „. Si trattava di metterlo in relazione col Sultano Jachia: un misterioso personaggio, che asseriva esser figlio di Maometto III, e avergli il fratello Ahmed usurpato il trono, che intendeva rivendicare, con l'aiuto soprattutto della popolazione cristiana della Turchia, essendosi anch'egli convertito al cristianesimo. Il sig.r di Lansac per ben due volte fece abboccare l'ambasciatore col pretendente. " La presence et sa taille est bonne „ (scriveva il Moretta a Carlo Emanuele); " il parle italien; monstre d'avoir " du courage et de la resolution telle que l'occasion et le service " requierent; il parle de V. A. avec un tresgrand respect et " loue grandement voz vertus et vostre courage, et dist que " apres Dieu toute son esperance est en V. A.; la quelle saura " tresbien iuger la vraie essence de cest affaire; et moy ne " manquerai de prier instantment Dieu tout puissant de assister " par sa grace un si haut dessein a sa gloire et a l'accroisse- " ment de vostre estat et de vostre nom „. Finiva con dirgli che il sig.r di Lansac gli avrebbe spedito " le capitaine Jean

" Vayvoda, albanois (1), avec les memoires et discours sur le
" suiet de ce prince „.

In un dispaccio successivo il Moretta continuava a riferire al proprio Duca: " Quel Sultano questa mattina ha mandato
" a chiamarmi, et essendo stato da lui, m'ha rimesso il qui
" congiunto piego per V. A. con la lettera ch'egli stesso le
" scrive et le memorie particolari che le manda, sigillata ogni
" cosa in mia presenza col suo sigillo in caratteri turcheschi.
" M'ha detto che un fiorentino, chiamato Nicolò Miniati, che sta
" col Duca di Mantova, l'ha pregato che passi a Fiorenza,
" perchè quel Duca lo farà andare in Spagna, ma ch'egli non
" vuol havere a far con li Spagnuoli a modo alcuno. Et che
" Mons.r Nuncio, havendo aviso che 'l capitan Giovanni Vaivoda
" era di partenza per la volta di Fiorenza per questo negotio,
" l'ha fatto pregar di passare a Mantova et a non toccare
" dello Stato di V. A. M'ha fatto poi grandissima instanza della
" pronta risposta „ (2).

Delle " memorie particolari „ non resta traccia nel R. Archivio di Stato di Torino; vi è bensì la lettera, e qui la trascrivo:

Ser.mo mio Sig.re

Doppo l'arrivo mio in Italia ho sempre havuto particulare desiderio di fare reverenza a V. A. Ser.ma et come a Principe generoso farle noto di presenza la qualità mia, narrandole le giuste pretensioni ch'io tengo nell'Imperio Turchesco, accompagnate da tutte quelle facilitationi che può somministrare negl'animi de' Popoli una naturale et legittima successione di sangue. Ma questo mio desiderio non ha insino ad hora conseguito effetto, parte per esser io stato astretto di complire a delle negotiationi cominciate avanti venissi in Italia con altri Potentati, et parte per diversi affari di guerra, ch'hanno ritenuta V. A. occupatissima; et al presente, porgendosi commodità ad una parte et all'altra di potere negotiare, non ho volsuto ritardare più di sodisfare all'animo et debito mio, et con l'occasione del passaggio ch'ho fatto per Francia m'è stata dal sig.re de Lanssac (quale professa antica servitù con la sua Ser.ma Casa) offerta introdutione d'abboccarmi con l'Ambasciatore di V. A., et come a suo Ministro ho fatto, in persona sua, reverenza a V. A. confi-

(1) Era stato lungamente in Torino al servizio di Carlo Emanuele, che nel 1608 gli affidò una missione in Oriente.

(2) R. Archivio di Stato in Torino. Lettere di Ministri. Francia. Dispacci del Moretta al Duca Carlo Emanuele I dell'8 e 9 settembre 1615.

dandole alcuni miei negotij di nuovo accordati da me in Levante acciò gliene possa dare conto, sicome fo al presente io medesimo, inviandole congiunta a questa lettera una scrittura dalla quale potrà comprendere compendiosamente il presente stato de' miei affari et la pronta dispositione ch'io tenga. Et per maggiore chiarezza di V. A. et per mia particulare sodisfatione sarà l'apportatore della presente il sig.re Capitano Giovanni Renesi Vaivoda, mio gentil'homo et fedelissimo servitore, al quale si compiacerà V. A. dare intera credenza sopra tutto quello ch'egli le esporrà in mio nome, oltre a quello che per se stesso le narrerà in qualsivoglia particulare de' miei negotij; et haverò per approvatissimo tutto il negotiato che da detto sig.re Capitano si potesse concludere con V. A. et egli a bocca le paleserà pienamente molte cose, alla fedele relatione del quale mi rimetto. Nè essendo questa per altro, facendo humile reverenza a V. A. le bacio con tutto l'animo le mani.

Da Parigi, alli 8 di septembre 1615.

di vostra altessa serenissimà
afezionatissimo servitore

Sultan Jachia gran principe Ottomano (1).

Il Moretta, che l'aveva inviata al Duca con tutta prestezza, per mezzo del Bergera, corriere di gabinetto, del quale aspettava " con molto desiderio „ il ritorno, con " que' recapiti si " sarà risoluta l'A. S. voler mandare per quest'effetto „: non vedendolo venire, scriveva di bel nuovo a Carlo Emanuele: " Monsieur de Lansac atend en grande devotion la response " de V. A. pour le fait du Seig.r Sultan, le quel hier me fist " voir des lettres du Duc de Mantoue, par les quelles il lui faict " beaucoup d'offres, et a comande à son Agent icci de lui faire " bailler mille pistoles de l'argent de la pension que le Roy " lui donne. Il ne veult rien prendre iusques à tant que V. A. " lui donne quelque resolution, et alla verite il à une tresgrande " affection et asseurance a V. A. „ (2).

Carlo Emanuele, gran conoscitore d'uomini, fiutò in lui un avventuriero e non volle averci rapporti.

(1) Soltanto la sottoscrizione è di mano di Jachia; nome arabo, che significa Giovanni, come ebbe a dirmi il dotto collega prof. Italo Pizzi.

(2) Dispaccio del 23 settembre 1615.

***

Intorno a questo misterioso personaggio, Ranuccio Galluzzi è tra gli storici italiani quello che dà maggiori notizie. “ Nasceva “ Jachia „ (son sue parole) “ da Mehemet Gran Signore dei Turchi “ e dalla Sultana Elparè, la quale, nata in Cipro della casa “ Paleologo, e di schiava divenuta Sultana, avea dato alla luce “ questo figlio, che però era secondogenito. Lo stile inveterato “ di quella Corte, in cui ogni Sultano al suo avvenimento al “ trono facea scannare o acciecare i fratelli, avea risvegliato “ l'ingegnosa pietà della madre, per sottrarlo alla morte. Essa, “ maomettana per necessità e cristiana per inclinazione, avea “ fatto educare e istruire questo figlio cristianamente, e sparsa “ la voce della di lui morte, lo aveva occultato alla notizia e “ alla vista di tutta la Corte. Di ciò erano consapevoli alcuni “ ministri di alto rango e i monaci greci che lo avevano in “ custodia. Questa pietà divenne poi funesta alla madre allorchè “ Mehemet avendo ucciso con le sue proprie mani il primogenito “ Mustafà, si apriva per Jachia il diritto e la strada alla suc- “ cessione del trono; ma ciò non potea conseguirsi senza una “ sollevazione, e il prepararla esponea la madre e il figlio a “ troppe vicende. Il terzogenito Achmet salì tranquillamente “ sul trono, e di Jachia non restò altro che il timore e l'in- “ certezza della sua esistenza. La Sultana stimolò i suoi confi- “ denti a tentare gli effetti di una congiura, ma fu l'istesso che “ esporli alla morte, e dovè essa fuggirsi da Costantinopoli per “ nascondersi nei monasteri di Grecia; Jachia fu in necessità “ di andare sconosciuto e ramingo di provincia in provincia per “ implorare la sussistenza e per occultarsi alla persecuzione di “ Achmet. Scorse lungo tempo per la Polonia e per l'Ungheria, “ finchè giunto alla Corte di Ridolfo II giustificò la sua nascita “ e chiese dei soccorsi, per far valere i suoi diritti contro il “ fratello. L'Imperatore avea già fatto tregua col Turco, e le “ discordie che vegliavano tra esso e l'Arciduca Mattias lo “ impedivano d'impegnarsi in una nuova guerra. Queste circo- “ stanze, siccome gli tolsero i mezzi per potere operare dalla “ parte di terra, così lo fecero risolvere di voltarsi dalla parte “ di mare, e incoraggire con la sua presenza i ribelli di Sorìa;

" gli erano note le corrispondenze che quelli avevano tenute " con Ferdinando „ [I Granduca di Toscana]; " sapeva le imprese eseguite contro i Turchi con tanta gloria, ed era certo " della sicurezza e riputazione dei legni toscani nel Mediterraneo. La morte di quel Granduca „ [avvenuta il 7 di febbraio del 1609] " interruppe per qualche tempo il suo pensiero di portarsi in Toscana; ma assicurato che il successore „ [Cosimo II] " continuava nelle medesime inclinazioni del padre, giunse a " Firenze sotto nome ed equipaggio del Palti, uno dei Principi " dell'Ungheria. Essendo la Corte assente dalla capitale, l'Auditor Cavallo, che lo accolse a nome della medesima, avendolo " interrogato a forma di processo, lo impegnò, con sì strana " accoglienza, a retrocedere verso Ancona; ma i buoni uffici " di Cosimo II, esercitati da più obbligante ministro, lo fecero " scordare dell'oltraggio e ritornare a Firenze. Credè il Granduca " che questo Principe non dovesse abbandonarsi totalmente alle " sue sventure e che meritasse assistenza, e perciò, avendo domandato d'imbarcarsi sui galeoni toscani per passare in Asia, " gli promesse tutta l'assistenza e il soccorso della sua marina. " Potè il Sultano abboccarsi con l'ambasciatore del Sofy, il quale " anco dal Granduca fu prevenuto di questo successo. Prima " però d'impegnarsi a qualche intrapresa, volle Cosimo certificarsi della nascita e dei diritti d'Jachia, e spedì a tal effetto " un sacerdote greco in Morea, affinchè ritrovata la madre e " le altre persone indicate dal Sultano medesimo, verificasse " la serie delle di lui disavventure. Riescì al greco in gran " parte di riscontrare la verità, e il Granduca sempre più si " animò a favorire la causa di questo Sultano. Imbarcato pertanto sui galeoni toscani e munito di danari e di equipaggio, " gli fu dal Granduca destinato un gentiluomo, che, consapevole " delle sue vicende, lo dirigesse con il consiglio e lo presentasse in suo nome all'emir Faccardino in Soria e al Sofy di " Persia, qualora si determinasse a passare in quella provincia. " Giunto alle coste d'Asia e sparsasi fra quei turchi la fama " del di lui arrivo, molti dei principali fra essi si portarono " sui galeoni per onorarlo e presentarli dei donativi. Ma trovando gli affari della Soria in poca vantaggiosa situazione, " per essere sconfitti i ribelli e le forze dell'Emir non esser " tali da poter far fronte a quelle del Turco, e conoscendo che

" per passare in Persia era forza l'arrischiare la propria vita
" in mezzo a nazioni feroci e di dubbia fede, si determinò di
" ritornare a Livorno e passare in Persia per terra, traversando
" la Polonia e gli Stati della Moscovia. Non pareva a Cosimo II
" della sua dignità che il Sultano non avesse potuto fare con
" questo mezzo qualche progresso, e perciò rivolse altrove le
" sue vedute. Gli abitatori del Braccio di Maina, popoli guer-
" rieri e avvezzi all'indipendenza, vivendo in continuo contrasto
" contro i Turchi, che gli insidiavano la libertà, aveano più
" volte implorato da Ferdinando dei soccorsi da sostenersi e
" un capo col quale potessero essi e gli altri cristiani della
" Morea danneggiare i Turchi, loro nemici: lusingavano la vanità
" del Granduca col rammentarli un apparente diritto su quella
" provincia, per avere nei secoli antecedenti una branca medicea
" signoreggiato Corinto ed Atene. L'inclinazione di questi popoli
" a sollevarsi e l'ardente loro desiderio di agire contro il Turco
" fecero credere a Cosimo II, che il Sultano. portandosi fra loro
" con un valido soccorso di forze, avrebbe potuto facilmente
" fortificarsi e stabilirsi in quella provincia, in guisa tale da
" resistere alle forze di Achmet e contrastarli l'impero. Spedì
" pertanto a Braccio di Maina un suo gentiluomo, per indurre
" quei popoli a ricevere Jachia per loro condottiero e signore.
" Fu tosto acclamato con allegrezza straordinaria e gli fu portato
" l'atto di sommissione, sottoscritto dai principali della nazione.
" Il portarsi al Braccio di Maina senza un grande apparato di
" forze era totalmente inutile, e il solo Granduca non poteva
" somministrare tutte quelle che erano perciò necessarie. Ebbe
" ricorso al Pontefice, il quale promesse di concorrere a pro-
" porzione con gli altri Principi; Jachia credè di stimolargli
" con la sua presenza, e partitosi di Toscana si portò in Francia
" presso il Duca di Nivers e lo accese di gran desiderio di pro-
" seguire l'impresa; ma e Nivers e il Granduca non erano a
" ciò sufficienti, e il Sultano, perdendosi inutilmente in vani
" desiderii, passò finalmente a vivere e guerreggiare fra i Co-
" sacchi, senza poter mai più effettuare le sue speranze, nè
" ricever soccorso dai Principi dell'Europa „ (1).

---

(1) Galluzzi R., *Istoria del Granducato di Toscana sotto il governo della Casa Medici*, In Firenze MDCCLXXXI. Nella stamperia di Ranieri Del-Vivo, tom. III, pp. 200-202.

Che Maometto III uccidesse " con le sue proprie mani il " suo primogenito Mustafà „, come vuole il Galluzzi, è falso del tutto. Maometto III, salito sul trono il 16 gennaio del 1595 e morto il 22 decembre del 1603, ebbe per successore Ahmed I, che era il suo primogenito. Mancato, alla sua volta, ai vivi Ahmed il 22 novembre del 1617, ereditò la corona imperiale appunto il fratello secondogenito Mustafà; che però la perdette il 26 gennaio del 1618, e il trono fu occupato dal nepote Osman II, figlio di Ahmed. Anche nel resto del racconto gli errori sono infiniti. Un contemporaneo dell'avventuriero Jachia, Alessandro Lamberti, ambasciatore a Firenze della Repubblica di Lucca, il 29 agosto del 1609, scriveva agli Anziani: " Io non ho voluto mai referire alle Eccellenze Vostre che il turco soprascritto sia fratello del Gran Signore, come qua si diceva, perchè per varie ragioni è stato sempre difficile persuaderlo a me „. Raccoglie però le voci che allora correvano: " che questi „, cioè, " essendo terzo genito del Gran Turco, morto ultimamente, fu dalla madre sua, donna molto astuta et sagace, scampato dalla crudeltà barbara del secondo suo fratello; il quale, doppo la morte del padre, col tôr la vita e l'imperio al primogenito, cui legittimamente si apparteneva, machinava la morte ancora a questo, che si fuggì in cristianità, et dal Granduca Ferdinando fu ricevuto et intertenuto assai secretamente per molto tempo et con grand'onore in questa fortezza vecchia. Dicono condursi adesso in questa armata per farlo capo dei Turchi, che in grandissimo numero sollevatisi contro l'Imperatore loro in molte parti del suo imperio, si crede che col valore et autorità di questo personaggio si deva augumentare i progressi di tanta ribellione „.

Jachia da Firenze si recò a Livorno; e " andò con lui monsieur de Beauregard, generale de' galeoni, et il signor Guidubaldo Brancadoro da Fermo, dichiarato generale di questa armata in terra; tutti per imbarcarsi et incaminarsi quanto prima alla destinata impresa „. Di lì a poco peraltro si condusse a Roma, come si rileva da un altro dispaccio del Lamberti alla Signoria di Lucca, scritto il 2 di settembre. " Tornò da Roma il personaggio turco „ (son sue parole) " et con esso il signor Brancadoro; et già alla sfilata arrivano soldati dalla Marca et di Romagna, incaminandosi alla volta

" di Pisa „. Il 19 scrive di nuovo: " La speditione dell'armata " credo che si affretti, vedendo che qua si usa diligenza con " questi soldati, sparsi per Fiorenza, acciocchè marcino alla " volta di Livorno. Si sono fabbricate qua 500 casacche alla " turchesca, per fare lo sbarco sotto quest'abito, più occulto e " più sicuro, et per servirsene di strattagemma in questa at- " tione „. Il 26 annunzia: " Finalmente questo turco, con tutti " i capitani e altre genti di S. A. si partirono di qua, per an- " darsi ad imbarcare a Livorno, di dove intendo che partiranno " i galeoni per tutto lunedì prossimo „.

Frattanto càpitano a Firenze due pretesi pascià, i quali affermavano aver dovuto, " per salvar la vita „, andar per " lungo tempo „ pellegrinando " incogniti in varie parti del " mondo „. Dovette esser quella una venuta fatta ad arte, giacchè per opera loro, come asserisce il Lamberti, " venne tolto ogni " dubbio che potesse aversi nella persona „ di Jachia " et ve- " rificatolo veramente fratello del Gran Signore „ (1). In un dispaccio del Lamberti stesso del 22 maggio 1610 si legge: " L'armata di que' galeoni che l'anno passato uscì fuori col " preteso fratello del Gran Signore et con preparationi et spe- " ranze di gran successo nelle parti di Levante, senza haver " però fatto fin ad hora cose considerabili, è stata revocata da " S. A. et, come s'intende, sarà a Livorno in breve „. De' galeoni parecchi si perdettero, " onde, com'è ordinario de' suc- " cessi infelici „, nacque altercazione tra' ministri del Granduca, " ognuno accusando il compagno d'haver persuasa questa im- " presa, e scusandone sè stesso „. Fu posto in chiaro, concluse l'ambasciatore, che " quel fratello del Turco riesce debolissimo " istrumento et di fede non sincera „ (2).

***

L'8 giugno del 1629 Jachia è a Pustkow nella Galizia, e ad istanza del Wallenstein, Duca di Friedland, fa un discorso

---

(1) R. Archivio di Stato in Lucca. Ambascerie. Dispacci Lamberti alla Signoria Lucchese del 29 agosto, 2, 19 e 26 settembre, 3 e 17 ottobre 1609.

(2) Dispacci del Lamberti alla Signoria di Lucca, del 22 maggio e 14 agosto 1610.

" sopra l'impresa contro i Turchi „, svelando i suoi intendimenti, i suoi propositi, il suo piano (1). Mette conto trascriverlo, non essendo mai stato dato alle stampe.

Il mover guerra al Turco in Ungheria, nel solito tempo della state, harà molte et grandissime difficoltà. Perchè l'essercito imperiale vorrà attaccare Strigonio e Buda et l'altre piazze d'Ungheria, o vero si vorrà spingere inanzi verso Belgrado, lasciando indietro le piazze, oppure farà l'uno et l'altro nell'istesso tempo, bloccando le piazze et passando inanzi col grosso dell'essercito.

Attaccando le piazze solamente, si consumerà il tempo et la soldatesca, perchè i Turchi vagliono assai nella difesa, et di più potranno venire al soccorso con forze così numerose, et particolarmente di cavalleria, che impediranno i viveri, e faranno grandissimi danni all'essercito christiano, di maniera, o che non s'occuperanno le piazze, o almeno per farlo ci vorrà longhissimo tempo.

Lasciando le piazze indietro, et incaminandosi inanzi, per dare una battaglia, ne seguirà un altro impedimento, che subito che i Turchi conosceranno il disegno, fortificheranno i passi, cioè Demircarpi et Smenderovo, l'uno et l'altro passo molto stretto, perchè il Demircarpi, che è di là da Belgrado, et in lingua turchesca è chiamato Porta di ferro, è posto sopra il Danubio, et dell'una et dell'altra parte sono asprissime montagne. Et Smenderovo è anch'esso un luogo molto stretto sopra il Danubio, nel quale sono quivi molti porochi, cioè scogli, che impediscono il passo delle barche, di maniera che bisogna condurle per terra a forza di buffali per lo spatio di dui tiri d'arco. Talchè quando l'essercito imperiale scacciasse il nemico fin a Belgrado, non potrebbe poi passare i detti luoghi, mentre fossero fortificati, come senza dubbio seguirebbe.

Volendo poi fare l'uno et l'altro nell'istesso tempo, cioè bloccar le piazze et spingersi inanzi nel paese col grosso dell'essercito, per dar battaglia, dubito che dividendosi le forze christiane, non saranno bastanti a resistere alla potenza del Turco, et quando anco i Christiani dessero una rotta o due al Turco prima d'arrivare a Demircarpi e Smenderovo, non potrebbono poi penetrare quei passi, i quali indubitatamente sarebbeno fortificati, et se pure li succedesse il passare, troverebbeno di nuovo un numeroso essercito turchesco, perchè oltre alli 84 mila Timarrioti d'Europa, che mai non si spergono (già che morendo in

(1) È intitolato: ***Discorso del Serenissimo Sultano Jachia ottomanno sopra l'impresa contro i Turchi fatto a Pustkow agli 8 di giugno 1629 ad instanza del Duca di Friedland.*** Se ne trova una copia nel R. Archivio di Stato in Lucca tra le scritture dell'Offizio delle Differenze dell'anno 1634.

battaglia i primi padroni, subbito succedeno nel Timarro i loro servidori, o altre persone) verrebbe d'Asia numero grandissimo di cavalli et de fanti. Onde l'essercito imperiale, che nelle battaglie et ne' patimenti s'anderebbe pur sempre diminuendo, senza potere sperare, se non con gran fatica, nuovi soccorsi, non potrebbe finalmente resistere al gran numero de' Turchi, alli quali non dà fastidio il perdere cento et dugento mila persone, che sempre hanno il modo d'haverne delle nuove: oltre che mentre l'essercito Christiano si trovasse nel cuore dell'Imperio Turchesco, potrebbeno facilmente essergli impediti i viveri dalla numerosa cavalleria nemica, che scorrerebbe per ogni parte; nè potrei io soccorrer con gli miei soldati, perchè dovendo mettergli insieme de' christiani, che sono sparsi per l'Albania, Grecia, Servia, Bulgaria, Tracia, Macedonia, Thessalia et Bosnia, et dovendo distribuirli le arme, non potrei farlo, mentre l'essercito Turchesco fosse in campagna.

Ma volendo noi cominciare la guerra nell'autunno, possiamo sperare felicissimi progressi, con gran facilità. Perchè nel giorno di S. Demetrio, che viene alli 26 d'ottobre, è costume inviolabile de' Turchi il ritirarsi a' quartieri, nè ritornano in campagna prima che per S. Giorgio, che è nel fine d'aprile. Io adunque, sul fine d'ottobre, vorrei havere le armi pronte sopra vascelli, in alcuni luoghi determinati (che si diranno in voce), et di quivi distribuirle a' già detti christiani, cioè a quelli del piano, più che a quelli delle montagne, che già tutti hanno con me intelligenza, et mi aspettano con desiderio. Con questi occuperò subito alcuni passi delle montagne, con impedire che i Turchi, li quali sono da una parte, non possino unirsi con quelli che sono dall'altra, et impadronendomi delle città che si trovano fino a Andrinopoli, che sono tutte aperte, potrò tagliare a pezzi i Turchi che vi habitano, perchè solamente nelle città si trovano la metà Turchi et la metà Christiani, et havendo tempo sette mesi, senza temere che l'essercito nemico mi s'opponga, potrò fortificare le città prese, et in particolare i due passi detti di sopra, cioè Demircarpi e Smenderovo, et in quel mentre essercitarei i miei soldati nel maneggiare il moschetto, et farei ancora gran quantità di cavalleria, non mi mancando il modo di trovare bonissimi cavalli ne' luoghi stessi dove darò le armi alli soldati. Et forse mi potrebbe anco riuscire qualche impresa contra l'istessa città di Constantinopoli. Ma quando questo non potesse succedere inanzi a S. Giorgio, saremo all'hora securi che le forze Turchesche in Europa ci potranno fare pochissimo danno, perché nell'inverno saranno quasi tutte estirpate. Ma verrà di Asia un grosso essercito, con il quale bisognerà combattere nelle campagne di Andrinopoli, et io potrò probabilmente sperare la vittoria, perchè i miei soldati non cederanno forse al numero, et supereranno certamente nel valore. Oltre che, potrebbe all'hora unirsi meco

l'essercito Cesareo, il quale per il luogo, che dirò in voce, potrebbe passare senza impedimento alcuno, havendogli io di già aperte le porte, et facendolo sempre marciare per paese amico con ogni abondanza de viveri, et senza che vedesse mai il nemico, finchè non fosse congionto col mio essercito. All'hora tutte le fortezze d'Ungheria si renderebbono per necessità, essendogli mancato ogni soccorso.

Per fare quanto ho detto di sopra mi sono necessarie l'infrascricte provisioni:

Sessanta mila moschetti, con tutti i loro fornimenti.

Vinti mila para di pistole.

Dieci mila corazze.

Vinti cannoni da batteria, con tutti i fornimenti, che non manchi altro che cavalli per tirarle.

Bombardieri per li detti cannoni.

Munitione di polvere et altro, per una sola volta.

Vascelli per portare le dette armi, che dovranno essere almeno quaranta, che, non potendo haversi altrimenti, si troveranno a nolo per cinquecento scudi il mese per vascello. Et che questi vascelli siano pagati per li primi quattro mesi, che poi gli manterrò da me stesso per li bisogni della guerra.

Quattro o cinque mila soldati, per mettere sopra i detti vascelli: et se è possibile, che siano Crovati, o Bohemi, acciò possino parlare con li miei soldati.

Viveri per l'armata per tre mesi, et che ogni soldato habbia la sua sella et briglia, che io li provederò di cavalli.

Et tutte queste cose bisogna che si trovino dove io dirò nel fine del mese d'ottobre.

Non ebbe aiuto che di parole, e seguitò a tirare innanzi la sua vita raminga; alternativa continua di speranze, inganni e disinganni.

***

Morto Carlo Emanuele I il 26 luglio del 1630, di lì a poco Jachia va a Torino, e gli riesce di entrare nelle grazie di Vittorio Amedeo I. Mette sù corte e piglia al proprio servizio come consigliere intimo Gaspare Scioppio, il celebre grammatico (1); scelta infelice, giacchè vanitosissimo, violento di carat-

(1) Il suo vero cognome è Schopp. Nacque a Neumarck nel Palatinato il 27 maggio del 1576. In premio di aver abiurato il protestantismo e d'essersi fatto cattolico, papa Clemente VIII gli dette le insegne di cavaliere di S. Pietro e lo fece conte di Chiaravalle. Morì a Padova il 19 novembre del 1645.

tere, pronto di lingua, sempre in guerra con tutti, lo Scioppio a ogni cosa era buono, fuor che a fare il diplomatico. Son del 1° novembre del 1632 le lettere patenti, con le quali Jachia, da Torino, lo accredita suo ambasciatore presso le Corti d' Europa. " Eum quippe „ (scrive) " ad diversos christianitatis principes et " respublicas legamus, ut auxilia iam olim Nobis promissa con- " ficiat; quibus adiuti paternum atque avitum orientis imperium, " unde propter Christi nomen et catholicae atque ortodoxae " fidei professionem exules atque extorres sumus, tandem ali- " quando recuperemus et mahometanam impietatem ex omni " Europa profligatam penitus porro excindamus „. S'intitola: " Dei gratia Sultanus Jachia, augustissimi et invictissimi Sul- " tanis Mahometis tertii, Constantinopolitani imperatoris, natu " maximus, et legitimus orientalis imperii heres „.

Lo Scioppio, recatosi a Genova, presentò questo curioso memoriale alla Repubblica, in nome del pretendente:

La riuscibilità et facilità dell'impresa del Ser.mo Sultano Jachia contro li Turchi consiste in tre cose:

I. Nella persona del Sultano, la quale è di maggior importanza che un miglion di soldatesca; 1° per la ragion di sangue, essendo egli primogenito di Mahometto III imperatore; 2° per la pratica grandissima di tutti i paesi Turcheschi et di passi stretti, che vi sono; 3° per la pratica delle cose di guerra, sendo stato in Fiandra alla scuola de' Principi d'Orange et havendo per molti anni felicemente combattuto con Turchi per mare et terra; 4° per la notitia di quatordeci lingue, sì che può trattare con varii popoli et tenerli uniti, benchè per altro tra di loro siano poco amici, come li Greci et Bulgari, Serviani et Albanesi; 5° per l'adherenza et seguito de' suoi popoli, de' quali 150 mila l'hanno accettato et giurato per Imperatore et loro Padrone naturale l'anno 1617 agli 16 d'agosto, et nell'Imperio Turchesco vi sono 13 miglioni et 22 mila di fuochi de' Christiani, li quali hora sono tributarii et inimici del gran Signore, ma al Sultano saranno amici et lo stanno aspettando, come li hebrei il Messia; 6° per l'amicitia molto stretta de' Moscoviti et Cosacchi, che sono del rito Grego, et per questo l'Imperatore de' Moscoviti l'anno 1625 fece fratellanza seco, et mandò monitione et denari alli Cosacchi, essortandogli a servire fedelmente al Sultano, come suo caro fratello, il quale con un esercito di 90 mila combattenti assaltò Trebisonda et la prese per forza, la saccheggiò et bruciò, sì come anco Cherasonda, Caffa et Sinope, et ruppe l'armata

Turchesca, et guadagnò trecento pezzi d'artiglieria; 7° per li oracoli favorevoli al Sultano, quale fu quello d'un spagnuolo santo, stato incluso per 45 anni nell'heremo di Camaldoli, che per revelatione seppe la venuta del Sultano, et pregò il suo Abate che lo facesse venir da sè, et lo riverì et quasi l'adorò come gran campione della Christianità, eletto da Dio per far grandissimo servitio a S.ta Chiesa, et li diede mille benedittioni. Tal oracolo è ancora quella profetia, che va attorno in Turchia, che dice così:

" Il nostro Imperadore verrà da un regno infedele doppo longa peregrinatione in habito vile, mentre che regnerà un Principe non di perfetta età, et questo nostro Imperadore pelegrino, col pomo rosso nella mano, comincierà a perseguitar et destrugger la legge di Mahumad; et seguiterà li Turchi fino a quel luogo, dove hanno havuto principio d'ingrandirsi, et pianterà vigne, et fabricherà palatii et giardini ".

Un altro oracolo è quello che la primavera passata, per ordine della Beatissima Vergine Maria, fu dato a questo Gran Turco, che non havrebbe pace dalla Madonna, se prima non cedeva l'Imperio a chi di ragione toccava; il qual oracolo causò grandissimo spavento tra i Turchi, sì come un Craus riferì a Vienna, et lo confermò in Genova un Padre della Mercede, venuto da Constantinopoli.

II. Nel tempo dell'impresa, che sarà l'autunno, quando il Turco non si può servire delle forze sue, cioè di quelli 84 mila Timarristi o Comendatori, i quali sono obligati a servirlo in guerra a spesa loro, chi con due, chi con tre o quattro cavalli, perchè al fine d'ottobre sogliono andare ad invernare nelli loro Timarri o Comende, et stanno sparsi qua et là in luoghi aperti, sì che dagli popoli del Sultano potranno esser colti all'improviso et tagliati a pezzi; et le medesime comende saranno date a' Christiani per servir al Sultano in guerra a spesa loro.

III. Nel luogo che piglierà il Sultano per farvi la prima piazza d'arme, donde in un medesimo tempo potrà repartir le armi et monitioni a' suoi popoli di Macedonia, Morea, Epiro, Albania, Bosnia, Servia, Bulgaria et Thracia, potendo ancora con la presa di detto luogo affamar la città di Constantinopoli; all'assedio della quale anderanno subito gli Cosacchi, che sono tanto vicini, che in tre giorni ponno andarvi. Et questa piazza, ben fortificata alla moderna, sarà data in pegno a quelli che aiuteranno il Sultano, et sarà guardata dalla lor soldatesca, finchè siano messi loro in possesso di quelli regni o stati che dal Sultano saranno lor promessi.

Le utilità che la città di Genova potrà ricevere in publico et privato concorrendo all'aiuto del Sultano:

I. La Republica potrà far acquisto di Caffa, di Scio o del

regno d'Albania, o del Ducato di S. Saba, detto Herzegovina, dove sono bonissimi porti et gran comodità di fabricar molte navi et galee.

II. La Repubblica sarà sempre spalleggiata dalla potenza del Sultano, la quale sarà molto più grande, che di tutti i suoi maggiori di Casa Ottomanna, poichè si potrà servire et fidare de' suoi popoli Christiani, et dell'aiuto de' Moscoviti et Cosacchi, li quali furono sempre nemici di Casa Ottomanna.

III. Gli pàrticolari potranno acquistar grandissime entrate con titolo di Duca, Principe, o Marchese.

IV. Tutto il traffico di Levante tornerà a Genova, sendo che il Sultano porta particolare affettione a questa Republica (1).

Il Senato di Genova fece allo Scioppio accoglienza oltre ogni dire cortese; ma per quanto egli assicurasse che il Sultano, suo signore, aveva trattato dell'impresa coi Duchi di Savoia (2) e di Baviera e col Tilly " di gloriosa memoria ", non che con altri Principi, e che da tutti era stata lodata " et stimata

(1) È tratto dal R. Archivio di Stato in Lucca, Offizio sopra le Differenze, scritture dell'anno 1634.

(2) Sta lì a farne fede questa sua lettera patente:

" Victorius Amedeus, Dei gratia, Dux Sabaudiae, Chablasii, Aostae, " Genebensium et Montisferrati, Princeps Pedemontium, Marchio Salu- " tiarum, Comes Genebae, Romuntis, Nicae, Astae, ac Thendae, Baro de " Vaus et Fauciniae, Dominus Vercellarum, nec non Marchionatus Cevae, " Uneliae et Macri, Marchio Italiae, Sacri Romani Imperii Princeps et Vi- " carius perpetuus, Cypriorum Rex, etc. Omnibus, qui hoc nostrum diploma " legerint, notum facimus, quod Serenissimus Princeps Sultanus Jachias co- " gitationes suas de modis profligandae Mahometanae impietatis et recupe- " randi Orientalis imperii, haereditario iure, ut satis constat, ei debiti, no- " biscum comunicavit; quas sicut aliis Principibus magnopere probatas esse " comperimus, similiter Nos non possumus quin plurimum commendemus " secundum eis exitum nobis omnibus apprecantes. Et quoniam idem Sul- " tanus consilium cepit illustris Gasparis Scioppii Comitis a Clara Valle alio- " rumque spectatae fidei, pietatis ac prudentiae virorum ad diversos Chri- " stianitatis Principes ac Respublicas ablegandi, ut ab iis armorum, alia- " rumque rerum tantae expeditioni necessarium apparatum sibi conficiat: " Nos consilium hoc in primis ad rem conducibile arbitrati, classi eius " nostrae Nicae portum, tum etiam haud poenitendam pecuniae vim ad " parandum instrumentum nauticum ei de nostro promisimus. Quod nostrum " exemplum si alii Principes atque etiam privati homines opibus affluentes " imitentur, et quantum quisque poterit auxilii ad certam diem representent, " optimam spem merito concepimus futurum, ut cum Deus cuius gloria et " salus tot regnorun, ac nationum agitur expeditionem tam sanctam et

" riuscibile „ e che tutti gli avevano promesso " grandi aiuti „, non si piegò a dargli un soldo; tutto si ridusse a parole di eccitamento e di plauso (1). Ne seguì l'esempio la Repubblica

" gloriosam secundet, tum omnes qui in eius adiuvandae partem venerint, " occasionem omnibus votis aptandam obtigisse sibi gaudeant opes suas " cum centupli lucro occupandi. Hac de re eidem Scioppio mentem ac vo- " luntatem nostram coram distinctius explicavimus: Quem quoniam fides, " doctrina ac prudentia eius omnibus Christianis Regibus ac Principibus " satis commendant, pluribus verbis commendare supervacuum arbitramur. " Fidei causa nomen nostrum subscripsimus ac signavimus. Taurini, prid. " kal. novembris anni MDCXXXIII.

" VICT. AMEDEUS „ (L. S.)

" V. A. Piscinae „ " Carron „.

(1) Ecco il testo della lettera patente della Signoria di Genova:

" Nos Gubernatores et Procuratores Reipublicae Genuensis. Cum " illustris vir Gaspar Scioppius, Clarae Vallis comes, suo praesentis sum- " morumque Principum expresso literis testimonio fidem nobis fecerit, Serenis- " simum Sultanum Jachiam, Othomanici sanguinis Principem. non tam iuris " sui vindicandi desiderio impulsum, quam orthodoxae fidei propagandae " pio stymulo concitatum ad delendam impiam Turcarum tirannidem iustum " bellum meditari, ac propterea Christianorum Principum auxilia contra " comunem hostem implorare: Cumque idem firmis validisque rationibus " probaverit eiusmodi inceptum longe minores multorum opinione difficul- " tates habiturum; Nos tam piam generosi Principis mentem, quam ma- " ximis possumus laudum praeconiis commendantes, divinamque deprecantes " clementiam, ut quemadmodum spiritus adeo religiosos Othomanicis pec- " catoribus infundere dignata est, ita etiam universi Christi orbis tanto- " pere optabilibus votis velit annuere; dolemus vehementer, gravissimis tot " annorum bellicis impensis praeclaram nobis, maiorumque nostrorum in- " stitutis consonam eripi occasionem in tantae gloriae societatem eo, quo " vellemus virium robore concurrendi, sicut incensae voluntatis promptitu- " dine concurrimus nunquam permissuri, ut officium nostrum, quantum in " nobis erit, quispiam desideret. Quem quidem ardorem quamquam eidem " illustri Comiti ita coram expressimus, ut cognoverit Rempublicam nostram " nulli Principum concedere, qui talis victoriae eventum Catholicae fidei " propagationem ardentius concupiscat, his tamen etiam literis exprimendum " censuimus futurum sperantes, ut caeteri Principes ipsum Comitem be- " nigne excipiant, et quo plus opibus possent, eo vehementius ad tam " gloriosum Deoque acceptum conatum, pro iuribus iuvandum animos in- " tendant.

" In quorum fidem praesentes nostras, sigillo munitas, et per secretarium " nostrum subscriptas, fieri mandavimus.

" Data Genuae in Palatio nostro Ducali, die xii ianuarii 1634.

(L. S.) " Jo. Antonius Sambucetus secr. „.

di Lucca (1); e nel preparargli la risposta, tirò le cose talmente per le lunghe, che lo Scioppio, perduta la pazienza, " ignaro de' " modi che si tratta co' principi e le repubbliche ", partì all'im-

---

(1) La patente rilasciata dalla Repubblica di Lucca è del seguente tenore:

" Antiani et
" Vexillifer Justitiae } Reipublicae Lucensis

" Altae fundamenta virtutis, quae in Tartarei abyssi centrum iactata " librato pondere in extremae lapsum perfidiae conspirant, extructum habent " Gloriae aedificium, quod sua mole ad Coelum aspirat, e vestigio in " spheram elatum aeternitatis. Grande itaque negocium augusta concipiens " mente Serenissimus Sultanus Jachias Othomanus Princeps, dum Orientem " iam occidentem prospicit, vastam materiem aggerat auspicandi. Causam nam " agit Omnipotentis qui non tam acie Angelorum, quam nutu formidandum " imperia hostesque prosternit; nihil non tentandum ipso duce et auspice " qui facile decrevit, ut extirpata peste Christiano ex orbe, regnata diu, " barbarum actritum orbis a maligniori qua per tot saecula occupatur peste, " si certo semel, modo loculente purget. Locum in Catholicae fidei propa- " gatione sortiri, de Christo benemereri, professoribus digna haec, satis per " se vehementer animos excitantia; tam religiosum, tam praeclarum opus " aggressuro Principi adhaerere, suppetias ferre, omnium est; ac sane illustris " Gasparis Scioppii comitis a Clara Valle ab intimis consiliis praefati Prin- " cipis facundissimum, quod numquam obsolescet eloquium, efficaciores " nostris pectoribus ingereret stimulos, si non res ipsa ardentissimos inii- " ceret; praeter quam quod acerrime se obiectat ad extrinseca propensae " voluntatis officia, superiorum calamitatum, transacta, nec non postuma " conditio, quae incessantem Reipublicae sumptum destinavit, et agendis " quotidie rebus determinat; cui vel iniungitur iampridem assumpta repa- " randae, ac propugnandae urbis occasio, quae adhuc necessitas impulsu " coalescit; unde acerbissime sustinemus nequaquam Nobis, licet nemini " cessuris, permitti ut ullo, ad praesens, opum aut virium concursu, quod " enixe contendimus meritum, in tantae expeditionis apparatu nanciscamur; " unicum id superest, ut amplissimis laudibus, haud alio, quam immorta- " litatis caractere exprimendis, inclyti huius Principis probatos sensus, me " morandos actus, exemplumque singulare perpetuo celebremus; Divinam " exorantes Maiestatem ut quemadmodum universae omnium salutis vin- " dicem se primo unus idemque mortalis constituit, sanctissima vota se- " cundet; faxitque ut generosus hic eius miles per infligendas plagas ad plagas " accedat inaccessas, et impium thronum, quo pie tendit, securus triumphator " ascendat, ut insigni suimet ipsius ob Christi nomen gloriosus victor prae- " sentium meritorum diademate coronatus legitime regnet.

" Ad quorum publicam fidem, hasce, Divi Martini signo munitas et " primi ex nostris cancellariis manu firmatas, per quam studiose decre- " vimus. Data die 8 februarii 1634 ".

provviso per Firenze, senza pigliare commiato e sputando fuoco e faville (1). Di là menava vanto che Ferdinando II de' Medici mostravasi " prontissimo di concorrere all'impresa colla valuta di " 500.000 scudi „ ; la qual cosa era affatto contraria al vero, come lo stesso Granduca ebbe a dichiarare all'ambasciatore lucchese Cesare Burlamacchi. Infatti, dopo avergli detto " che " lo Scioppio era un gran litterato, ma del trattare dello stile " delle Corti ne sapeva ben poco „ ; soggiunse " che a lui ha- " veva raccontato tutta la storia sacra, et sull'esempio di quello " che Dio operava in que' tempi voleva reggere questa impresa; " e che i pochi dovessero vincere i molti, che per sua opinione " saria un tentare la Provvidenza divina, la quale ordina tutte " le cose con i suoi mezzi proporzionati; che questo era stato " più capriccio dello Scioppio, tirato da una sua frenesia, che " dello stesso Sultano; il quale Sultano era stato amico grande " di casa sua, per esservi stato altre volte, e che l'haveva ri- " visto in Norimbergo et che tra poco l'aspettava in Fiorenza, " et che conoscendolo havrei conosciuto havere trattamenti da " principe et in conseguenza nato principe „.

Lo Scioppio andò a Parma, per ottenere l'aiuto e il favore del Duca Odoardo Farnese; ma, nel partire, dichiarò che " se non " li riesce questo negotio, vuole ridursi in Germania a scrivere " e finire i suoi lavori „. In quanto a' negoziati fatti alla Corte de' Medici, il Burlamacchi riteneva che lo Scioppio, in fondo, fosse " restato convinto delle ragioni dimostrategli dal Gran- " duca „; essere " una impresa riconosciuta per impossibile a riu- " scirne l'essecutione „.

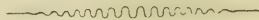
È questa l'ultima traccia che si abbia in Italia del preteso Sultano Jachia, i cui negoziati e tentativi valeva, sembrami, la pena di raccontare un po' pel minuto; chè egli fu bensì il più astuto e il più ambizioso, ma non fu nè il primo nè l'ultimo avventuriero che sulla fine del XVI e durante il XVII secolo esercitasse fruttuosamente in Europa la professione di sedicente personaggio turco, di schiatta più o meno illustre, che, passato al cristianesimo, si offriva all'impresa di ricacciare gli Ottomani

(1) Bongi S., *Sopra una missione di Gaspare Scioppio a Lucca come ambasciatore del Sultano Jachia, memoria*; nel *Giornale storico degli Archivi Toscani*; vol. IV, pp. 211-237.

in Asia. L'Europa intera viveva sotto il terrore della potenza ottomana, allora al culmine della sua gloria militare. Si crede facilmente ciò che si spera; e questo spiega come gli avventurieri sul tipo di Jachia trovassero alle Corti cristiane così facile ascolto. Tanto più che costoro, alle volte, finivano forse col credere quasi alla commedia che recitavano e col pigliar sul serio la loro parte. Gli scritti del " Sultano „ Jachia ne dànno qualche volta l'impressione. Solo gli ambasciatori veneti, che, come sempre, vedevano giusto, mettevano in guardia il loro Governo contro gli avventurieri, per i quali l'atteggiarsi a esuli dalla Turchia e a perseguitati dal Gran Signore rappresentava allora un mestiere o una speculazione. Alcuni greci, — così l'ambasciatore veneto Pietro Contarini — vivevano " solo di " simile traffico, col passarsene a Napoli, a Firenze, in Spagna " ed a Roma „. Proponevano " acquisti grandissimi e facilis- " simi ; e per meglio colorire le loro invenzioni, le accompa- " gnavano con iscritture sigillate e sottoscritte da molti degli " stessi greci ed albanesi, che dicono esser capi principali di " quelle provincie, nelle quali promettono di sollevare tutti i " popoli all'apparire di qual si voglia armata cristiana, quando " siano loro condotte le armi, col rappresentare la debolezza " de' Turchi, il modo facile di fare grandi acquisti, la qualità " dei porti e la quantità delle fortezze, con altri partico- " lari „ (1).

(1) *Relazione di Savoia di* Pietro Contarini, *ambasciatore a Carlo Emanuele I dall'anno 1606 al 1608*; in *Relazioni degli Stati Europei, lette al Senato dagli ambasciatori veneziani nel secolo XVII*, serie III, vol. I, p. 100.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo delle LL. MM. e RR. Principi.

CLASSI UNITE

Adunanza dell'8 Marzo 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Direttore della Classe, Spezia, Camerano, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Paròna, Mattirolo, Morera, Grassi, Somigliana e Fusari.

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Boselli, Vice-Presidente dell'Accademia, Manno, Direttore della Classe, Carle, Carutti, Renier, Pizzi, Chironi, Stampini, Sforza e De Sanctis, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci residenti Rossi, Allievo, Ruffini, D'Ercole e Brondi e il Socio nazionale non residente Kerbaker.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente a Classi unite, 1° marzo 1908.

Il Presidente dà la parola al Socio Guareschi, il quale legge la commemorazione del Socio straniero Marcellino Berthelot. Questa Commemorazione sarà inserita nelle *Memorie* accademiche.

Si procede quindi alla votazione per il conferimento dei premî Bressa, Gautieri e Vallauri.

Il premio Bressa di L. 9600 destinato all'opera od alla scoperta scientifica più importante del quadriennio 1903-1906 è

assegnato al professore Ernesto Rutherford dell'Università di Manchester per i suoi lavori sulla radioattività.

Il premio Gautieri di L. 2500 per l'opera migliore di storia politica o civile in senso lato, pubblicata in Italia nel triennio 1904-1906, è conferito al prof. Adolfo Venturi per la sua *Storia dell'arte italiana*.

Il premio Vallauri di L. 30.000 destinato alla migliore opera critica sulla letteratura latina pubblicata nel quadriennio 1903-906 viene diviso in parti uguali tra Paolo Monceaux professore nel " Collège de France ", per la sua *Histoire littéraire de l'Afrique chrétienne* e Martino Schanz, professore nell'Università di Würzburg, per la sua *Geschichte der römischen Litteratur*.

Si addiviene poscia, in conformità dell'art. 1° del Regolamento interno per il conferimento del premio Bressa, alla nomina della 1ª Giunta per l'assegnazione del XVI premio pel quadriennio 1905-1908, al quale sono ammessi solo scienziati ed inventori italiani, e riescono eletti i Soci Naccari, Camerano, Guareschi e Morera della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali; Renier, De Sanctis, Chironi e Ruffini della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.

Gli Accademici Segretari
Lorenzo Camerano.
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Marzo 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Direttore della Classe, Spezia, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi, Somigliana, Fusari e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precepente.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° Dott. Zanotti Bianco, *I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. Appunti per la storia della Geodesia*, Nota settima, dal Socio Jadanza;

2° Prof. Beppo Levi, *Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie*, Nota IV, dal Socio Segre.

LETTURE

I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. Appunti per la storia della Geodesia.

Nota Settima.

La variazione della latitudine coll'altezza e la Figur der Erde *di E. Bruns*

dell'Ing. OTTAVIO ZANOTTI BIANCO.

I.

In tutti i procedimenti adottati per la determinazione degli elementi dell'ellissoide terrestre, ai quali abbiamo accennato nelle note precedenti, ed in quello di Pratt, che esporremo, se ci sarà concesso di proseguire questi studi, s'introducono essenzialmente lunghezze di archi e latitudini. Sì gli uni che le altre vengono considerati come appartenenti ad una medesima ellisse meridiana, che colla sua rivoluzione attorno al suo asse minore genera l'ellissoide, e da essi vengono dedotti col metodo dei minimi quadrati i semi assi di quella ellisse. Gli elementi che servono a quei computi, lunghezze ed angoli non sono misurati lungo quella ellisse, su quella ellissoide, ma sulla superficie fisica terrestre. Da questa devono venir ridotti a quella, alla quale nel computo degli elementi vengono ascritti. Ma per effettuare tale riduzione bisognerebbe conoscere la superficie, che invece è quella che si tratta di determinare: in questa condizione di cose, quella riduzione si fa per approssimazione: vale a dire alla detta superficie se ne sostituisce un'altra, che si ha fondata ragione di credere possa allo scopo voluto sostituirla. Incominciamo dal vedere come ciò avvenga per le latitudini.

La latitudine *geografica* od *astronomica* è l'angolo che la verticale del luogo forma col piano dell'equatore. Ora la verticale in un dato luogo, ed in un dato istante, è rappresentata fisicamente, da un breve tratto del filo a piombo, perfettamente

fermo, o dalla direzione di un grave cadente nel vuoto perfetto e per tempo brevissimo: oppure, come negli strumenti d'astronomia e geodesia, è indirettamente fornita dal livello a bolla d'aria o dagli orizzonti artificiali, che ci esibiscono la superficie di un liquido stagnante, alla quale la verticale è normale. Dicemmo in un dato istante, poichè è noto che la verticale varia continuamente, sebbene di quantità minime, e su ciò ritorneremo a suo tempo.

Ammettendo che la figura matematica della Terra possa essere quella ellissoide della quale si cercano i semi assi, e se il punto del quale si determina coll'osservazione la latitudine, fosse situato su quella ellissoide, in un dato istante la verticale del luogo coinciderebbe colla normale ad essa superficie. Ma poichè il luogo d'osservazione sta sulla superficie fisica terrestre e non su quella ellissoide che si cerca, e che si sostituisce al geoide, è doveroso il chiedere se la verticale del luogo coincida colla normale all'ellissoide condotta per esso punto. O, il che torna lo stesso, chiederci se la superficie delle acque stagnanti nel luogo d'osservazione ed in quel momento sia parallela all'ellissoide supposta rappresentare la figura matematica della terra, ossia coincidente col geoide, o superficie di livello della gravità teorica assunta come livello del mare? Giova dichiarare che ciò non è.

In quanto segue supporremo che sui punti della massa terrestre non agiscano che due forze, le attrazioni mutue delle sue particelle e la forza centrifuga proveniente dal moto di rotazione della Terra attorno al proprio asse. Ipotesi lontana dalla realtà, ma legittimata, con grandissima approssimazione, dalla piccolezza delle forze trascurate in confronto di quelle menzionate (*).

Siano x, y, z le coordinate ortogonali di un punto del globo terrestre (atmosfera compresa) di massa eguale all'unità, riferite a tre assi ortogonali passanti per il centro di gravità della massa terrestre e sia $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, la distanza di esso punto da detto centro, ed ω la velocità angolare della Terra. Dicendo V

(*) A questo riguardo vedasi la nostra nota intitolata *Per la storia della teoria delle superficie geoidiche*, "Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino", vol. XXXI, 1896.

il potenziale dell'attrazione su quel punto e W quello totale dell'attrazione e della forza centrifuga sarà:

$$W = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2);$$

W è il potenziale della *gravità teorica*, poichè nella sua espressione non figurano che le due forze menzionate; ma coll'avvertenza sopra posta, si può asserire che con grandissima approssimazione esso coincide con quello della *gravità fisica* o *reale* che dovrebbe tener conto di tutte le forze, che si possono supporre attive: W è quindi detto generalmente il *potenziale della gravità* senza alcun qualificativo. L'equazione $W =$ Costante, determina una data superficie di livello.

Le principali proprietà della funzione W sono le seguenti:

W e le sue derivate prime $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ per ogni punto della massa rotante (atmosfera compresa) sono finite, univoche, continue.

Le derivate seconde di W soddisfano all'equazione a derivate parziali di Laplace-Poisson

$$\Delta^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -4\pi k + 2\omega^2$$

dove k è la densità nel punto della massa terrestre che si considera, e la costante di Gauss è $= 1$.

Le tre derivate prime di W dànno le componenti della gravità g, parallele ai tre assi

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

In generale la derivata $\frac{\partial W}{\partial q}$, presa nella direzione dq, ci dà la componente della gravità secondo quella direzione.

In ogni punto di una superficie di livello, la normale ad essa dà la direzione della gravità la cui grandezza è data da $g = -\frac{\partial W}{\partial n}$, ove dn è l'elemento della normale diretta all'infuori.

Le superficie $W =$ Cost sono continue, libere da cuspidi e spigoli.

Fra le superficie di livello della gravità a noi occorre essenzialmente considerare quelle accessibili alla osservazione, e che chiameremo *vicine alla Terra*. Per queste si hanno le proprietà seguenti. Esse abbracciano completamente la Terra nella vicinanza della superficie fisica: la loro forma è quella di una superficie sferica alquanto deformata a mezzo di flessioni continue; esse sono quindi superficie di natura sferica, chiuse e semplicemente connesse: le superficie di potenziale decrescente si racchiudono l'una l'altra come gusci: la distanza di due di esse infinitamente vicine, misurata lungo la normale, non è costante, ma, camminando sopra una di esse, varia in ragione inversa della gravità, come risulta dall'espressione $g = -\frac{\partial W}{\partial n}$, e pertanto, $dW = -gdn$.

Questo prodotto gdn è quindi costante per le due medesime superficie di livello, fra loro infinitamente vicine. In generale le superficie di livello non sono parallele, poichè in generale g non è costante sovr'esso una superficie di livello.

Due superficie di livello non si tagliano nè si toccano.

Immaginando tutte le superficie ottenute col far variare di quantità infinitesime la costante dell'equazione $W =$ Cost, esse ci faranno conoscere la grandezza e la direzione della gravità in ogni punto dello spazio circostante immediatamente alla Terra. La direzione della gravità varia in modo continuo da un punto all'altro di detto spazio.

Non ci occupiamo per ora delle superficie di livello correnti nell'interno della massa terrestre.

Una curva che tagli normalmente tutte le superficie del sistema di superficie di livello ottenuto come si disse poc'anzi, dà colle sue tangenti in ogni punto la direzione della gravità e vien detta *linea di forza*. Al sistema di superficie di livello della gravità vicine alla Terra corrisponde un sistema di linee di forza che sono le *traiettorie ortogonali* di esso: queste sono le linee, di debolissima curvatura, descritte dai gravi, abbandonati a sè, partenti dal riposo e cadenti nel vuoto. Le verticali sono le tangenti a queste curve, le quali convergono tutte verso il centro della Terra, volgendo la loro concavità verso i poli: ai poli ed all'equatore i gravi cadenti nel vuoto, partendo dal riposo, descrivono rette.

W è funzione di x, y, z, cioè $W = f(x, y, z)$. Le equazioni differenziali delle linee di forza sono:

$$\frac{dx}{\frac{\partial W}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial W}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial W}{\partial z}}.$$

Se il sistema delle superficie di livello è dato sotto la forma $F(x, y, z, c) = 0$, ossia se l'equazione che lo rappresenta non è risolta rispetto alla costante c, si ha da eliminare, prima dell'integrazione, c dalle equazioni:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{e} \quad F(x, y, z, c) = 0.$$

Helmert a p. 5 del volume I della *Höhere Geodäsie*, descrive, è la parola, molto evidentemente, la conseguenza del fatto dell'essere le linee di forza della gravità, curve.

" Se si tien dietro alla direzione del filo a piombo di un punto, percorrendolo, si vedrà che non appena si abbandona quel punto, essa cessa di essere la direzione del filo a piombo. Che anzi la direzione del filo a piombo varia da luogo a luogo, ed un punto mobile che segua la direzione del filo a piombo corrispondente a ciascuna delle sue successive posizioni descrive una linea debolmente curva: la *linea verticale* (linea di forza). Quindi in ogni punto la direzione del filo a piombo è la tangente alla *linea verticale* ".

II.

Le linee di forza o verticali, essendo curve, ossia le superficie di livello non essendo parallele, la latitudine varia coll'altezza sul livello del mare. Vediamo l'istoria dei procedimenti adottati per tener conto di tale variazione, ossia per ridurre al livello del mare, una latitudine osservata in un dato punto della superficie fisica terrestre.

Sembra che Gauss sia stato il primo ad insegnare, nel 1853, in qual modo la curvatura delle verticali si faccia risentire nella variazione della latitudine coll'altezza. Ciò risulta dal brano seguente che traduciamo da uno scritto di Baeyer, intitolato *Ueber*

den Einfluss localer Lothablenkungen auf das Nivellement, " Astronomische Nachrichten „, N° 1993, vol. 84.

" La prima classe (di deviazioni) consiste nell'accrescimento della latitudine, col crescere dell'altezza, sul mare, cagionato dall'aumento della forza centrifuga e dalla diminuzione della gravità (*). Questa deviazione nell'emisfero settentrionale è sempre *nordica*. Designamola con ϵ; allora dalla nostra parte dell'equatore ϵ è sempre positivo. Gauss in una lettera a me diretta il 22 giugno 1853 (vedi: *Protokolle der Verhandl. der perm. Commission der europ. Gradmes*, 1869, in Firenze) ha dato la seguente espressione per la latitudine ad un' altezza H:

$$\varphi + 1070'' \frac{H}{a} \operatorname{sen} 2\varphi$$

dove φ è la latitudine alla superficie del mare ed a il raggio equatoriale. Si ha quindi:

$$\epsilon = 1070'' \frac{H}{a} \operatorname{sen} 2\varphi.$$

Gauss prosegue quindi: " Io debbo però dichiararle apertamente che io riguardo tutta la ricerca unicamente come una curiosità teorica che perde ogni importanza pratica. Essa ne avrebbe soltanto una, quando sulla superficie liscia terrestre si elevasse una sottile colonna Aa, sulla cui cima a, non meno che al suo piede A, si potesse determinare la latitudine. Nella realtà, quando a sta sopra un monte elevato, non si può innanzi tutto giungere al punto A, ma quando ciò fosse possibile e si potesse determinare esattamente la differenza di direzione delle verticali, non si avrebbe pur tuttavia alcun diritto di considerare la formola precedente, come rappresentante questa differenza, giacchè l'attrazione della materia del globo terrestre sovrastante al livello di A, produrrebbe nei risultati finali per la gravità in A ed a dei divarii molto maggiori e per nulla assoggettabili al calcolo. Sopra questo argomento in generale io mi sono già così pronunziato nel mio scritto del 1828 sulla differenza di latitu-

(*) Traducemmo alla lettera *Schwerkraft* (gravità), ma dovrebbe leggersi **attrazione**.

dine fra Göttingen ed Altona, p. 73, che oggi io non so intorno a ciò dire altro di meglio.

" Oggidì si è bensì tentato di determinare il volume dei monti approssimativamente a mezzo di livellazioni secondo strati orizzontali; soltanto l'ipotesi sulla densità dei varii strati è ancora soggetta a molte obbiezioni, così che oggi ancora l'opinione del nostro grande geometra non si può recisamente contraddire. Tuttavia qui noi manterremo il valore di e come deviazione a grandi altezze, per quelli che volessero servirsene „.

Il prof. Pietro Pizzetti nel suo articolo *Höhere Geodäsie* nel volume VII dell' " Enciclopedia delle Scienze Matematiche „ edita a Lipsia da Teubner (1907), dice che Gauss calcolò quella correzione della latitudine partendo dal teorema di Clairaut:

$$g = g_{45} \left(1 - \frac{\beta}{2} \cos 2\varphi\right) ;$$

ma non dà al riguardo indicazioni bibliografiche oltre quelle già qui riferite: per contro il prof. Haupt afferma che Gauss non ha dato dimostrazione della sua formola, come pare risulti anche dal brano di lettera pubblicato da Baeyer e che riferimmo più avanti. Lo scritto di Haupt ha per titolo: *Ueber die Ablenkung des Lothes in der Höhe und den dadurch herbeigeführten Fehler geometrischer Nivellements*, " Astron. Nach. „, 1874, vol. 84, p. 50. Questa memoria è registrata nella *Bibliographie géodésique* dovuta a Boersch, ma manca nella *Bibliography of Geodesy* compilata dall'americano Gore: opera quest'ultima utilissima, ma sfortunatamente incompleta e molto scorretta. A questo proposito ci si consenta una digressione, che speriamo non sarà inutile, in queste modestissime contribuzioni alla storia dell'alta geodesia.

III.

La storia anche recentissima della geodesia europea sembra assai poco nota in America, ove d'altronde i geodeti del *Coast Survey* stanno compiendo lavori di grande portata ed utilità. A prova del nostro asserto vogliamo addurre il seguente brano scritto dal dr. Forest Ray Moulton, professore assistente d'astronomia all'Università di Chicago: " Lo sferoide che meglio soddisfa le varie osservazioni ha, secondo Harkness, uno schiac-

ciamento di 1/300. Nel 1866 il colonnello Clarke dell'English Ordnance Survey trovò uno schiacciamento di 1/295. Questo è il valore generalmente adottato, benchè egli nel 1878 abbia trovato 1/293,5 ed Harkness 1/300 nel 1891 „. E così ignorati l'ellissoide di Bessel, quello di Clarke nella *Geodesy* (1880), i lavori di Listing e di Helmert, i cui nomi non compaiono neppure: *Introduction to Astronomy*, New York 1906, p. 124, la cui prefazione porta la data 24 marzo 1906. Per contro dobbiamo dire che lo schiacciamento di 1/300 calcolato da Harkness, e menzionato dal prof. Moulton, è passato quasi completamente ignorato in Europa, ed i libri di geodesia europei non ne parlano affatto. Ma è d'uopo altresì aggiungere che di esso si tace in quel magnifico libro che è la *Spherical Astronomy* dell'americano Newcomb, uno dei veri e grandi maestri delle discipline astronomiche (New York, 1906). Il prof. Pizzetti nel suo citato articolo menziona il lavoro di Harkness, del quale però tace nel suo *Trattato di Geodesia*.

Soffermiamoci un momentino sul laboriosissimo calcolo di Harkness, sì per la detta ragione come per essere esso contenuto in una pubblicazione che non si trova che presso i grandi osservatorii astronomici, ed è quella edita a cura dell'Osservatorio di Washington.

Questo lavoro ha per titolo *The solar. parallax and its related constants including the figure and density of the Earth* (“Washington Observations for 1885 „, Appendice III); ad esso va unita una copiosa bibliografia di scritti consultati dall'autore.

Lo scopo dell'opera di Harkness è espresso come segue in una recensione di essa firmata O. C. (Callandreau?) nel “ Bulletin Astronomique „, tomo VIII, 1891, p. 536: “ Jusqu'ici on a déterminé la parallaxe solaire, comme si elle était une constante indépendante, et l'on a obtenu une série de valeurs discordantes toutes plus ou moins affectées par des causes constantes et dont aucune ne s'impose. Mais la parallaxe solaire n'est pas une constante indépendante, au contraire elle est liée à la parallaxe de la lune, aux constantes de précession et nutation à l'inégalité parallactique de la lune....... il faudrait donc la déterminer simultanément avec toutes ces quantités, par la méthode des moindres carrés, qui paraît susceptible plus que toute autre d'éliminer les erreurs constantes. Tel est l'objet de M. Harkness

dans son important mémoire. Un premier travail d'ensemble montre qu'il est nécessaire de faire figurer dans les équations de condition, outre les dix quantités d'abord envisagées (le parallassi medie del sole e della luna, il rapporto della massa terrestre a quella del sole, la velocità della luna, l'equazione della luce, le costanti dell'aberrazione, della precessione, della nutazione, le due ineguaglianze del moto lunare), l'aplatissement de la Terre et la masse de la Lune déduite des marées „.

Gli elementi dello sferoide di Harkness sono i seguenti (p. 133 e seg.):

$$a = 6{,}377972 \pm 124{,}8 \text{ m.}; \quad b = 6{,}356727 \pm 99{,}1 \text{ m.}$$

$$\alpha = 1 : 300{,}205 \,\}\, \pm 2{,}964 \,\{.$$

Lunghezza del quadrante terrestre $= 10{,}001816 \pm 125{,}1$ m.

$$\text{Eccentricità } \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0{,}006651018.$$

Se φ e ψ sono rispettivamente la latitudine geografica e la geocentrica, si ha:

$$\varphi - \psi = 688'',2242 \,\text{sen}\, 2\varphi - 1'',1482 \,\text{sen}\, 4\varphi + 0'',0026 \,\text{sen}\, 6\varphi.$$

Lunghezza del pendolo che batte i secondi di tempo medio

$$0{,}990910 + 0{,}005290 \,\text{sen}^2\varphi.$$

Accelerazione della gravità in un minuto secondo di tempo medio

$$= 9{,}779886 + 0{,}052210 \,\text{sen}^2\varphi;$$

questi due ultimi dati si riferiscono al livello del mare.

Circa lo schiacciamento, nella sovracitata recensione del *Bulletin* si legge quanto segue: “ Quant à la constante de l'aplatissement les expériences du pendule et la théorie de la précession et de la nutation donnent une valeur peu différente de 1/300; le résultat déduit des perturbations lunaires est incertain entre d'assez larges limites, et les arcs géodésiques donnent $\frac{1}{293.5}$. Il est certain que l'erreur probable de la constante de l'aplatissement serait beaucoup diminuée en la faisant dépendre uniquement des deux premières théories. Aujourd'hui de nouvelles déterminations de la gravité dans le voisinage de l'équa-

teur et des poles sont parmi les désiderata pour perfectionner notre connaissance de la figure de la Terre. Des expériences dans les latitudes moyennes ne seraient d'aucune utilité dans ce but. Dans la pensée de l'auteur les arcs géodésiques, tout au moins ceux qu'on possède, ne peuvent pas conduire à une bonne valeur de l'aplatissement; il serait désirable qu'un arc de méridien fût mesuré aux États-Unis ayant son centre vers le 35° de latitude. Avec nos ressources présentes, le mieux est de déterminer la valeur de l'aplatissement avec le pendule, au moyen de la précession et de la nutation, ainsi que des perturbations de la Lune. Malheureusement, ajoute M. Harkness, en donnant à sa pensée une généralité qui prêterait à des critiques, aucune valeur de l'aplatissement ne peut être déduite soit des expériences du pendule, soit de la théorie de la précession et de la nutation sans faire quelque hypothèse sur la constitution intérieure de la Terre. Malgré les difficultés qui se présentent, eu égard à la rigidité de la Terre sous l'action des forces qui engendrent la précession, la nutation et les marées, l'idée d'une couche relativement mince, reposant en équilibre hydrostatique sur un substratum plus dense, est confirmée par assez de faits pour devenir très plausible. Si on l'adopte, cela sous-entend nécessairement l'emploi de la méthode de condensation pour la réduction des déterminations pendulaires: mais il n'est pas certain que le résultat numérique d'Helmert dépende essentiellement de cette méthode, parce que Unferdinger est arrivé à peu près au même résultat au moyen d'une méthode totalement différente „.

Il risultato numerico cui nel brano soprascritto si allude è evidentemente quello contenuto nel volume secondo del grande trattato di geodesia dell'insigne geodeta tedesco.

Il lavoro di Unferdinger pure menzionato dallo scrittore del *Bulletin* consta di due parti pubblicate negli " Atti dell'Accademia delle Scienze di Vienna „ (XLIX, 1864). Le due parti hanno rispettivamente per titolo: *Ausstellung einer neuen Pendelformel und Darlegung einer Methode aus der Länge des Secunden-Pendels in verschiedenen Breiten die Fliehkraft und die Form und Grösse der Erde zu bestimmen; — Vergleichung der Pendelformel mit den Beobachtungen.* Questi due articoli furono riprodotti nell'" Archivio di Grunert „, XLIX, 1869. Bruns ne ha

fatto una recensione nel vol. I, 1868 del *Jahrbuch über die Fort. der Mathe.* Sopra questo studio di Unferdinger, l'autorevolissimo Siegmund Günther così si esprime: " Alla categoria di quei lavori, che sembrano pretendere troppo dall'istrumento d'altronde potentissimo dell'analisi, si può ascrivere quello di Unferdinger, il quale per mezzo del metodo dei minimi quadrati vuol rintracciare anche quelle anomalie della gravità pendolare, intorno alle quali, per quanto è generalmente fattibile, si può solo acquistare qualche chiara nozione a mezzo di un' indagine diretta istituita a quello scopo „ (*Handbuch des Geophysik*, vol. I, 1897, p. 213). Certo è che il metodo della condensazione, immaginato da Helmert, così geniale, elegante, efficace, non deve paragonarsi con un' applicazione, non a proposito, del metodo dei minimi quadrati.

A pagg. 211-12 della *Geodesy* di Gore, Londra, 1891, leggesi quanto segue, che vien dopo lo schiacciamento e la lunghezza del quadrante terrestri calcolati da Harkness:

" Mentre scriviamo vi è ogni ragione di credere che " lo sferoide di Harkness „, qui per la prima volta menzionato per le stampe, soppianterà ben tosto tutti gli altri. Il professore Harkness, *United States Navy*, ha ricalcolato tutte le costanti solari, formando le sue equazioni colla condizione che i risultati finali s'accordassero fra loro. Una delle costanti era lo schiacciamento terrestre, e nell'ottenerlo egli s'adoperò in guisa da far *pesare* col dovuto *peso* i migliori dati delle operazioni geodetiche, il pendolo, la precessione degli equinozii e l'azione delle maree. Lo schiacciamento ottenuto può accordarsi con tutti questi fenomeni osservati col minimo d'inconseguenze. È fonte di viva gioia e di orgoglio patriottico che l'ultima pagina di questo schizzo storico possa rendere tale omaggio ad un matematico americano „.

Sfortunatamente l'avvenire non confermò la profezia, nè realizzò le speranze di Gore, e da quanto precede risulta che in Europa, come in America dal grande Newcomb, lo sferoide di Harkness è ora messo affatto da parte. Nè forse ebbero miglior fortuna le altre costanti da lui calcolate, con un'applicazione forse troppo larga del metodo dei minimi quadrati.

IV.

Helmert, a pag. 100 del volume II della *Höhere Geodäsie* avverte che Haupt basandosi sulla teoria del potenziale ha dato una formola giusta per la variazione della latitudine coll'altezza, benchè si sia servito di un'espressione scorretta del potenziale dell'attrazione dell'ellissoide terrestre data da Hansen.

L'espressione alla quale Helmert allude, data da Haupt nella memoria sopra citata, è la seguente:

$$V = \frac{M}{r'}(1-2\alpha) + \frac{M}{r'^3}\,a^2 \,.\, \frac{2}{5}\,\alpha - \frac{M}{r'^5}\,.\,a^2 z'^2\,.\,\frac{3}{5}\,.\,\alpha + \ldots$$

nella quale M è la massa terrestre, $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, $\alpha = \frac{a-b}{a}$, lo schiacciamento a e b essendo i semiassi dell'ellissoide terrestre. Questa espressione fu data da Hansen a pag. 8 del suo lavoro intitolato: *Theorie der Pendelbewegung mit Rücksicht auf die Gestalt und Bewegung der Erde*, " Neue Schr. della Società di Scienze Naturali di Danzica ", vol. V, 1856; lavoro premiato da quella Società: vedi anche " Annalen " di Poggendorf, vol. 92.

Quella formola, come Helmert osserva, non è corretta; la si corregge facilmente.

Supponendo eguale all'unità la costante di Gauss il potenziale di un ellissoide omogeneo di semiassi a e b sopra un punto esterno di coordinate polari r' e φ' è

$$V = \frac{M}{r'}\left\{1 + \frac{1}{10}\frac{a^2e^2}{r'^2}\left(1-3\,\mathrm{sen}^2\varphi'\right) + \frac{1}{280}\frac{a^4e^4}{r'^4}(105\,\mathrm{sen}^4\varphi' - 90\,\mathrm{sen}^2\varphi' + 9) + \ldots\right\}$$

[Helmert, *Höhere Geodäsie*, II, p. 125, form. (8)]: $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 2\alpha - \alpha^2$.
Trascurando i termini in e^4 si ha:

$$V = \frac{M}{r'}\left\{1 + \frac{1}{10}\frac{a^2e^2}{r'^2}\,(1 - 3\,\mathrm{sen}^3\varphi') + \ldots\right\};$$

ma $\mathrm{sen}^2\varphi' = \frac{z'^2}{r'^2}$, quindi

$$V = \frac{M}{r'}\left\{1 + \frac{1}{10}\frac{a^2e^2}{r'^2}\left(1 - \frac{3z'^2}{r'^2}\right) + \ldots\right\} = \frac{M}{r'}\left\{1 + \frac{1}{10}\frac{a^2}{r'^2}(2\alpha - \alpha^2)\left(1 - 3\frac{z'^2}{r'^2}\right) + \ldots\right\}$$

e trascurando i termini in α^2:

$$V = \frac{M}{r'} \left\{ 1 + \frac{1}{10} \frac{a^2}{r'^2} . 2\alpha \left(1 - 3 \frac{z'^2}{r'^2} \right) + \ldots \right\} = \frac{M}{r'} + \frac{1}{5} \frac{Ma^2}{r'^3} . \alpha - \frac{3}{5} \frac{Ma^2}{r'^5} . z'^2 . \alpha + \ldots,$$

che è l'espressione corretta (*).

Dopo aver accennato alla formola di Gauss ed allo scritto di Haupt, ed alla *Figur der Erde* di Enrico Bruns, nella quale è pure dedotta la correzione di Gauss, Helmert scrive: " Per contro altri hanno ripetutamente dato inesattamente l'espressione del quoziente differenziale $\frac{dB}{dh}$, a cagione di errori incorsi nel tener conto dell'attrazione della Terra „ (*Höhere Geodäsie*, II, pag. 100). Io ignoro a quali autori Helmert voglia alludere: forse al prof. Wittstein, giacchè Haupt nel sopra menzionato suo lavoro, scusandosi di svolgere un argomento già trattato, dopo l'osservazione relativa a Gauss e poc'anzi riferita scrive: " poichè il sig. prof. Wittstein nei numeri 1768 e 1939 delle *Astronomische Nachrichten* ottiene un altro risultato finale maggiore di circa $\frac{1}{3}$ „.

Gli scritti di Teodoro Wittstein su questo argomento sono i due seguenti:

Ueber die Ablenkung der Lothlinie in grossen Hohen (" A. N. „, 1869, vol. 74, n. 1768);

Ueber die Schlussfehler grosser Nivellements (" A. N. „, 1873, vol. 81, n. 1939).

Quest'ultima memoria manca nella bibliografia geodetica americana.

Ed ora veniamo alle varie soluzioni date al problema della variazione della latitudine coll'altezza posteriori a quelle fin qui

(*) Sul potenziale di un elissoide sopra un punto esterno, vedasi per gli scopi della teoria della figura della terra: Clarke, *On the potential of an ellipsoid at an external point*, " Philosophical Magazine „, 1877; *Geodesy* (1880), p. 71. Senza dubbio la menzionata espressione data da Hansen ed usata da Haupt, per il potenziale di un elissoide, sopra un punto esterno, è sfuggita a Clarke, poichè altrimenti avrebbe menzionato la svista sfuggita al primo ed al secondo, ma avvertita, per il primo, da Helmert. La espressione trovata da Clarke, coincide con quella data nel testo, quando si trascurino i termini in e^4 ed in α^2. — Tisserand, *Traité de Mécanique Céleste*, vol. II, p. 68.

accennate. La prima che ci si presenta è quella di Enrico Bruns da lui svolta nella sua classica memoria, già parecchie volte menzionata ed intitolata *Die Figur der Erde*, Berlino, 1878, nelle pubblicazioni dell'Istituto Geodetico prussiano. Si è con profonda meraviglia che di questo capitale lavoro non si vede cenno alcuno nella *Geodesy* di Clarke (1880), nè nella *Geodesy* di Gore (1891): i citati libri di Forest Ray Moulton e di Simone Newcomb nei capitoli dedicati alla geodesia neppure ne parlano, e se non erro essa è passata sotto silenzio anche nei *Fondamenti di Geodesia* del compianto prof. Enrico Pucci, mentre è citata nel trattato di Geodesia del prof. Pietro Pizzetti: e se non mi è sfuggita, non è nominata nella quinta edizione (Stuttgart, 1907) del volume terzo dell'*Handbuch der Vermessungskunde* di Jordan. Non conosco alcun trattato di geodesia in lingua francese che tratti dell'opera di Enrico Bruns: Tisserand, nel volume secondo della sua *Mécanique Céleste*, la cita fra le opere da consultarsi.

Facciamoci ad esporre succintamente il contenuto di questa importantissima contribuzione alla teoria della figura della Terra.

L'introduzione della memoria ci palesa le intenzioni e lo scopo dell'autore.

" Le ricerche istituite fino ad oggi intorno alla figura matematica della Terra, ove non siano d'indole prettamente geometrica, sono fondate sui risultati delle misure dei gradi e su quelli delle determinazioni pendolari. A tale scopo si pose a punto di partenza l'ipotesi: 1° che la superficie degli oceani deve essere riguardata come parte di un'unica superficie analitica chiusa, soggetta ad una legge semplice di formazione; 2° che le normali a questa superficie coincidono colla direzione della gravità in tutti i punti che nelle misure si prendono in considerazione. In generale si scelse per questa superficie, la quale allora venne designata come la figura matematica della Terra, da determinarsi, un ellissoide di rotazione; giova tuttavia l'avvertire che la scelta di un'altra superficie di una legge di formazione sufficientemente semplice, cambia solamente i processi di calcolo ma non i concetti fondamentali veri di tutto il metodo. In conseguenza di ciò, il problema della geodesia scientifica si riduce alla questione di determinare i valori numerici delle costanti o parametri che compaiono nell'equazione di quella superficie in guisa che le misure esistenti siano completamente,

o quando ne esista un numero superfluo, per quanto è possibile, da vicino, soddisfatte. Il risultato ottenuto partendo da questo concetto fondamentale, manipolando il materiale d'osservazione esistente, è noto e si può enunciare come segue: 1° l'ellissoide di rotazione è una prima prossima approssimazione, per la massima parte degli scopi: 2° i contrasti fra l'ipotesi e la misura, benchè recisamente deboli, sono in molti casi di un tale importo, da non poter venire attribuiti agli errori di osservazione: vale a dire gli errori dell'ipotesi sono misurabili.

" Quest'ultimo risultato era prevedibile molto prima che Walbeck nella sua nota dissertazione (*) facesse il primo tentativo di determinare la figura della Terra, utilizzando regolarmente tutte le misure di grado esistenti al suo tempo ed utilizzabili. Che la superficie dell'oceano e la sua ideale prosecuzione sotto i continenti non potesse a tutto rigore appartenere ad una superficie di una semplice legge di formazione, seguiva con grande probabilità dalla costituzione irregolare della parte della crosta terrestre a noi accessibile, e che le così dette deviazioni del filo a piombo, causate da quelle irregolarità, in alcuni casi siano con sicurezza misurabili, emergeva dalla riuscita del tentativo, di utilizzare appunto quelle deviazioni del filo a piombo, per la determinazione della densità media della Terra. Che anzi in base a tutte le constatazioni ulteriori si può estendere quella proposizione ed asserire che tutte le deviazioni del filo a piombo dimostrabili, devono ognor più costituire la regola, anzi che l'eccezione, quanto più esatte divengono le nostre osservazioni.

" Ora nella determinazione della forma della Terra, non si è punto tratto profitto da quelle deviazioni del filo a piombo, ma le si sono trattate semplicemente come errori accidentali, e si stette in ciò contenti a constatare la loro piccolezza in un colla loro esistenza. In ciò il geodeta si trovò all'incirca nella posizione medesima dell'astronomo che deve discutere osservazioni odierne di pianeti in base alla teoria delle perturbazioni del tempo prima di Laplace. Le soluzioni date fin qui al problema della geodesia sono quindi in tanto incomplete in quanto esse non esauriscono il materiale di osservazione esistente, ma si

(*) Vedi su questa dissertazione la nota sesta dei presenti studii, " Atti di questa Accademia ,, vol. XLII, 1906.

accollano le contradizioni fra l'ipotesi e l'esperienza. Ci si può ora chiedere se questa deficienza sia accidentale o necessaria. Essa manifestamente sarebbe puramente accidentale, quando nella risoluzione del problema si potesse far a meno di tutte le ipotesi anche da giustificarsi *a posteriori*, necessaria per contro non appena i dati empirici siano di per sè insufficienti, senza il completamento di ipotesi, a rendere possibile la soluzione. La discussione di questa questione forma l'argomento della presente dissertazione e conduce al seguente risultato. Finora nelle misure de' gradi presentemente compiute i dati empirici sono realmente insufficienti per determinare la figura della Terra, sia nel suo complesso, che nelle sue singole parti, senza il sussidio di una ipotesi. Per contro la misura europea dei gradi dispone di tutti i mezzi sussidiarii che sono teoricamente indispensabili per determinare, nel campo sul quale essa si estende, la figura della Terra indipendentemente da tutte le premesse ipotetiche sulla legge di formazione di questa superficie. Questi mezzi sussidiarii consistono nelle seguenti classi di misure:

1° determinazione astronomica delle posizioni (latitudine, longitudine, azimut);

2° triangolazioni (angoli orizzontali, basi);

3° livellazioni trigonometriche (misure di distanze zenitali);

4° livellazione geometrica;

5° determinazione dell'intensità della gravità.

" Queste classi di dati sono, per la risoluzione del problema senza ricorrere ad ipotesi, sufficienti, ma anche necessarii, vale a dire, non appena dai dati numerici si sopprime una di queste classi, si è costretti, per riempire il vuoto che rimane, ad aver ricorso ad ipotesi sulla legge di formazione della superficie che si cerca, giacchè presentemente non si possono misurare con successo altri dati, che possono comunque venir sostituiti „.

Come poi il compito così proposto sia stato tradotto in atto, ce lo dice brevemente Bruns medesimo, in un resoconto del suo lavoro da lui pubblicato nel volume decimo del *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Berlin, Reimer, 1880 (*),

(*) Vedasi pure una recensione firmata E. L. nel *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, deuxième série, tome II, 1878, Paris, Gauthier-Villars.

pag. 765. A questo resoconto sommario verremo, nell'esporlo, aggiungendo le principali formole e proposizioni, cercando di dare al cortese lettore, che volle benevolmente seguirci in queste modestissime contribuzioni all'istoria della geodesia, una adeguata idea del lavoro di Bruns.

Egli comincia coll'esporre i principii della teoria del potenziale, riassunti anche al principio della presente nota, e formola la definizione già data della figura matematica della Terra, che cioè essa è quella, fra le superficie di livello della funzione delle forze W, alla quale appartiene la superficie libera del mare. Il § 1 considera quindi una serie di cause, l'effetto delle quali è che la superficie del mare non può a tutto rigore essere una superficie di livello, e formula quindi il problema della geodesia scientifica così: determinare non una particolare superficie di livello o geoide, ma tutte, ossia, il che è lo stesso, trovare quella funzione delle forze stesse. Queste circostanze sono le maree, le correnti marine, l'azione statica e dinamica dell'atmosfera. A conclusione di questa sua trattazione Bruns scrive quanto segue, che costituisce il concetto che informa tutte le moderne operazioni geodetiche.

Il livello del mare *normale* e medio sono così definiti:

" S'immagini l'acqua del mare in riposo relativo rispetto al corpo solido terrestre e la pressione atmosferica sulla superficie del mare (espressa in misura assoluta) costante, allora la superficie libera dell'acqua apparterrebbe ad una superficie di livello che noi designeremo come *il livello normale del mare*. Il vento, il tempo (meteorologico) e le maree ora fanno sì che l'effettiva superficie fisica del mare sia diversa da quella normale. Per gli scopi geodetici si fa astrazione da queste oscillazioni lente o rapide, sostituendo al livello effettivo del mare uno medio. In un dato luogo ed all'epoca t sia h la distanza fra il pelo liquido effettivo e quello normale; allora i valori di

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} h dt$$

forniscono la posizione del livello medio nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$, e si può domandare se questi valori medii di h, per intervalli di tempo abbastanza lunghi riescano tenui così da poter venir trascurati per gli scopi geodetici „.

. . . .

" Le precedenti considerazioni basteranno a provare, che nel divario fra il livello medio e quello normale del mare si ha a che fare con grandezze che possono senza più divenire notevoli; ed i fatti emersi nella livellazione di collegamento del Mediterraneo coi mari del Nord ed il Baltico ed i punti del mare Baltico (*) fra loro, non contengono certo alcun argomento contro le precedenti considerazioni. Ma quand'anche quelle differenze, nell'odierna precisione delle operazioni geodetiche dovessero essere praticamente trascurabili, esse non lo sono tuttavia quando si tratta di dare una precisa definizione della figura matematica della Terra ". Ciò fissato, Bruns nel § 2 passa a studiare le proprietà generali del geoide o meglio delle superficie di livello e segnatamente le discontinuità che la curvatura di queste superficie e delle corrispondenti linee di forza possiede, là dove la densità della massa varia bruscamente. In questo svolgimento Bruns si vale di un teorema della teoria del potenziale da lui dato in una sua dissertazione intitolata: *De proprietate quadam functionis potentialis*, Berolini 1871, e poi dimostrato in un suo lavoro successivo *Ueber einen Satz aus der Potentialtheorie* (" Journal für die reine und angewandte Mathematik ", vol. 81, 1876, pag. 349). Bruns osserva che questo suo teorema ed alcuni altri sono generalizzazioni di alcuni teoremi dimostrati da Stahl in un lavoro inserito nel vol. 79 del medesimo giornale, pag. 265, ed intitolato: *Zur Theorie der Potentialflächen, unter besonderer Rücksicht auf Körper welche von Flächen der zweiten Ordnung begrenzt sind.*

I due teoremi dimostrati da Bruns e dei quali egli si valse nella sua *Figur der Erde* sono i seguenti:

" Quando la funzione V delle coordinate rettangolari x, y, z di un punto e le sue derivate prime sono, entro ad un determinato spazio T, univoche, finite e continue e soddisfanno all'equazione $\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, V è regolare nello spazio T ".

" Sia F una superficie analitica nei dintorni di uno dei suoi punti P, libera da singolarità, ed inoltre siano k, φ e ψ tre funzioni delle coordinate x, y, z, regolari nei dintorni di P, allora

(*) Vedi *Le livellazioni di precisione ed il livello del mare* di Ottavio Zanotti Bianco, Torino 1892.

esiste sempre una funzione V che, nei dintorni di P è regolare e soddisfa alle seguenti condizioni: 1° $\Delta^2 V = -4\pi k$; 2° i valori che prendono V e la sua derivata presa nella direzione della normale ad F in un punto Q di F, sono uguali ai valori di φ e ψ nel punto Q.

" Dai risultati qui dedotti si ricavano senza alcuna difficoltà i teoremi sulla proseguibilità analitica delle funzioni potenziali di superficie caricate di massa, o di spazii pieni di massa che sono stati utilizzati da me e da Stahl per effettuare in alcuni dei casi accessibili di questo genere la riduzione da potenziali di volume a potenziali di superficie „.

Bruns termina il suo lavoro del " Journal „ datato *Dorpat, im November 1875*, con un brano nel quale sono esposti molti dei risultati da lui poi più largamente svolti nel § 2 della *Figur der Erde.* Riportiamo qui in parte quella chiusa del lavoro, perchè giustifica l'applicazione dei teoremi sovrascritti alla Terra, e stabilisce in ordine cronologico l'introduzione di quelle idee cardinali nella geodesia teoretica.

" Per applicare i teoremi trovati alla figura matematica della Terra, si deve anzitutto osservare che essi valgono ancora quando V e V' (*) non si debbano più riguardare propriamente come

---

(*) Le funzioni V e V' sono definite nelle linee seguenti, sostanzialmente riprodotte a p. 8 della *Figur der Erde.* " S'immagini la Terra composta di parti T, T', T''..... così che il contorno o delimitazione degli spazii T, T', T'' consti di pezzi regolari di superficie analitiche, e che la densità entro le singole parti sia espressa da funzioni regolari k, k', k''..... Allora le superficie di livello del potenziale corrispondente a questo corpo sono superficie continuamente connesse, la cui normale cambia del pari continuamente la sua direzione. Fanno eccezione soltanto i luoghi nei quali le derivate prime secondo x, y, z svaniscono. La porzione di una superficie di livello entro uno degli spazii T, T', T''..... appartiene ad una sola e medesima superficie analitica ed, in generale, è regolare; per contro le porzioni che giacciono nei diversi spazii T, T', T''..... appartengono, in generale, a diverse superficie analitiche. Se quindi anche, a cagione della continuità delle derivate prime, la posizione del piano tangente ad una superficie di livello varia in modo continuo, ciò nullameno la curvatura di essa subirà un salto nel trapasso da T alla parte vicina T'. Sia ora F un pezzo della superficie di separazione delle due parti fra loro confinanti T e T', e sia P un punto di F, e si supponga che k, k' ed F siano regolari nei dintorni di P, allora anche le funzioni potenziali V e V' appartenenti a T e T' saranno regolari nei dintorni di P, non altrimenti che le superficie analitiche definite

funzioni potenziali di un determinato corpo, ma designino in modo generale funzioni le quali oltre alle date condizioni di limite e di continuità soddisfino ad una equazione differenziale della forma $\Delta^2 V = -4\pi k$. Si può quindi applicare direttamente quei teoremi alla funzione delle forze della Terra, le cui derivate parziali in ogni punto dànno le componenti della gravità. Poichè questa funzione delle forze W (*), come è noto, si compone del potenziale del globo terrestre e del termine $\frac{1}{2}\omega^2 R^2$ proveniente dalla forza centrifuga, ove ω è la velocità di rotazione ed R la distanza del punto che si considera dall'asse di rotazione. Si ha così: $\Delta^2 V = 4\pi k + 2\omega^2$, ove k è la densità del globo terrestre nel punto che si considera. Inoltre si può, senza inconvenienti, supporre che il globo terrestre consti di parti T, T', T''.... la cui delimitazione e densità corrispondono alle condizioni sovraposte. Ora, poichè il termine $2\omega^2$ esula dalle differenze $k_0 - k'_0$, così nelle formole precedenti si può senz'altro scrivere W invece di V, col che si ottengono le variazioni brusche delle quantità m, n, ψ relative alla superficie di livello della funzione W, in quei luoghi del globo terrestre, nei quali queste superficie di livello penetrano da uno strato di data densità in un altro di densità diversa „ (**).

---

dalle equazioni $V = \text{cost}$, $V' = \text{cost}$, delle quali superficie si compone la superficie di livello che passa per P, solo però finchè le prime derivate del potenziale in P non svaniscono. Designamo con N ed N' queste due superficie, delle quali dobbiamo ora determinare la curvatura in P. La funzione $V - V' = U$ svanisce assieme alle sue derivate prime sulla superficie F, inoltre N ed N' si toccano lungo la loro comune intersezione C con F''.

(*) Questo simbolo W è rimasto nella scienza ed Helmert se ne valse egli pure a rappresentare la funzione delle forze corrispondenti alla *gravità teorica*, cioè quella che si ottiene escludendo qualsiasi forza, ad eccezione dell'attrazione della massa e della forza centrifuga proveniente dalla rotazione diurna.

(**) S'immagini per P la sezione normale di N e sia ψ il suo azimut; ρ il suo raggio di curvatura in P, ρ_1 e ρ_2 i raggi principali di curvatura, di N in P si ponga $m = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ $n = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$. Nella *Figur der Erde* si pone $2m = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$, ma il risultato è identico nei due casi, in grazia di analoghe modificazioni; ψ_1 e ψ_2 gli azimut delle sezioni normali principali, è $\psi_1 - \psi_2 = \pm \frac{\pi}{2}$.

Nella Memoria del " Journal „ (XI, 1875) sono quindi espressi molti dei risultati dati poi nella *Figur der Erde*, e noi ci varremo di questa, al fine di esporre l'ultimo pensiero dell'autore al riguardo, dopo averne stabilito l'epoca di prima esposizione.

Siano m, n, ρ, ψ; m', n', ρ', ψ' le quantità definite in nota, riferentisi rispettivamente alle superficie N ed N', così k_0, ρ_1, ρ_2, ψ^1, ψ^2 e k_0', ρ_1', ρ_2', ψ_1', ψ_2' le densità ed i raggi di curvatura principali; g la gravità in P, δ l'angolo fra le due normali ad F ed N od N'. Con queste notazioni Bruns dimostra le relazioni seguenti:

$$(E) \quad \begin{cases} g\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) = 4\pi(k_0 - k_0')\,\mathrm{sen}^2\delta\cos^2\psi \\ g(m - m') = 2\pi(k_0 - k_0')\,\mathrm{sen}^2\delta \\ g^2(n - n') = -4\pi(k_0 - k_0')\,\mathrm{sen}^2\delta\, W_{22} \\ W_{12}(\cot 2\psi_1 - \cot 2\psi_1') = -2\pi(k_0 - k_0')\,\mathrm{sen}^2\delta. \end{cases}$$

In queste formole i simboli W hanno il seguente significato. Si prende il punto P come origine di un sistema di assi ortogonali e W sviluppato secondo potenze di x, y, z, nella forma

$$W = W_0 + W_1x + W_2y + W_3z + \frac{1}{2}(W_{11}x^2 + W_{22}y^2 + W_{33}z^2) +$$
$$+ W_{12}xy + W_{23}yz + W_{13}xz + \ldots, \text{ ecc.}$$

W_0 è il valore che prende la funzione W in P, e si ha

$$W_1 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0, \quad W_2 = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0, \quad W_3 = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0;$$

$$W_{11} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0, \quad W_{22} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_0, \quad W_{33} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_0;$$

$$W_{12} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_0, \quad W_{13} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)_0, \quad W_{23} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)_0;$$

il simbolo $(\;)_0$ significando che quelle derivate sono prese per l'origine delle coordinate. Se si sceglie per asse delle z la direzione della gravità in P, ossia la normale alla superficie di livello che passa per P, W_3 rappresenterà il valore della gravità, che per la crosta terrestre è sempre positiva, e si ha

$W_1 = W_2 = 0$, per essere il piano delle xy tangente in P alla superficie di livello, lungo la quale è $W = W_0$.

Dopo le formole (E) il nostro autore svolge il ragionamento seguente:

" In conseguenza delle presupposizioni fatte sulla densità k, k'... (di essere, cioè, o costanti o funzioni regolari del luogo), la funzione delle forze entro ai singoli spazii T e T'.... è regolare (*). Inoltre, poichè g per i punti della crosta terrestre non svanisce mai, con le superficie N, N'.... in quanto esse rispettivamente giacciono entro gli spazii T, T'.... sono del pari regolari e libere da singolarità. Poichè finalmente le funzioni analitiche in T, T'...., le quali esprimono matematicamente la legge della funzione delle forze, sono fra loro diverse, così anche, in generale, le singole superficie N, N'.... sono fra loro diverse. Da ciò derivano per il geoide le seguenti proprietà: La legge di formazione del geoide o più generalmente di tutte le superficie di livello nel loro andamento attraverso alle varie parti della crosta terrestre, non è rappresentabile a mezzo di un'unica espressione analitica, chè anzi il geoide si compone di porzioni regolari di superficie analitiche fra loro diverse, così che nei singoli strati di massa segue differenti leggi di formazione. Queste porzioni regolari di superficie, sono così l'una all'altra riunite nei luoghi di trapasso, che mai non si riscontrano spigoli o cuspidi, ma così che la curvatura delle sezioni normali, la curvatura media e la misura della curvatura, non che gli azimut delle linee di curvatura subiscono variazioni brusche, il cui ammontare è dato a mezzo delle formole (E).

" Della grandezza di queste discontinuità si può avere una idea approssimata nel modo seguente. Sia r_0 il raggio di una sfera omogenea di massa e volumi eguali a quello della Terra.

(*) Nella *Figur der Erde*, Bruns definisce come segue una funzione regolare: " Una funzione si chiama regolare nei dintorni della posizione (x_0, y_0, z_0), quando essa può essere sviluppata in una serie procedente secondo potenze positive intiere di $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ e convergente entro un determinato campo. Una superficie si dice quindi regolare quando nei dintorni di (x_0, y_0, z_0) essa è data a mezzo di un'equazione regolare

$$F(x, y, z) = F'(x_0, y_0, z_0)$$

ed in (x_0, y_0, z_0) non possiede alcuna singolarità.

La sua densità K sarà allora eguale alla densità media della Terra ($K = 5{,}55$). Sia g_0 la gravità *(più esattamente l'attrazione)* alla superficie di una tal sfera, è

$$g_0 = \frac{M}{r_0^2} = \frac{4}{3}\,\pi r_0 K,$$

r_0 e g_0 diversificano dalle quantità analoghe che valgono effettivamente per un punto della superficie della Terra di una grandezza dell'ordine dello schiacciamento.

Si ha quindi:

$$(F) \qquad \begin{cases} r_0\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) = 3\,\frac{k_0 - k_0'}{K}\,\mathrm{sen}^2\delta\cos^2\psi \,.\, \frac{g_0}{g} \\[2ex] r_0(m - m') = \frac{3}{2}\,\frac{k_0 - k_0'}{K}\,\mathrm{sen}^2\delta \,.\, \frac{g_0}{g} \\[2ex] r_0^2(n - n') = -3\,\frac{k_0 - k_0'}{K}\,\mathrm{sen}^2\delta \,.\, \frac{g_0}{g}\,\frac{r_0 W_{22}}{g}. \end{cases}$$

La considerazione della prima formola basta al nostro scopo. Il fattore $\mathrm{sen}^2\delta\cos^2\psi$ può prendere tutti i valori fra 0 ed 1, $g_0 : g$ è sempre molto da vicino $= 1$ e l'altro fattore restante $3\,\frac{k_0 - k'_0}{K}$ ha, a parte il segno, nel trapasso dall'aria in una roccia solida circa il valore 1,5. Ora se il geoide, per rispetto alla curvatura diversificasse ovunque solo di poco da un ellissoide o da una simile superficie, allora la frazione $\frac{r_0}{\rho}$ dovrebbe sempre essere molto da vicino $= 1$: ma la prima equazione c'insegna che questa frazione può tanto comportare più di una unità, quanto divenire notevolmente minore di uno. Inoltre, poichè entro le singole porzioni di superficie, delle quali si compone il geoide, la curvatura è continua, così anche le regioni entro alle quali quella frazione si allontana notevolmente da uno, non sono limitate a piccole parti, e da ciò si può dedurre il teorema, che più tardi per altra via confermeremo, che è impossibile il rappresentare approssimativamente il geoide a mezzo di una sola superficie analitica, avente una legge di formazione abbastanza semplice, senza commettere errori notevoli e quindi non ammissibili. Così gli sviluppi in serie, ad esempio secondo funzioni trigonometriche o sferiche, ecc., colle quali si

può a piacimento esprimere analiticamente relazioni di grandezze date anche solo graficamente, applicati al caso precedente, convergono troppo lentamente per essere praticamente applicabili „.

A questo riguardo vedasi Helmert, II, pag. 44.

Helmert, nel volume secondo della sua classica opera, pag. 38, ha pure dato le formole (E) servendosi del simbolo Δ per indicare la differenza delle quantità omonime (*). e poi scrive, p. 39: “ È merito di Enrico Bruns l'aver richiamato l'attenzione sulla discontinuità della curvatura. E nelle sue dissertazioni già citate ha svolto le formole da noi date e particolarmente nella *Figur der Erde* la (4) „.

(La (4) di Helmert è il massimo valore che può assumere il primo membro della prima delle (F), cioè $+\frac{1}{r_0}\,3\,\frac{k_0-k_0'}{K}$, nel caso particolare considerato).

“ L'andamento dello sviluppo è però essenzialmente un altro. Segnatamente innanzi tutto basandosi sui criterii di Dirichlet per V (*Vorlesungen über die im umgekerten Verhältniss des Quadrats der Entfernungen werkenden Kräfte*, Leipzig, Teubner, 1876, pag. 29) si dimostra che in uno spazio nel quale θ (il nostro k) è regolare, cioè si può, entro limiti finiti di convergenza, svilupparе secondo potenze delle coordinate ortogonali, anche W è regolare. Quando noi, § 17, pag. 24, trovammo che in un tale spazio W e tutte le sue derivate di ordine superiore assegnabile sono finite e continue, non abbiamo dato ancora quanto basta per la dimostrazione dell'esistenza di una serie *infinita* di potenze con un campo finito di convergenza, ma abbiamo fornito quanto è sufficiente per la ricerca della curvatura, per la quale è richiesto solamente uno sviluppo *finito di Taylor* „.

In una prossima nota seguiteremo l'esame della celeberrima Memoria di Bruns, indugiandoci particolarmente sulla variazione della latitudine coll'altezza.

(*) Colla notazione di Helmert le formule di Bruns sono riportate dal prof. Pietro Pizzetti (pur troppo con qualche errore di scrittura) a pp. 134-135 delle sue *Lezioni sulla Teoria Meccanica della Figura dei Pianeti* (litografate, Pisa, 1901-1902). Non conosco libro a stampa nè francese, nè inglese, nè italiano ove queste formole di Bruns siano dimostrate o trascritte.

Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie.

Nota 4ª di BEPPO LEVI, a Cagliari.

Segue: *Configurazioni poligonali miste di punti razionali.*

1. — Nella Nota ([1]) precedente abbiamo studiato quelle configurazioni poligonali che posseggono i punti razionali strettamente richiesti dal corrispondente valore del divisore t. Ogni punto di una configurazione poligonale semplice, che non sia flesso, è tangenziale di uno e di un sol punto della configurazione; ogni punto di una configurazione poligonale mista che non sia flesso nè origine di un ramo arborescente è tangenziale di due e, in generale, di due soli punti razionali della cubica, anch'essi appartenenti alla configurazione. Ma, come già si è visto nei n$^{\text{i}}$ 12 e sg. della Nota II ([2]) per le configurazioni arborescenti, può una configurazione poligonale mista possedere altri punti razionali *accidentali*, in quanto qualcuno dei punti essenziali della configurazione sia tangenziale di quattro punti razionali anzichè di due. Applicando due osservazioni fatte al citato n. 12 della Nota II si può tosto affermare che *se tal fatto avviene per uno dei punti essenziali della configurazione, dovrà pure verificarsi per tutti gli altri che non siano l'eventuale flesso e le origini dei rami arborescenti; ed il flesso inoltre sarà tangenziale di 3 punti razionali; ma ciascuno dei punti razionali accidentali aggiunti per tal modo alla configurazione non sarà mai a sua volta tangenziale d'altri punti razionali,* in quanto questi punti razionali apparterranno tutti al ramo pari della cubica.

([1]) Questi "Atti", questo vol., pag. 413.
([2]) Questi "Atti", questo vol., pag. 99.

Le sole configurazioni poligonali semplici che nella Nota precedente si sono riconosciute poter essere nuclei di configurazioni poligonali miste sono il triangolo e il quadrangolo di tangenziali ([1]): a queste sole deve quindi rivolgersi la nostra attenzione.

2. — Nella cubica (8) (n. 7) della Nota precedente

$$y^2(x-z) - yx[(b+1)x - (2b+1)z] - bxz^2 = 0,$$

i punti di contatto diversi da $(1\,0\,0)$, $(1\,1\,1)$ delle tangenti uscenti dal punto $(0\,0\,1)$ sono determinati dalle equazioni

$$y^2 - yz + 2bz^2 = 0$$
$$x = \frac{y^2}{(2b+1)y - 2bz}.$$

Saranno quindi razionali, tosto che sia quadrato esatto il discriminante $1 - 8b$ della prima equazione. Ciò equivale a dire che b deve essere della forma

$$b = \frac{1}{8}(1 - t^2) \qquad (1)$$

dove t è un numero razionale qualunque. *Esistono dunque cubiche a coefficienti razionali le quali posseggono un sistema finito di punti razionali costituito da un triangolo di tangenziali $\mathfrak{S}(3)$, ogni vertice del quale è inoltre tangenziale di altri 3 punti razionali.*

3. — Ma nessuno di questi nuovi punti razionali può più essere tangenziale di altri punti razionali. Infatti nel n. 11 della Nota precedente si è trovato che condizione perchè ciò avvenga è che esista un numero razionale c tale che

$$b = \frac{1}{c^2 - 1}.$$

Deve d'altronde verificarsi la (1) del n. prec.: si ponga allora

$$t = \frac{u}{v}, \quad c = \frac{d}{e}:$$

(u, v, d, e numeri interi; u e v primi fra loro; d ed e parimenti)

---

[1] Si confronti l'osservazione congetturale al n. 10 della Nota precedente, per cui sarebbero precisamente questi i soli nuclei possibili di configurazioni poligonali miste.

dovrà essere

$$\frac{v^2-u^2}{8v^2}=\frac{e^2}{d^2-e^2}$$

onde

$$d^2(v^2-u^2)=e^2(9v^2-u^2).$$

I binomi v^2-u^2, $9v^2-u^2$ non possono aver fattori comuni che non siano fattori di 8; e se tali fattori hanno, u e v sono dispari, e quindi i due binomi hanno precisamente il fattor comune 8; questa uguaglianza può dunque solo soddisfarsi ponendo

$$8^i d^2=9v^2-u^2,\ 8^i e^2=v^2-u^2 \qquad (i=0 \text{ o } 1)$$

$$8^i(d^2-e^2)=8v^2.$$

Per $i=0$ si ricava dalla 1ª equazione che d ed u debbono essere multipli di 3, perchè 3 non è somma di due quadrati; e ponendo $u=3r$, $d=3f$ si ricava

$$(2) \qquad f^2=v^2-r^2 \qquad e^2=v^2-9r^2.$$

Per $i=1$ l'ultima equazione diviene

$$v^2=d^2-e^2$$

e sottraendo da questa la penultima si ottiene

$$u^2=d^2-9e^2.$$

Si ha così anche allora un sistema identico al sistema (2).

Dalla 1ª equazione di questo sistema si ricava che v non può essere divisibile per 3, perchè se fosse, dovrebbe r esser primo con 3, e poichè 3 non è somma di due quadrati non potrebbe essere $v^2=f^2+r^2$. Sono allora a due a due primi fra loro tanto e, v e $3r$ come f, v ed r e per soddisfare alle (2) deve porsi

$$v-f=2^\xi\alpha^2\beta^2 \qquad v+f=2^\xi\gamma^2\delta^2$$

$$v-e=2^\xi.9\alpha^2\gamma^2 \qquad v+e=2^\xi\beta^2\delta^2$$

dove si ammette che f ed e abbiano segno conveniente, $+$ o $-$; e dove ξ ha uno dei valori 0,1 e $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ sono numeri interi a 2 a 2 primi fra loro, dispari se $\xi=0$.

Segue

$$2v = 2^{\xi}(\alpha^2\beta^2 + \gamma^2\delta^2) = 2^{\xi}(9\alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2)$$

onde

$$\alpha^2(\beta^2 - 9\gamma^2) = \delta^2(\beta^2 - \gamma^2), \qquad \beta^2(\alpha^2 - \delta^2) = \gamma^2(9\alpha^2 - \delta^2).$$

Dei 4 numeri $\alpha\beta\gamma\delta$ al più uno è pari: almeno una delle coppie α, δ e β, γ sarà quindi costituita di numeri dispari; siano tali β e γ; $\beta^2 - 9\gamma^2$ e $\beta^2 - \gamma^2$ saranno allora divisibili per 8 e la prima delle ultime equazioni trovate dà

$$8\alpha^2 = \beta^2 - \gamma^2 \qquad 8\delta^2 = \beta^2 - 9\gamma^2$$

onde

$$9\alpha^2 = \beta^2 + \delta^2.$$

Siccome β e δ non possono essere entrambi divisibili per 3, questa equazione è impossibile. *La presenza di punti razionali accidentali è impossibile in una configurazione come quella del n. 11 della Nota precedente.*

4. — Parimenti *non possono i punti di una configurazione* $\mathfrak{S}(5)$ *essere tangenziali ciascuno di altri tre punti razionali.* Invero, dalle osservazioni del n. 1 e dal n. 8 della Nota precedente risulta che occorrerebbe perciò che fossero razionali le tre radici dell'equazione

$$bx^2(y + x) + y^2(y - x) = 0.$$

Già nella Nota prec. si è osservato che sarà razionale una radice $\left(\text{e precisamente sarà la radice } \frac{x}{y} = \frac{p}{q}\right)$ quando

$$b = \frac{q^2(p - q)}{p^2(p + q)}.$$

Le due altre radici saranno allora date dall'equazione

$$p(p + q)y^2 - (p^2 - q^2)xy - q(p - q)x^2 = 0$$

il cui discriminante è

$$(p^2 - q^2)(p^2 + 4pq - q^2);$$

p e q si suppongono numeri interi primi fra loro: i due fattori sono allora primi fra loro oppure hanno a comune il fattor 4; in ogni caso il prodotto non potrà essere quadrato esatto se non è quadrato ciascuno di essi. Affinchè $p^2 - q^2$ sia quadrato deve essere

$$p - q = 2^{\xi} r^2 \qquad p + q = 2^{\xi} s^2$$

($\xi = 0$ o 1, r, s primi fra loro).

Allora

$$2p = 2^{\xi}(r^2 + s^2) \quad 2q = 2^{\xi}(s^2 - r^2) \quad 4pq = 2^{2\xi}(s^4 - r^4)$$
$$p^2 + 4pq - q^2 = 2^{2\xi}(s^4 + r^2 s^2 - r^4).$$

Dovrebbe dunque esser quadrato esatto il trinomio $s^4 + r^2 s^2 - r^4$ e che ciò non possa ottenersi fu già dimostrato nel n. 12 della Nota precedente.

Ancora alcune considerazioni generali sulle configurazioni finite.

5. — Trattando fin qui delle configurazioni finite di punti razionali d'una cubica a coefficienti razionali, si è fatto corrispondere a ciascun valore del divisore t una configurazione che (a meno dell'eventualità di punti razionali che abbiam detti *accidentali*, che è stata analizzata nei n[i] 12-15 della Nota 2[a] e nei numeri precedenti della presente) si può dire la configurazione minima corrispondente a quel divisore. Essa comprende i punti che derivano razionalmente dal punto di coordinata ellittica $\frac{\omega}{3t}$, dove ω è un conveniente periodo, e cioè tutti i punti di coordinata ellittica $\frac{p\omega}{3t}$ ($p \equiv 1$, mod. 3) [1]. Altri punti razionali appartenenti a configurazioni finite corrispondenti allo stesso valore di t potrebbero presentarsi solo in quanto la loro coordinata ellittica fosse della forma $\frac{q\omega}{3t}$ ($q \equiv -1$ o $\equiv 0$, mod. 3) ovvero della

[1] Cfr. Nota I, n° 10.

forma $\frac{\omega'}{3t}$ dove ω' è un nuovo periodo del parametro ellittico relativo alla cubica, avente a ω rapporto complesso ([1]).

Il secondo caso si riconduce immediatamente al primo: invero si è già osservato altre volte che, non potendo punti del ramo pari (ove esso esista) della cubica esser tangenziali di punti razionali, tutti i punti di una configurazione finita di punti razionali, fatta al più eccezione per le origini di rami arborescenti, debbono appartenere al ramo dispari; ma le coordinate ellittiche dei punti di tal ramo hanno tutte fra loro rapporto reale; se quindi non è reale $\frac{\omega'}{\omega}$, dovrà esserlo certamente, per un conveniente valore del periodo ω'', il rapporto $\frac{2\omega' + 3t\omega''}{\omega}$, e t dovrà essere pari; cosicchè ω' potrà differire da un numero della forma $q\omega$ ([2]) solo per un numero della forma $\frac{3t}{2}\omega''$. Se allora $q \equiv 1 \pmod{3}$ non si avrà che il caso dei punti razionali or ora chiamati *accidentali*; se invece $q \equiv -1$ o $\equiv 0 \pmod{3}$, il punto $\frac{\omega'}{3t}$ si riattacca ugualmente come punto razionale accidentale ad un'altra configurazione per cui il rapporto analogo a $\frac{\omega'}{\omega}$ è razionale (intero $\equiv -1$ o $\equiv 0$, mod. 3); qualche maggior precisione a questa osservazione risulterà dal seguito.

6. — Se sopra una cubica a coefficienti razionali sono razionali i punti di coordinate ellittiche $\frac{\omega}{3t}$ e $\frac{q\omega}{3t}$ ove $q \equiv 0$ o -1

([1]) Il rapporto, ove non sia complesso, potrà sempre supporsi intero, perchè se fosse $\omega' = \frac{m}{n}\omega$ $\left(\frac{m}{n} \text{ irreduttibile}\right)$ esisterebbe un periodo ω^* tale che $\omega = n\omega^*$, $\omega' = m\omega^*$ ed esisterebbero sulla cubica punti razionali di coordinate ellittiche $\frac{n\omega^*}{3t}$, $\frac{m\omega^*}{3t}$: è facile vedere che in tale ipotesi esistono due numeri interi λ e μ tali che $\lambda n + \mu m \equiv \pm 1 \pmod{3t}$ e $\lambda + \mu \equiv 1 \pmod{3}$. Allora la cubica possiede il punto razionale $\frac{\pm\omega^*}{3t}$ $\left(\equiv \frac{(\lambda n + \mu m)\omega^*}{3t}, \text{ mod. } \omega^*\right)$ razionalmente dedotto dai precedenti, e al periodo ω dianzi considerato potrà sostituirsi il periodo $\pm\omega^*$, il punto $\frac{\omega}{3t}$ deducendosi a sua volta razionalmente da $\frac{\omega'}{3t}$ e dal detto punto $\frac{\pm\omega^*}{3t}$.

([2]) Ove q può supporsi intero: cfr. ([1]).

(mod. 3) saranno razionali tutti i punti di coordinata ellittica $\frac{h\omega}{3t}$ ove h è un intero qualunque, perchè sempre si potranno trovare due interi λ e μ tali che $\lambda + \mu q = h$ e $\lambda + \mu \equiv 1$ (mod. 3) ([1]). In particolare saranno razionali i tre flessi $\frac{\omega}{3}$, $-\frac{\omega}{3}$, ω. Si assoggetti allora la cubica ad una trasformazione birazionale quadratica (a coefficienti razionali) avente per punti base gli ulteriori tre punti d'intersezione della cubica con una conica che la tocchi nel punto ω e passi pel punto $-\frac{\omega}{3t}$; si otterrà una nuova cubica a coefficienti razionali, sulla quale, al punto razionale di coordinata ellittica $\frac{h\omega}{3t}$ corrisponderà un punto razionale di coordinata ellittica $\frac{h\omega}{3t} + \frac{\omega}{9t} = \frac{(3h+1)\omega}{9t}$. Al sistema finito di punti razionali supposto nella cubica primitiva corrisponde così nella trasformata un sistema di punti razionali, tutti razionalmente dedotti da uno di essi $\left(\text{di coordinata } \frac{\omega}{9t}\right)$; ed il sistema nuovo sarà poligonale semplice se tali erano i sistemi considerati nella cubica primitiva (o se si riducevano a flessi isolati), poligonale misto se questi erano invece arborescenti o poligonali misti; ed in quest'ultimo caso i rami arborescenti del nuovo sistema saranno completamente analoghi a quelli dei sistemi primitivi, per numero di vertici e per forma della diramazione (cosicchè ciascun vertice di essi che non sia un'origine sarà tangenziale di 2 o di 4 punti razionali secondochè così avviene pei sistemi primitivi).

7. — Reciprocamente, se sopra una cubica a coefficienti razionali esisterà un sistema finito di punti razionali, corrispondente a un divisore t multiplo di 3 — cosicchè, posto $t = 3t'$, la coordinata ellittica di un punto del sistema da cui gli altri si deducano razionalmente si potrà scrivere $\frac{\omega}{9t'}$ — basterà assog-

([1]) Basterà prendere $\lambda = h$, $\mu = 0$ se $h \equiv 1$ (mod. 3), se $\lambda = h - q$, $\mu = 1$, se $h \equiv q$ (mod. 3), $\lambda = h - 2q$, $\mu = 2$ se $h + q \equiv -1$ (mod. 3). Il potersi soddisfare a queste congruenze è condizione necessaria e sufficiente perchè il punto $\frac{h\omega}{3t}$ derivi razionalmente dai punti $\frac{\omega}{3t}$, $\frac{q\omega}{3t}$ (cfr. Nota I, n. 10).

gettare tal cubica ad una trasformazione birazionale quadratica a coefficienti razionali avente per punti base le ulteriori intersezioni di essa con una conica tritangente alla cubica nel punto $\frac{\omega}{9t'}$, per ottenere una nuova cubica sulla quale a questo punto corrisponde un flesso razionale e sulla quale sono razionali tutti i punti di coordinata ellittica $\frac{h\omega}{3t}$, ove h è un intero qualsiasi. E se nella cubica primitiva il sistema finito considerato verrà ad accrescersi per punti razionali accidentali, lo stesso avverrà pel sistema corrispondente nella cubica trasformata, e ogni punto di questo che non sia origine di un ramo arborescente o flesso sarà tangenziale di 4 punti razionali: i flessi, naturalmente, saranno tangenziali di 3 soli punti razionali distinti da essi.

8. — Le conclusioni dei n[i] 6 e 7 permettono ora di dare la massima precisione alle osservazioni finali del n. 5; se sopra una cubica a coefficienti razionali, insieme col punto razionale $\frac{\omega}{3t}$ è pur razionale il punto $\frac{\omega'}{3t}$ ove $\omega' = q\omega + \frac{3t}{2}\omega''$ (ω'' periodo a rapporto complesso con ω, t pari, $q \equiv -1$ o 0 mod. 3) saranno razionali tutti i punti della cubica di coordinata ellittica $\frac{h\omega}{3t}$ $\left(\text{razionalmente dedotti dai punti } \frac{\omega}{3t} \text{ e } -\frac{2q\omega}{3t}\right)$ e uno di essi, e quindi tutti quelli che non sono origini di rami arborescenti, saranno tangenziali di soli punti razionali (4 pei punti generici, 3 pei flessi).

9. — Lo studio delle configurazioni finite di punti razionali corrispondenti allo stesso valore di t che possono simultaneamente presentarsi sopra una cubica è così ricondotto completamente allo studio delle configurazioni finite razionalmente dedotte da un unico punto (pel valore $3t$ del divisore del periodo). Si ottiene così:

Per $t = 1$: la cubica può avere i 3 flessi reali, razionali; secondo le considerazioni dei n[i] 6 e 7 la configurazione corrisponde a quella $\mathfrak{F}(3)$ del triangolo di tangenziali (Nota 3[a], n. 1).

Per $t = 2$: può una cubica avere i 3 flessi reali, razionali, ciascuno tangenziale di un punto razionale (estremo cioè di una

configurazione $\mathfrak{A}(1)$): la nuova configurazione è la trasformata secondo i n[i] 6, 7 della configurazione della Nota 3[a], n. 7.

Possono pure i tre flessi essere tangenziale ciascuno di 3 punti razionali, tal configurazione corrispondendo a quella del n. 2, mediante la trasformazione dei n[i] 6, 7.

Per $t=4$: può una cubica avere i tre flessi reali, razionali ed estremi di tre configurazioni $\mathfrak{A}(2)$; tal configurazione essendo la trasformata secondo i n[i] 6, 7 di quella del n. 11 della Nota 3[a]. Ma, a causa del n. 3, questi tre rami arborescenti non possono più accrescersi coll'aggiunta di punti razionali accidentali.

Per $t=8$: l'analisi precedente non ci autorizza a concludere intorno all'esistenza o meno di tre configurazioni $\mathfrak{A}(3)$ di punti razionali (cfr. Nota 3[a], n. 13).

Per $t=3$: trasformando secondo i n[i] 6 e 7 la configurazione $\mathfrak{S}(9)$ di cui si è riconosciuta l'esistenza al n. 4 della Nota 3[a], si ottiene una configurazione di punti razionali costituita da due triangoli di tangenziali (configurazioni $\mathfrak{S}(3)$) $\Big($i cui vertici hanno rispettivamente le coordinate ellittiche $\frac{\omega}{9}, -\frac{2\omega}{9}, \frac{4\omega}{9}$ e $-\frac{\omega}{9}, \frac{2\omega}{9}, -\frac{4\omega}{9}$ e dai tre flessi reali della cubica. Ogni congiungente un vertice dell'un triangolo con un vertice dell'altro taglia ulteriormente la cubica in un flesso.

10. — Non s'è parlato in tutto quanto precede dell'eventuale coesistenza sopra una stessa cubica di due sistemi finiti corrispondenti a valori diversi del divisore t: è appena da accennare come questa omissione sia giustificata: Si supponga che sopra una cubica esistano due tali sistemi, e sia t_0 il m.c.d. dei detti valori di t, r ed s rispettivamente i due fattori non comuni, cosicchè le due configurazioni derivino rispettivamente dai punti di coordinate ellittiche $\frac{\omega}{3t_0r}, \frac{\omega'}{3t_0s}$: si può supporre distesa sulla cubica la coordinata ellittica in modo che ω e ω' non siano tripli di periodi. Ripetendo un'osservazione del n. 5 segue allora tosto che ω' differisce da un periodo della forma $q\omega$ (q intero [1])

[1] q può evidentemente supporsi intero, mediante una scelta conveniente del denominatore $3t_0s$.

avente comune con $3t_0s$ al più il fattore 2) per un numero della forma $\frac{3t_0s\omega''}{2}$ (dove ω'' indica un periodo — e t_0s dovrebbe allora essere pari). In ogni caso alla seconda configurazione apparterrà il punto $-\frac{2q\omega}{3t_0s}$ e quindi alla cubica apparterrà ogni punto di coordinata ellittica $\frac{(\lambda s-2\mu qr)\omega}{3t_0rs}$ con $\lambda+\mu\equiv 1 \pmod{3}$. r ed s dovendo essere primi fra loro si può sempre supporre che s non sia pari; e se si ammette di attribuire ad r, s un segno, si può ancora supporre $q\equiv 1 \pmod{3}$. Si può allora sempre scegliere λ e μ in modo che $\lambda s-\mu qr=\pm 1$, col segno superiore, coll' inferiore o con entrambi a seconda del resto di $r-s$ rispetto al 3. Precisamente: sulla cubica sono allora razionali entrambi i punti $\frac{\pm\omega}{3t_0rs}$ se $r\equiv s \pmod{3}$, il punto $\frac{\omega}{3t_0rs}$ se $r\equiv s\equiv 1 \pmod{3}$, il punto $\frac{-\omega}{3t_0rs}$ se $r\equiv s\equiv -1 \pmod{3}$. Da questi punti $\frac{\pm\omega}{3t_0rs}$ deriva una configurazione finita di cui le due supposte sono parti; e nel primo caso si ha precisamente una delle configurazioni ricercate nei n[i] 6-9, nel secondo una delle configurazioni studiate nelle Note precedenti.

11. — Richiamando ora la definizione del *rango* di una cubica data nella Nota 1ª, nº 14 si ha: *una cubica con un solo punto (flesso) razionale (Nota 2ª, n. 6) ha rango 0; in ogni altro caso l'esistenza di una configurazione finita sopra una cubica impone una sola unità al rango della cubica, se la configurazione non possiede punti accidentali, impone due unità in quest'ultimo caso.* La cubica ha, in quest'ultimo caso, birapporto razionale: cosicchè si può ancora affermare che *ogni cubica a birapporto irrazionale di rango* >1, *ed ogni cubica a birapporto razionale di rango* >2 *posseggono sempre infiniti punti razionali.*

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 15 Marzo 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: MANNO, Direttore della Classe, CARLE, ALLIEVO, STAMPINI, SFORZA e DE SANCTIS Segretario. — Scusa la sua assenza il Socio D'ERCOLE.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente 1° marzo 1908.

Il Presidente comunica i telegrammi e le lettere di ringraziamento pervenutegli dai Professori RUTHERFORD, VENTURI, MONCEAUX e SCHANZ per i premi Bressa, Gautieri e Vallauri ad essi conferiti.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 22 Marzo 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SALVADORI, SPEZIA, SEGRE, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, MORERA, GRASSI, SOMIGLIANA e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica le lettere di ringraziamento dei signori RUTHERFORD, VENTURI, MONCEAUX e SCHANZ per i premii Bressa, Gautieri e Vallauri ad essi conferiti.

Il Presidente comunica anche l'invito a prendere parte alle onoranze che si tributeranno alla memoria del Generale Giovanni CAVALLI in occasione del centenario della sua nascita, fatte da apposito Comitato. — La Classe aderisce alle onoranze e in quanto alla forma delle onoranze stesse delega il Presidente dell'Accademia a trattare col Presidente del Comitato.

Presenta quindi i seguenti lavori pervenuti in omaggio alla Classe: dal Socio corrispondente prof. TARAMELLI tre opuscoli: 1° *Benedetto Corti;* 2° *Della utilizzazione dei laghi e dei piani lacustri di alta montagna per sopperire alle magre dei nostri fiumi;* 3° *Notizie circa il pozzo artesiano di Bagnacavallo;* dall'Ing. Tullio

ALLIEVO la pubblicazione intitolata: *Le fibre tessili di applicazione industriale.*

Il Socio SOMIGLIANA fa omaggio alla Classe del suo lavoro: *Sui potenziali ritardati.*

Il Socio JADANZA presenta per l'inserzione negli *Atti* una sua nota intitolata: *Il cannocchiale di Galilei adoperato come microscopio.*

Raccoltasi quindi la Classe in seduta privata procede alla elezione di un Socio delegato della Classe presso il Consiglio di Amministrazione dell'Accademia. Riesce eletto il Socio JADANZA.

LETTURE

Il Cannocchiale di Galilei adoperato come microscopio.

Nota del Socio NICODEMO JADANZA.

Se s'immagina un mediocre cannocchiale di Galilei, per esempio uno dei due che compongono un comune binocolo da teatro, lo si può trasformare in modo da servire non solo a guardare diritti gli oggetti lontani, ma anche a guardare ingranditi oggetti piccoli che si trovassero a mediocre distanza dall'osservatore (a leggere il giornale, o a leggere scale divise a cui non convenga accostarsi).

Per far ciò è sufficiente allungare il tubo oculare al di là di quanto conviene per la visione di oggetti distanti, in modo che la distanza tra la lente obbiettiva e la lente oculare divergente diventi sempre più grande.

A rendere evidente quanto ora abbiamo detto valgono le tre figure qui annesse.

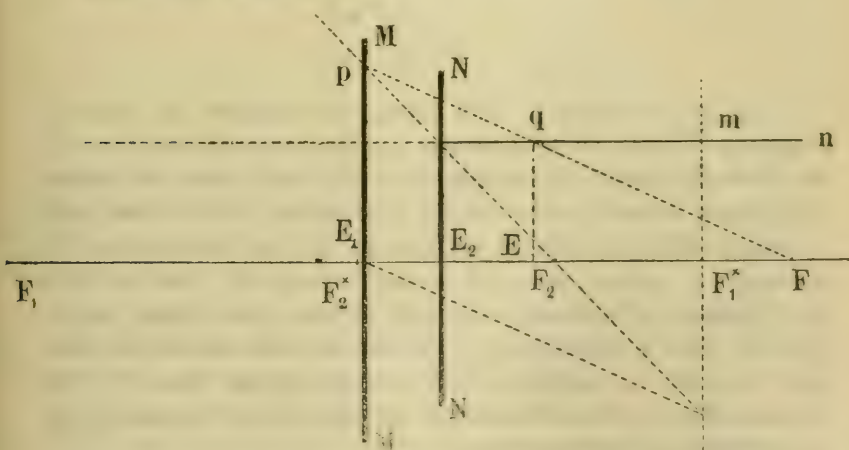



Fig. 1.

La fig. 1ª rappresenta il cannocchiale di Galilei formato dalle due lenti M (obbiettivo), N (oculare divergente). $F_1{}^*m$ rappresenta la immagine di un oggetto all'infinito dato dalla lente M.

Costruendo la *retta d'incidenza* corrispondente alla *retta di emergenza* mn parallela all'asse, si otterrà nel punto F in cui tale retta d'incidenza pq incontra l'asse del sistema il *primo fuoco* di esso. Il punto q d'intersezione delle due rette mn e pq determina il primo piano principale qE e quindi il primo punto principale E del sistema composto delle due lenti M ed N. Tale sistema è, come vedesi, divergente.

La posizione del primo fuoco F mostra che un tale sistema non può servire da microscopio semplice.

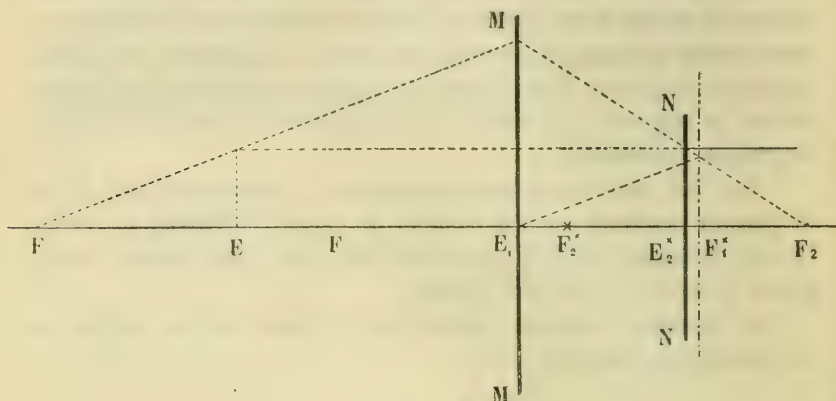



Fig. 2.

La fig. 2ª ottenuta dalla prima allontanando la lente divergente N dalla M in modo che il primo fuoco F_2 della lente N si trovi alla destra del secondo fuoco $F_1{}^*$ della lente M mostra che questo nuovo sistema in cui la distanza Δ delle due lenti è minore della distanza φ_1 della lente M è un *teleobbiettivo*. Costruendo il primo fuoco del sistema composto, esso si trova in F davanti al sistema e davanti al suo primo punto principale E. Esso è convergente e può servire come *microscopio semplice* ponendo un oggetto minuto alla destra del fuoco F. Tale microscopio servirà ad ingrandire un oggetto che trovasi ad una certa distanza dall'osservatore.

Siccome la distanza focale FE del teleobbiettivo è sempre maggiore della distanza focale $E_1F_1{}^* = \varphi_1$ della lente obbiettiva M, così l'ingrandimento sarà sempre minore dell'ingrandimento che si otterrebbe adoperando come microscopio semplice la lente M.

Ma se come nella fig. 3ª si allontana ancora la lente N dall'obbiettivo M in modo che si abbia $\Delta > \varphi_1$, il nuovo sistema delle due lenti avrà la distanza focale $\varphi < \varphi_1$; il suo primo fuoco ed il suo primo punto principale saranno sempre fuori del sistema da parte dell'obbiettivo, però più vicini ad esso.

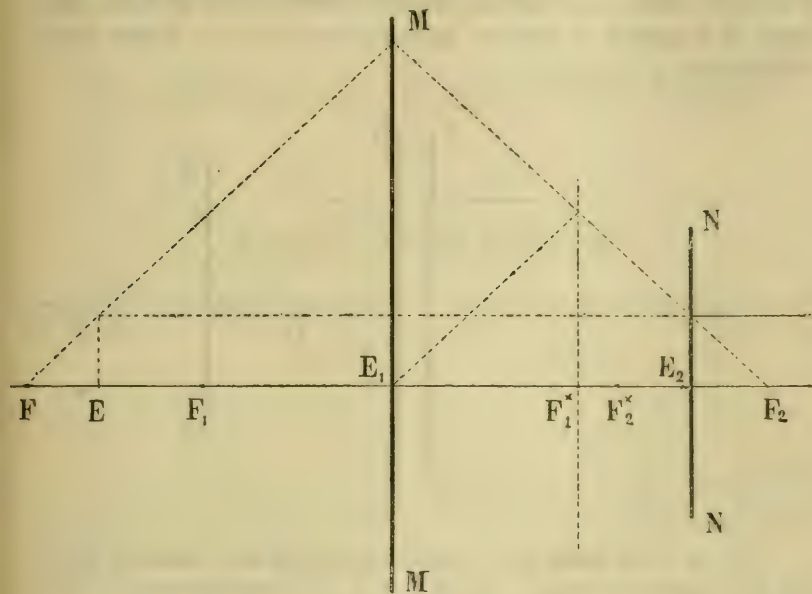



Fig. 3.

In questo caso, il sistema composto delle lenti M ed N servirà ancora come microscopio semplice che avrà un ingrandimento maggiore di quello del caso precedente. L'oggetto dovrà trovarsi a destra di F.

Così è giustificato quanto abbiamo detto fin da principio, cioè che allungando il tubo oculare di un binocolo si può adoperarlo come microscopio *semplice a distanza.*

Se, come è generalmente nei binocoli da teatro, i due cannocchiali sono rigidamente connessi tra loro, per molti individui succederà di vedere due immagini. Converrà perciò che i due cannocchiali possano avvicinarsi tra loro onde evitare tale inconveniente.

Un cannocchiale di Galilei che non abbia il tubo oculare scorrevole in più del consueto può anche diventare microscopio

ponendo innanzi all'obbiettivo una semplice lente convergente di distanza focale adattata all'ingrandimento che si desidera. La ragione di questo sta in ciò che tale lente aggiunta insieme all'obbiettivo del cannocchiale costituisce un sistema composto di distanza focale *minore* di quella dell'obbiettivo semplice, sicchè il secondo fuoco del sistema dei due obbiettivi si avvicina alla lente M e quindi si ottiene l'allontanamento del primo fuoco dell'oculare divergente.

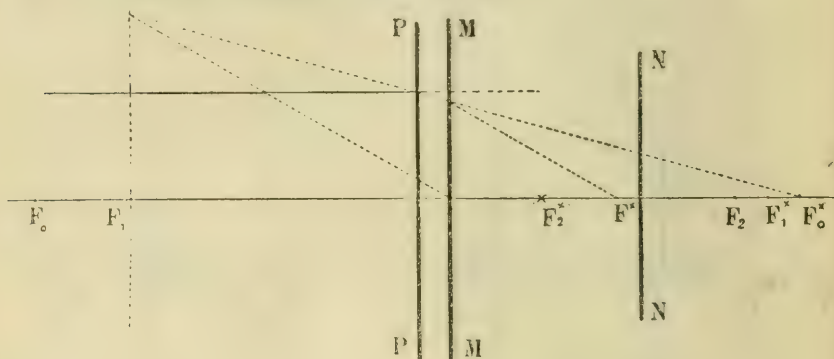



Fig. 4.

Ciò si vede nella fig. 4ª nella quale le due lenti M ed N coi loro rispettivi fuochi F_1, F_1^*, F_2^*, F_2 costituiscono un cannocchiale di Galilei.

Ponendo una lente convergente P davanti all'obbiettivo M, e costruendo il secondo fuoco del sistema composto (P, M), esso fuoco F^* si trova, alla sinistra di N e quindi siamo ridotti al caso della fig. 3ª.

Ognuno può assicurarsi di quanto diciamo mettendo un occhiale da presbite davanti agli obbiettivi di un binocolo comune.

Torino, marzo 1908.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 29 Marzo 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Rossi, Carle, Brusa, Allievo, Carutti, Pizzi, Chironi, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza e De Sanctis, Segretario.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 15 marzo 1908.

Il Presidente comunica l'invito a prendere parte al Congresso internazionale per le scienze storiche che si terrà in Berlino nell'agosto 1908. Se nessuno dei Soci nazionali residenti o non residenti, potrà recarvisi, l'Accademia si farà rappresentare da qualche suo Socio straniero o corrispondente.

Si comunica pure la lettera di ringraziamento inviata dal Prof. Martino Schanz della Università di Würzburg pel premio Vallauri conferitogli.

Il Socio Chironi presenta con parole di vivo elogio il volume del Socio Ruffini, *Le spese di culto delle Opere pie* (Torino, Bocca, 1908), offerto in omaggio dall'Autore, e ne rileva la somma importanza.

Il Socio D'Ercole, anche a nome del Socio Allievo, legge la relazione sulla memoria del Dott. Pietro Eusebietti, *Elementi di fasiopsicologia*. La Classe, approvata con votazione palese la relazione, che sarà inserita negli *Atti*, prende cognizione della Memoria e ne delibera con votazione segreta l'inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Per ultimo il Socio Brusa prende la parola per fare la seguente comunicazione:

Il ricorso Nasi ieri discusso dinanzi alle Sezioni unite civili della Suprema Corte Romana, adite in base alla legge 31 marzo 1877 detta dei conflitti di attribuzione, regolatrice delle competenze fra giurisdizioni ordinarie e speciali, rende opportuno di chiarire i termini veri delle più importanti questioni cui il ricorso ha dato motivo.

Le stesse Sezioni unite civili avevano già dovuto dichiarare con sentenza 6 febbraio 1907, che il Senato costituito in Alta Corte di giustizia, pur essendo una giurisdizione speciale, non possa tuttavia ritenersi soggetto alla censura della Corte dei conflitti, atteso il carattere costituzionale sovrano del potere ch'esso esercita qui come giudice. Limitata, però, a dire soltanto se la Corte d'assise avesse a ragione respinto l'eccezione d'incompetenza dell'autorità giudiziaria a conoscere dei reati imputati al Nasi, reati che il Pubblico Ministero reputava ministeriali e di competenza senatoria anzichè ordinaria, quella sentenza non potette pregiudicare l'attuale ricorso: ancorchè diretto alla stessa Corte dei conflitti, esso impugna la sentenza non più della giurisdizione ordinaria della Corte di assise, sibbene, e per eccesso di potere, nientemeno che quella dell'Alta Corte di giustizia.

Ciò posto, la questione che prima si presenta in appoggio del ricorso Nasi, porta a chiedere se basti l'indole giurisdizionale del potere attribuito dallo Statuto all'Alta Corte senatoria, per farlo rientrare nell'ordinamento generale giudiziario, sia pure, com'esso è, comprensivo delle giurisdizioni speciali.

Lo Statuto, pur facendo emanare, secondo la formula tradizionale, la giustizia dal Re, tutta quanta la giustizia senza distinzione di materia e di giudice, e pur prescrivendo che essa

sia amministrata in suo nome dai giudici ch'egli istituisce, e richiedendo inoltre la forma di legge per derogare all'organizzazione giudiziaria, come non dispone poi che i giudici dell'Alta Corte, benchè senatori e perciò nominati dal Re, siano istituiti dal Re stesso, e lo sono quindi direttamente invece dalla legge fondamentale del Regno, così neppure può dirsi che i giudici senatori faccian parte dell'ordine generale giudiziario, determinato e regolato dalle proprie leggi speciali. Ad essi pertanto non sono applicabili le norme comuni per la correzione delle sentenze delle altre giurisdizioni ordinarie o speciali, e speciali amministrative o anche militari.

Più grave è l'altra questione: se, cioè, sia possibile sottoporre al sindacato di un' autorità giudiziaria, per quanto elevata com'è la Corte dei conflitti, la giurisdizione speciale statutaria creata per giudicare i ministri del Re accusati dalla Camera dei deputati per reati da loro commessi nell'esercizio del potere esecutivo. Per correggere le sentenze proferite in questi casi, può esistere una superiore giurisdizione? Non certo quella affidata dalla legge a giudici istituiti e nominati dal Re, perchè il Re, capo irresponsabile del potere esecutivo, verrebbe a servirsi dei proprî giudici per giudicare delle cause penali dei proprî ministri responsabili — la cui responsabilità appunto copre la Corona — accusati dalla Camera elettiva e, al tempo stesso, menomerebbe così, anzi annullerebbe la prerogativa sovrana della Camera stessa. Quale altra potestà potrebbe dunque invocarsi? Il Re non ha giurisdizione; gli basta il diritto di grazia che gli proviene direttamente dalla Corona, e neppure ha in proprio quello di abolire l'azione penale con decreto di amnistia, perchè tale diritto gli è conferito dalla legge per delegazione. D'altro canto, il potere legislativo invaderebbe la funzione giudiziaria, se si arrogasse potestà giurisdizionale, sia pure per emendare illegalità incorse dal potere sovrano dell'Alta Corte senatoria di giustizia. Basta che le Camere legislative posseggano quella di giudicare dei titoli di nomina dei proprî membri, senza che vi s'aggiunga l'altra di sindacar le sentenze della Corte senatoria, e, potrebbe dirsi, pur quella di censurare anche le accuse mosse contro i ministri responsabili traducendoli innanzi alla Corte stessa.

Come nessuna possibilità esiste di annientare le accuse contro

i ministri responsabili, così nemmeno ha da ammettersi quella di annientare le sentenze pronunziate dal Senato giudice dei ministri stessi. Tutte le autorità supreme, tutti i poteri costituzionali possono con i loro atti, con le loro deliberazioni, cadere in errori, anche manifesti e gravi, che solo la pubblica coscienza può riprovare, perchè nulla vi ha nel mondo che sfugga alla legge di relazione, ch'è legge e limite nel tempo e nello spazio. Resta sempre salvo il potere legislativo di far ciò che è della propria missione di provvedere, cioè, nella misura del possibile, a ordinare le funzioni pubbliche in modo da prevenire il ripetersi degli errori in avvenire.

Relazione sulla Memoria del dott. P. EUSEBIETTI sugli *Elementi di Fasiopsicologia*, presentata dai prof.[ri] ALLIEVO e D'ERCOLE nell' adunanza del 16 febbraio 1908 alla Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

I sottoscritti si pregiano di presentare alla Classe i predetti *Elementi di Fasiopsicologia* del Dottore in Filosofia Pietro EUSEBIETTI, ed esprimono il desiderio che essi vengano inseriti nelle *Memorie* dell'Accademia.

L'EUSEBIETTI è uno studente, che si è laureato nel passato ottobre con una Dissertazione consistente appunto in questi *Elementi*. Benchè ancor giovane, ha cominciato a dare saggio di notevole intelligenza e laboriosità già nel 1905 con un lavoro (di 47 pagine) sulla *Coscienza di Giacomo Leopardi*, lavoro, nel quale ei mostra buon gusto letterario ed estetico ed acume critico nella comprensione e giudicazione della coscienza del Leopardi sì come poeta che come filosofo.

Quanto all'elemento filosofico, che è il principale e diretto de' suoi studii, l'EUSEBIETTI ne dette un ulteriore e miglior saggio in due altri lavoretti pubblicati nello scorso anno, l'uno col titolo di *Elementi di Didattica organica de' mezzi didattici sensibili*, l'altro con quello di *Sviluppo storico della parola: elementi di filosofia del linguaggio*. Questi due lavoretti, specialmente l'ultimo de' due (che tratta dello sviluppo fonico e grafico, non che di quello funzionale, sintattico e semasiologico della parola), si muovono nella concezione ed elaborazione preparatoria di quella materia, che costituisce poi l'argomento del lavoro che i sottoscritti presentano alla Classe.

Per incompiuti che possano essere questi due lavoretti, sopra tutto avuto riguardo ai titoli un po' troppo ampii e troppo dottrinali per essi, la qual cosa può dirsi in parte anche di quello che si presenta all'Accademia, è però indubitato che in quelli ed in questo il giovine autore mostra la serietà de' suoi studi, da una parte, cercando e pensando da più anni intorno alla materia del linguaggio, dall'altra, sforzandosi di trattarla scientificamente e sistematicamente.

Venendo ora agli *Elementi di Fasiopsicologia*, la mira speciale e diretta dell'autore è quella di studiare i fatti del linguaggio *dal punto di vista psicologico* propriamente detto, ossia di studiarli come prodotti psichici; il quale studio è da lui considerato come differente da quello che ne han fatto i glottologi. Questi, secondo lui, pur giovando allo studio psicologico, considerarono però il fenomeno del linguaggio in modo " quasi del tutto indipendente dalla psiche umana „ attribuendogli, a dir così, come una obbiettiva esistenza nelle stesse individualità subbiettive parlanti.

Secondo l'autore le ricerche intorno al linguaggio furono più fruttuose, quando i ricercatori, " abbandonando il concetto dell'esistenza obbiettiva delle lingue, le considerarono come un prodotto dell'umana psiche, e le studiarono quindi da un punto di vista psicologico „.

Per ciocchè concerne lo speciale punto di vista dell'autore in proposito, egli pensa che " il linguaggio è una funzione essenziale dello spirito „, e, come tale, non è altro che " un sistema di fenomeni prodotti da impulsi centrali e psichici „. E ne deduce come conseguenza che, se il linguaggio è un prodotto dello spirito, gli vanno " applicati gli stessi principii che si applicano ai fenomeni dello spirito in genere „.

Questo è il punto di vista e la norma, secondo cui egli studia e determina i fatti e le leggi negli *Elementi di Fasiopsicologia* che si presentano all'Accademia.

La materia di questi è considerata e svolta in tre capitoli, che trattano della *Corrente psicofasica* in genere, della *Corrente fasica* e della *Corrente psichica*. Quest'ultima, che sarebbe stato meglio di considerar come prima, è per l'autore la più importante, siccome quella che determina la corrente del linguaggio, o corrente psicofasica.

Quanto alla denominazione della più importante corrente, di quella che ha appellata *psichica* in genere, gli va attribuita la lode, che egli ha creduto, e non a torto, di dare un più giusto nome a quella che il James, uno degl'importanti psicologi contemporanei, chiama *corrente del pensiere*, per la ragione che essa è " costituita di elementi della coscienza, che pur essendo coscienti, non sono però tutti riducibili a fenomeni teoretici o pensieri ".

I sottoscritti non possono entrare certamente nella esposizione e particolareggiata giudicazione del lavoro, tanto più che, ad onta delle proporzioni piuttosto ristrette del medesimo, è pur considerata e trattata una quantità non piccola di materia e di problemi a questa relativi, specialmente per le due più importanti correnti, la fasica e la psichica. Nella corrente fasica, per esempio, egli tratta di specifiche correnti, in cui essa, secondo i varii elementi che la costituiscono, si distingue, come le correnti fonetica, grafica, cinetica, endocinetica. Fra queste e dopo di queste parla di quella che egli appella *corrente eido-fasica*, che è " costituita da elementi ideo-motori " e *probabilmente* (è sua supposizione) da fantasmi verbali, i quali essi stessi " sieno immagini sintetiche " comprendenti alla lor volta come elementi costitutivi le immagini delle diverse correnti predette, e secondo la prevalenza di queste nella coscienza. Questo punto della corrente eido-fasica è uno de' più notevoli e più interessanti da lui trattati e descritti.

Nel trattare della corrente fasica agita e a modo suo risolve alcune quistioni psicologiche importanti, per esempio, quella " se i fantasmi uditivi esistono sempre nella nostra coscienza o vi si presentano soltanto quando vogliamo parlare ". Ne considera ed agita un'altra, quella dell'esistenza o non esistenza di un indeterminato psichico, che egli pensa e designa come " un polviscolo o nebbia psichica ", che poi si distingue e determina, eccetera.

I sottoscritti non potrebbero estendersi a mostrare se i suoi pensieri, e soluzioni di quistioni in proposito, sieno sempre ed in tutto veri. Ma essi vedono e rilevano in tali concezioni la mente pensante e speculante dell'autore.

Per non andar per le lunghe, i due relatori sottoscritti notano ancora brevemente, che anche la materia trattata ed esposta

nell'ultimo capitolo della corrente psichica, è degna di attenzione. A questa corrente egli attribuisce tre funzioni. La prima è per l'autore una funzione psicologica *costituente*, " nel senso che produce, se non i materiali, almeno un gran numero di forme della vita interna „. La seconda è una funzione psicologica *obbiettivante* (della parola), in quanto " è appunto per mezzo della parola che la vita interiore del singolo individuo (la quale altrimenti sarebbe impenetrabile) diventa obbiettiva, esteriore „. Questa seconda funzione piglia poi varie forme, per esempio, essa è *significante*, se il contenuto psichico è obbiettivo ovvero logico ed intenzionale; è *esprimente* se il contenuto è uno stato della psiche stessa non ancora obbiettivato in uno stato psicologico. La terza è la funzione *riproducente*, se imita e riproduce sia un obbietto de' sensi esterni, che un obbietto della fantasia. Fatta e determinata la predetta distinzione della funzione di *significazione*, di *espressione* e di *riproduzione* del linguaggio, entra nelle particolarità della cosa, nelle quali particolarità son presi in considerazione, dal punto di vista del linguaggio, le più alte funzioni psicologiche come quelle di idea o concetto, giudizio e sillogismo.

Non potrebbero i sottoscritti esser sempre ed in tutto di accordo nelle cose da lui pensate ed esposte, anzi potrebbero far delle osservazioni sopra non poche di esse ed additarvi delle lacune e delle affermazioni non sostenibili. Ma, ciò non ostante, essi non possono non lodare e pregiare la serietà, laboriosità e diligenza dell'autore nella concezione ed effettuazione del lavoro, e rilevare, per giunta, che egli nel corso di questo non solo mostra buona attitudine agli studi filosofici, specialmente psicologici, ma che sovente ha anche vedute proprie da lui sostenute d'incontro a quelle di altri pensatori.

Per le esposte considerazioni e ragioni i sottoscritti propongono ai rispettabili colleghi della Classe che il lavoro esaminato sia ammesso alla lettura.

Giuseppe Allievo.
Pasquale D'Ercole, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo delle LL. MM. e RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 5 Aprile 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Socii: SPEZIA, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Socio SALVADORI scusa la sua assenza.

Il Presidente comunica l'avviso di concorso al premio di fondazione Arrigo-Forti pubblicato dal R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

Il Presidente presenta le opere seguenti pervenute in omaggio all'Accademia: dal Socio straniero E. HAECKEL, 1° *La lotta per l'evoluzione*, 1ª traduzione italiana; 2° *Wanderbilder*; dal Socio corrispondente Maurizio CANTOR, *Vorlesungen der Geschichte der Mathematik*, 5° fasc. del 4° vol.

Il Segretario presenta per l'inserzione negli *Atti* la nota del Socio corrispondente Paolo PIZZETTI, intitolata: *Sulla dimostrazione di un teorema fondamentale nel calcolo delle probabilità*.

Ing. O. ZANOTTI BIANCO, *I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. Appunti per la storia della geodesia*. Nota 8ª, dal Socio JADANZA.

Azione chimica del clorato potassico sulla pirite e sull'hauerite, del Socio SPEZIA.

LETTURE

Sulla dimostrazione di un teorema fondamentale nel calcolo delle probabilità.

Nota del Socio corrispondente PAOLO PIZZETTI.

Il teorema di GIACOMO BERNOULLI intorno alla probabilità del risultato limite di un numero infinitamente grande di prove ripetute è generalmente dimostrato nei Trattati in un modo che non può considerarsi come abbastanza rigoroso. In questa Nota, senza scostarmi dai principii informativi delle consuete dimostrazioni, ne modifico alquanto il procedimento analitico in guisa da renderlo libero da qualsiasi obbiezione.

1. — Supponiamo che abbiano luogo s prove indipendenti, in ciascuna delle quali un avvenimento A abbia la probabilità costante p di presentarsi. Si chiami r il numero di volte che l'avvenimento si presenterà nelle s prove, e sia Π la probabilità che la differenza

$$\frac{r}{s} - p$$

sia, in valore assoluto, minore di una quantità positiva ϵ; il teorema di Bernoulli può enunciarsi dicendo che: preso ϵ piccolo a piacere, si può dare ad s un valore così grande che si abbia $1 - \Pi < \eta$, dove η è una quantità positiva piccola a piacere.

Ovvero che: *la probabilità che il rapporto* $r:s$ *differisca da* p *di una quantità piccola a piacere, si approssima indefinitamente alla certezza col crescere infinito del numero delle prove.*

2. — Posto

$$q = 1 - p, \qquad \beta = 1 - \alpha,$$

la probabilità che, in s prove, l'avvenimento A si presenti un numero di volte $v = \alpha$, è

$$\frac{s!}{\alpha!\,\beta!}\,p^\alpha q^\beta\,;$$

Questa probabilità è massima per

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = ps + \omega \\ \beta = qs - \omega. \end{array} \right. \qquad |\omega| < 1.$$

La probabilità che il numero v sia compreso fra $\alpha - l$ ed $\alpha + l$ è quindi

$$(2) \qquad \Pi = \sum_{r=-l}^{r=l} P_r$$

dove

$$P_r = \frac{s!}{(\alpha - r)!\,(\beta + r)!}\,p^{\alpha - r} q^{\beta - r}.$$

Sostituendo pei fattoriali l'espressione di Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\, e^{F(n)}$$

dove

$$(3) \qquad 0 < F(n) < \frac{1}{12n}$$

e ponendo in luogo di p e q le espressioni $\frac{\alpha - \omega}{s}$, $\frac{\beta + \omega}{s}$ che si deducono dalle (1), potremo scrivere

$$(2') \qquad P_r = A.B.C.D. \sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}},$$

dove

$$A = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha - r)(\beta + r)}},$$

$$B = \left(\frac{\alpha - \omega}{\alpha - r}\right)^{\alpha - r}, \quad C = \left(\frac{\beta + \omega}{\beta + r}\right)^{\beta + r},$$

$$D = e^{F(s) - F(\alpha - r) - F(\beta + r)}.$$

Osserviamo poi che per $|x| < 1$ si ha

$$|\log(1 \pm x)| < \frac{|x|}{1-|x|}$$

ed anche

$$\log(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} + E \tag{4}$$

dove

$$|E| < \frac{|x|^3}{3(1-|x|)}.$$

Avremo quindi:

$$|\log A| < \frac{1}{2} \left\{ \frac{|r|}{\alpha - |r|} + \frac{|r|}{\beta - |r|} \right\},$$

e poichè

$$|r| < l, \quad \alpha + \beta = s, \quad l < \alpha, \quad l < \beta,$$

$$|\log A| < \frac{ls}{2(\alpha - l)(\beta - l)}. \tag{5}$$

Abbiamo poi, in forza della (4):

$$\log B = (\alpha - r) \log\left(1 + \frac{r - \omega}{\alpha - r}\right) = r - \omega - \frac{(r-\omega)^2}{2(\alpha - r)} + E_1$$

dove

$$|E_1| < \frac{|r-\omega|^3}{3(\alpha - r)\{\alpha - r - |r - \omega|\}} < \frac{(l+1)^3}{3(\alpha - l)(\alpha - 2l - 1)}.$$

D'altra parte

$$\left| \frac{(r-\omega)^2}{2(\alpha - r)} - \frac{r^2}{2\alpha} \right| = \left| \frac{-2\alpha\omega r + \alpha\omega^2 + r^3}{2\alpha(\alpha - r)} \right| <$$

$$< \frac{2\alpha l + \alpha + l^3}{2\alpha(\alpha - l)} < \frac{l+1}{\alpha - l} + \frac{l^3}{2\alpha(\alpha - l)};$$

quindi

$$\log B = r - \omega - \frac{r^2}{2\alpha} + \epsilon_1 \tag{6}$$

dove

$$|\epsilon_1| < \frac{(l+1)^3}{3(\alpha - l)(\alpha - 2l - 1)} + \frac{l^3}{2\alpha(\alpha - l)} + \frac{l+1}{\alpha - l}$$

(6′)

$$< \frac{5}{6} \frac{(l+1)^3}{(\alpha - l)(\alpha - 2l - 1)} + \frac{l+1}{\alpha - l}.$$

Similmente

$$\log C = -r + \omega - \frac{r^2}{2\beta} + \epsilon_2. \tag{7}$$

dove

$$|\epsilon_2| < \frac{5}{6}\,\frac{(l+1)^3}{(\beta-l)(\beta-2l-1)} + \frac{l+1}{\beta-l}. \tag{7'}$$

E finalmente per la (3):

$$|\log D| < \frac{1}{12s} + \frac{1}{12(\alpha-l)} + \frac{1}{12(\beta-l)}. \tag{8}$$

Avremo dunque, sommando le (5), (6), (7), (8):

$$\log P_r = -\frac{r^2 s}{2\alpha\beta} + \log\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}} + E \tag{9}$$

dove

$$|E| < \rho$$

essendo con ρ indicata la somma dei secondi membri delle (5), (6′), (7′), (8), ossia

$$\begin{aligned}\rho = {} & \frac{l}{2\alpha}\,\frac{s}{\beta}\,\frac{1}{\left(1-\frac{l}{\alpha}\right)\left(1-\frac{l}{\beta}\right)} + \frac{l+1}{\alpha\left(1-\frac{l}{\alpha}\right)} + \frac{l+1}{\beta\left(1-\frac{l}{\beta}\right)} + \\ & + \frac{5}{6}\,l^3\left(1+\frac{1}{l}\right)^3\left\{\frac{1}{\alpha^2\left(1-\frac{l}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2l+1}{\alpha}\right)} + \frac{1}{\beta^2\left(1-\frac{l}{\beta}\right)\left(1-\frac{2l+1}{\beta}\right)}\right\} + \\ & + \frac{1}{12s} + \frac{1}{12(\alpha-l)} + \frac{1}{12(\beta-l)}.\end{aligned} \tag{10}$$

La (9) può scriversi:

$$P_r = e^E\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}}\,e^{-\frac{r^2 s}{2\alpha\beta}}.$$

Posto

$$x = r\sqrt{\frac{s}{2\alpha\beta}}, \quad \gamma = l\sqrt{\frac{s}{2\alpha\beta}}, \quad \Delta x = \sqrt{\frac{s}{2\alpha\beta}} \tag{11}$$

la formola (2) dà pertanto:

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{x=-\gamma}^{\gamma} e^{E-x^2}.\Delta x.$$

Ricordando che $|E| < \rho$ e che ρ è indipendente dall'indice r e quindi dal valore di x, avremo allora:

(12) $$Se^{-\rho} < \Pi < Se^{\rho}$$

ove con S è indicata la somma

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{-\gamma}^{\gamma} e^{-x^2} \Delta x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{0}^{\gamma} e^{-x^2} \Delta x - \frac{\Delta x}{\sqrt{\pi}}.$$

Abbiamo poi, essendo la funzione e^{-x^2} decrescente al crescere di $|x|$

$$0 < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{0}^{\gamma} e^{-x^2} \Delta x - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-x^2} dx < \frac{2.\Delta x}{\sqrt{\pi}}:$$

e quindi

$$\left| S - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-x^2} dx \right| < \frac{\Delta x}{\sqrt{\pi}}.$$

Questa formola dimostra innanzi tutto che la S si mantiene finita finchè si conserva tale la Δx.

Di più, com'è facile verificare colla integrazione per parti:

$$0 < 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-x^2} dx < \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Da questa e dalla (13)

$$|1 - S| < \sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}} + \frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma\sqrt{\pi}}.$$

D'altra parte dalla (12) si deduce che la differenza

(14) $$S - \Pi$$

è minore, in valore assoluto, di $(e^{\rho} - e^{-\rho})S$, poichè entrambi i due termini della differenza (14) sono compresi fra Se^{ρ} e $Se^{-\rho}$. Quindi finalmente

$$1 - \Pi = \eta$$

dove

(15) $$|\eta| < S(e^{\rho} - e^{-\rho}) + \sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}} + \frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma\sqrt{\pi}}.$$

3. — Il simbolo Π esprime la probabilità che sia soddisfatta la doppia disuguaglianza

$$\alpha - l \leq v \leq \alpha + l,$$

ovvero

$$p + \frac{\omega - l}{s} \leq \frac{v}{s} \leq p + \frac{\omega + l}{s}$$

od anche che sia

$$\left| \frac{v}{s} - p \right| < \epsilon, \tag{16}$$

dove ϵ è la maggiore delle due quantità $\left|\frac{\omega - l}{s}\right|$, $\left|\frac{\omega + l}{s}\right|$.

Facciamo ora crescere s all'infinito e facciamo, corrispondentemente, variare l in guisa che i rapporti $\frac{l}{s}$, $\frac{l^3}{s^2}$ tendano a zero e in pari tempo il rapporto $\frac{l}{\sqrt{s}}$ assuma valori arbitrariamente grandi.

Ciò può ottenersi ponendo

$$s = an^{\sigma}, \quad l = bn ,$$

dove a e b sono quantità finite positive. σ e λ sono numeri positivi tali che

$$\frac{2}{3}\sigma > \lambda > \frac{\sigma}{2}.$$

Crescendo n indefinitamente si avrà:

$$\lim \frac{l}{s} = 0 \quad \lim \frac{l^3}{s^2} = 0 \quad \lim \frac{l}{\sqrt{s}} = \infty.$$

Ammettiamo che nè l'una nè l'altra delle p e q sia infinitamente piccola, in guisa che i rapporti $\alpha : s$ e $\beta : s$ siano finiti; si avrà allora anche

$$\lim \frac{l}{\alpha} = \lim \frac{l}{\beta} = \lim \frac{l^3}{\alpha^2} = \lim \frac{l^3}{\beta^2} = 0$$

$$\lim \frac{l}{\sqrt{\alpha}} = \lim \frac{l}{\sqrt{\beta}} = \infty$$

col crescere infinito di s. Allora, col dare valori sufficientemente grandi ad n, si potranno rendere piccole a piacere tanto la quantità ρ definita dalla (10), quanto la ϵ che figura nella (16), quanto la $\sqrt{\frac{s}{2\pi\alpha\beta}}$, e si renderà grande a piacere la quantità indicata

con γ, la quale è dell'ordine di grandezza di $l : \sqrt{s}$. Saranno così resi arbitrariamente piccoli i tre termini nel 2° membro della (15) e quello della (16); sicchè le differenze

$$1 - \Pi, \quad \frac{r}{s} - p$$

potranno entrambe rendersi piccole a piacere col crescere indefinito del numero delle prove.

Il teorema di Bernoulli è così dimostrato.

Nota. — Nelle applicazioni del calcolo delle probabilità è comune l'uso delle tavole numeriche della funzione $\Theta(\gamma)$ per la valutazione approssimata della probabilità Π che, in un numero grande s di prove, l'avvenimento si presenti un numero di volte compreso fra $ps - l$ e $ps + l$. Si sostituisce, per questo, alla espressione esatta della Π la approssimata:

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-x^2} dx = \Theta(\gamma) \tag{17}$$

dove

$$\gamma = l \sqrt{\frac{s}{2\alpha\beta}} = \frac{l}{\sqrt{2pqs}}.$$

Non è difficile dimostrare, sviluppando l'espressione di P_r data dalla formola (2'), che l'errore che si commette in questo modo è, prossimamente, espresso da

$$E = -\frac{1}{16}\left(\frac{2\alpha\beta}{s}\right)^2 \left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}\right) \Theta(\gamma).$$

Per $\alpha = \beta$, in particolare, si ha:

$$E = -\frac{1}{4s}\, \Theta(\gamma).$$

Così p. es. se $s = 5000$, $p = q = \frac{1}{2}$, l'errore dato dalla (17) sarebbe circa

$$\frac{1}{20000}\, \Theta(\gamma).$$

Per $\gamma = 3$ si ha $\Theta(\gamma) = 1 - 0{,}000023$, sicchè l'errore ora menzionato è superiore alla differenza $1 - \Pi$ che interessa valutare.

Se dunque il numero s non è effettivamente *molto* grande, l'uso della (17) per valutare delle probabilità *molto prossime all'unità*, dà risultati *illusorii*.

I concetti moderni sulla figura matematica della Terra. Appunti per la storia della Geodesia.

Nota Ottava.

La variazione della latitudine coll'altezza e la Figur der Erde *di E. Bruns*

dell'Ing. OTTAVIO ZANOTTI BIANCO.

1.

Dopo aver studiato le superficie di livello, Bruns nella *Figur der Erde* s'accinge a studiare le traiettorie ortogonali di esse, ossia le linee di forza o verticali, che abbiamo definite nella nota settima.

In questo svolgimento giovandosi di pochi teoremi sulla geometria delle curve storte e dei risultati ottenuti circa le superficie di livello, e prendendo come prima gli assi delle xy nel piano tangente nell'origine alla superficie di livello, e quello positivo delle z nella direzione della gravità g in essa, Bruns dimostra le formole seguenti:

$$
(G)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial g'}{\partial x'}=-4\pi(k_0-k_0')\operatorname{sen}\delta\cos\delta\\
&\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial g'}{\partial y'}=0;\ \frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial g'}{\partial z}=\frac{dg}{ds}-\frac{dg'}{ds}=-4\pi(k_0-k_0')\cos^2\delta\\
&g\left(\frac{\cos\varphi}{R}-\frac{\cos\varphi'}{R'}\right)=-4\pi(k-k_0')\operatorname{sen}\delta\cos\delta;\ g\left(\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R}-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R'}\right)=0.
\end{aligned}\right.
$$

Nelle quali ds ed R sono rispettivamente l'elemento di arco della linea di forza passante per il punto P della superficie di livello ed in esso (e dx, dy, dz le proiezioni di esso sui tre assi) ed R il raggio di curvatura di essa linea: φ è l'azimut del raggio di curvatura, od, il che torna lo stesso, del piano del

cerchio di curvatura, o piano osculatore. Queste quantità relative alla linea di forza, in quanto essa appartiene allo spazio T', sono designate, non altrimenti che nella nota settima, dalle stesse lettere affette da un indice. Bruns interpreta come segue le equazioni (G):

“ Se un osservatore si muove con velocità uniforme lungo una linea di forza, le due ultime equazioni dimostrano che il suo zenit descrive in cielo una curva continua ; ma la direzione e la velocità di questo movimento dello zenit variano bruscamente, non appena nel passaggio del limite di due strati di massa contigui la densità varia bruscamente, eccetto che nel caso particolare in cui $\delta = 0$ ovvero $= \frac{\pi}{2}$. Le tre prime equazioni mostrano che nelle medesime presupposizioni, la gravità varia bensì in modo continuo, ma la velocità di questa variazione diviene, nei luoghi indicati, discontinua, tranne quando $\delta = \frac{\pi}{2}$ ”.

Intorno a questa trattazione di Bruns, Helmert (*Theorien der...*, II, pag. 47) così scrive:

“ Le linee di *forza o verticali*, in causa della variazione continua della direzione del filo a piombo sono incurvate in modo continuo, vedi § 12, pag. 14 ; tuttavia la loro curvatura è, come si osservò, discontinua, e così che non soltanto la grandezza del raggio di curvatura ma anche la posizione del piano osculatore, può mutare di grandezze finite, quando il punto P si sposti lungo la linea verticale di tratti infinitamente piccoli (Vedasi al riguardo Bruns, *Figur der Erde*, pagg. 12, 13 e 20) ”. Questa è la chiusa del § 26 del cap. I, che ha per argomento: *Gravità e verticali nell'attraversare una superficie di discontinuità della densità*; in esso è pur data la terza delle formole (G), che dà la variazione della velocità $dg:ds$ (invece di s, Helmert ha h) nello spostarsi di un punto lungo la verticale. Di questa formola Helmert fa un'applicazione a calcolare come varii la gravità nell'interno della Terra; su di essa dovremo trattenerci alquanto e vi ritorneremo fra breve: ora terminiamo la rassegna del contenuto del § 2 della *Figur der Erde.* Ivi è analizzato l'andamento della curvatura della superficie di livello e gioverà riprodurre qui quel brano quasi per intero.

“ Le superficie di livello della crosta terrestre sono generalmente convesse verso il fuori, cioè ρ, ρ_1, ρ_2 sono positivi.

Valori negativi di ρ sopra un geoide, avrebbero questa conseguenza: in una tal regione, quello fra due punti che è più a nord o più ad occidente dell'altro, avrebbe la minore latitudine settentrionale, o la minor longitudine occidentale. L'esperienza fino ad oggi acquisita dimostra che è estremamente improbabile che sopra un geoide si presentino estese regioni con curvatura negativa, poichè allora accadrebbe ad esempio che la differenza fra l'ampiezza geodetica e quella astronomica di un arco, cioè la differenza fra le deviazioni delle verticali negli estremi dell'arco sarebbe maggiore di tutta l'ampiezza geodetica. Per un arco della lunghezza di un miglio geografico presupporrebbe una differenza delle deviazioni della verticale di più di $4'$, cioè deviazioni della verticale di più di $2'$. Per contro il presentarsi di curvature negative, si può, preventivamente almeno, riguardare come possibile, e nelle superficie di livello dell'interno in chiazze ristrettissime della Terra, tali concavità esistono sicuramente.

“ Poichè la gravità in generale non raggiunge il suo massimo alla superficie della Terra, ma ad una certa profondità (*), così fino a questa profondità W_{33} è positivo „. Bruns aveva trovato le relazioni:

$$2gm = -W_{11} - W_{22} \quad \text{e} \quad \Delta^2 W = -4\pi k + 2\omega^2 \ (^{**}).$$

Da queste si ha:

$$2gm = -W_{11} - W_{22} = W_{33} - \Delta^2 W = W_{33} + 4\pi k - 2\omega^2.$$

Ora si ha:

$$g_0 = \frac{4}{3}\pi r_0 K, \qquad \text{donde} \qquad 4\pi = \frac{3g_0}{Kr_0}$$

quindi sostituendo:

$$\text{(H)} \quad r_0 m = \frac{r_0}{2g} W_{33} + \frac{g}{g}\left(\frac{3}{2}\frac{k}{K} - \frac{r_0\omega^2}{g_0}\right) \text{ (Bruns, p. 14, form. (G)).}$$

(*) Fra breve ritorneremo sovra questa proposizione per tesserne l'istoria.

(**) Bruns adotta il segno ΔW invece del $\Delta^2 W$ per designare l'espressione $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{dz^2}$; in Italia, dopo Betti, il simbolo ΔW è generalmente usato per rappresentare l'espressione $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2$.

finchè $W_{33} > 0$ anche $m > 0$, $\left\{ 2m = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right\}$, e quindi delle due grandezze ρ_1 e ρ_2 certamente una è positiva. La frazione $\frac{r_0 \omega^2}{g_0}$ essendo assai prossimamente eguale al rapporto della forza centrifuga alla gravità sotto l' equatore, è quindi una frazione molto piccola e notevolmente minore di $\frac{3}{2} \frac{k}{K}$, tranne quando il punto considerato si trova nell'aria. Alla superficie W_{33} è assai da vicino in media $= \frac{2g_0}{r_0}$, quindi la frazione $\frac{r_0 W_{33}}{2g}$ è quasi $= 1$. Una convessità del geoide verso l'interno, cioè il caso di $m < 0$, $n > 0$, è quindi estremamente improbabile, e quando una curvatura principale è negativa, l'altra curvatura principale in compenso sarà tanto più forte positivamente. Inversamente se $m < 0$, W_{33} è sicuramente negativa, escludendo ancora il caso di un k molto piccolo. Siccome

$$W_{33} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial W_3}{\partial z} = \frac{dg}{dz} = \frac{dg}{ds},$$

l'equazione (H) si potrà scrivere:

$$r_0 m = \frac{1}{2} \frac{r_0}{ds} \frac{dg}{g} + \frac{g_0}{g} \left(\frac{3}{2} \frac{k}{K} - \frac{r_0 \omega^2}{g_0} \right)$$

la quale c'insegna che, almeno in teoria, la curvatura media di una superficie di livello si può subito calcolare non appena si conosca, oltre R, la gravità e la sua variazione coll'altezza. L'ultima formola di Bruns è data anche dal Prof. Pizzetti nelle sue *Lezioni* già rammentate.

In sul finire del § 2 Bruns si richiama alla prima delle sue formole (E) (le (E) della Nota Settima), od anche le (F) della nota stessa, cioè:

$$r_0 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} \right) = 3 \frac{k_0 - k_0'}{K} \frac{g_0}{g} \operatorname{sen}^2 \delta \cos^2 \psi,$$

e scrive:

“ Essa c'insegna che nel passaggio da un mezzo ad uno di esso meno denso la curvatura di ogni sezione normale di una superficie di livello, diminuisce bruscamente (in senso algebrico). Da ciò e dalla continuità di questa curvatura nell'interno di ogni singolo strato di massa, se ne può fin d'ora dedurre

che un geoide nel suo estendersi attraverso alla crosta terrestre, nei luoghi di densità maggiore o minore, in confronto dell'ellissoide terrestre possiede, in generale, delle ondulazioni verso l'interno o verso l'esterno; però rimandiamo ai capitoli seguenti la rigorosa dimostrazione di questa proprietà del geoide ...

II.

Veniamo ora all'applicazione fatta da Helmert della terza delle (G), cioè:

$\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g'}{\partial z} = \frac{dg}{ds} - \frac{dg'}{ds} = -4\pi(k_0 - k_0')\cos^2\delta$ (*Höhere Geod.*, II, p. 49).

Egli vuol trovare come varii la gravità nell'interno della Terra, percorrendo una verticale; a tal fine nell'ultima formola pone al luogo di 4π il valore che si ricava dal valore dell'attrazione nelle vicinanze della superficie fisica della Terra sferica, di raggio R, $g = \frac{4}{3}\pi KR$ (la costante di Gauss essendo $= 1$), cioè $4\pi = 3g : KR$. Rappresentiamo, secondo Helmert, con dh l'elemento di verticale, e poniamo $\Delta \frac{dg}{dh} = \frac{dg}{dh} - \frac{dg'}{dh}$, e così $\Delta k_0 = k_0 - k_0'$, supponendo $k_0' > k_0$, sarà:

$$(a) \qquad \Delta \frac{dg}{dh} = \frac{3\Delta k_0}{K} \frac{g}{R} \cos^2\delta ;$$

e coi simboli di Helmert:

$$\Delta \frac{dg}{dh} = \frac{3\Delta\Theta_0}{\Theta m} \frac{g}{R} \cos^2 v.$$

Procedendo dalla superficie verso l'alto, e chiamando M la massa terrestre ed H l'altezza del punto che si considera, si ha, con un'approssimazione ampiamente sufficiente, all'altezza H:

$$g = \frac{M}{(R+H)^2}.$$

Se ora designamo col simbolo $(\ )_a$ la quantità presa verso l'alto a partire dalla superficie della terra e con $(\ )_i$ quella riferentesi all'interno della Terra, avremo:

$$(b) \qquad \left(\frac{dg}{dh}\right)_a = \left(\frac{dg}{dH}\right) = -\frac{2g}{R}.$$

Ora nel passaggio dall'aria ad una roccia orizzontale $\delta=0$, $\cos\delta=1$, e poichè Δk_0 è assai prossimamente, in tale condizione, eguale alla densità della roccia k_i, così addizionando membro a membro la (a) e la (b) avremo:

$$(c) \qquad \left(\frac{dg}{dh}\right)_i = -\frac{g}{R}\left(2-\frac{3k_i}{K}\right).$$

Osservando che $\Delta\left(\frac{dg}{dh}\right)$ è in questo caso

$$=\left(\frac{dg}{dh}\right)_i - \left(\frac{dg}{dh}\right)_a.$$

" Ma siccome k_i in generale si può porre eguale ad $\frac{1}{2}K$, così questa formola prova che la variazione della velocità di g sotto alla superficie fisica della Terra. è soltanto circa la quarta parte del suo ammontare sopra quella superficie. In ogni caso però sotto la superficie fisica terrestre si verifica, fino ad una certa profondità, un aumento di g „ (Vedi al riguardo cap. 6, § 13).

Più sopra vedemmo che anche Bruns accenna a questo aumento di g fino ad una data profondità. Vediamo l'istoria di questo fatto, come avverte Helmert, spesso trascurato (*Höhere Geodäsie*, II, pag. 493). Ivi si legge il passo seguente:

" Ed. Schmidt, nel vol. I della sua opera *Geografia matematica e fisica*, pag. 360, investiga il comportarsi della gravità nell'interno vicino alla superficie e trova parimenti un aumento, della cui esistenza non sempre si è tenuto conto „.

Fermiamoci un momento sopra questo fatto dell'aumento della gravità fino ad una certa profondità; intorno ad esso crediamo che il solo libro italiano, che ne tratti matematicamente, sia quello dell'autore di queste pagine: *Il Problema Meccanico della Figura della Terra*, vol. II, parte prima: qui ne tesseremo l'istoria.

Nel 1775 il sig. De Dolomieu, pubblicò nel *Journal de Physique*, 6, VII, 1775, un lavoro intitolato: *Expériences sur la pesanteur des corps à différentes distances du centre de la Terre, faites aux mines de Montrelay en Bretagne.* Nel fascicolo seguente il sig. G. L. Le Sage pubblicava una nota intitolata: *Expériences et vues sur l'intensité de la pesanteur dans l'intérieur de la Terre.*

Le esperienze di Dolomieu consistono in pesate grossolane alla bocca ed al fondo di pozzi di miniera: i loro risultati sono contradittori, e nello scritto vi sono anche errori di teoria, e poco o nulla ha perduto il prof. Poynting nel non averlo letto (*The Mean Density of the Earth*. London. Griffin. 1894. pag. XIX).

Il Le Sage, autore della seconda delle Memorie sopra citate, è l'inventore della spiegazione della gravità, a mezzo di *corpuscoli ultramondani*, che ancora oggidì è la meno fantasiosa di quante ne furono proposte. Egli ne diede una prima esposizione nel suo *Essai de Chimie Mécanique*, premiato a Rouen e nel *Mercure* di maggio 1756.

La citata Memoria di Le Sage è registrata nella bibliografia americana, e segnata coll'asterisco, il quale significa che essa non è stata vista dall'autore. Io pure l'ho inutilmente cercata nel volume citato. È curioso che la grande bibliografia scientifica della Società Reale di Londra non menzioni alcuno degli scritti di questo Le Sage, e neppure Wolf ne fa cenno nella sua bibliografia del pendolo, nè Boersch nella sua: quella nota è però registrata da Houzeau e Lancaster nel volume secondo della loro *Bibliographie Astronomique* (colonna 1164).

Nel 1826 Drobisch mostrò per il primo come dalla numerazione delle oscillazioni di un pendolo alla superfice ed in un punto interno della crosta terrestre si potesse dedurre la densità media della Terra: *De vera lunae Figura observationibus determinanda cet. annexa Appendice de interiori Terrae natura*, Lipsia, 1826. Questa Memoria manca in varie bibliografie di questo argomento. Nello stesso anno, ed indipendentemente, G. Biddel Airy ebbe l'idea di determinare la densità media della Terra a mezzo di osservazioni del pendolo alla bocca ed al fondo di un profondo pozzo di miniera. Rimandiamo per questo metodo al volume secondo della parte prima, pag. 145 e seguenti, del nostro lavoro intitolato il *Problema Meccanico della Figura della Terra*. Dopo le esperienze di Airy, Drobisch scrisse su di esse due altre note: *Ueber die in den Minen von Dolcoath in Cornwall neuerlich angestellten Pendel Beobachtungen*, nei *Poggendorf Annalen*, vol. X, 1827, pagg. 444-456 — *Ausfürlicher Bericht über mehrere in den Jahren 1825 und 1826 in den Minen von Dolcoath zur Bestimmung der Mittleren Dichtigkeit der Erde angestellte Pendel-Versuche*, nei *Poggendorf Annalen*, vol. XIV, 1828, pagg. 409-426.

Le Memorie di Drobisch e le esperienze di Airy si fondano sulla proposizione che la gravità va crescendo nella crosta terrestre fino ad una certa profondità, oltrepassata la quale, essa riprende la nota legge di diminuzione; di poi tutte le opere che trattano della determinazione della densità media della Terra, esponendo il metodo di Airy, dimostrano quella proposizione.

Intorno ad essa, al luogo sopra citato, Schmidt svolse una ricerca teorica più minuta.

In questi studi avemmo già occasione di occuparci della menzionata opera di Schmidt, il cui primo volume è datato Göttingen, 1829. Chiamando Γ la gravità nel punto della crosta terrestre che si considera, G la gravità alla superficie, λ il rapporto della profondità al semidiametro terrestre, k_s la densità superficiale della crosta terrestre, e trascurando i termini che sono proporzionali alla forza centrifuga ed allo schiacciamento, Schmidt trova

$$\Gamma = G(1 + 2\lambda) - 4\pi k_s a\lambda;$$

a essendo il semiasse maggiore dell'ellissoide superficiale: egli suppone poi una legge della densità tale che sia $K = k_s . 1,815$, quindi:

$$\Gamma = G(1 + 2\lambda) - \frac{G\lambda}{0,605} = G\left(1 + \lambda\left(2 - \frac{1}{0,605}\right)\right) = G\left\{1 + \frac{0,210}{0,605}\lambda\right\} =$$

$$= G\left(1 + \frac{1}{3}\lambda\right);$$

ben inteso fino a che λ, cioè il rapporto della profondità del punto considerato sotto la superficie terrestre, sia dell'ordine della forza centrifuga, poichè su tale condizione è basata la trattazione di Schmidt.

Sembra però che quella cognizione dell'aumento della gravità fino ad una certa profondità nella crosta terrestre, non fosse molto divulgata, poichè nel 1842 Saigey scriveva quanto segue (*):

“ Dans tous les ouvrages élémentaires de physique, on dit, “ et cette assertion est répétée par les professeurs en général,

(*) *Petite Physique du globe*, 1842, vol. II, p. 185.

" que la pesanteur va diminuant dans l'intérieur du globe, comme
" la distance au centre. Cela résulterait de ce que les couches
" extérieures au point que l'on considère, ne produisant plus
" sur ce point que des attractions qui s'entre-détruisent, on
" doit seulement tenir compte des couches situées au-dessous
" du même point, lesquelles agissent comme si toute leur masse
" était condensée au centre de la terre.

" Ces deux propositions sont vraies, que les couches exté-
" rieures soient sphériques ou elliptiques, homogènes ou hétéro-
" gènes, si l'on fait abstraction de l'aplatissement des couches
" intérieures. Mais la conclusion qu'on en tire, savoir, que la
" pesanteur diminuerait comme la distance au centre, ne serait
" juste que dans le cas de l'homogénéité de la terre.

" Si la terre est formée de couches hétérogènes croissant
" en densité de la surface au centre, la pesanteur diminuera
" dans un moindre rapport que la distance au point central ".

Saigey osserva poi che se la densità media è maggiore di una volta e mezza la densità alla superficie, come accade per la terra, la gravità andrà aumentando fino ad una certa profondità, per diminuire in seguito fino al centro, ove essa è sempre nulla. Egli calcola quindi il quadro seguente, dal quale appare manifesta la verità della proposizione enunciata.

Distanza dal centro	Attrazione
1	1,0000
0,9	1,0368
0,84	1,0430
0,8	1,0403
0,7	1,0095
0,6	0,9433
0,5	0,8442
0,4	0,6519
0,3	0,5605
0,2	0,3861
0,1	0,1962
0	0,0000

" Ainsi (scrive Saigey, dopo il quadro) en prenant pour
" unité la force d'attraction à la surface, cette force augmente

“ de 43 millièmes, à une distance du centre égale aux 84 cen-
“ tièmes du rayon. De cette valeur maximum elle décroit en-
“ suite jusqu'au centre, en repassant par la même valeur qu'à
“ la surface un peu au delà des 7 dixièmes du rayon „.

Helmert al luogo sopra citato trova che il massimo della gravità avviene ad una distanza dal centro eguale ad 82 centesimi del raggio: risultato questo concordante intieramente con quello di Saigey, che Helmert non aveva certo presente, giacchè non lo cita. Helmert assume per legge della densità

$$\rho = \rho_c \left\{ 1 - 1{,}04 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}275 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \right\}$$

nella quale ρ ed a, ρ_c ed a_0 sono rispettivamente la densità e la distanza dal centro nel punto della crosta terrestre che si considera, la densità al centro ed il raggio superficiale: anche Helmert trascura la forza centrifuga e lo schiacciamento, vale a dire suppone la Terra sferica e ferma.

Tisserand, a pag. 244 del volume II della sua *Mécanique Céleste* tratta di questo argomento ed intitola il paragrafo *Théorème de Saigey*: egli adotta per legge delle densità quella di Roche, cioè

$$\rho = \rho_0 (1 - h_1 a^2), \text{ con } \rho_0 = 10{,}10 ; \ h_1 = 0{,}764,$$

che dà per densità alla superficie $\rho_1 = 2{,}38$, alquanto inferiore a quella di 2,5, generalmente adottata: e trova che il massimo della gravità avviene ad una profondità vicina al settimo del raggio, cioè ad una distanza dal centro di circa 0,86, cifra che concorda con quelle di Helmert e Saigey. La gravità a quel punto è secondo Saigey 1,043 di quella alla superficie, secondo Helmert e Tisserand 1,05, numeri tutti, date le diverse leggi della densità, quasi coincidenti.

Saigey poi calcolò la legge di variazione della gravità colla profondità, che detta questa h è

$$g = g_0 + 0{,}52773 \frac{h}{a_0} g_0$$

indi scrive:

“ Par exemple, si la pesanteur à la surface est de $9^{m},81$
“ et la profondeur de 372 mètres (comme aux mines de Dolcoath,

“ lieu des observations de MM. Airy et Whewell citées au cha-
“ pitre 98) — in realtà 96 — la variation de la pesanteur sera
“ de 0,0003. Quant au pendule à secondes qui fait 86400 oscil-
“ lations par jour à la surface, il en ferait 1 et $\frac{1}{3}$ de plus à cette
“ profondeur de 372 mètres. On voit par là combien est erronée
“ l'observation de ces deux savants anglais „. Saigey che scri-
veva nel 1842 doveva ciò affermare: nè le esperienze che Airy
istituì nel 1854 (vedasi al riguardo la nostra opera citata) con-
dussero neppure ad un risultato attendibile, fornendo per la
densità media terrestre il numero 6,809, di troppo superiore
a quello di 5,6 che oggidì si deve ritenere come il meno inesatto.

Le esperienze più recenti di Sterneck hanno confermato l'aumento della gravità, voluto dalla teoria, senza condurre a valori della densità media più attendibili di quelli di Airy.

Saigey termina il capitolo nel quale tratta della gravità nella crosta terrestre considerando uno spessore piccolissimo (di 100 metri) e insegna a tener conto delle disuguaglianze della superficie terrestre, esponendo in breve i concetti che informano il còmputo della diminuzione della gravità colla profondità.

III.

Schmidt adottò per le densità una legge che dà per la densità media K, k_1 essendo quella superficiale, l'espressione

$$K = k_1 \quad 1,814,$$

e cioè fatto $k_1 = 2,50$

$$K = 4,535$$

cioè notevolmente inferiore al valore oggidì più attendibile. S. Günther, a pag. 357 del suo *Handbuch der Mathematischen Geographie*, Stuttgart, 1890, aveva già ciò avvertito. Egli cita Helmert, ma non menziona Saigey.

A p. 387 del volume, prima della sua geografia, Schmidt adotta per la densità superficiale terrestre il numero 2,642, il quale fornisce per la densità media, colla legge di Schmidt stesso, il valore 4,793. Schmidt scrive erroneamente 4,785: ad ogni modo sempre di molto inferiore al valore più attendibile 5,6.

Ivi Günther, dopo aver riferito il risultato di Helmert. scrive quanto segue: " Di questo teorema WEIHRAUCH (*Ueber die Zunahme der Schwere beim Eindringen in das Erdinnere*, " Repert. der Experimentalphysik „, 1886, pag. 396) ha dato una dimostrazione estremamente semplice, nella quale non è lasciata da banda la possibilità che la variazione della densità entro la massa terrestre, non debba essere ovunque e sempre continua „. Senza presupporre altro che i primi principî dell'analisi superiore, l'autore giunge ad un risultato comprendente la proposizione di Helmert: egli dice cioè: " Se entro una sfera costituita da gusci omogenei concentrici, da una distanza dal centro $(a + da)$ si passa alla distanza a la gravità cresce o scema $(g_a \gtreqless g_{a+da})$ secondo che la densità dello strato attraversato è maggiore o minore di due terzi della densità media della sfera

$$k_{r-a} \lesseqgtr \frac{2}{3} k_a \text{ (*)}$$

alla quale si giunge. Weihrauch trova che a seconda della legge che si adotta per la variazione della densità, la gravità nell'interno della Terra, al massimo prende un valore che è 1,055 quello alla superficie — all'incirca il numero di Helmert — ovvero 1,038 „. Quest'ultimo numero, quando colla solita approssimazione ci si fermi alla seconda cifra dopo la virgola, coincide con quello trovato fin dal 1842 da Saigey, come appare dal quadro numerico sovra riferito.

A pag. 188 del volume primo del suo *Handbuch der Geophysik*, Stuttgart, 1897, Günther menziona ancora i risultati di Helmert e Weihrauch.

È curioso che Günther attribuisca con tanta enfasi il teorema sopra ricordato e la sua dimostrazione elementare a Weihrauch, mentre questa si trova in molti scritti anteriori a quello di Weihrauch, e l'enunciato si deduce immediatamente dalla seguente equazione che in quella si ottiene

$$\frac{g_1}{g} = 1 - \frac{2h}{R} + \frac{3h}{R}\frac{\delta}{\Delta} = 1 - \frac{2h}{R}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\delta}{\Delta}\right)$$

(*) Nel libro di Günther la formola è scritta al rovescio dell'enunciato a parole, che è giusto.

ove g_1 e g sono la gravità alla superficie e alla profondità h, R essendo il raggio della sfera di densità Δ, mentre δ è quella dello strato di profondità h; dalla quale si ha subito, trascurando nello sviluppo le potenze di $\frac{h}{R}$ superiori alla prima,

$$g = g_1\left(1 - \frac{2h}{R}\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{\delta}{\Delta}\right)\right) = g_1\left(1 - \frac{2h}{R}\left(1 - \frac{\delta}{\frac{2}{3}\,\Delta}\right)\right),$$

dalla quale risulta che $g = g_1$ quando $\delta = \frac{2}{3}\,\Delta$, $g > g_1$ quando

$$\delta = k_{r-a} < \frac{2}{3}\,\Delta = \frac{2}{3}\,k_a,\ g < g_1,\ \text{quando}\ \delta = k_{r-a} > \frac{3}{3}\,\Delta = \frac{2}{3}\,k_a.$$

Il nostro trattato sulla *Figura della Terra* al luogo citato notifica le fonti su questa trattazione.

IV.

Roche (*) ha trovato la formola seguente per g, quando si prenda per unità il raggio terrestre, e ad una distanza a dal centro

$$g = 1{,}92\, g_1 a\left(1 - \frac{12}{25}\, a^2\right).$$

(*) Questo valoroso matematico, che ha lavori importantissimi sulla figura e costituzione della Terra, è sfortunato: tutte le bibliografie su quelle questioni sono intorno ai suoi lavori inesatte od incomplete: nell'elenco dei suoi scritti che segue, cercherò di essere il meno inesatto ed incompleto che sia possibile, limitandomi al soggetto che ci occupa.

Mémoire sur la loi de densité à l'intérieur de la Terre, " Académie des Sciences de Montpellier ", 1848, citata da TISSERAND, ***Mécanique Céleste***, II, p. 237. Assai probabilmente questa citazione di Tisserand è inesatta, e si tratta invece dello scritto di Roche, il cui titolo segue immediatamente quello. Noi abbiamo infatti inutilmente cercato al luogo indicato da Tisserand il lavoro di Roche dal titolo scritto da Tisserand stesso. Le Memorie di Montpellier s'iniziano nel 1847 ed il volume primo, che porta la data 1847-50, contiene un solo lavoro di Roche, intitolato: ***Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné***; la prima parte del quale è nella parte del volume relativa all'anno 1849, p. 243, e la se-

L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* (1908) che adotta questa formola, dopo di essa, stampa quanto segue:

" D'après cette formule on voit que la pesanteur augmente jusqu'à une profondeur égale à environ $\frac{1}{6}$ du rayon (il valore di Helmert circa). A cette distance, g surpasse g_1 de $\frac{1}{15}$ environ. A une profondeur égale à environ $\frac{1}{3}$ du rayon on trouve sensiblement $g = g_1$. La pesanteur diminue ensuite jusqu'au centre où elle est nulle „.

Ora veniamo a dare, secondo Helmert, la dimostrazione

---

conda in quella per l'anno 1850. I lavori di Roche su questo argomento sono stati ben considerati da Resal nelle due edizioni della sua *Mécanique Céleste*.

Sur la loi de la densité à l'intérieur de la Terre, " L'Institut „, XVI, 1848, 185 (*Bibliographie Astronomique di Houzeau et Lancaster*, II, 615).

Recherches sur la figure de la Terre, " Comptes-Rendus „, Paris, XXVII, 1848, 443 (*Bibliography of Geodesy di Gore*).

Sur la figure de la Terre, " Mém. Académ. „ (sic), 1848 (*Bibliographie Géodésique de Boersch*).

Mémoire sur la variation de la pesanteur au-dessous de la surface de la Terre, " Mémoires de l'Académie de Montpellier „, II, 1854, 251 (Gore, Houzeau et Lancaster).

Note sur la loi de la densité à l'intérieur de la Terre, " Comptes-Rendus „, Paris, XXXIX, 1854, 1215. 17 (Gore, Boersch, Houzeau et Calandreau). Wolf, nella sua *Bibliographie du Pendule* (" Collection de Mémoires relatifs à la Physique „, tome IV, Paris, Gauthier-Villars, 1889, p. B 142) riferisce al volume XXXIX, 1854, p. 1215, una nota intitolata *Note sur la variation de la pesanteur à l'intérieur de la Terre* ed aggiunge " Mém. de l'Académie de Montpellier „, 3, 1855, p. 107 — *Discussion des expériences de M. Airy*; e non registra alcun altro lavoro di Roche intorno alla Terra. Ma in quel titolo dell'ultimo lavoro si sono forse scambiate le parole *densité* e *pesanteur*, giacchè in quel volume, 3, 1855, p. 107, si ha il lavoro colla parola *densité*. Houzeau e Lancaster hanno per errore di stampa 1857, invece di 1855.

Sur l'aplatissement terrestre et la distribution de la matière à l'intérieur du globe, " Comptes-Rendus de l'Association Française pour l'avancement des Sciences „, 1879, 187-90.

Sur l'état intérieur du globe, " Compt.-Rend „, Paris, XCIII, 1881, 364, 65 — " Mémoires de Montpellier „, 1880, 221-264 (Gore). — Di quest'ultima memoria non mi riuscì di trovare cenno nè nel " Bulletin Astronomique „, nè nel " Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik „: questo non registra nè anche la penultima.

della sua legge di variazione della gravità nell'interno della Terra (HELMERT, *Theorieen*, II, pag. 492).

L'attrazione di un guscio sferico infinitamente sottile di raggio a e di densità Θ sopra un punto esterno che disti di a' dal centro della sfera è dato dall'espressione

$$\frac{4\pi}{a'^2}\, a^2 \Theta da.$$

(Qui si suppone $= 1$ la costante dell'attrazione che in Helmert è $= k^2$). Pertanto l'attrazione di una sfera di raggio a' composta di strati, sopra un punto della sua superficie sarà

$$\frac{4\pi}{a'^2}\int_0^{a'} a^2 \Theta da.$$

Il trascurare lo schiacciamento, trae di conseguenza il non tener contro della forza centrifuga; poichè inoltre l'attrazione di gusci sferici sopra punti interni dello spazio vuoto che racchiudono è nulla, così la precedente espressione corrisponde anche all'attrazione o gravità per un punto nell'interno di una sfera stratificata di raggio a_0, e distante dal centro di $a' \leqq 0$.

Chiamiamo ora Θ_c la densità al centro ed adottiamo per le densità la legge già riferita

$$\Theta = \Theta_c \left\{ 1 - 1{,}04 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}275 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \right\}$$

allora si avrà sopprimendo l'apice ad a:

$$g_a = 4\pi\Theta_c a \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1{,}04}{5}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + \frac{0{,}275}{7}\left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \right\} \qquad (1)$$

$$a \leqq 0.$$

La variazione con a di questa espressione è data da $\frac{dg_a}{da}$, il cui valore negativo si deduce dalla (1), ed è:

$$-\frac{dg_a}{da} = 4\pi\Theta_c \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{3{,}12}{5}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 - \frac{1{,}375}{7}\left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \right\}. \qquad (2)$$

Come si vede, per $a = a_0$ esso è positivo, cioè, *partendo dalla superficie ed andando verso l'interno la gravità cresce dap-*

prima. La (2) si annulla per $a = 0{,}82a_0$, cioè, come già sappiamo: *l'aumento perdura fino ad una profondità di* 0,18 *del raggio terrestre, ove essa raggiunge il massimo* (*eguale a* $1{,}05g_0$), *ed a partire dalla quale diminuisce continuamente fino al centro.*

Alla superficie il valore del coefficiente differenziale diviene $-\frac{0{,}57g}{a}$ esattamente eguale a quello che si ottiene dalla formola (*c*) della presente nota, ove si faccia $k_i = \Theta_i = 2{,}66$ e quindi $K = 2{,}36$. Helmert poi avverte: " Come si vede facilmente, in realtà il coefficiente differenziale ha alla superficie valori molto diversi, dipendentemente dalla costituzione locale, dalla densità delle masse nei dintorni del luogo che si considera ".

Helmert passa quindi a trattare il problema della determinazione della densità media terrestre colla combinazione di osservazioni della gravità sulla superficie della Terra e sotto di essa. Teoricamente questa è la trattazione più completa del problema posto da Drotisch ed Airy, che io conosca.

In alcuni libri di geografia fisica vien data come legge della densità di Helmert la formola

$$\Theta = 11{,}6 \left\{ 1 - 1{,}12 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}36 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \right\}$$

risultante dall'impiego di dati astronomici, ove alla superficie la densità sia 2,8, e quella media 5,6: ma prendendo alla superficie la densità eguale a 2,6 e quella media eguale a 5,6, Helmert trova

$$\Theta = 11{,}2 \left\{ 1 - \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}23 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \right\}.$$

A pag. 487 del volume II della sua grande opera Helmert dà però come risultato finale, *Endresultat*, la legge da noi sovra riferita, e cioè

$$\Theta = 11{,}3 \left\{ 1 - 1{,}04 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0{,}275 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \right\}$$

ed ottenendo per densità superficiale 2,66 e per schiacciamento 1/298, valore quest'ultimo ben concordante con quello che egli ottenne dai dati astronomici, di $1 : 297{,}8 \pm 2{,}2$, e con quelli ottenuti coi procedimenti geodetici e pendolari, quali appaiono nelle prime pagine della nota quinta di questa serie di studi.

V.

Ritorniamo ora alla *Figur der Erde* di Enrico Bruns, della quale siamo giunti al paragrafo 3, il contenuto del quale è da Bruns stesso così riassunto, nella già citata recensione del proprio scritto da lui stesso compilata. Il § 3 ha per titolo *Die Lothstörungen* (letteralmente *le perturbazioni della verticale*).

" Il § 3 fornisce l'espressione approssimata (U) per la funzione delle forze, che nelle ricerche di questa natura viene acconciamente adoperata, al fine di giungere ad una precisa definizione delle perturbazioni della verticale „. Questa definizione è data come segue al principiar del paragrafo:

" Le deviazioni di un geoide da un ellissoide si rivelano immediatamente manifestamente nelle differenze fra le coordinate astronomiche e le geodetiche, e fra le lunghezze del pendolo osservate e calcolate. Si raccolgono assieme tutti questi fenomeni sotto la designazione comune di " perturbazioni della verticale „ (*Lothstörungen*) „.

Questa designazione ampia e generica non è stata conservata, o per meglio dire non è entrata nella geodesia; ma le due classi di fenomeni che essa comprende ebbero ciascuna una denominazione speciale. Giova soffermarci alquanto su queste definizioni per considerarle sia storicamente che teoricamente. Ciò faremo, man mano che se ne presenterà l'occasione, nello studio della classica memoria di Bruns.

In quanto diremo supporremo quanto segue: le forze che determinano il *geoide*, e cioè l'attrazione della massa terrestre e la forza centrifuga sono *costanti ed invariabili* nel tempo: ossia il geoide *non subisce col tempo variazioni di sorta*. Come è noto, questa è una supposizione assolutamente contraria al vero, ed a tutto rigore il geoide muta sua forma da istante a istante: ma ciò in proporzioni così ridotte, che, per una prima e non certo grossolana approssimazione, quelle deformazioni si possono trascurare e studiare separatamente (*). In questa supposizione

(*) Rimandiamo il lettore desideroso di più ampie informazioni storiche su questo argomento ai seguenti scritti: ZANOTTI BIANCO OTTAVIO, *Per la storia della teoria delle superficie geoidiche*, " Atti dell'Accademia delle Scienze

la direzione della *gravità teorica* o normale al geoide si può supporre coincidente con quella della *gravità fisica o reale* (che è variabile col tempo) e *fissa* ed *immutabile nel tempo*; nel nostro discorso quindi, ove non si avverta il contrario, per *verticale* intenderemo la normale al geoide o ad un geoide, ove non si parli di una speciale *superficie di livello* o *geoidica.*

Avvertiamo ancora che le *perturbazioni della verticale o del filo a piombo,* definite più sopra con Bruns, non sono temporali, ma geometriche: e per di più convenzionali.

L'espressione perturbazione della verticale implica di necessità il concetto di un termine di paragone, vale a dire di una verticale *normale* rispetto alla quale la verticale determinata, fornita dall'osservazione, vien riconosciuta perturbata. Qual è la direzione normale della verticale? Quale è per ogni luogo il valore normale della gravità rispetto al quale si possono constatare delle perturbazioni o, come oggidì si dice, delle anomalie? Come è facile il comprendere quella direzione normale, quella retta di riferimento venne sempre stabilita, consciamente o non, implicitamente od esplicitamente, in base ai concetti dominanti sulla figura della Terra. Finchè essa fu riguardata come sferica, non fu questione mai di perturbazioni statiche della verticale, la quale segnata geometricamente dal raggio della sfera in ogni punto e fisicamente dai gravi cadenti, passava per

il punto
Al qual si traggon d'ogni parte i pesi.
DANTE, *Inferno*, XXXIV, 110-11.

Galileo intuì la deviazione dei gravi cadenti, prodotta dal moto di rotazione della Terra, cioè una perturbazione dinamica della verticale, perturbazione riferita naturalmente al raggio della Terra sferica passante per il luogo d'osservazione, come direzione normale.

---

di Torino „, vol. XXXI, 1896 — *Le livellazioni di precisione*, Torino, 1892, nel periodico “ L'Ingegneria Civile „, vol. XVIII — *La variazione delle latitudini*, “ Cosmos di Guido Cora „, serie II, vol. XI, fascicoli VIII e IX, Torino, 1892-93; e “ Rivista di Topografia e Catasto „, 1896; riprodotto nel libro *Istorie di Mondi*, Torino, Bocca, 1903, ove si trovano numerose indicazioni bibliografiche — *Deviazioni della verticale in Italia*, “ Annuario Meteorologico Italiano „, anno V, 1890, Torino, Loescher, 1890.

Dopo i lavori di Newton e Clairaut, la figura matematica della Terra, cioè la superficie libera del mare in riposo, venne considerata come quella di un'ellissoide di rivoluzione schiacciata ai poli. La presenza del rilievo della crosta terrestre, la costituzione di essa in quanto era nota suggerirono il concetto, che ove si riscontravano ondulazioni, cavità, rialzi, la verticale fisica segnata dal filo a piombo non poteva coincidere colla normale all'ellissoide che si assumeva quale rappresentante della figura della Terra. E poichè questo scostamento delle due direzioni veniva attribuito unicamente alle attrazioni variamente operanti dei rilievi della crosta terrestre circostanti al luogo d'osservazione, così a quello scostamento s'impose in sul bel principio il nome di *attrazione locale*, che conservò poi a lungo: ma che oggi è applicato con maggior proprietà a talune speciali perturbazioni della gravità. In quell'opinione si calcolava l'*attrazione locale* prodotta da un monte col seguente concetto. Si supponeva che la direzione della verticale fornita dall'osservazione (determinazione di latitudine o longitudine) non coincidesse a cagione dell'attrazione del monte colla normale all'ellissoide, e poi con misure e con supposizioni sulla densità del monte, si computava l'azione che esso doveva esercitare sul filo a piombo situato in una determinata posizione rispetto al monte, e la cui direzione era quella determinata astronomicamente, e cioè la verticale effettiva, fisica di esso punto. Si poteva quindi, a mezzo di quel computo, giungere a conoscere la direzione della normale all'ellissoide (verticale geodetica), ossia a conoscere quale sarebbe stata — *caeteris paribus* — la direzione del filo a piombo se il monte non fosse esistito.

Bouguer fu il primo ad istituire indagini sulle perturbazioni della verticale, nel senso pur ora dichiarato di attrazione locale; esse sono riferite nella sezione settima della sua opera, della quale già ci occupammo nella *Nota Seconda* di questi studi. Questa sezione ha per titolo *Détails des Expériences ou Observations sur la gravitation, avec des remarques sur les causes de la Figure de la Terre.* A questo riguardo così scrive Todhunter (*History*, I, pag. 248).

“ Nelle pagine 364... 394 abbiamo un resoconto delle osservazioni istituite da Bouguer e La Condamine al fine di determinare l'attrazione del Monte Chimborazo. Risultò prodursi una

deviazione di 7''.5 nella posizione del filo a piombo; ma ciò era molto meno di quanto ci si doveva aspettare. La montagna quindi deve contenere grandi cavità o comporsi di materia di densità relativamente piccola. Dal resoconto tuttavia appare che le osservazioni non erano adeguate a ricercare la soluzione del problema, e Bouguer neppure non pare affidarvisi di soverchio „.

A pag. 244, Todhunter ha a questo riguardo le linee seguenti: " La trigonometria sferica fu ora impiegata, a quanto pare per la prima volta, nei calcoli geodetici; Bouguer si attribuisce questo miglioramento „: e cita gli scritti di Bouguer ove ciò è dichiarato.

" A Bouguer si deve anche l'idea d'istituire osservazioni al fine di determinare l'attrazione del Monte Chimborazo. La Condamine contribuì con un valido suggerimento alla operazione pratica „. *Supplément au Journal Historique du voyage à l'équateur et au livre de la mesure des trois premiers degrés du Méridien, servant de réponse aux objections de M. B.* " Seconde Partie „, Paris, 1754, pagg. 222, XXVIII, oltre il *Titolo*, l'*Avvertimento*, l'*Approvazione*, e due pagine di *errata* a precedenti scritti di La Condamine.

Il sig. Bigourdan nel suo lavoro citato già in principio della *Nota Seconda* analizza pure quel *Supplément*, ma non ha cenno della contribuzione di La Condamine alle ricerche sulla attrazione del Chimborazo, menzionata da Todhunter.

Circa i lavori di Bouguer sull'attrazione il sig. Bigourdan, scrive quanto riporteremo più avanti; prima ne occorre fare una breve avvertenza.

Sur Diverses Mesures d'arcs de Méridien faites dans la première moitié du XVIII siècle. Tale è il titolo del lavoro del signor Bigourdan, che è contenuto nei volumi XVIII, XIX e XX del *Bulletin Astronomique*. A pag. 38 del volume XX (1903) si legge quanto segue:

" Voici maintenant le jugement de Delambre sur le travail
" scientifique et sur la querelle qui en fut la suite: on verra
" que sa sympathie le porte vers La Condamine, ainsi qu'il est
" arrivé plus tard à M. Todhunter „ (*History*, I, pag. 243).

Questo giudizio di Delambre — analisi critica, come la chiama Bigourdan — è ricavato da un'opera inedita di Delambre medesimo intitolata *Grandeur et Figure de la Terre*, a comporre

la quale Delambre si valse di documenti oggi dispersi (*Bulletin Astronomique*, vol. XVIII, 1901, pag. 320).

Ed ora ecco l'apprezzamento di Delambre sui lavori di Bouguer intorno all'attrazione delle montagne (*Bulletin Astronomique*, XX, 1903, pag. 75 e seguenti).

" La vue des montagnes du Pérou fit naître l'idée que leur " attraction ne devait pas être insensible à de petites distances. " Bouguer estime que le Chimborazo a plus de 20.000.000.000 de " toises cubiques; cette solidité n'est que la 7.400.000.000ème partie " du globe, et l'effet de l'attraction serait encore absolument " insensible, si l'on n'avait égard qu'aux seules quantités de " matières. Mais comme on peut se placer à 1700^T ou 1800^T du " centre de gravité de la montagne, c'est-à-dire à 1900 fois " moins de distance que du centre de la Terre, cette proximité " peut augmenter l'effet environ 3.600.000 fois, en sorte qu'il " ne soit plus que 2000 fois moindre que celui qui peut être " produit par la gravitation. Or la montagne agissant comme 1 " et la Terre comme 2000, la direction de la pesanteur doit être " sensiblement détournée vers la montagne: cet écart de la " verticale sera de 1′43″.

" Après avoir examiné différents moyens plus ou moins pro" pres à constater cet effet, il en revient au plus simple de tous, " celui de se placer successivement au nord et au sud de la " montagne, et à observer dans les deux stations les distances " des mêmes étoiles au zénith. Si l'on n'observait qu'une seule " étoile à chaque station, il faudrait connaître avec la dernière " exactitude l'instrument dont on se servirait: il est un moyen " plus avantageux, c'est de prendre la hauteur méridienne d'un " nombre égal d'étoiles vers le nord et vers le sud. Pourvu " que l'état de l'instrument ne change pas entre les observations, " il importe peu qu'il change d'un jour à l'autre: si l'instru" ment fait paraître plus grande la hauteur des étoiles qui sont " d'un côté du zénith, il produira l'effet contraire pour les étoiles " qui seront de l'autre côté; le changement dans l'instrument " n'influera que sur la somme des hauteurs ou de leurs com" pléments; l'attraction, au contraire, qui ne changera rien dans " la somme, altérera seulement les différences; il sera toujours " facile de démêler ces deux différentes causes, sans qu'il soit " jamais possible d'attribuer à l'une ce qui appartient à l'autre;

" il n'y aura simplement qu'à examiner si les différences des
" hauteurs méridiennes prises vers le nord ou vers le sud sont
" les mêmes dans les deux stations, ou si elles sont sujettes
" à une seconde différence. Il faut seulement remarquer que,
" les hauteurs étant augmentées d'un côté et diminuées de l'autre,
" c'est la moitié de cette seconde différence qui marque l'effet
" physique de l'attraction. Il démontre ensuite que les forces
" relatives sont en chaque endroit comme le produit de la
" quantité dont cet endroit est plus au nord ou au sud que le
" centre, par le cube de la distance de l'autre station à ce même
" centre : c'est donc selon le rapport de ces deux produits qu'il
" faut partager l'effet de l'attraction, lorsqu'il est doublé. Si les
" deux stations étaient toutes deux au nord ou toutes deux au
" sud, et que l'attraction ne fût pas insensible dans la plus
" éloignée, alors, au lieu de la quantité absolue, on aura seule-
" ment la quantité dont elle est plus grande dans un endroit
" que dans l'autre.

" On suppose dans tout ceci que les montagnes sont solides
" et n'ont aucune cavité ; or il n'en est pas ainsi ; la plupart
" de ces montagnes sont vulcaniques ; on peut se tromper sur
" la masse qu'on leur suppose ; ainsi, quand l'observation ne
" manifesterait aucune attraction sensible, il n'en faudrait rien
" conclure, sinon que sans doute la montagne est creuse. Si,
" au contraire, l'attraction se manifeste une fois, quand elle
" serait plus faible que l'attraction calculée, cette attraction
" sera démontrée ; seulement on pourrait ignorer la véritable
" valeur. Tout considéré et convenablement réduit, il trouve
" pour l'excès moyen $1' 19''$ du côté du nord, $1' 34''$ du côté
" du sud.

" La différence est $15''$, et l'effet de l'attraction est $7'',5$,
" quantité que par d'autres considérations, il porte à $8''$ en
" l'augmentant de $\frac{1}{14}$.

" *Il faut avouer*, dit-il, *que cet effet est bien différent de celui*
" *auquel nous pouvions nous attendre. Mais nous savons si peu quelle*
" *est la densité de la Terre; et d'un autre côté celle des montagnes*
" *peut être si différente de celle que nous leur attribuons, qu'il n'y*
" *a pas lieu de s'étonner de rien... Chimboraço peut contenir quel-*
" *ques concavités, mais cependant on ne peut supposer qu'il soit creux*

“ *comme Cotopaxi.... C'est beaucoup peu de supposer son volume*
“ *diminué de moitié par les concavités qu'elle peut avoir, et il s'en-*
“ *suivra, que, malgré ses bancs de rochers vifs, elle sera encore six*
“ *ou sept fois moins compacte que notre globe. Après tout, il n'y*
“ *a rien en cela qui y répugne.*

“ Il se livre ensuite à des réflexions générales sur la figure
“ de la Terre et les termine par ces lignes:

“ *Si elle (La Terre) avoit été originairement un assemblage*
“ *confus de matières entassées les unes sur les autres, et de matières*
“ *aussi denses que solides, nous ne connaissons aucune cause seconde*
“ *qui eût été capable, nous ne disons pas simplement de mettre la*
“ *distribution nécessaire entre les différentes densités, mais d'abattre*
“ *les angles de ce tas informe et de donner au sphéroïde la figure*
“ *précise et régulière que nous savons qu'il a* „.

Più avanti Delambre scrive (*Bulletin Astronomique*, XX. 1903, pag. 287):

“ Ici se borneront nos critiques. Nous applaudirons très
“ sincèrement aux recherches de Bouguer sur l'attraction des
“ montagnes, sans être bien sûrs des résultats obtenus avec un
“ instrument très médiocre „.

Noi pure limiteremo qui le nostre notizie su Bouguer: la storia delle sue dispute con La Condamine è fatta, al pari di quella della misura dell'arco del Perù. e non intendiamo indugiarvici ulteriormente; essendo esse estranee allo scopo che ci proponemmo.

Azione chimica del clorato potassico sulla pirite e sull'hauerite.

Nota del Socio GIORGIO SPEZIA.

In un'esperienza di minerogenesi, da eseguirsi per via umida ed a temperatura ordinaria, mi bisognava avere, senza far uso di un reagente acido, la lenta formazione di acido solforico, la quale potesse paragonarsi alla reazione che in tempo assai più lungo avviene in natura per l'ossidazione della pirite.

Perciò cercando un energico ossidante che, senza avere proprietà acida, agisse sulla pirite per via umida ed a temperatura ordinaria, mi venne in mente che forse potesse servire il clorato potassico; tanto più che le esperienze di Rivot, Beudant e Daguin (1) dimostrarono come facilmente si ossidino i solfuri metallici posti in soluzioni di idrati alcalini, nelle quali si faccia reagire il cloro. Quindi feci delle ricerche bibliografiche sia nel campo chimico che in quello mineralogico, per avere maggiori notizie sul modo di comportarsi della pirite col clorato potassico; ma nulla trovai a proposito.

La pirite fu da parecchi sperimentatori cimentata con vari reagenti per scopi diversi. Per es.: Becke (2) nel suo interessante studio sulle figure di corrosione della pirite, adoperò l'acido nitrico, l'acqua regia, e gli idrati di sodio e potassio in soluzioni concentrate e a caldo; Doelter (3) nelle sue ricerche sul diverso modo di comportarsi fra la pirite e la marcassite adoperò la soluzione di solfuro sodico; Lemberg (4) trattò la pirite con soluzioni alcaline di bromo e con soluzioni di solfato d'argento;

(1) " Annales des mines ", 5ª serie, vol. IV, pag. 246.
(2) " Tschermak's min. pet. Mitt. ", N. F., vol. VIII, pag. 239.
(3) " Neues Jahr. f. Min. u. Geol. ", 1894, II vol., pag. 273.
(4) " Zeitschrift der deut. geol. Gesellschaft ", vol. 46, pag. 7.

Brown (1) adoperò le soluzioni di solfato di rame ad alta temperatura ed in tubi chiusi; e Ozegow (2) studiò l'azione dell'acqua ossigenata sulla pirite e trovò che essa è totalmente ossidata dando luogo a solfato ferrico e acido solforico libero. L'uso dell'acqua ossigenata sarebbe certamente il miglior reagente, perchè rappresenterebbe meglio l'ossidazione naturale della pirite; ma l'impiego di essa non mi parve conveniente in quelle esperienze, nelle quali si adoperano minerali ridotti in polvere; perchè questi pel loro stato polverulento potrebbero esercitare un'azione decomponente sull'acqua ossigenata facendole perdere l'ossigeno prima che questo abbia tempo di agire. Forse si potrebbe evitare tale difetto facendo le esperienze in resistenti recipienti con chiusura ermetica.

Ad ogni modo, considerando che la bibliografia da me consultata non mi diede a conoscere alcun studio riflettente la reazione fra il clorato potassico e la pirite, credetti opportuno d'intraprendere alcune esperienze in proposito, i cui risultati se non presenteranno novità, serviranno a confermare quelli che altri avesse ottenuti e che sarebbero sfuggiti alle mie ricerche bibliografiche.

Sebbene lo scopo principale delle mie indagini fosse di studiare la reazione per via umida a temperatura ordinaria fra il clorato potassico e la pirite, tuttavia estesi le ricerche, premettendo anche alcuni saggi di reazione per via secca; inoltre ho creduto utile di confrontare gli effetti delle due specie di reazione con quelli che si ottengono facendo reagire il clorato potassico sia col solfo sia colla stibina; ed aggiunsi poi le reazioni che si hanno con altri bisolfuri, come la marcassite e l'hauerite.

Nelle esperienze per via secca ho preparato due miscele di polvere finissima di pirite e di clorato potassico: una in proporzione per ossidare un atomo di solfo della pirite e l'altra per ossidarne i due atomi.

In entrambi i casi avvicinando un fuscello di legno incandescente avveniva un'esplosione identica a quella che si ottiene colla polvere pirica, e lo stesso effetto esplosivo si aveva toc-

(1) " Groth's Zeit. f. Krystallographie „, vol. 26, pag. 528.
(2) " Neues Jahrbuch f. Min. u. Geol. „, 1905, pag. 11.

cando la miscela con un bastoncino di vetro unettato di acido solforico concentrato.

Invece le miscele di solfo e quelle di stibina nelle volute proporzioni col clorato potassico dànno, sia coll'accensione diretta che coll'acido solforico, una rapidissima combustione, la quale se si volesse anche chiamare esplosione, sarebbe sempre meno istantanea di quella della miscela di pirite.

La miscela di pirite e clorato potassico detona pure come le altre sia per percussione sia per sfregamento in un mortaio d'agata.

Noto poi che da altre esperienze eseguite per via secca colle miscele di clorato potassico e pirite, risulta come non sia necessario, per la reazione esplosiva, che i detti composti chimici siano fra loro in proporzione fissa. L'esplosione avviene sempre, sia con l'accensione diretta sia coll'acido solforico, qualunque sieno le proporzioni della miscela, purchè esse sieno fra i limiti richiesti per l'ossidazione di un atomo o dei due atomi di solfo della pirite. Se invece la quantità di clorato potassico è inferiore a quella richiesta per l'ossidazione di un atomo o superiore a quella necessaria per l'ossidazione dei due atomi di solfo, avviene soltanto una combustione che si propaga più o meno lentamente nella massa della miscela.

In complesso il comportamento per via secca della miscela fatta colla pirite è analogo a quello delle miscele fatte col solfo e colla stibina, ma con reazione più istantanea.

Assai differente invece è il comportamento per via umida.

Ponendo una miscela piritosa, sia con proprietà esplosiva, sia con eccedenza di clorato potassico, in un tubo da saggio con un poco d'acqua e riscaldando gradatamente in modo da osservare con un termometro posto nel tubo l'aumento della temperatura, si vede che a 75° comincia una reazione vivissima la quale, togliendo il tubo dalla sorgente calorifica, continua da sè con innalzamento di temperatura sino all'ebullizione del liquido; e poco tempo dopo che si è iniziata la viva reazione, il vapore acqueo, che si svolge, possiede un odore che ricorda il cloro.

Il liquido diventa man mano giallognolo e si forma anche un deposito giallastro, poi la viva reazione cessa.

Filtrato il liquido, che ha forte reazione acida, e trattato con cloruro di bario, si ha un grande precipitato di solfato di bario.

L'interpretare quale reazione chimica avvenga è difficile, perchè essa deve essere molto complicata. La più facile spiegazione sarebbe di attribuire la presenza dell'acido solforico indicata dal solfato di bario, per la maggior parte al solfato ferroso o ferrico ed il resto ad acido solforico libero. Ma l'odore di cloro complica la questione e bisogna supporre che alla temperatura della viva reazione, l'acido solforico libero man mano che si forma o reagisca su parte del clorato potassico non ancora decomposto producendo forse del biossido di cloro, ovvero reagisca sul cloruro potassico che deve formarsi per la decomposizione del clorato. Ad ogni modo cedo volentieri la risoluzione del problema ai chimici.

Ma se tale è la reazione che avviene a caldo per via umida fra il clorato potassico e la pirite, ben diversamente si comportano il solfo e la stibina; le relative miscele di questi col clorato potassico non diedero segno alcuno della reazione viva data dalla pirite, anche se riscaldate alla temperatura di 100°, e soltanto dopo essere state mantenute a tale temperatura per alquanto tempo, il loro liquido filtrato presentava un leggerissimo intorbidamento col cloruro di bario.

La viva reazione prodottasi a caldo fra la pirite ed il clorato potassico mi lasciò sperare che questo reagente potesse avere qualche azione anche a bassa temperatura sostituendo il tempo al calore, e ne feci quindi le relative esperienze, tanto più che il risultato di esse costituiva lo scopo principale delle mie indagini.

Una prima esperienza fu di lasciare la miscela piritosa con acqua in un tubo d'assaggio per 24 ore alla temperatura dell'ambiente e trovai che il liquido assumeva lentamente prima una tinta verdognola e poi passava al giallognolo, e, trascorso il tempo suddetto, filtrato il liquido questo forniva un intenso precipitato col cloruro di bario.

In seguito ho ripetuto l'esperienza per stabilire quantitativamente l'effetto ottenuto.

Ad una miscela di 2 grammi di clorato potassico e gr. 2.036 di pirite aggiunsi 30 grammi di acqua, e la lasciai per 21 ore alla temperatura da 15 a 16°, avendo l'avvertenza di scuotere qualche volta il recipiente per rimescolare la sostanza.

Dopo tale tempo filtrai il liquido e cercai la quantità di

solfo e di ferro; trovai gr. 0,075 di solfo e 0,082 di ferro, ossia in complesso nel liquido vi erano gr. 0,157 di sostanza tolta alla pirite. Il liquido aveva forte reazione acida, perciò si può supporre che in esso vi fosse acido solforico libero e solfato di ferro sia di protossido e forse più di sesquiossido, pel colore giallognolo che aveva il liquido. In questa reazione per via umida a bassa temperatura non sentii alcun odore di cloro come in quella eseguita a caldo.

Io non feci ora speciali ricerche in proposito per studiare quantitativamente i vari prodotti della reazione e mi limitai di potere stabilire, essendo tale lo scopo delle mie indagini, che anche alla temperatura da 15 a 16° e per via umida il clorato potassico agisce sulla pirite.

Analoghe esperienze alla stessa temperatura ed in egual tempo ho eseguito con miscele di solfo e di stibina col clorato potassico; e nel liquido il cloruro di bario dava un intorbidamento più leggero che nella loro reazione a caldo.

Ritenendo poi interessante qualche confronto con altri bisolfuri, scelsi la marcassite, che stabilisce il dimorfismo del bisolfuro di ferro, e l'hauerite, che può ritenersi isomorfa colla pirite, se non si considera il carattere della sfaldatura; e scelsi il bisolfuro di manganese in mancanza di un bisolfuro o di nichelio o di cobalto, i quali non furono sino ad ora trovati in natura, e che per il paragone sarebbero stati meglio adatti per l'analogia chimica che i detti metalli, molto più che il manganese, presentano col ferro.

La marcassite col clorato potassico si comporta, sia per via secca che per via umida, come la pirite, coll'unica differenza che per via umida la miscela, fatta con eguali proporzioni usate nell'esperienza colla pirite, dà luogo alla viva reazione alla temperatura di 70° invece di 75°.

Riguardo all'hauerite feci qualche saggio adoperando alcuni cristalli di Raddusa dei quali potevo disporre. E ho trovato che l'hauerite col clorato potassico nella miscela a secco si comporta come la pirite, anzi l'esplosione pare più violenta; ma per via umida presenta il fatto curioso che nella miscela anche riscaldata a 100° non avviene alcuna viva reazione, ossia l'hauerite si comporta come il solfo e la stibina.

Sulla pirite ho fatto anche un piccolo saggio per conoscere

le figure di corrosione prodotte dall'azione del clorato potassico. Ho mantenuto per alcune ore alla temperatura di 90°, in una soluzione concentrata di clorato potassico, un cubo di pirite, e trovai che per corrosione sulle facce erano comparsi assai visibili al microscopio dei pentagonododecaedri colla consueta orientazione corrispondente a quella del cubo. Ma non feci altre prove ritenendo che non si troverebbe nulla da aggiungere agli interessanti risultati ottenuti dal F. Becke nelle sue numerose ricerche sulle figure di corrosione della pirite.

Riassumendo, i risultati delle esperienze sovraesposte danno luogo ad alcune considerazioni.

Le differenze di comportamento fra le miscele di clorato potassico e pirite da quelle fatte col solfo lasciano ammettere che il solfo combinato nella pirite abbia proprietà differenti da quelle che ha il solfo elementare. E credo che facendo uno studio chimico più esteso sopra i vari stadi di reazione per via umida fra il clorato potassico e la pirite si potrebbe forse avere maggior luce sulla costituzione della pirite e stabilire almeno quale sarebbe la più razionale fra le varie formole di costituzione suggerite per la pirite da Brown, Weinschenk, Locska e Groth.

Un'altra considerazione pure di ordine chimico sarebbe che la velocità di reazione nella pirite prodotta dal clorato potassico per via umida ed alla temperatura di 75°, non sarebbe dovuta soltanto all'essere la pirite un bisolfuro, perchè l'hauerite, che è isomorfa, pure posta in eguali circostanze non dà segno di reazione. Importante poi è il fatto che l'hauerite sebbene sia assai più resistente della pirite all'azione per via umida del clorato potassico, tuttavia essa perde solfo per riscaldamento a temperatura molto minore della pirite ed è anche, come è noto, molto più decomponibile della pirite per azione dell'acido cloridrico.

A riguardo dell'azione del calore per cui i bisolfuri pirite ed hauerite perdono parte del loro solfo, io, non avendo trovato dati relativi alla temperatura alla quale, fuori del contatto dell'aria, comincia da essi a sublimare il solfo, ne feci un'esperienza.

I due minerali ridotti in polvere furono posti in due tubetti di vetro, i quali io collocai nello stesso ambiente di riscaldamento, di cui un termometro segnava l'aumento di temperatura.

Nel tubo dell'hauerite compariva già alla temperatura di 170° un tenue sublimato di solfo; invece nel tubo della pirite si formò una leggerissima velatura di sublimato soltanto quando la temperatura ascese a 350° e fu mantenuta a tale grado per 15 minuti. A quest'ultimo grado di temperatura nel tubo dell'hauerite si era sublimato molto solfo e la polvere aveva perduto il suo caratteristico colore rosso mattone, assumendo il colore verde, il quale è proprio del monosolfuro di manganese. Per l'hauerite ho ripetuto l'esperienza con un piccolo ottaedro di color bruno e di 4 millimetri di lato; esso fu pure trasformato in monosolfuro, mutandosi il colore all'esterno da bruno in verde, e, rotto il cristallo, il colore verde di tutto l'interno dimostrò la completa trasformazione.

Dall'esperienza risulta quindi che l'hauerite non soltanto perde solfo a temperatura molto minore della pirite, ma che essa da bisolfuro si riduce a monosolfuro per la semplice azione del calore; mentre la pirite, come è noto dalle esperienze di Rammelsberg, per detta causa si trasforma soltanto in un composto corrispondente alla pirrotina, e per mutare la pirite in monosolfuro bisogna riscaldarla in una corrente d'idrogeno.

Io spero che le poche esperienze indicate in questo scritto potranno suggerire a chi possiede molti cristalli di hauerite di meglio studiare il differente comportamento chimico dei due bisolfuri isomorfi pirite ed hauerite, e la sua relazione colle individuali proprietà chimiche del ferro e del manganese nelle loro combinazioni col solfo.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 12 Aprile 1908.

PRESIDENZA DEL PROF. FRANCESCO ROSSI
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: GRAF, BRUSA, RENIER, CHIRONI, RUFFINI, STAMPINI, BRONDI, SFORZA e DE SANCTIS, Segretario. — È giustificata l'assenza del Presidente D'OVIDIO, del Vice-Presidente BOSELLI e del Socio MANNO, Direttore della Classe.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 29 marzo 1908.

Il Socio RUFFINI presenta le seguenti opere offerte in omaggio all'Accademia dal Prof. Luigi EINAUDI e dal Dr. Giuseppe PRATO:

EINAUDI, *Studi di economia e finanza*, Roma-Torino, 1907; *Le entrate pubbliche dello Stato sabaudo nei bilanci e nei conti dei tesorieri durante la guerra di successione spagnuola*, Torino, 1908; *La finanza sabauda all'aprirsi del secolo XVIII e durante la guerra di successione spagnuola*, Torino, 1908:

PRATO, *Censimento e popolazione in Piemonte nei sec, XVI, XVII, XVIII*, Roma, 1906; *Rassegne statistiche ed economiche*, Torino, 1908; *Il costo della guerra di successione spagnuola e le spese pubbliche in Piemonte dal 1700 al 1713*, Torino, 1907.

Il Socio RUFFINI rileva come questi scritti, in cui una profonda conoscenza delle discipline economiche è unita al maggior rigore del metodo storico, costituiscono un contributo impor-

tantissimo alla storia della finanza piemontese. Egli si esprime nei termini seguenti:

I lavori del Prof. Luigi Einaudi e del Dr. Giuseppe Prato, che per gradito incarico ricevutone dagli egregi Autori io ho l'onore di offrire alla Accademia, lavori varii assai di contenuto, di indole e di mole, testimoniano però tutti del più felice connubio, in chi li scrisse, di attitudini per solito le più disparate; e sono da una parte la conoscenza, anzi la padronanza piena di tutte le discipline economico-sociali e in particolare la più consumata perizia dei fenomeni e dei sistemi finanziarii, e da un'altra parte il profondo senso storico e l'attitudine spiccatissima alle indagini documentarie e, infine, il rispetto più scrupoloso dei metodi della storiografia moderna.

E un bellissimo e proprio confortevole esempio danno i principali di questi lavori di una collaborazione intesa nel modo più ragionevole e più fruttuoso e insieme più simpatico; e cioè di una collaborazione, la quale, nulla togliendo all'opera dei pregi della iniziativa e dell' impronta e della responsabilità individuale, le conferisce però il vantaggio rilevantissimo degli sforzi bene coordinati ad un intento comune, difficilmente raggiungibile con le fatiche di una persona sola.

Cotesti lavori, che dissi principali, e che certo sono i più meritevoli di riguardo da parte della Accademia, toccano alla storia finanziaria del Piemonte.

Felicissimo e veramente illuminato pensiero, di cui la regione nostra non gli potrà mai essere abbastanza grata, fu quello di Luigi Luzzati, che, quale Ministro del Tesoro, promosse con il R. Decreto 10 ottobre 1904 la pubblicazione dei *Documenti finanziari degli Stati della Monarchia piemontese*, stanziando per essa un cospicuo fondo. Poichè, pur prescindendo dai dati di un pregio inestimabile che la raccolta da lui iniziata fornirà, quando sarà compiuta, alla scienza finanziaria insieme e alla storia del Piemonte, alla sua iniziativa dobbiamo di già non solamente il ponderoso e poderosissimo volume dell'Einaudi su *La Finanza sabauda all' aprirsi del secolo XVIII e durante la guerra di successione spagnuola*, ma ancora, per filiazione sia pure solo indiretta e mediata, anche i due altri bei volumi, l'uno dell'Einaudi su *Le entrate pubbliche dello Stato sabaudo nei*

bilanci e nei conti dei tesorieri durante la guerra di successione spagnuola, e l'altro del Prato su *Il costo della guerra di successione spagnuola e le spese pubbliche in Piemonte dal 1700 al 1713*. Di fatti, compito precipuo prefisso alla raccolta, ordinata con quel R. Decreto, era quello di mettere in luce i bilanci, gli spogli ed i conti dello Stato sabaudo e di illustrarli con lo studio degli ordinamenti amministrativi, economici e finanziarii del tempo, a cominciare dall'anno 1717; e cioè dall'anno che furono pubblicati i celebri regolamenti per il governo economico delle aziende della monarchia, i quali segnarono sui sistemi finanziari antecedenti un progresso così notevole che può dirsi sia stato anche decisivo e quasi definitivo, tanto che a quegli ordinamenti si riattaccano direttamente i documenti contabili dell'Italia unita.

Se non che, come ognuno intende, la vera portata delle novità del 1717 non si sarebbe potuta con esattezza misurare se non dopo segnato, sia pure solo sommariamente, il punto di partenza: cioè, se non dopo chiarito in genere l'imperfettissimo stato della pubblica contabilità nel periodo anteriore a tale anno, risalendo almeno fino ai primi di quel secolo. Il qual termine di indagine, diremo così retrospettiva, si palesava opportuno e sufficiente e quasi ovvio massimamente perciò, che cadendo in esso e la guerra di Successione spagnuola e la famosa battaglia di Torino e quell'altro complesso di avvenimenti gravissimi per lo Stato sabaudo, che a quei due grandi fatti ed episodi si ricollegano, esso ci fa vedere l'estremo sforzo, a cui il sistema finanziario antico sia stato sottoposto, e mette a nudo quelle manchevolezze sue, a riparare le quali intesero appunto le riforme più sopra dette.

A che per altro cotesto compito accessorio o meglio preparatorio, degnissimo tuttavia già di per se stesso di studio profondo ed accurato, non avesse forzatamente a rinserrarsi nei confini troppo angusti di una introduzione e magari di un volume introduttivo, intervennero provvidi gli eventi e più provvida ancora di essi una offerta della *R. Deputazione sovra gli studi di storia patria per le antiche provincie e la Lombardia*, la quale, intesa a celebrare con una pubblicazione monumentale il bicentenario della liberazione di Torino, ricorrente appunto in quel torno di tempo, chiamava a pubblicare i documenti e ad

illustrare gli avvenimenti finanziari ed economici di quel periodo fortunoso e glorioso gli stessi due studiosi, a cui era già stata commessa l'altra maggiore incombenza, traente la sua origine dal R. Decreto del 1904.

È così che ebbero vita i due volumi relativi al periodo della guerra di Successione spagnuola, di cui s'è fatto cenno più sopra. Volumi fra di loro coordinati e concatenati secondo un piano veramente savio di lavoro. All'Einaudi il trattato delle entrate; al Prato quello delle spese durante il medesimo periodo storico. Al primo cioè il compito di trattare " della contabilità pubblica al principio del settecento, presentando, elaborati, i documenti, dai quali si vede quante fossero le maniere con cui lo Stato si procacciasse le necessarie entrate; al secondo, invece, di studiare le funzioni dello Stato, illustrando i bilanci ed i conti che annotarono le spese corrispondenti a quelle funzioni e facendo il calcolo del costo di quella guerra, che fu lo scopo principale a cui intese allora con tutte le sue forze lo Stato sabaudo ". Abbiamo così un immagine compiuta, nei suoi due aspetti essenziali, opposti cioè e correlativi, " dei mezzi molteplici e dei geniali espedienti imposti dalla necessità di provvedere a bisogni eccedenti di troppo la potenzialità contributiva del paese ", e, insieme, " del modo come il denaro laboriosamente procurato si convertì in efficace strumento di preservazione e di difesa, alimentando, tra quello sfacelo dell'invasione, le funzioni più vitali dello Stato, e concorrendo poi alla vigorosa ripresa delle pubbliche attività, rinfrancate dai successi militari, indi estese con subitanea, alacre virtù espansiva, all'incorporazione ed allo sfruttamento delle nuove conquiste ". Compito, come ognun vede, davvero ponderoso per entrambi gli autori; non fosse per altro che per la lunga e vigile pazienza, con cui essi dovettero elaborare centinaia di migliaia di dati primi, onde compilare le loro tabelle, e istituire calcoli per tradurre quei dati, espressi in svariati sistemi di moneta, di pesi e di misure in dati espressi in lire piemontesi; ogni cifra delle tavole costrutte in sè compendiando lunghi raggruppamenti ed addizioni di partite, per lo più minime, spigolate attraverso ai fogli di diecine di voluminosi conti, cosicchè le classificazioni proposte rappresentano più migliaia di dati primi. Più malagevole forse ancora l'ufficio toccato qui al Prato; poichè

" mentre i documenti finanziarii relativi alle entrate conservano, anche là dove appaiono più inorganici e confusi, una certa uniformità contabile che rende suscettibile di qualche esattezza le classificazioni che se ne ricavano, gli elenchi delle spese rappresentano, per l'assenza d'ogni criterio sistematico in chi ebbe a compilarli, un tale *caos* di elementi eterogenei, non altrimenti raggruppati che dall'enumerazione cronologica, nè sempre chiariti dalla precisa indicazione dell'oggetto a cui si riferiscono le singole partite, da creare ad ogni passo enormi perplessità e spesso ostacoli insormontabili a chi tenti ridurli in regolari categorie „.

Ma se ciò ch'è vero in ogni epoca lo è più che mai tra quel prevalere di guerre condotte con i sussidii pecuniarii degli Stati coalizzati e col braccio di truppe in parte mercenarie, vale a dire che il danaro è il nerbo della guerra; noi possiamo dire di avere alfine innanzi agli occhi la trama fondamentale, e cioè la trama finanziaria di quella impresa, di così vitale e decisiva conseguenza per i futuri destini della casa di Savoia e dello Stato piemontese, della quale fin qui non si erano potuti scorgere se non i lati più appariscenti, e cioè i violenti contorni delle fazioni belliche e i fitti rabeschi delle mene diplomatiche e gli scorci impressionanti degli eroici episodi leggendarii. Ma quanto andrebbe errato chi si avvisasse di ritenere che insegnamenti di carattere tecnico abbiano potuto soltanto scaturire da tale indagine più penetrante, e che nessuna freschezza di impressioni immediate ed umane non avvivi l'aridezza delle cifre; dato pure che queste non abbiano di gia per ogni spirito riflessivo e moderno una loro propria voce, allettatrice e suaditrice profonda! Mille ragioni ha per contro l'Einaudi di avvertire, nel chiudere il suo lavoro, che il valore del quadro non è tutto negli ammaestramenti contabili, ma è anche in moltissima parte nei suoi ammaestramenti storici. " Lo studioso della storia finanziaria (trascrivo le sue stesse bellissime parole), presentando e riassumendo i freddi documenti contabili di quel periodo meraviglioso, sente che quelle cifre allineate hanno un'anima: l'anima di un popolo forte e laborioso che tutti i mezzi finanziarii, militari e politici seppe adoperare, in una unità magnifica di intenti e di opere, alla conservazione del bene supremo dell'indipendenza della patria avita „. E in perfetta armonia con

lui il Prato, la cui esposizione ha, per la stessa indole della materia, anche un'impronta meno rigidamente tecnica e un'abbondanza anche più ricreatrice di aneddoti inaspettati e sommamente istruttivi, potè condensare il segreto della riscossa piemontese fra quei supremi frangenti in questo profondo principio: " Un paese povero può, agli scopi speciali di una guerra, rivelarsi più ricco di un suo rivale dotato di larga opulenza, quando la disparità dei mezzi sia compensata da un'inversa differenza nello spirito collettivo di sacrificio; ove, in altre parole, sia più grande la somma di privazioni individuali che i cittadini del primo sono disposti ad affrontare pur di vincere a qualunque costo ".

Non è pertanto solo per avvicinare il sacrificio eroico di Pietro Micca a quello dei notturni bombardatori di Port Arthur che i solennizzatori del bicentenario piemontese avrebbero potuto ricorrere, come certo le mille volte fecero, agli epici fatti svolgentisi frattanto in quell'Estremo Oriente, ma ancora per spiegare una non meno calzante concordanza fra le ragioni ultime del successo. E ben a proposito il Prato ricorda appunto qui lo smacco proprio mortificante subìto dai feticisti del materialismo storico, vaticinanti la sicura sconfitta del Giappone semplicemente in base alla sua pochezza economica. Giustamente, del pari, egli rileva che non solo virtù di principi, di condottieri e di consiglieri generò la vittoria piemontese, ma al successo dell'azione individuale si aggiunse la vittoria dell'azione collettiva. E anch'egli ben dice da ultimo: " Di qui il fascino ritemprante e gagliardo che si sprigiona dall'apparente aridità di queste cifre contabili, lo studio delle quali, superato il primo istintivo senso di sgomento, si avviva e si popola di figure operanti, di tipici fatti, di episodî eloquenti e gentili; e la cui conclusione potremmo riassumere nelle sobrie parole dello storico subalpino: Io rivendico per noi la gloria dei nostri principi, perchè se essi furon principi valorosi, noi fummo soldati non meno valorosissimi; se essi prudenti uomini di Stato, noi prudentissimi e facilissimi sudditi; se essi principi amorevoli e moderati, noi amorevolissimi, moderatissimi; essi parchi, noi parchi; essi in tutto uomini più virtuosi che famosi, e noi il medesimo, men conosciuti che buoni ".

Una preparazione così coscienziosa, così giudiziosa e così esauriente non poteva non far nascere la più larga e lusinghiera

aspettativa per l'opera maggiore. Ora non esitiamo un momento a dire che questa aspettativa è stata non solo soddisfatta ma quasi superata dal volume davvero superbo, con cui l'Einaudi la ha testè iniziata.

Ecco il modo con cui essa opera è stata impostata. Consterà di due serie. La prima detta *Illustrazioni storiche e documenti*, conterrà le introduzioni dettate dai due compilatori a spiegare gli istituti finanziari e contabili e le condizioni economiche del secolo XVIII negli Stati della Monarchia sabauda e insieme il testo delle leggi, dei decreti, delle relazioni e dei verbali, tuttora inediti, che si ravviseranno più importanti per la storia e per la scienza. La seconda serie, intitolata *Bilanci e Spogli*, conterrà le scritture contabili in che si esprimevano ordinatamente e lucidamente i fatti finanziarii compiuti dalle molteplici aziende dello Stato sabaudo.

Il volume dell'Einaudi apre la prima serie.

In che rapporto esso stia con l'altro lavoro anteriore dello stesso autore è chiarito da questo, che nel primo di essi egli dovette supporre noti gli ordinamenti tributari o finanziari esistenti nel primo settecento, perchè troppo lungo discorso, e per quel luogo non adatto e forse non consentito, sarebbesi dovuto fare se si fosse esposto, insieme con quello della pubblica contabilità, anche un trattato della finanza sabauda contemporanea ed una storia degli avvenimenti più cospicui d'indole economica di quell'epoca. Ora in questo secondo lavoro appunto quella lacuna, o, meglio, quella presupposizione è colmata e soddisfatta. Poichè il volume, di cui stiamo ora occupandoci, contiene di fatti un quadro completo, mirabilmente completo, della finanza sabauda all'aprirsi del secolo XVIII, e cioè del periodo preriformistico. E riguarda così la finanza di pace come quella di guerra.

Quale copia di notizie e quale messe di insegnamenti si possono raccogliere da questo libro! Esse sono così ricche che è forza rinunciare, non dico a compendiare il contenuto di esso, ma semplicemente ad accennarvi. E quante celebrate novità modernissime contabili, tributarie o finanziarie non si riscontrano or divinate, or precorse e ora perfino superate da quei seriissimi ordinamenti del nostro vecchio Piemonte! E quante strambe e pur quasi proverbiali credenze ed asserzioni sulle condizioni reali di quell'antico regime sono irremissibilmente sfatate!

L'opera dell'Einaudi è certo la più significativa di quante hanno arricchita la nostra letteratura di storia regionale piemontese in questi ultimi anni. Essa merita davvero di prendere onorevole posto fra quelle che hanno segnato in passato le pietre migliari del suo confortante progresso. E forse essa — senza chiassi di pretenziose dichiarazioni auto-esaltatrici — segna anzi l'inizio di un decisivo rivolgimento nello sviluppo di quella storia, e cioè l'inizio della storia delle grandi masse umane, e della stessa fondamentale struttura di quella nostra poderosissima compagine sociale piemontese, che " divenne lo Stato più vigoroso e compatto che esistesse in Italia e potè essere strumento fortissimo di lotta nelle mani degli apostoli e degli statisti che fecero l'unità nazionale ".

Raccoltasi poscia la Classe in seduta privata procedette alla elezione di Soci nazionali non residenti e di Soci stranieri. Riuscirono eletti, salvo l'approvazione sovrana, a Soci nazionali non residenti i signori:

Prof. Ignazio Guidi della R. Università di Roma;

Prof. Felice Tocco dell'Istituto di Studi superiori in Firenze;

Prof. Luigi Pigorini della R. Università di Roma.

A Soci stranieri i signori:

Prof. Wendelin Foerster dell'Università di Bonn;

Monsignor Luigi Duchesne, Direttore della Scuola francese a Roma, membro dell'Istituto di Francia;

Prof. Raimondo Saleilles dell'Università di Parigi;

Prof. Giorgio Jellinek dell'Università di Heidelberg.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 26 Aprile 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SALVADORI, MOSSO, SPEZIA, SEGRE, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, PARONA, MATTIROLO, MORERA e CAMERANO Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente partecipa la morte del Socio corrispondente Prof. Cristiano Adolfo MAYER, avvenuta l'11 aprile corrente in Leipzig. La Classe delibera di inviare condoglianze alla famiglia.

Il Presidente comunica che lo studente Herbert Lothar KASTNER di Vienna inviò in esame all'Accademia tre soluzioni della " trisezione dell'angolo ", già state respinte dall'Accademia di Budapest e di Vienna. La Classe delibera di respingere il manoscritto, essendo dimostrata l'insolubilità del problema.

Presenta poi in omaggio alla Classe le opere seguenti che il Prof. Federico SACCO manda a nome della Commissione del servizio geologico del Portogallo: 1° *Le Néogène continental dans la basse vallée du Tage (Rive droite)* 1re partie: *Paléontologie*, par Frédéric ROMAN et M. FLICHE; 2e partie: *Stratigraphie*, par Antonio TORRES; 2° *Essai sur la tectonique de la chaîne de l'Arrabida*, par Paul CHOFFAT.

Il Socio Parona presenta in omaggio alla Classe quindici lavori di argomento geologico del Prof. Federico Sacco.

Il Socio Mattirolo presenta in omaggio, a nome dell'autore Prof. G. B. De Toni, il lavoro intitolato: *Illustrazione del secondo volume dell'erbario di Ulisse Aldrovandi.*

Il Presidente presenta per l'inserzione negli *Atti* la nota del Dr. Gustavo Sannia, intitolata: *Sul teorema di Moutard e la sua interpretazione geometrica per le congruenze* W.

Il Socio Mosso presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche un suo lavoro intitolato: *Una tomba preistorica a S. Angelo di Muxaro, nella provincia di Girgenti.* La Classe con votazione segreta ne approva la stampa nei volumi delle *Memorie.*

Il Socio Segre presenta per l'inserzione nelle *Memorie* accademiche il lavoro del Dr. Giovanni Zeno Giambelli, intitolato: *Risoluzione del problema generale numerativo per gli spazî plurisecanti di una curva algebrica.* Il Presidente delega i Soci Segre e Morera ad esaminare detta Memoria.

LETTURE

Sul teorema di Moutard e la sua interpretazione geometrica per le congruenze W.

Nota di GUSTAVO SANNIA a Torino.

1. — È noto che la ricerca delle deformazioni infinitesime di una superficie S si può ridurre alla ricerca delle soluzioni di una equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine con due variabili [1], chiamata dal prof. Bianchi *equazione caratteristica* [2].

Assumendo su S a linee coordinate u, v le asintotiche o un doppio sistema isotermo-coniugato (secondo che S ha la curvatura totale negativa o positiva), l'equazione caratteristica si può ridurre alle forme normali

$$(1) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta, \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial v^2} = M\theta.$$

Dall' interpretazione geometrica di un noto teorema di Moutard, relativo alle equazioni di questa forma, Guichard dedusse nel modo più rapido ed elegante le proprietà fondamentali delle congruenze rettilinee W [3].

Scopo di questa nota è di mostrare che il teorema di Moutard vale, non solo per le equazioni normali (1), ma anche per l'equazione caratteristica generale [4].

---

(1) Weingarten, " Giornale di Crelle ", t. 100.

(2) Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale*, 2ª ed., vol. II, p. 5.

(3) " Comptes Rendus des séances de l'Académie ", t. CX, p. 126; Bianchi, l. c. (2), cap. XVI; Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. IV, § 888.

(4) Dell'estensione del teorema di Moutard si è occupato il Burgatti nella Memoria *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine, ecc.* (" Annali di Matematica ", 1895).

Ciò mi permetterà di stabilire formole generali per lo studio delle congruenze W, e di evitare la separazione dei due casi di una superficie di partenza a curvatura negativa o positiva.

Darò infine un teorema nuovo e notevole sopra una classe importante di congruenze W.

Formole di Lelieuvre generalizzate dal Darboux.

2. — Il Darboux, nel § 881 del vol. IV delle sue *Leçons...*, generalizza rapidamente le formole di Lelieuvre, che definiscono una superficie riferita alle sue asintotiche, estendendole ad una superficie riferita ad un qualunque doppio sistema di linee. Qui darò una dimostrazione diversa e meno succinta di quelle formole, allo scopo di enunciare i risultati sotto una forma più precisa, indispensabile per il seguito.

Sia S una superficie luogo del punto

$$x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v),$$

XYZ i coseni direttivi della normale in (x, y, z) e

$$-\Sigma\, dx dX = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2,$$
$$\Sigma\, dX^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

la seconda e la terza forma fondamentale.

Preso per $\sqrt{eg - f^2}$ il valor positivo e posto

$$\Delta = \sqrt{|DD'' - D'^2|}\,, \qquad \rho = \frac{\Delta}{\sqrt{eg - f^2}}\,, \tag{2}$$

sarà ρ una quantità positiva e la curvatura totale K della superficie sarà

$$K = \frac{\epsilon}{\rho^2}\,, \tag{3}$$

ove ϵ è il segno di $DD'' - D'^2$.

Le note formole ([5])

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{fD' - gD}{eg - f^2}\,\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{fD - gD'}{eg - f^2}\,\frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{fD'' - gD'}{eg - f^2}\,\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{fD' - eD''}{eg - f^2}\,\frac{\partial X}{\partial v}\,, \end{aligned}\right.$$

([5]) L. c. ([2]), vol. I, p. 153.

per le (2) e per le identità ([6])

$$\begin{cases} -\dfrac{f}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial u}+\dfrac{e}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial v}=Y\dfrac{\partial Z}{\partial u}-Z\dfrac{\partial Y}{\partial u} \\ \dfrac{g}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial u}-\dfrac{f}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial v}=Z\dfrac{\partial Y}{\partial v}-Y\dfrac{\partial Z}{\partial v}, \end{cases}$$

si possono scrivere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}=-\dfrac{\rho D'}{\Delta}\begin{vmatrix} Y & Z \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u}\end{vmatrix}+\dfrac{\rho D}{\Delta}\begin{vmatrix} Y & Z \\ \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v}\end{vmatrix} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=-\dfrac{\rho D''}{\Delta}\begin{vmatrix} Y & Z \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u}\end{vmatrix}+\dfrac{\rho D'}{\Delta}\begin{vmatrix} Y & Z \\ \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v}\end{vmatrix} \end{cases}$$

e ponendo

$$X\sqrt{\rho}=\xi,\quad Y\sqrt{\rho}=\eta,\quad Z\sqrt{\rho}=\zeta, \tag{4}$$

diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}=-\dfrac{D'}{\Delta}\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial u}\end{vmatrix}+\dfrac{D}{\Delta}\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v}\end{vmatrix} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=-\dfrac{D''}{\Delta}\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial u}\end{vmatrix}+\dfrac{D'}{\Delta}\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v}\end{vmatrix}. \end{cases} \tag{5}$$

D'altra parte, dalle formole che esprimono le derivate parziali seconde dei coseni direttivi XYZ della normale, in funzione dei coseni stessi e delle loro derivate parziali prime ([7]), si ha che XYZ sono tre soluzioni dell'equazione

$$\begin{cases} D''\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-2D'\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+D\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}= \\ =\left[D''\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'-2D'\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'+D\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\right]\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}+ \\ +\left[D''\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'-2D'\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'+D\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'\right]\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}- \\ -(eD''+gD-2fD')\varphi\,; \end{cases} \tag{6}$$

([6]) L. c. ([2]), vol. I, p. 163.
([7]) L. c. ([2]), vol. I, p. 152.

questa, per le formole di Codazzi [8], che si possono anche scrivere sotto la forma

$$\begin{cases} D''\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}' - 2D'\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' + D\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}' = \dfrac{\Delta}{\rho}\left(\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\rho D'}{\Delta} - \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{D''}{\Delta}\right) \\ D''\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}' - 2D'\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' + D\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}' = \dfrac{\Delta}{\rho}\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\rho D'}{\Delta} - \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\rho D}{\Delta}\right), \end{cases}$$

diventa

$$\frac{\rho D''}{\Delta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - 2\frac{\rho D'}{\Delta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \frac{\rho D}{\Delta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{\rho D}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{\rho D''}{\Delta}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\rho D'}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\rho D}{\Delta}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{eD'+gD-2fD'}{\Delta}\varphi = 0,$$

e, col porre

$$\varphi\sqrt{\rho} = \theta\,, \tag{7}$$

si trasforma in

$$\Phi\left(\frac{D}{\Delta}, \frac{D'}{\Delta}, \frac{D''}{\Delta}; \theta\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\Phi\left(\frac{D}{\Delta}, \frac{D'}{\Delta}, \frac{D''}{\Delta}; \sqrt{\rho}\right) - \frac{eD''+gD-2fD'}{\Delta}\right]\theta \tag{8}$$

ove per brevità si è introdotto l'operatore differenziale

$$\Phi\left(\frac{D}{\Delta}, \frac{D'}{\Delta}, \frac{D''}{\Delta}; \ldots\right) = \frac{D''}{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\frac{D'}{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + \frac{D}{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial v^2} +$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{D''}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{D'}{\Delta}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{D}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{D'}{\Delta}\right)\frac{\partial}{\partial v}\,.$$

Dunque: *nelle formole* (5) *e nelle analoghe in y* e *z, che si deducono permutando circolarmente le lettere $\xi\eta\zeta$, le funzioni $\xi\eta\zeta$ sono tre soluzioni particolari dell'equazione* (8).

3. — Viceversa: *Presa ad arbitrio un'equazione della forma*

$$\Phi\left(\frac{a}{A}, \frac{a'}{A}, \frac{a''}{A}; \theta\right) = M\theta\,, \tag{I}$$

ove $a\,a'a''$ sono funzioni qualunque di u, v, ma

$$A = \sqrt{|a a'' - a'^2|} > 0\,,$$

[8] L. c. [2], vol. I, p. 154.

se se ne conoscono tre soluzioni linearmente indipendenti $\xi\eta\zeta$, *le formole*

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -\dfrac{a'}{A}\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} + \dfrac{a}{A}\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} \\[3ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{a''}{A}\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} + \dfrac{a'}{A}\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} \end{cases}$$

e le analoghe in y e z *dànno* xyz *con quadrature. La superficie luogo del punto*

$$x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)$$

avrà per curvatura totale e media rispettivamente

$$K = \frac{\epsilon}{\rho^2}\,, \qquad H = \frac{\epsilon}{\rho\sqrt{\rho}}\left[M\sqrt{\rho} - \Phi\left(\frac{a}{A}\,.\,\frac{a'}{A}\,,\,\frac{a''}{A} : \sqrt{\rho}\right)\right],$$

ove $\rho = \xi^2 = \eta^2 + \zeta^2$ *ed* ϵ *è il segno di* $aa'' - a'^2$; *ed i coefficienti della sua seconda forma fondamentale saranno proporzionali ad* $a\,a'a''$.

Infatti è facile verificare che le condizioni di integrabilità delle (II) sono soddisfatte.

Essendo, per le (II),

$$\sum \xi \frac{\partial x}{\partial u} = 0\,, \qquad \sum \xi \frac{\partial x}{\partial v} = 0\,,$$

sulla superficie risultante saranno $\xi\eta\zeta$ proporzionali ai coseni direttivi della normale

$$X = \frac{\xi}{\sqrt{\rho}}\,, \qquad Y = \frac{\eta}{\sqrt{\rho}}\,, \qquad Z = \frac{\zeta}{\sqrt{\rho}}\,.$$

Usando queste formole e le (II), si vede poi facilmente che i coefficienti

$$D = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}\,, \quad D' = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\,, \quad D'' = -\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}$$

della seconda forma fondamentale sono proporzionali ad $a\,a'\,a''$ col fattore di proporzionalità

$$\frac{1}{A\sqrt{\rho}}\cdot\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\rho}{A}\cdot\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\rho\sqrt{eg-f^2}}{A},$$

ove

$$e=\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2, \quad f=\sum\frac{\partial X}{\partial u}\,\frac{\partial X}{\partial v}, \quad g=\sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2$$

sono i coefficienti della terza forma fondamentale; quindi la curvatura totale sarà ([9])

$$K=\frac{eg-f^2}{DD''-D'^2}=\frac{A}{(aa''-a'^2)\rho^2}=\frac{\epsilon}{\rho^2}.$$

Infine, essendo

$$\frac{D}{a}=\frac{D'}{a'}=\frac{D''}{a''}=\frac{\Delta}{A},$$

le (II) coincidono con le (5), quindi, pel teorema precedente, saranno $\xi\,\eta\,\zeta$ tre soluzioni particolari della (8), la quale può scriversi

$$\Phi\left(\frac{a}{A},\frac{a'}{A},\frac{a''}{A};\theta\right)=\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\Phi\left(\frac{a}{A},\frac{a'}{A},\frac{a''}{A};\sqrt{\rho}\right)-\frac{eD''+gD-2fD'}{\Delta}\right]\theta;$$

dunque, paragonando con la (II), si ha necessariamente

$$M=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\,\Phi\left(\frac{a}{A},\frac{a'}{A},\frac{a''}{A};\sqrt{\rho}\right)-\frac{eD''+gD-2fD'}{\Delta}.$$

Osservando infine che ([10])

$$H=\frac{2fD'-eD''-gD}{eg-f^2},$$

si ha subito per H l'espressione scritta nell'enunciato.

([9]) L. c. ([2]), vol. I, p. 154.
([10]) L. c. ([2]), vol. I, p. 154.

4. — Dall'espressione di H segue che: *la superficie risultante sarà ad area minima* ($H = 0$) *solo quando le soluzioni* $\xi \eta \zeta$ *della* (I) *sono tali che anche*

$$\sqrt{\rho} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

è una soluzione della stessa equazione.

È bene anche osservare che tutte le superficie risultanti da terne di soluzioni di una stessa equazione del tipo (I), o anche da equazioni differenti solo pel coefficiente M di θ, avranno i coefficienti delle loro seconde forme fondamentali proporzionali (ad $a\,a'a''$ e quindi) tra loro; dunque *esse risultano riferite tra loro in modo che su di esse si corrispondono i sistemi coniugati e le asintotiche.*

Per $a = a'' = 0$, le (II) si riducono alle formole di Lelieuvre[11] pel caso in cui le u, v sono le asintotiche; per $a = a''$, $a' = 0$, si riducono alle analoghe pel caso in cui le u, v costituiscono un doppio sistema isotermo-coniugato [12]. La (I) assume le due forme normali (1), rispettivamente.

Formole per le deformazioni infinitesime.

5. — La ricerca delle deformazioni infinitesime di una superficie S equivale alla ricerca delle superficie $\bar{S}$,

$$\bar{x} = \bar{x}(u, v)\,, \quad \bar{y} = \bar{y}(u, v)\,, \quad \bar{z} = \bar{z}(u, v)$$

che corrispondono ad S per ortogonalità di elementi.

Queste si determinano con quadrature dalle formole

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= \frac{\left(D \dfrac{\partial X}{\partial v} - D' \dfrac{\partial X}{\partial u}\right) \varphi - \left(D \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - D' \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right) X}{\sqrt{eg - f^2}} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= \frac{-\left(D'' \dfrac{\partial X}{\partial u} - D' \dfrac{\partial X}{\partial v}\right) \varphi + \left(D'' \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - D' \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) X}{\sqrt{eg - f^2}} \end{aligned} \right.$$

---

(11) " Bulletin des Sciences Mathématiques ", t. 12, p. 126.
(12) L. c. (4), vol. I, p. 170.

e dalle analoghe in $\bar{y}$ e $\bar{z}$, ove φ è una soluzione qualunque dell'equazione caratteristica (6). Ogni soluzione φ dà una superficie $\bar{S}$, e quindi una deformazione infinitesima di S ([13]).

Or le (9) si possono scrivere, per le (2),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= -\frac{\rho D}{\Delta}\begin{vmatrix} X & \varphi \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v}\end{vmatrix} + \frac{\rho D'}{\Delta}\begin{vmatrix} X & \varphi \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u}\end{vmatrix} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= -\frac{\rho D'}{\Delta}\begin{vmatrix} X & \varphi \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v}\end{vmatrix} + \frac{\rho D''}{\Delta}\begin{vmatrix} X & \varphi \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v}\end{vmatrix}\end{aligned}\right.$$

e con le sostituzioni (4) e (7), diventano

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= -\frac{D}{\Delta}\begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \theta}{\partial v}\end{vmatrix} + \frac{D'}{\Delta}\begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial u}\end{vmatrix} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= -\frac{D'}{\Delta}\begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \theta}{\partial v}\end{vmatrix} + \frac{D''}{\Delta}\begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial u}\end{vmatrix}\end{aligned}\right.$$

con le analoghe in $\bar{y}$ e $\bar{z}$, ove $\xi\, \eta\, \zeta$ sono tre soluzioni particolari della trasformata della (6) mediante la (7), cioè della (8).

Possiamo dunque completare il teorema del § 3 come segue: *per ogni altra soluzione* θ *dell'equazione caratteristica* (I), *le formole*

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= -\frac{a}{A}\begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \theta}{\partial v}\end{vmatrix} + \frac{a'}{A}\begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial u}\end{vmatrix} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= -\frac{a'}{A}\begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \theta}{\partial v}\end{vmatrix} + \frac{a''}{A}\begin{vmatrix} \xi & \theta \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \theta}{\partial u}\end{vmatrix}\end{aligned}\right.$$

e le analoghe in $\bar{y}$ *e* $\bar{z}$ *dànno, con quadrature, una superficie* $\bar{S}$ *corrispondente ad* S *per ortogonalità di elementi, e quindi una deformazione infinitesima di* S.

([13]) L. c. ([2]), vol. II, §§ 224 e 225.

I teoremi di Moutard e di Bianchi per la (I).

6. — Sia R una soluzione particolare della (I), cioè sia

$$\Phi\left(\frac{a}{A}, \frac{a'}{A}, \frac{a''}{A}; R\right) = MR. \tag{10}$$

Eliminando M tra (I) e (10), si ha

$$\frac{a''}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix} - \frac{a'}{A} \frac{\partial}{\partial u} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix} - \frac{a'}{A} \frac{\partial}{\partial v} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix} + \frac{a}{A} \frac{\partial}{\partial v} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{a''}{A} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{a'}{A}\right) \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix} + \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{a}{A} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{a'}{A}\right) \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{a''}{A} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix} - \frac{a'}{A} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{a}{A} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix} - \frac{a}{A} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix}\right] = 0;$$

detta dunque ψ una conveniente funzione di u, v, si può porre

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial u} &= -\frac{a'}{A} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix} + \frac{a}{A} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix} \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} &= -\frac{a''}{A} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix} + \frac{a'}{A} \begin{vmatrix} \theta & R \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

ossia

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial\psi}{\partial u} &= -\frac{a'}{A} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\theta}{R} + \frac{a}{A} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\theta}{R} \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial\psi}{\partial v} &= -\frac{a''}{A} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\theta}{R} + \frac{a}{A} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\theta}{R}, \end{aligned}\right.$$

da cui

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\theta}{R} &= \frac{1}{R^2}\left(\frac{a'}{A} \frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{a}{A} \frac{\partial\psi}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial}{\partial v} \frac{\theta}{R} &= \frac{1}{R^2}\left(\frac{a''}{A} \frac{\partial\psi}{\partial u} - \frac{a'}{A} \frac{\partial\psi}{\partial v}\right). \end{aligned}\right.$$

Dunque ψ soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{a''}{A}\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{a'}{A}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{a'}{A}\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{a}{A}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\right],$$

la quale, ponendo

$$\psi = R\theta_1,$$

si trasforma in

$$\Phi\left(\frac{a}{A},\frac{a'}{A},\frac{a''}{A};\theta_1\right)=M_1\theta_1, \tag{I*}$$

ove

$$M_1=R\Phi\left(\frac{a}{A},\frac{a'}{A},\frac{a''}{A};\frac{1}{R}\right). \tag{11}$$

La (I*) si può dire *la trasformata di Moutard della* (I) *mediante la soluzione particolare* R.

Dalla (11) risulta che $\frac{1}{R}$ è soluzione particolare della (I*), quindi viceversa: *la* (I) *è la trasformata di Moutard della* (I*) *mediante la soluzione particolare* $\frac{1}{R}$.

I due problemi di integrazione delle (I) *e* (I*) *sono equivalenti, chè tra le loro soluzioni generali* θ *e* θ_1 *passano le relazioni*

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{R^2}\frac{\partial(R\theta_1)}{\partial u}&=-\frac{a'}{A}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\theta}{R}+\frac{a}{A}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\theta}{R}\\ \frac{1}{R^2}\frac{\partial(R\theta_1)}{\partial v}&=-\frac{a''}{A}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\theta}{R}+\frac{a'}{A}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\theta}{R},\end{aligned}\right. \tag{12}$$

dalle quali, nota θ, *si deduce* θ_1 *con quadrature, e inversamente.*

(I) e (I*) coincidono solo quando anche $\frac{1}{R}$ è soluzione della (I).

7. — *Se due equazioni*

$$\Phi\left(\frac{a}{A},\frac{a'}{A},\frac{a''}{A};\theta\right)=M_1\theta,\quad \Phi\left(\frac{a}{A},\frac{a'}{A},\frac{a''}{A};\theta\right)=M_2\theta$$

ammettono una trasformata comune

$$\Phi\left(\frac{a}{A},\frac{a'}{A},\frac{a''}{A};\theta\right)=M\theta,$$

esse ne ammettono una semplice infinità, dipendente da una costante arbitraria.

Questo non è che il teorema che il Prof. Bianchi ha dato per le equazioni normali (1), esteso all'equazione caratteristica generale. Esso si può dimostrare, mediante le formole precedenti, seguendo passo passo la via tenuta dall'illustre Autore [14].

Le congruenze W.

8. — Siano $\xi\ \eta\ \zeta\ R$ quattro soluzioni particolari della (I). Consideriamo la superficie S definita dalle (II) e quella sua particolare deformazione infinitesima che corrisponde alla soluzione R ed è definita dalle formole

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= -\frac{a}{A}\begin{vmatrix} \xi & R \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v}\end{vmatrix} + \frac{a'}{A}\begin{vmatrix} \xi & R \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u}\end{vmatrix} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= -\frac{a'}{A}\begin{vmatrix} \xi & R \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v}\end{vmatrix} + \frac{a''}{A}\begin{vmatrix} \xi & R \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u}\end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

e dalle analoghe, che dànno le coordinate $\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}$ di un punto della superficie $\bar{S}$ corrispondente ad S per ortogonalità di elementi.

Posto

$$(14)\qquad \bar{x} = R\xi_1,\ \bar{y} = R\eta_1,\ \bar{z} = R\zeta_1,$$

$\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ saranno, per le (12), tre soluzioni particolari della (I*).

Costruiamo ora, mediante le (6), una superficie S_1 definita, a meno di una traslazione, dalle formole

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= -\frac{a'}{A}\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u}\end{vmatrix} + \frac{a}{A}\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v}\end{vmatrix} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{a''}{A}\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u}\end{vmatrix} + \frac{a'}{A}\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v}\end{vmatrix} \end{aligned}\right.$$

e dalle analoghe in y_1 e z_1.

[14] L. c. [2], vol. II, p. 69.

Possiamo disporre delle costanti additive in $x_1\ y_1\ z_1$ *in modo che* S_1 *assuma tale posizione nello spazio, da formare insieme con* S *la superficie focale di una congruenza* W. *Ciò si otterrà ponendo*

$$(16)\qquad x_1 = x + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix},\ y_1 = y + \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta & \xi \end{vmatrix},\ z_1 = z + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi & \eta \end{vmatrix}.$$

Infatti dalle (15) e (16) risulta

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(x_1-x)}{\partial u} &= \frac{a'}{A}\left\{\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & \xi_1 \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial u} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix}\right\} - \frac{a}{A}\left\{\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial v} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix}\right\} \\ \frac{\partial(x_1-x)}{\partial v} &= \frac{a''}{A}\left\{\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial u} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix}\right\} - \frac{a'}{A}\left\{\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial\eta_1}{\partial v} & \frac{\partial\xi_1}{\partial v} \end{vmatrix}\right\} \end{aligned}\right.$$

ossia

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(x_1-x)}{\partial u} &= \begin{vmatrix} \eta & \frac{a'}{A}\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{a}{A}\frac{\partial\eta}{\partial v} \\ \zeta & \frac{a'}{A}\frac{\partial\zeta}{\partial u} - \frac{a}{A}\frac{\partial\zeta}{\partial v} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & \frac{a'}{A}\frac{\partial\eta_1}{\partial u} - \frac{a}{A}\frac{\partial\eta_1}{\partial v} \\ \zeta_1 & \frac{a'}{A}\frac{\partial\zeta_1}{\partial v} - \frac{a}{A}\frac{\partial\zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix} \\ \frac{\partial(x_1-x)}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \eta & \frac{a''}{A}\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{a'}{A}\frac{\partial\eta}{\partial v} \\ \zeta & \frac{a''}{A}\frac{\partial\zeta}{\partial u} - \frac{a'}{A}\frac{\partial\zeta}{\partial v} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & \frac{a''}{A}\frac{\partial\eta_1}{\partial u} - \frac{a'}{A}\frac{\partial\eta_1}{\partial v} \\ \zeta_1 & \frac{a''}{A}\frac{\partial\zeta_1}{\partial u} - \frac{a'}{A}\frac{\partial\zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Ora le (12) si possono scrivere

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{a'}{A}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{a}{A}\frac{\partial\theta}{\partial v} &= \left(\frac{a'}{A}\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{a}{A}\frac{\partial R}{\partial v}\right)\frac{\theta}{R} - \frac{1}{R}\frac{\partial(R\theta_1)}{\partial u} \\ \frac{a''}{A}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{a'}{A}\frac{\partial\theta}{\partial v} &= \left(\frac{a''}{A}\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{a'}{A}\frac{\partial R}{\partial v}\right)\frac{\theta}{R} - \frac{1}{R}\frac{\partial(R\theta_1)}{\partial v} \end{aligned}\right.$$

ed in queste è lecito scambiare θ con θ_1 ed R con $\frac{1}{R_1}$, quindi

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{a'}{A}\frac{\partial\theta_1}{\partial u} - \frac{a}{A}\frac{\partial\theta_1}{\partial v} &= -\left(\frac{a'}{A}\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{a}{A}\frac{\partial R}{\partial v}\right)\frac{\theta_1}{R} - R\frac{\partial}{\partial u}\frac{\theta}{R} \\ \frac{a''}{A}\frac{\partial\theta_1}{\partial u} - \frac{a'}{A}\frac{\partial\theta_1}{\partial v} &= -\left(\frac{a''}{A}\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{a'}{A}\frac{\partial R}{\partial v}\right)\frac{\theta_1}{R} - R\frac{\partial}{\partial v}\frac{\theta}{R}. \end{aligned}\right.$$

Se si tien presente che le (18) e (19) valgono per le coppie di valori

$$\xi \text{ e } \xi_1, \quad \eta \text{ e } \eta_1, \quad \zeta \text{ e } \zeta_1$$

di θ e θ_1, si vede subito che le (17) si riducono a

$$\frac{\partial(x_1 - x)}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & -\frac{1}{R}\frac{\partial(R\eta_1)}{\partial u} \\ \zeta & -\frac{1}{R}\frac{\partial(R\zeta_1)}{\partial u} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & -R\frac{\partial}{\partial u}\frac{\eta}{R} \\ \zeta_1 & -R\frac{\partial}{\partial u}\frac{\zeta}{R} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(x_1 - x)}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta & -\frac{1}{R}\frac{\partial(R\eta_1)}{\partial v} \\ \zeta & -\frac{1}{R}\frac{\partial(R\zeta_1)}{\partial v} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & -R\frac{\partial}{\partial v}\frac{\eta}{R} \\ \zeta_1 & -R\frac{\partial}{\partial v}\frac{\zeta}{R} \end{vmatrix}$$

ossia a

$$\frac{\partial(x_1 - x)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta \\ \zeta_1 & \zeta \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x_1 - x)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta \\ \zeta_1 & \zeta \end{vmatrix},$$

da cui seguono le (16), prendendo valori convenienti (nulli) per le costanti additive.

Dalle (16) risulta

$$\xi(x_1 - x) + \eta(y_1 - y) + \zeta(z_1 - z) = 0,$$

$$\xi_1(x_1 - x) + \eta_1(y_1 - y) + \zeta_1(z_1 - z) = 0,$$

quindi, se si osserva che $\xi\,\eta\,\zeta$ sono proporzionali ai coseni direttivi della normale ad S e $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ a quelli della normale ad S_1 (v. § 3), si deduce che la retta che unisce i due punti corrispondenti $F(x, y, z)$ ed $F_1(x_1, y_1, z_1)$ di S ed S_1 tocca S ed S_1 in F ed F_1.

Dunque S ed S_1 sono le due falde della superficie focale della congruenza generata dai raggi FF_1.

Osservando poi che $\xi\,\eta\,\zeta$ e $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ sono due terne di soluzioni delle due equazioni (I) e (I*), che differiscono solo nei coefficienti M ed M_1 di θ e θ_1, si deduce (§ 4) che *su S ed S_1 si corrispondono i sistemi coniugati e le asintotiche, ossia che la congruenza così costruita è una congruenza* W.

9. — Il teorema ora dimostrato non è altro che il teorema di Guichard, ma enunciato e dimostrato per l'equazione caratteristica generale, anzichè per le forme normali (1). Quindi da esso si deducono tutte le conseguenze che si deducono dal teorema di Guichard.

Così, essendo $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ proporzionali alle componenti $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ dello spostamento che riceve $F(x, y, z)$ in una deformazione infinitesima di S, si deduce che: *se si considera una deformazione infinitesima qualunque di una superficie* S, *e per ogni punto di* S, *nel piano tangente, si conduce il raggio normale alla direzione dello spostamento subìto dal punto, la congruenza così costruita è una congruenza* W.

Come Guichard ha dimostrato, con questa costruzione si ottengono *le più generali congruenze* W.

Inoltre, *come l'equazione per le deformazioni infinitesime di* S *è la* (I), *così quella per le deformazioni infinitesime di* S_1 *è la* (I*).

Da ciò segue l'equivalenza dei due problemi della ricerca delle deformazioni infinitesime per le due falde di una congruenza *W*.

Osserviamo infine che le curvature di S ed S_1 sono (§ 3)

$$K = \frac{\epsilon}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2} = \frac{\epsilon}{\rho^2}, \quad K_1 = \frac{\epsilon}{(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)^2} = \frac{\epsilon}{\rho_1^2},$$

e però hanno lo stesso segno (quello di $aa'' - a'^2$).

Una classe notevole di congruenze W.

10. — Dalle (18) e dalle equivalenti (19), che legano le soluzioni della (I) e le soluzioni della trasformata (I*) mediante la soluzione R, si possono dedurre alcune relazioni che conducono a risultati interessanti.

Ponendo nella prima delle (18)

$$\theta = \xi, \eta, \zeta \quad \text{e} \quad \theta_1 = \xi_1, \eta_1, \zeta_1$$

rispettivamente, moltiplicando i risultati per $\xi \, \eta \, \zeta$ e poi sommando, si ha

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{A}\frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{a}{A}\right) = \left(\frac{a'}{A}\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{a}{A}\frac{\partial R}{\partial v}\right)\frac{\rho}{R} - \sum \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial u} - \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\sum \xi\xi_1 ;$$

facendo le stesse posizioni nella prima delle (19), moltiplicando i risultati per ξ_1, η_1, ζ_1 e poi sommando si ha

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a'}{A}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}-\frac{a}{A}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\right)=-\left(\frac{a'}{A}\frac{\partial R}{\partial u}-\frac{a}{A}\frac{\partial R}{\partial v}\right)\frac{\rho_1}{R}-\sum\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\Sigma\xi\xi_1;$$

sommando le due precedenti eguaglianze, risulta

$$(20)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\sum\xi\xi_1=\frac{a}{A}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial(\rho+\rho_1)}{\partial v}-\frac{\rho-\rho_1}{R}\frac{\partial R}{\partial v}\right]-\frac{a'}{A}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial(\rho+\rho_1)}{\partial u}-\frac{\rho-\rho_1}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\right].$$

Operando analogamente sulle seconde delle (18) e (19), si ha

$$(21)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\sum\xi\xi_1=\frac{a'}{A}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial(\rho+\rho_1)}{\partial v}-\frac{\rho-\rho_1}{R}\frac{\partial R}{\partial v}\right]-\frac{a''}{A}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial(\rho+\rho_1)}{\partial u}-\frac{\rho-\rho_1}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\right].$$

La condizione di integrabilità delle (20) e (21) dà facilmente la relazione

$$(22)\qquad \begin{cases} \Phi\left(\frac{a}{A},\frac{a'}{A},\frac{a''}{A};\rho+\rho_1\right)=2\frac{\rho-\rho_1}{R}\,\Phi\left(\frac{a}{A},\frac{a'}{A},\frac{a''}{A};R\right)+ \\ +2\left(\frac{a''}{A}\frac{\partial R}{\partial u}-\frac{a'}{A}\frac{\partial R}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{\rho-\rho_1}{R}-2\left(\frac{a'}{A}\frac{\partial R}{\partial u}-\frac{a}{A}\frac{\partial R}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial v}\frac{\rho-\rho_1}{R}, \end{cases}$$

che lega i coefficienti $a\,a'a''$ dell'equazione fondamentale (I), *la soluzione particolare scelta* R *e le curvature delle due falde* S *ed* S_1.

11. — In particolare, si consideri l'equazione

$$(23)\qquad \Phi\left(\frac{a}{A},\frac{a'}{A},\frac{a''}{A};\theta\right)=0.$$

Una sua soluzione particolare è $R=1$ e la corrispondente trasformata (I*) coincide con essa. Ad ogni soluzione particolare θ, le (12) fanno quindi corrispondere un' altra soluzione (coniugata) dell'equazione stessa, definita con quadrature dalle formole

$$(24)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\theta_1}{\partial u}=\frac{a}{A}\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{a'}{A}\frac{\partial\theta}{\partial u} \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial v}=\frac{a'}{A}\frac{\partial\theta}{\partial v}-\frac{a''}{A}\frac{\partial\theta}{\partial u}. \end{cases}$$

Dette $\xi\eta\zeta$ tre soluzioni e $\xi_1\zeta_1\eta_1$ le loro coniugate, la (24) dà

$$\Phi\left(\frac{a}{A}, \frac{a'}{A}, \frac{a''}{A};\ \rho+\rho_1\right)=0.$$

Si ha così il seguente risultato analitico: *Ad ogni soluzione particolare* θ *di un'equazione del tipo* (23) *corrisponde una soluzione coniugata, determinabile con quadrature dalle* (24). *Se* $\xi\eta\zeta$ *è una terna di soluzioni e* $\xi_1\eta_1\zeta_1$ *le loro coniugate, sarà*

$$\tau=\rho+\rho_1=\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2$$

un'altra soluzione (*con la sua coniugata* τ_1); *altre soluzioni saranno*

$$\eta^2+\zeta^2+\tau^2+\eta_1^2+\zeta_1^2+\tau_1^2,\quad \zeta^2+\xi^2+\tau^2+\zeta_1^2+\xi_1^2+\tau_1^2,$$
$$\xi^2+\eta^2+\tau^2+\xi_1^2+\eta_1^2+\tau_1^2$$

con le loro coniugate; e così via.

Ciò vale, per esempio, per le equazioni (normali)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=0,\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}=0.$$

12. — I coseni direttivi delle normali alle due falde S ed S_1 della superficie focale, in due punti corrispondenti F ed F_1, sono

$$X=\frac{\xi}{\sqrt{\rho}},\quad Y=\frac{\eta}{\sqrt{\rho}},\quad Z=\frac{\zeta}{\sqrt{\rho}},$$

$$X_1=\frac{\xi_1}{\sqrt{\rho_1}},\quad Y_1=\frac{\eta_1}{\sqrt{\rho_1}},\quad Z_1=\frac{\zeta_1}{\sqrt{\rho_1}},$$

quindi, detto γ l'angolo dei due piani focali passanti pel raggio FF_1, si ha

$$\cos\gamma=\sum XX_1=\frac{1}{\sqrt{\rho\rho_1}}\sum\xi\xi_1.$$

Per un noto teorema di Ribaucour ([15]) che, come hanno di-

([15]) L. c. ([2]), vol. II, p. 59.

mostrato il Bianchi e il Cosserat, caratterizza le congruenze W, fra le curvature delle due falde passa la relazione

$$KK_1 = \frac{1}{16d^4} \quad \text{o} \quad \rho\rho_1 = 4d^2,$$

ove $2d$ è la distanza dei punti limiti del raggio FF_1; d' altra parte, detta 2δ la distanza FF_1 dei due fuochi, si ha [16]

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{\delta}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{d^2-\delta^2}}{d};$$

da ciò segue che

$$\Sigma\xi\xi_1 = \sqrt{\rho\rho_1}\,.\cos\gamma = 2d\cos\gamma = 2\delta\cot\gamma = 2\sqrt{d^2-\delta^2}.$$

Or vogliamo considerare *le congruenze* W *nelle quali è costante la differenza dei quadrati delle distanze dei punti limiti e dei fuochi.*

Per tali congruenze, essendo $\Sigma\xi\xi_1$ costante, le (20) e (21) dànno

$$(25) \quad \frac{\partial(\rho+\rho_1)}{\partial u} = (\rho-\rho_1)\frac{\partial \log R^2}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\rho+\rho_1)}{\partial v} = (\rho-\rho_1)\frac{\partial \log R^2}{\partial v},$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\rho-\rho_1}\;\frac{\partial(\rho+\rho_1)}{\partial u}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\rho-\rho_1}\;\frac{\partial(\rho+\rho_1)}{\partial v}\right]$$

ossia

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial u} & \dfrac{\partial\rho_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial v} & \dfrac{\partial\rho_1}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Otteniamo così l'interessante risultato: *le curvature* K *e* K_1 *delle due falde della superficie focale delle congruenze* W *dianzi definite sono funzione l'una dell'altra.*

Pel citato teorema di Ribaucour, possiamo aggiungere che: *la curvatura di ciascuna falda è una funzione della distanza fra i punti limiti.*

---

[16] L. c. [2], vol. I, p. 307.

13. — Alla classe di congruenze considerate appartengono le *congruenze pseudosferiche* (d e δ costanti). Le due falde della superficie focale hanno curvature eguali e sono due superficie pseudosferiche di raggio $2d$ ([17]).

Vi appartengono le congruenze W normali ($d = \delta$), ossia le congruenze formate dalle normali ad una superficie W: in tal caso le due falde della superficie focale sono le due falde dell'evoluta della superficie evolvente W. E, come è noto, le curvature delle due falde dell'evoluta sono funzione l'una dell'altra.

Citiamo infine le congruenze W costruite dal Darboux ([18]): *Se per ogni punto di una superficie di traslazione si conduce il raggio intersezione dei due piani osculatori delle curve generatrici che vi passano, si forma una congruenza* W.

Se si assumono come curve generatrici della superficie di traslazione due curve colle torsioni costanti qualunque, ma di segno opposto, la congruenza W *appartiene alla nostra classe.*

([17]) L. c. ([2]), vol. I, § 150.

([18]) Darboux, l. c. ([3]), vol. III, p. 372 ss., oppure l. c. ([2]), vol. II, p. 62.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 3 Maggio 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Boselli, Vice-Presidente, Rossi, Brusa, Renier, Pizzi, Ruffini, D'Ercole, Brondi, Sforza e De Sanctis Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Manno, Direttore della Classe.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 12 aprile 1908.

La Classe, con voto unanime, esprime le sue vive condoglianze al Socio Allievo pel gravissimo lutto che l'ha colpito.

Il Presidente presenta i seguenti scritti offerti in omaggio dal Socio Manno: *Ermanno Ferrero, commemorazione* e *Leone Fontana, ricordi* (Torino, 1908, estratti dalla Miscellanea di Storia Patria, S. III, T. III).

Il Socio De Sanctis presenta per le *Memorie* accademiche uno studio del sig. Luigi Pareti, intitolato: *Ricerche sulla potenza marittima degli Spartani*. Il Presidente delega i Soci Cipolla e De Sanctis a riferirne in una prossima adunanza.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Maggio 1908.

PRESIDENZA DEL PROF. SENATORE ANGELO MOSSO

SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Segre, Jadanza, Foà, Guidi, Fileti, Grassi, Fusari, Parona. — Scusano l'assenza il Presidente Senatore D'Ovidio, il Socio Guareschi ed il Socio Segretario Camerano, sostituito da Parona.

Il Presidente comunica una lettera-circolare, colla quale il Sindaco della Città di Faenza invita il Presidente e tutti i membri dell'Accademia a prendere parte alle onoranze ad Evangelista Torricelli, in occasione del III centenario della sua nascita e ad assistere, nei giorni 24 e 25 ottobre, alla commemorazione. La Classe delibera di ringraziare il Sindaco di Faenza e di avvertirlo che si delegheranno a rappresentare l'Accademia quei Soci che, partecipando al Congresso in Firenze per il progresso delle scienze, si recheranno nei giorni indicati a Faenza per onorare la memoria del grande scienziato.

Il Socio Jadanza presenta per l'inserzione negli *Atti* una nota dell'Ing. Giulio Sacco, intitolata: *Aberrazioni e riflessioni nocive prodotte dai filtri di luce negli apparecchi fotografici*. Nota 1ª.

Il Socio Segre presenta pure per l'inserzione negli *Atti* la nota del Dr. Leonida Tonelli: *Sulla rettificazione delle curve*.

Il Socio FUSARI la nota del Dott. Francesco AGOSTI, dal titolo: *Ricerche sulla distribuzione dei nervi nella milza.*

Il Socio GUIDI il suo: *Contributo alla teoria degli archi elastici.*

Il Socio FILETI la nota dei Dott[i] G. PONZIO ed R. GIOVETTI: *Sulla preparazione di alcune azine.*

Per l'inserzione nelle *Memorie*, il Socio JADANZA presenta, a nome del Socio NACCARI, un lavoro del Prof. G. B. RIZZO, intitolato: *Nuovo contributo allo studio della propagazione dei movimenti sismici.* Il Presidente delega per l'esame di questa Memoria i Soci NACCARI e JADANZA.

Pure per l'inserzione nelle *Memorie*, il Socio FUSARI presenta un lavoro del Dott. A. C. BRUNI: *Intorno ai derivati scheletrici estracranici del secondo arco branchiale nell'uomo.* Il Presidente incarica i Soci FUSARI e CAMERANO dell'esame di questa Memoria.

LETTURE

Aberrazioni e riflessioni nocive prodotte dai filtri di luce negli apparecchi fotografici.

Caso d'un filtro regolare.

Nota 1ª, dell'Ing. GIULIO SACCO.

(Con una Tavola).

Nelle sue caratteristiche puramente diottriche ogni filtro di luce [1] per camera fotografica è un sistema centrato di mezzi rifrangenti isotropi le cui superficie dividenti hanno i raggi uguali ad ∞, e dalla sua unione coassiale coll'obbiettivo risulta un nuovo sistema centrato le cui pupille [2] non coincidono con quelle dell'obbiettivo, e il cui carattere è necessariamente dialitico [3].

[1] In fotografia si dice " filtro di luce ", o " schermo colorato ", una lastra di vetro od una pellicola colorata, od una vaschetta a pareti piane di cristallo contenente un liquido colorato, che si applica all'apparecchio fotografico per attenuare od assorbire totalmente certe zone dello spettro senza sensibile assorbimento delle radiazioni utili. Certi buoni filtri ortocromatici lasciano passare quasi interamente le radiazioni spettrali dall'estremo rosso sin circa alla riga b_1 e assorbono quasi per intero il resto dello spettro. Così quelli al *Filtergelb* (*Eder's Jahrb.* 1907, S. 311).

[2] In un sistema diottrico munito di diaframma si chiamano *pupille* d'*entrata* e d'*uscita* rispettivamente i coniugati del centro del diaframma rispetto agli elementi anteriore e posteriore dell'obbiettivo. Nei sistemi situati da una sola parte del diaframma una delle pupille è il centro del diaframma. Nei sistemi simmetrici le pupille coincidono coi punti nodali. Ogni fotografia, eccetto quelle prese con tele-obbiettivi, deve esser guardata da un punto che, in genere, differisce poco dalla pupilla d'uscita.

[3] Si dice *dialitica* una combinazione ottica i cui elementi sono separati da intervalli d'aria. Si usa di chiamar *saldati* i *doublets* di cui le combinazioni anteriore e posteriore constano di vetri saldati; ma in fondo anche codesti obbiettivi meritano la qualifica di obbiettivi dialitici. Un vero sistema saldato ha *tutti quanti* gli elementi saldati insieme. Tale è la lente da paesaggio a vetri saldati.

È noto che ad un fascio di raggi omocentrico incidente su una lastra di vetro piano-parallela corrisponde un fascio emergente non omocentrico; ciò accade anche per un filtro costituito da più mezzi, e introduce nelle pupille del sistema certe aberrazioni che in alcuni casi non sono trascurabili rispetto all'ortoscopia, sebbene l'aberrazione sferica sull'asse, la coma e l'astigmatismo dovuti al filtro sieno notoriamente trascurabili nei più comuni sistemi centrati ad immagine reale ([1]).

Il filtro produce inoltre immagini parassite per riflessioni fra le sue facce e fra queste e le facce delle lenti obbiettive ([2]), e riflessi di luce diffusa fra le sue facce e la superficie sensibile.

([1]) Non ci occuperemo degli obbiettivi dei microscopi. In essi l'enorme apertura del fascio incidente fa sì che basti il sottilissimo vetricino copri-oggetto a produrre una spiccata ipercorrezione, alla quale si ripara mediante un'armatura a collarino di correzione.

([2]) Se, delle superficie dividenti d'un sistema centrato, ν riflettono energicamente la luce, esse producono $\frac{\nu(\nu-1)}{2!}$ immagini parassite di 1° ordine, le cui posizioni sono funzioni delle curvature, distanze e indici di rifrazione del sistema. Se n ed n' sono gli indici di rifrazione di due mezzi contigui, l'intensità relativa dei raggi riflessi dalla superficie che li separa è data per angoli d'incidenza non molto grandi da:

$$\left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2$$

L'indice di rifrazione d'un vetro d'ottica è quasi sempre compreso fra 1.5 ed 1.6; quindi, per vetri saldati insieme, la riflessione alla superficie di saldatura è minima. Fra vetro ed aria, l'intensità relativa dei raggi riflessi è all'incirca $\left(\frac{1.55-1}{1.55+1}\right)^2 = 0{,}046$; dopo due riflessioni fra vetro e aria (come accade nella produzione delle immagini parassite) l'intensità relativa della luce parassita che ne nasce è dunque all'incirca:

$$\left(\frac{1.55-1}{1.55+1}\right)^4 = 0{,}002.$$

Se il vetro è colorato, come accade nei filtri, l'intensità della luce parassita, causa l'assorbimento, è ancora minore. Tuttavia la luce parassita originata dal filtro non si può dir sempre trascurabile, *e di ciò avemmo prove sperimentali indubbie mediante la fotografia.* Non bisogna poi trascurare il fatto che, nelle vedute grandangolari, le forti incidenze aumentano le perdite di luce utile per riflessione, mentre cresce l' intensità relativa dei raggi d'origine catottrica e catadiottrica.

Se poi le superficie dividenti del filtro non sono parallele, il sistema cessa d'esser centrato, e ciò dà luogo alle aberrazioni caratteristiche della rifrazione attraverso i prismi.

Nel presente studio indagheremo essenzialmente:

Quale influenza sull'ortoscopia abbiano gli spessori e gl'indici di rifrazione dei mezzi d'un filtro regolare e la posizione del filtro rispetto all'obbiettivo, all'oggetto ed all'immagine proiettata dal sistema, come si formi l'immagine parassita da riflessione della luce fra la prima e l'ultima superficie dividente del filtro, e quale gravità possano assumere i riflessi fra il filtro e la superficie sensibile, riservandoci di metter in luce in altra nota quali effetti nocivi, geometrici e catadiottrici, produca un filtro diedro.

Supporremo sempre che i mezzi del filtro siano isotropi e che le superficie dividenti di esso siano rigorosamente piane. Supporremo inoltre che ogni filtro regolare sia disposto colle facce normali all'asse ottico.

Nella fig. 1, $S_1S_1S_2S_2 \dots S_{k+1}S_{k+1}$ rappresenti la sezione di un filtro di k mezzi con $k+1$ superficie dividenti fatta con un piano normale a codeste superficie e contenente tutti i punti e rette della figura. Siano $s_1, s_2, \dots s_k$ gli spessori dei mezzi ed $n_1, n_2, \dots n_k$ i loro indici di rifrazione, che supponiamo compresi fra *1,336* (acqua) e *1,55* (crown di media rifrangenza). Nella figura, in cui la luce si suppone propagarsi da sinistra a destra, stabiliamo positivi i segmenti misurati da sinistra a destra sulle normali al filtro e dal basso in alto sulle rette parallele alle $S_1S_1, \dots S_{k+1}S_{k+1}$. Gli angoli misurati a partire dalle normali al filtro saranno perciò positivi se misurati in senso opposto a quello delle lancette d'orologio.

Sia UB_1 un raggio di luce che coll'angolo d'incidenza α colpisca in B_1 la faccia S_1S_1, si rifranga secondo la spezzata $B_1B_2 \dots B_kB_{k+1}E$ cogli angoli di rifrazione $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_k$, e d'emergenza β_{k+1}. Da B_{k+1}, per riflessione, avrà origine il raggio spezzato $B_{k+1} \dots B_{2k+1}$, e da B_{2k+1} si rifletterà il raggio spezzato $B_{2k+1} \dots B_{3k+1}$ a cui seguirà il raggio emergente $B_{3k+1}K$, *raggio parassito di 1° ordine*, mentre $B_{k+1}E$ è il *raggio emergente utile.*

Tirate per B_1, B_{k+1} e B_{2k+1} le normali alle facce opposte del filtro, normali i cui piedi siano N_1, N_{k+1} e N_{2k+1}, siano C e D i punti in cui la B_1N_1 è tagliata dai raggi $B_{k+1}E$ e $B_{3k+1}K$ con-

venientemente prolungati. Ciò posto, si hanno le relazioni seguenti:

$$(1)\qquad \sin\alpha = n_1\sin\beta_1 = n_2\sin\beta_2 = \ldots = n_k\sin\beta_k = \sin\beta_{k+1}$$

dalle quali, se h è un indice variabile fra 1 e k, deduciamo:

$$(1')\qquad \operatorname{tg}\beta_h = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n_h{}^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Detto β_{3k+1} l'angolo sotto cui emerge il raggio $B_{3k+1}K$, è poi evidentemente:

$$(2)\qquad \beta_{3k+1} = \beta_{k+1} = \alpha.$$

Si ha inoltre:

$$N_1B_{k+1} = s_1\operatorname{tg}\beta_1 + s_2\operatorname{tg}\beta_2 + \ldots + s_k\operatorname{tg}\beta_k = \sum_{h=1}^{h=k}[s_h\operatorname{tg}\beta_h];$$

e per la (1')

$$(3)\qquad N_1B_{k+1} = \sum\left[s\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right]\ (^1).$$

Risulta pure dalla figura e dalla (3):

$$(4)\qquad B_{k+1}B_{3k+1} = 2N_1B_{k+1} = \sum\left[2s\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right].$$

La posizione di C rispetto a B_1 è data da:

$B_1C = B_1N_1 - CN_1 = \Sigma s - N_1B_{k+1}\cot\alpha$; cioè, per la (3)

$$(5)\qquad B_1C = \sum\left[s\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)\right]$$

che per $\alpha = 0°$ e $\alpha = 90°$ assume i valori:

$$(5_0)\qquad B_1C_0 = \sum\left[s\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$(5_*)\qquad B_1C_* = \sum s = B_1N_1.$$

(1) D'or innanzi lasciamo sottintesi gli indici h e i limiti $h=1$ e $h=k$, che sussistono per tutte le sommatorie contenute nelle nostre formole.

Le posizioni di C rispetto alle sue posizioni-limiti saranno dunque:

$$C_0C = \sum \left[s\left(\frac{1}{n} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)\right] \tag{6}$$

$$CC_* = CN_1 = \sum \left[s \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \right]. \tag{7}$$

Diciamo G_0 il punto in cui una parallela a CE tirata per C_0 taglia la faccia $S_{k+1}S_{k+1}$, Z_0 e Z i punti d'intersezione delle C_0G_0 e CE colla normale abbassata su esse da B_{3k+1}, T il piede della normale abbassata da D sulla $B_{k+1}E$. La posizione di D rispetto a C sarà data da:

$$DC = B_{k+1}B_{3k+1}\cot\alpha;$$

e per la (4):

$$DC = \sum \left[2s \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \right]. \tag{8}$$

E la posizione di D rispetto a B_1 risulterà dalle (8) e (5):

$$B_1D = B_1C - DC = \sum \left[s\left(1 - \frac{3\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)\right]. \tag{9}$$

Ci interessano ancora le grandezze $B_{k+1}G_0$, G_0Z_0, TC e TD. Noi abbiamo:

$$B_{k+1}G_0 = C_0C\,\mathrm{tg}\,\alpha;$$

onde, per la (6):

$$B_{k+1}G_0 = \sum \left[s\left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{n} - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)\right]. \tag{10}$$

Per trovare G_0Z_0 notiamo che è:

$$G_0B_{3k+1} = B_{k+1}B_{3k+1} - B_{k+1}G_0;$$

e per le (4) e (10):

$$G_0B_{3k+1} = \sum \left[s\left(\frac{3\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} - \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{n}\right)\right].$$

Ora è: $G_0Z_0 = G_0B_{3k+1}\sin\alpha$; quindi:

$$(11) \qquad G_0Z_0 = \sum\left[s\left(\frac{3\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} - \frac{\sin^2\alpha}{n\cos\alpha}\right)\right].$$

Per trovare TC notiamo che è: $TC = DC\cos\alpha$; onde per la (8):

$$(12) \qquad TC = \sum\left[2s\frac{\cos^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right] \text{(1)}.$$

Finalmente per $ZB_{3k+1} = TD$, distanza fra i raggi utile e parassito, abbiamo:

$$ZB_{3k+1} = B_{k+1}B_{3k+1}\cos\alpha\,;$$

e per la (4):

$$(13) \qquad TD = ZB_{3k+1} = \sum\left[s\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right].$$

Tutte le grandezze finora considerate, essendo solamente funzioni degli indici di rifrazione, degli spessori e dell'angolo d'incidenza α, non cambiano se il filtro viene spostato senza alterar la direzione della normale alle sue facce. — Applichiamo ora le formole trovate ai diversi casi di posizione del filtro.

a) Filtro fra l'obbiettivo e l'oggetto.

Il raggio UB_1 (fig. 1) parta da un punto oggettivo U e l'obbiettivo sia dalla parte della faccia $S_{k+1}S_{k+1}$. Tirata da U la UX normale al filtro, la quale tagli in V, V_0 ed H le rette $B_{k+1}E$, C_0G_0 e $B_{3k+1}K$, e detto F il piede della normale abbassata da H sul raggio $B_{k+1}E$, risulta evidentemente:

$$UV = B_1C \qquad UV_0 = B_1C_0 \qquad V_0V = C_0C$$
$$UH = B_1D \qquad FV = TC \qquad FH = TD$$

(1) Le (11) e (12), che ci servono nel calcolo della distanza angolare fra le immagini utile e parassita, rappresentano generalmente termini piuttosto piccoli rispetto al termine con cui si debbono sommare. Tuttavia ne teniamo conto per esser esatti fino allo scrupolo.

Fermandoci alla prima relazione:

$$(5)\qquad UV = B_1C = \sum\left[s\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)\right]$$

è chiaro che V è l'immagine virtuale che il filtro produce di U per quei raggi emananti da U che fanno colla normale al filtro l'angolo α. Per le (5), (5_0) e (5_*), V col variar di α fra 0° e 90° varia fra due posizioni estreme V_0 e V_* definite da $UV_0 = B_1C_0$ e $UV_* = B_1N_1$. Il coniugato di U rispetto al filtro è dunque una caustica virtuale di cui l'obbiettivo utilizzerà una piccola porzione. Quest'ultima è limitata da una superficie di rivoluzione intorno ad UX, se UX coincide coll'asse ottico dell'obbiettivo; ha invece una forma irregolare, ma simmetrica rispetto al piano contenente UX e la pupilla d'entrata, se l'asse ottico dell'obbiettivo non coincide colla UX, ma le è semplicemente compiano [1].

La zona V_0V d'aberrazione sferica sull'asse, quando l'asse dell'obbiettivo coincide colla UX, è piccolissima anche nei casi più sfavorevoli [2]. D'altra parte essa produce una *ipercorrezione*, cioè un'aberrazione opposta all'aberrazione longitudinale di tutti gli ordinari obbiettivi, i quali sono notoriamente subcorretti [3]. Quindi, se senza filtro la messa in foco si dovette fare portando la pupilla d'entrata dell'obbiettivo in un punto Q della UX a distanza d da U, la messa a foco col filtro è ben fatta se si porta la pupilla d'entrata dell'obbiettivo in un punto R della UX il quale disti da V_0 della stessa quantità d.

Quando l'asse ottico non è in UX, l'aberrazione nei fasci obliqui prodotta dal filtro avrà carattere di *coma* per grandi aperture del fascio entrante e d'*astigmatismo* quando l'apertura

---

[1] Rammentiamo che l'asse ottico si suppone normale al filtro, perciò esso è necessariamente compiano colla retta UX, qualunque sia il punto U che si considera nello spazio oggettivo.

[2] Per fare un caso sfavorevolissimo, supponiamo che si usi un filtro a vaschetta pel quale sia $s_1 = s_3 = 5$ mm., $s_2 = 10$ mm., $n_1 = n_3 = 1.54$, $n_2 = 1.336$, il fascio entrante abbia l'enorme apertura $2\alpha^\circ = 22^\circ.40'$.

Troveremo: $V_0V = 0{,}16$ mm. circa.

[3] M. von Rohr, *Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs*, pag. 26 e seg., e diagrammi delle aberrazioni in fine dell'opera (Julius Springer, Berlin 1899).

del fascio entrante è piccolissima [1], ma anche queste aberrazioni risultano in pratica affatto innocue, e sarebbe facile verificarlo con esempi numerici, anche supponendo casi sfavorevolissimi.

Le rette UO, V_0P_0, QI_0 ed RE siano tracce di piani normali ad UX. UO rappresenterà il piano oggettivo di messa in foco del sistema *filtro* + *obbiettivo*, V_0P_0 il piano di messa in foco dell'*obbiettivo*, RL il piano della pupilla d'entrata dell'ob-

---

[1] Inalzata per V_* la normale V_*Y alla UX, il raggio VE della caustica, di cui il piano del foglio determina una sezione meridiana, taglia sui due assi cartesiani V_*X e V_*Y i segmenti $V_*V = -CN_1$ la cui espressione si ha dalla (7), e $V_*W = N_1B_{k+1}$ la cui espressione è data dalla (3). L'inviluppo della sezione meridiana è dunque facilmente tracciabile per tangenti, oppure può esser tracciato per punti combinando la

$$\frac{x}{\sum\left[s\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right]}-\frac{y}{\sum\left[s\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right]}+1=0$$

(equazione del raggio VE in funzione dei segmenti che taglia sugli assi) colla sua derivata rispetto ad α. A ciascun valore dato ad α corrisponde una coppia d'equazioni in x e y che ci fornisce un punto. Un estremo della curva inviluppo è evidentemente tangente alla V_*X nel punto V_0 pel quale è: $x = -\sum\frac{s}{n}$, l'altro estremo è tangente alla V_*Y in un punto W_* pel quale è: $y = \sum\frac{s}{\sqrt{n^2-1}}$. Ciascun punto della curva-inviluppo appartiene ad una distinta circonferenza risultante dalla intersezione di due superficie di coni retti infinitamente vicine ed aventi i loro vertici sulla UX. Per punti oggettivi U situati fuori dell'asse ottico e per piccolissime aperture del fascio entrante, la pupilla d'entrata dell'obbiettivo intercetta un fascetto proveniente da un elemento di caustica che presenta due lineette d'astigmatismo. Una di esse, normale al foglio e quindi al fascetto entrante nell'obbiettivo, è determinata dall' intersezione di due porzioni di superficie di coni; l'altra lineetta, normale alla prima e giacente in un altro piano, è costituita da una brevissima serie di vertici di coni situati sulla normale UX abbassata dal punto-oggetto U sul filtro. Le due superficie coniugate del piano oggettivo determinate da queste due lineette sono un po' concave verso l'obbiettivo, producono perciò un'aberrazione opposta a quella degli obbiettivi ordinari (V. i diagrammi d'astigmatismo in fine dell'op. cit. di M. von Rohr). Tutto questo si deduce facilmente dalla figura e dalle formole che stabilimmo.

Analoghe aberrazioni si troverebbero per H, che è l'immagine parassita di U; ma queste non ci interessano.

biettivo. QI_0 è il piano del punto I_0 di cui stiamo per vedere il significato.

La pupilla d'entrata dell'obbiettivo sia in E a distanza d dal punto P_0 in cui l'asse ottico tagli la V_0P_0. Siano O, I_0, I i punti in cui l'asse ottico taglia le rette UO, QI_0 e UB_1. Ciò posto, invece di dire che la pupilla E d'entrata *dell'obbiettivo* vede il coniugato V di U, possiamo dire che U è veduto da I, *pupilla d'entrata del sistema filtro + obbiettivo*. Ad una pupilla E fissa e ad un punto V affetto da aberrazioni noi sostituiamo così un punto U fisso ed una pupilla I, determinata da $EI = CB_1$ [vedi la (5)] funzione di α, e perciò affetta da un'aberrazione. Quest'aberrazione è data da $I_0I = CC_0$ perchè evidentemente I_0 è la posizione-limite di I per $\alpha = 0$. Per la (6) è dunque:

$$I_0I = \sum \left[s \left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} - \frac{1}{n} \right) \right]. \tag{14}$$

Quest'aberrazione pupillare, negativa e crescente in valor assoluto con α, dà origine alla distorsione di cui stiamo per occuparci.

La distorsione. — Un segmento variabile OU del piano oggettivo, misurato a partir dall'asse, è veduto da I_0 quando α è infinitamente piccolo, mentre per α finito è visto da una pupilla I che gli è più vicina di I_0. Se tiriamo la retta UI_0, appare chiaro che col crescer di α cresce la differenza fra l'angolo $\alpha = OIU$ e l'angolo $\alpha_0 = OI_0U$ sotto cui si dovrebbe vedere qualsiasi segmento OU per soddisfare all'ortoscopia. Ora si ha, intendendo che d sia positivo:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{UO}{d}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{UO}{d - II_0} = \frac{UO}{d - \sum \left[s \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \right) \right]}.$$

La distorsione $\mathfrak{D}$ sarà dunque espressa da:

$$\mathfrak{D} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_0}{\operatorname{tg}\alpha_0} = \frac{\sum \left[s \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \right) \right]}{d - \sum \left[s \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \right) \right]} \tag{15}$$

funzione positiva e crescente di α per α variabile fra 0° e $\pm 90^\circ$.

Questa distorsione *positiva* [1] tende a zero se il rapporto di d allo spessore del filtro tende ad infinito. Per la piccolezza della sommatoria rispetto a d la (15) può assumer la forma:

$$(15') \qquad \mathfrak{D} = \frac{1}{d} \sum \left[s \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \right) \right].$$

Per $d = 133.33$ mm., e per un filtro a vaschetta in cui sia $s_1 = s_3 = 5$ mm., $s_2 = 10$ mm., $n_1 = n_3 = 1.53$, $n_2 = 1.336$, troviamo:

Per $\alpha =$	0°	10°	20°	25°	30°	40°	50°	
$\mathfrak{D} =$	0	+0.81	+3.03	+5.12	+7.71	+14.66	+24.36	p. mille

Questa distorsione positiva, che nel nostro esempio sorpassa già il 5 per mille per un angolo di campo $2\alpha = 50°$ [2], potrebbe nei lavori d'ingrandimento compensare la distorsione negativa che gli obbiettivi olosimmetrici ed emisimmetrici producono quando il piano oggettivo è molto vicino al loro primo foco [3], ma con

---

[1] I fotografi dànno alla distorsione positiva il nome di distorsione " *a guancialetto* " e chiamano distorsione " *a bariletto* " la distorsione negativa.

[2] Questa spiccata distorsione, che si ha malgrado che i raggi uscenti dal filtro siano paralleli ai raggi entranti, dimostra ancora una volta quanto è già stato messo in rilievo dal von Rohr (Op. cit., pag. 53), e dal Czapski (*Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente*, pag. 221), cioè che la *condizione di Airy* o *condizione delle tangenti*:

$$\frac{\text{tg. ang. d'uscita}}{\text{tg. ang. d'entrata}} = K$$

dove K è una costante, non basta a guarentire l'ortoscopia, ed esige di essere accompagnata dalla " *condizione di Bow e Sutton* ", o *condizione dell'assenza d'aberrazione pupillare.* Quest'ultima condizione fu dimenticata da alcuni autori, fra cui lo Chwolson (*Traité de Physique*, tomo II, fasc. 1. Hermann, Paris, 1906).

[3] Gli obbiettivi olosimmetrici (composti di due elementi identici) ed emisimmetrici (composti di due elementi identici fisicamente, ma solo simili geometricamente) producono una distorsione che da un *maximum* positivo per punti-oggetti all'∞, decresce fino a zero quando il piano oggettivo si avanza dall'infinito sino al primo piano focale dell'elemento anteriore dell'obbiettivo (E. Wandersleb, *Der Fehler der Verzeichnung bei photographischen Objektiven*, Eder's Jahrbuch für 1907, pag. 145 e seg.).

Se il piano oggettivo s'avvicina ancor più, la distorsione diventa, per

altri obbiettivi essa può aggravare la distorsione loro propria e perciò produrre un danno sensibile.

L'immagine parassita da riflessi fra le due facce del filtro. — La pupilla d'entrata E dell'obbiettivo vede oltre il punto V, immagine virtuale di U, anche l'immagine parassita H, la quale dista da U di $UH = B_1D$, grandezza che ci è fornita dalla (9). L'angolo ρ sotto cui VH è veduto da E, se vien considerato come uguale alla sua tangente, è dato da:

$$\rho = \frac{FH}{FE} = \frac{ZB_{3k+1}}{FV + VE} = \frac{ZB_{4k-1}}{TC + VE}.$$

Ora è:

$$VE = \frac{d - V_0V}{\cos\alpha} = \frac{d - C_0C}{\cos\alpha}.$$

Quindi, per le (6), (12) e (13), sarà:

$$(16) \qquad \rho = \frac{\sum\left[2s\,\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right]}{d + \sum\left[s\left(\frac{\cos\alpha + 2\cos^3\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} - \frac{1}{n}\right)\right]}$$

funzione il cui valore assoluto prima cresce e poi decresce col crescer di α, ed è tanto minore quanto maggiore è d rispetto allo spessore del filtro. Ora, affinchè l'occhio collocato nel giusto punto prospettico nel guardar la fotografia, cioè situato all'incirca alla distanza della pupilla d'uscita, non possa distinguer dall'immagine utile una eventuale immagine parassita, bisogna, almeno teoricamente, che l'angolo ρ sia minore dell'angolo d'acuità normale, cioè di $\frac{1}{4000}$. L'esempio che stiamo per dare dimostra che ρ può sorpassare enormemente codesto limite. Sia $s_1 = s_3 = 5$ mm., $s_2 = 10$ mm., $n_1 = n_3 = 1.53$, $n_2 = 1.336$, $d = 133.33$ mm.

Per $\alpha =$	$0°$	$20°$	$40°$
sarà $\rho =$	0	0,056	0,082
ossia $\rho' =$	$0°$	$3°.12'$	$4°.42'$ in gradi e minuti sessagesimali.

---

conseguenza, negativa. Questa distorsione è causata dall'aberrazione pupillare, malgrado che negli obbiettivi simmetrici sia soddisfatta la condizione di Airy (per essi è $K = 1$).

Quest'esempio corrisponderebbe ad un ingrandimento in scala 3 : 1 fatto su lastra ortocromatica con un obbiettivo di 100 mm. di distanza focale e con un filtro a vaschetta. Naturalmente l'immagine parassita si imprimerà nell'emulsione solo quando si tratti di un oggetto (ad es., un diapositivo) *a violentissimi contrasti di chiaroscuro* e l'immagine parassita d'un punto luminosissimo vada a formarsi su un punto corrispondente ad una regione oscura ([1]). Questo caso è dunque assai raro, ma è possibile.

È evidente che tanto riguardo alle immagini parassite quanto iguardo alla distorsione conviene, per attenuare il danno, adoprar filtri del minimo spessore possibile.

b) Filtro fra l'obbiettivo e il piano iconografico.

Supponiamo ora (fig. 1) che U rappresenti la pupilla d'uscita *dell'obbiettivo* e che RE sia il piano iconografico pel sistema *filtro + obbiettivo*. La pupilla d'uscita di questo sistema sarà il punto V, punto affetto da aberrazione, il quale coincide con V_0 solamente per $\alpha = 0$. Il raggio VB_{k+1} proietta in E sul piano

---

([1]) Ricordando la nota ([2]), pag. 4, se t è l'intensità relativa a cui per assorbimento vien ridotta la luce nel percorrere una delle spezzate B_1B_{k+1}, $B_{k+1}B_{2k+1}$, $B_{2k+1}B_{3k+1}$, il rapporto fra l'intensità del raggio parassito $B_{3k+1}K$ e quella del raggio utile $B_{k+1}E$ è dato da $t^2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^4$, dove n è l'indice di rifrazione del primo e ultimo mezzo del filtro (ordinariamente vetro). Se poniamo $n = 1.53$ e $t = 0.7$ circa, codesto rapporto risulta eguale ad $\frac{1}{1000}$ in cifra tonda. Ora esistono, benchè molto rari, certi negativi o diapositivi nei quali il rapporto fra le trasparenze massima e minima va molto oltre il 1000. Se di questi si fa un ingrandimento fotografico, può accadere che l'immagine parassita della regione più trasparente cada sull'immagine d'una delle parti più opache dell'oggetto, e in tal caso, per un'esposizione un po' abbondante, si renderà visibile.

Nella fotografia di paesaggi o interni a grandi contrasti, il rapporto fra le luminosità massima e minima può essere enormemente superiore a *1000*. Se allora si adopra un filtro fra l'obbiettivo e il piano iconografico (caso che ora esamineremo), il pericolo di formazione d'una immagine parassita è ancor più grave, specialmente se il filtro ha un grande spessore.

iconografico l'immagine utile d'un punto oggettivo, e l'immagine parassita K [1] di codesto punto è projettata sul piano RE in L dal raggio $B_{3k+1}K$ (in pratica si avrà in L un cerchio di diffusione, perchè K non è esattamente in foco).

Per $\alpha = 0$ V dista da RE dell'intervallo massimo V_0R, che diremo d [2].

La distorsione. — Se V non aberrasse dal punto V_0, l'immagine del punto oggettivo non sarebbe projettata da V in E, ma da V_0 in un punto E_0 determinato dalla V_0E_0 parallela alla VE. La distorsione $\mathfrak{D}$ è dunque data da

$$\frac{E_0E}{RE_0} = \frac{G_0B_{k+1}}{d\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Quindi, per la (10):

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{d}\sum\left[s\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} - \frac{1}{n}\right)\right] \tag{17}$$

equazione che differisce dalla (15') solo pel segno del 2° membro. Qui dunque la distorsione è *negativa*. Essa tende a zero quando il rapporto di d allo spessore del filtro tende ad infinito; onde la convenienza d'usar filtri sottili.

---

(1) Anche E e K sono rappresentati da caustiche, le quali nel presente caso sono reali. Si ha evidentemente $KE = HV$; $IE = UV$; $IK = UH$; ecc. La caustica in E, considerata come immagine di un punto I nel quale convergano virtualmente i raggi OI, UB_1 ecc., dà luogo ad un'ipercorrezione, e le superficie focali d'astigmatismo prodotte dal filtro sono concave verso il piano iconografico, giacchè $IE = B_1C$ è funzione crescente di α.

(2) È bene chiarire un punto mal noto ai fotografi. È abbastanza conosciuta la regola che, se fu interposto il filtro fra l'obbiettivo e la lastra sensibile, "*il tiraggio deve essere allungato di circa $\frac{1}{3}$ dello spessore del filtro*", come risulterebbe dalla (5_0) per un filtro di un solo mezzo d'indice di rifrazione 1.5. Ciò può far credere che cresca la distanza focale, lo che produrrebbe un proporzionale aumento nelle dimensioni dell'immagine; ma così non è. Il tiraggio aumenta perchè si spostano di una stessa quantità (uguale a B_1C_0) *sì la pupilla d'uscita che il piano iconografico.* Il segmento che rappresenta la distanza focale non subisce dunque un allungamento, ma solo uno spostamento.

Anzi, siccome la (17) ci dimostrerà che la distorsione prodotta dal filtro è negativa, le dimensioni della immagine risulteranno d'un'inezia minori di quelle che darebbe l'obbiettivo senza filtro.

L'immagine parassita da riflessi fra le due facce del filtro. — Detti M_0 ed M i punti d'intersezione delle VE e V_0E_0 colla normale abbassata su esse da L, l'occhio situato nella pupilla V_0 vedrà il segmento EL sotto un angolo ρ che è dato con sufficiente approssimazione da

$$\frac{LM}{V_0M_0} = \frac{ZB_{3k+1}}{\frac{d}{\cos\alpha} + E_0M_0} = \frac{ZB_{3k+1}}{\frac{d}{\cos\alpha} + G_0Z_0}.$$

Per le (11) e (13) sarà dunque:

$$\rho = \frac{\sum\left[2s\,\frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right]}{d + \sum\left[s\,.\,\sin^2\alpha\left(\frac{3\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} - \frac{1}{n}\right)\right]}, \tag{18}$$

espressione poco differente dalla (16), colla quale si confonde se nella (16) e (18) si trascura il 2° termine del denominatore.

Dalle (15), (16), (17) *e* (18) *risulta che, per render minimi la distorsione e l'angolo fra il fascio utile e il fascio parassito, bisogna situare il filtro fra l'obbiettivo e il più lontano dei due piani conjugati, cioè fra l'obbiettivo e l'oggetto nella fotografia di paesaggi, ritratti, ecc., e fra l'obbiettivo e l'immagine negli ingrandimenti.*

c) Filtro fra le lenti dell'obbiettivo.

Questo caso rientra nei due precedenti. Nelle figg. 2 e 2′ A e P rappresentino schematicamente le combinazioni anteriore e posteriore dell'obbiettivo, F rappresenti il filtro. La combinazione A potrà dare di un punto oggettivo O un'immagine virtuale O' (fig. 2) situata dalla parte dell'oggetto, od un'immagine O'' (fig. 2′) situata dalla parte del piano iconografico, anche essa virtuale e destinata ad esser trasformata in reale dal resto del sistema ottico, od infine un'immagine all'∞. Nella prima ipotesi, considerando come piano oggettivo il piano condotto per O' normalmente all'asse e come obbiettivo la sola combinazione P, saremo nel caso di un filtro situato fra l'obbiettivo e l'oggetto; la pupilla d'entrata dell'obbiettivo da considerare sarà

quella di P, e la pupilla d'entrata del sistema filtro + obbiettivo sarà quella della coppia filtro + P. Nella seconda ipotesi, considerando come piano iconografico il piano condotto per O'' normalmente all'asse ottico e come obbiettivo la combinazione A, saremo nel caso di un filtro fra l'obbiettivo e il piano iconografico, la pupilla d'uscita dell'obbiettivo sarà quella di A e quella del sistema filtro + obbiettivo sarà quella della coppia filtro + A. Nella 3ª ipotesi i fasci che entrano ed escono dal filtro constano di raggi paralleli, quindi d è infinito, onde, per le (15), (16), (17) e (18) la distorsione $\mathfrak{D}$ e l'angolo ρ si riducono a zero.

d) **Riflessi fra il filtro, l'obbiettivo e la superficie sensibile.**

Se ad un obbiettivo di v lenti immerse nell'aria, il quale produce perciò $\frac{2v(2v-1)}{2!}$ immagini parassite di 1° ordine, aggiungiamo un filtro, questo farà salire il numero delle immagini parassite di 1° ordine a $\frac{2(v+1)[2(v+1)-1]}{2!}$, cioè a $4v+1$ di più. Il filtro aggiunge dunque rispettivamente 9, 13, 17 o 21 immagini parassite agli obbiettivi costituiti da 2, 3, 4 o 5 elementi non saldati. Di codeste $4v+1$ immagini aggiunte noi esaminammo solo quella prodotta da riflessi fra le due facce del filtro, immagine filtrata tre volte (mentre l'immagine utile è filtrata una volta sola), eppure capace di produrre danno. Si capisce che le altre $4v$ immagini possano recar danni gravissimi se non si provvede ad allontanarle quanto si può dal piano iconografico mediante un conveniente spostamento del filtro. Ora, mentre fra le lenti la spostabilità del filtro è nulla, questa è massima se il filtro si colloca fra l'obbiettivo e il più lontano dei due piani coniugati, cioè fra l'obbiettivo e l'immagine negli ingrandimenti, *e fra l'obbiettivo e l'oggetto nella fotografia di campagna, nel ritratto, ecc.*

Nella fotografia di campagna, nel ritratto, ecc. bisogna inoltre notare che il filtro fra l'obbiettivo e l'immagine produrrebbe riflessi di luce diffusa fra le proprie facce e l'emulsione, tanto più gravi quanto più il filtro si sposta dall'obbiettivo verso l'emul-

sione. Dunque, anche riguardo ai riflessi dell'intero sistema, ci appaiono come le più probabili le norme trovate esaminando la distorsione e i riflessi fra le due facce del filtro, benchè la norma veramente decisiva pel collocamento del filtro non si possa stabilire se non dopo aver studiato *per ciascun tipo d'obbiettivo* la legge di posizione delle immagini di origine catadiottrica in funzione degli indici di rifrazione, dei raggi di curvatura, degli spessori, delle distanze fisse e della distanza d variabile.

Condannabile però *a priori* è la pratica talora seguìta di collocare *vicinissimo alla superficie sensibile* un filtro d'uguali dimensioni. Infatti la faccia del filtro che guarda l'emulsione rimanda contro la stessa circa $\left(\frac{1.53-1}{1.53+1}\right)^2 = \frac{4.4}{100}$ della copiosa luce diffusa che le è inviata dall'emulsione, l'altra faccia del filtro ne rimanda contro l'emulsione $\left(\frac{1.53-1}{1.53-1}\right)^2 t^2 = 0{,}044 t^2$, dove t (trasparenza) è l'intensità relativa a cui la luce vien ridotta per assorbimento nell'attraversare una volta il filtro. Nei buoni filtri ortocromatici t è uguale a $0.7 \div 0.8$ circa per la zona $A \div E$ dello spettro, zona per cui le lastre pancromatiche migliori sono sensibilissime; quindi in totale il filtro respinge verso l'emulsione circa il $6 \div 7\ {}^0/_0$ della luce rossa $\div$ verde che ne riceve. Questa grande percentuale ci dispensa da ogni commento. Nè vale porre il filtro addirittura *a contatto* coll'emulsione. Ciò sopprimerebbe solo gli effetti dannosi della luce respinta dalla faccia di contatto, non già quelli dell'altra faccia, e d'altra parte le lastre sensibili del commercio sono molto male spianate, onde il preteso contatto non si realizza mai. — Le considerazioni ora fatte valgono *a fortiori* pei filtri irregolari, e perciò l'applicazione del filtro presso l'emulsione non ha di fronte ai suoi gravi inconvenienti se non la meschina giustificazione nel fatto che un filtro a facce male spianate e non parallele fa sentir meno le perturbazioni *diottriche* in codesta posizione che non in altre. Ma se consideriamo che nei filtri di grandi dimensioni esistono pressochè sempre delle bolle d'aria e altri difetti locali che si imprimono crudamente sull'emulsione quando il filtro è vicinissimo ad essa, concluderemo che *sotto tutti gli aspetti* l'applicare il filtro vicino alla lastra sensibile è il più grave degli errori.

Fig. 1
O
P₀
H
α
U
α
V₀
F

Fig. 2
O'
Fig. 2'

G. SACCO
Aberrazioni e riflessioni nocive prodotte dai
filtri di luce negli apparecchi fotografici.

Fig. 1

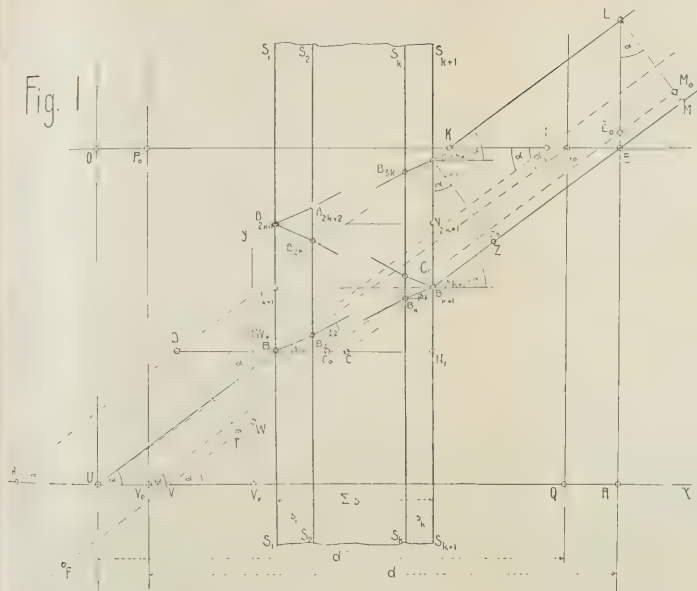
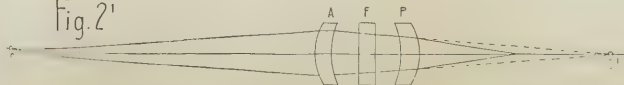



Fig. 2
A
F
P
O
O'
Fig. 2'
A
F
P

Sulla rettificazione delle curve.

Nota del Dott. LEONIDA TONELLI, a Bologna.

Il prof. Vitali, in una recente nota [1], ha dato una proposizione relativa ai gruppi di punti e ne ha dedotto una dimostrazione della seguente proposizione: " un numero derivato di una funzione a variazione limitata è sommabile; se la funzione è assolutamente continua, l'integrale indefinito del numero derivato coincide con la funzione all'infuori di una costante additiva „. La stessa dimostrazione del Vitali, portata nel campo della rettificazione delle curve, mi ha condotto al seguente risultato. Data una curva continua [2] rettificabile

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b),$$

si indichi con l la sua lunghezza. Allora l'*integrale* [3]

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt$$

esteso al gruppo E *dei punti di* (a, b) *ove le* x'(t), y'(t), z'(t) *esistono e sono finite, esiste sempre ed è*

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt \leq l.$$

Se poi le funzioni x(t), y(t), z(t) *sono assolutamente continue, l'integrale considerato dà la lunghezza della curva, vale a dire è*

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt = l.$$

---

(1) G. Vitali, *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, vol. XLIII, anno 1907-908.

(2) Cioè tale che le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, siano funzioni continue.

(3) Integrale nel senso del sig. Lebesgue.

Come corollario di questa proposizione si ha:

Se le funzioni x(t), y(t), z(t), *hanno ciascuna un numero derivato (che può non essere lo stesso per tutte tre) finito (e quindi non necessariamente limitato) in tutto* (a, b), *è*

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt = l.$$

Questa proposizione contiene come casi particolari le due proposizioni analoghe date dal Lebesgue [1], relative una al caso in cui esistano e siano finite in tutto (a, b) le derivate $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, e l'altra a quello in cui le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, siano a numeri derivati limitati.

Dimostro poi che la condizione dell'assoluta continuità per le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, già dimostrata sufficiente, è *anche necessaria affinchè l'integrale considerato sia la lunghezza della curva*. Sicchè si può concludere che

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt = l$$

è che le funzioni x(t), y(t), z(t) *siano assolutamente continue.*

1. — Ricordiamo alcune nozioni fondamentali.

Data una curva continua

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b), \tag{1}$$

(dove $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, sono funzioni continue), si definisce come lunghezza l di essa, nell' intervallo (a, b), il limite superiore delle lunghezze delle poligonali in essa inscritte, vale a dire il limite superiore delle somme

$$\sum_{r=1}^{n} \sqrt{\{x(t_r) - x(t_{r-1})\}^2 + \{y(t_r) - y(t_{r-1})\}^2 + \{z(t_r) - z(t_{r-1})\}^2},$$

[1] H. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, " Annali di Matematica „, 1902 e *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

dove n è un numero intero positivo qualunque e

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

è una qualsiasi divisione dell'intervallo (a, b) in n parti.

Si dimostra poi, se l è finito, che preso un numero positivo ϵ piccolo a piacere, si può sempre trovare un numero positivo δ tale che, per qualsiasi divisione dell'intervallo (a, b) in parti ciascuna d'ampiezza minore di δ, sia

$$l - \sum \sqrt{\{x(t_r) - x(t_{r-1})\}^2 + \{y(t_r) - y(t_{r-1})\}^2 + \{z(t_r) - z(t_{r-1})\}^2} < \epsilon;$$

e, se l è infinito, che, preso un numero M grande a piacere, si può sempre trovare un δ tale che, per ogni divisione di (a, b) in parti ciascuna minore di δ, sia

$$\sum \sqrt{\{x(t_r) - x(t_{r-1})\}^2 + \{y(t_r) - y(t_{r-1})\}^2 + \{z(t_r) - z(t_{r-1})\}^2} > M.$$

Se l è finito la curva è detta *rettificabile*; e si dimostra che condizione necessaria e sufficiente perchè la curva (1) sia rettificabile è che le tre funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, siano a variazione limitata [1].

2. — Una funzione $f(x)$ dicesi *assolutamente continua* [2] in (a, b) se, preso un numero positivo σ piccolo a piacere, esiste poi sempre un corrispondente numero μ, maggiore di zero, tale che sia

$$|\Sigma \{f(\beta_i) - f(\alpha_i)\}| < \sigma,$$

dove la sommatoria è estesa ad un qualsiasi gruppo d'intervalli (α_i, β_i), due a due distinti, di (a, b) avente una misura minore di μ. Ricorderemo poi che in questa definizione si può sostituire alla differenza $f(\beta_i) - f(\alpha_i)$ il suo valore assoluto $|f(\beta_i) - f(\alpha_i)|$, ed anche la variazione totale di $f(x)$ in (α_i, β_i):

---

[1] Vedi JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I, 2ª edizione.

[2] G. VITALI, *Sulle funzioni integrali*, " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", vol. XL (1904-905).

$V(\beta_i) - V(\alpha_i)$, indicando con $V(x)$ la variazione totale di $f(x)$ in (a, x).

3. — Sia, ora, la curva continua rettificabile

$$(1) \qquad x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

Le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, sono, per quanto si è ricordato al n. 1, funzioni continue a variazione limitata: ciascuna di esse, perciò, ammette derivata finita in tutti i punti di (a, b) eccettuati quelli di un insieme di misura nulla [1]. Possiamo quindi dire che in tutti i punti di (a, b), eccettuati quelli di un insieme di misura nulla, le derivate $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, esistono insieme e sono finite. Indichiamo con E l'insieme dei punti ove le tre derivate dette esistono e sono finite. In E ha allora valore determinato e finito l'espressione

$$\sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}.$$

Poichè la funzione

$$\sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}$$

è, come si sa, misurabile, vediamo se è anche sommabile, vale a dire se esiste l'integrale

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt.$$

Sia h un numero maggiore di zero. Per la misurabilità di $\sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}$ il gruppo G_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ dei punti di (a, b) (ossia di E) in cui è

$$nh \leq \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2} < (n+1)h$$

è misurabile. Detta m_n la misura di G_n, si consideri la serie

$$h \sum_{n=0}^{\infty} n \,.\, m_n\,.$$

Poichè condizione necessaria e sufficiente affinchè la

$$\sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}$$

---

[1] Vedi H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration, etc.*, pag. 128.

sia sommabile è che la serie precedente sia convergente, basterà, per dimostrare che la funzione detta è sommabile, far vedere che, per ogni intero N, la somma $h \sum_{n=0}^{N} nm_n$ si mantiene inferiore ad un numero fisso [1].

Tra le misure m_n $(n = 0, 1, \ldots, N)$ ve ne possono essere delle nulle: siano

$$m_{n_0},\ m_{n_1},\ \ldots,\ m_{n_{N'}} \qquad (N' \leq N)$$

quelle tra esse che sono maggiori di zero. E, evidentemente,

$$h \sum_{n=0}^{N} n \,.\, m_n = h \sum_{i=0}^{N'} n_i m_{n_i}. \tag{2}$$

Preso un numero ϵ maggiore di zero e minore del minore dei numeri m_{n_i} $(i = 0, 1, \ldots, N')$, si ponga

$$\eta = \frac{\epsilon}{1 + \sum_{i=0}^{N'} (1+i) n_i}.$$

Poichè G_{n_0} è un gruppo di misura m_{n_0}, sarà possibile trovare un gruppo *finito* Σ_0 di segmenti di (a, b), due a due distinti (cioè tali che due qualunque di essi abbiano tutto al più un estremo in comune), e racchiudenti un sottogruppo Γ_{n_0} di G_{n_0} di misura maggiore di $m_{n_0} - \eta$, in modo che sia

$$m(\Sigma_0) < m_{n_0} \text{ [2]}.$$

Allora sarà

$$m_{n_0} - \eta < m(\Gamma_{n_0}) \leq m(\Sigma_0) < m_{n_0},$$

ed i punti di Σ_0 che non appartengono a G_{n_0} formeranno un insieme di misura minore di η. Perciò i punti di G_{n_1} esterni ad ogni segmento di Σ_0 formeranno un gruppo di misura certa-

---

[1] Si ponga mente che la serie $h \sum_{n=0}^{\infty} n \,.\, m_n$ è costituita di termini tutti maggiori ed uguali a zero.

[2] Indico con $m(\Sigma_0)$ la misura di Σ_0.

mente maggiore di $m_{n_1} - \eta$. Potremo, in conseguenza di ciò, trovare un gruppo finito Σ_1 di segmenti di (a, b), due a due distinti, del tutto esterni ai segmenti di Σ_0 e racchiudenti un sottogruppo Γ_{n_1} di G_{n_1} di misura maggiore di $m_{n_1} - 2\eta$, in modo che sia

$$m(\Sigma_1) < m_{n_1} - \eta .$$

Sarà allora

$$m_{n_1} - 2\eta < m(\Gamma_{n_1}) < m(\Sigma_1) < m_{n_1} - \eta ,$$

ed i punti di Σ_1 che non appartengono a G_{n_1} formeranno un insieme di misura minore di η. Ne segue che i punti di G_{n_2} esterni a Σ_0 ed a Σ_1 formeranno un gruppo di misura maggiore di $m_{n_2} - 2\eta$. Si potrà quindi trovare un gruppo finito Σ_2 di segmenti di (a, b), due a due distinti, del tutto esterni ai segmenti di Σ_0 e Σ_1, e racchiudenti un sottogruppo Γ_{n_2} di G_{n_2} di misura maggiore di $m_{n_2} - 3\eta$, in modo che sia

$$m(\Sigma_2) < m_{n_2} - 2\eta.$$

Sarà allora

$$m_{n_2} - 3\eta < m(\Gamma_{n_2}) < m(\Sigma_2) < m_{n_2} - 2\eta$$

ecc. Così proseguendo si vengono a costruire $N' + 1$ gruppi Σ_i $(i = 0, 1, \ldots, N')$ ciascuno dei quali è formato con un numero finito di segmenti di (a, b). I segmenti di tutti i gruppi Σ_i sono poi tutti distinti tra loro, e Σ_i contiene un sottogruppo Γ_{n_i} di G_{n_i} in modo che sia

$$m_{n_i} - (1 + i)\eta < m(\Gamma_{n_i}) < m(\Sigma_i) < m_{n_i} - i\eta. \tag{3}$$

Si indichi, ora, con Σ_i' il gruppo dei segmenti di (a, b) che cadono completamente dentro a qualche segmento di Σ_i e che sono tali che, essendo (α, β) uno qualunque di essi, sia

$$\left| \frac{\sqrt{\{x(\beta) - x(\alpha)\}^2 + \{y(\beta) - y(\alpha)\}^2 + \{z(\beta) - z(\alpha)\}^2}}{\beta - \alpha} - n_i h \right| < h. \tag{4}$$

Facciamo vedere che ogni punto di Γ_{n_i} appartiene al *nucleo* [1] di Σ_i'. Sia $\bar{t}$ un punto di Γ_{n_i}; poichè Γ_{n_i} è un sottogruppo di G_{n_i}, è

$$n_i h \leq \sqrt{\{x'(\bar{t})\}^2 + \{y'(\bar{t})\}^2 + \{z'(\bar{t})\}^2} < (n_i + 1)\, h.$$

Siccome si può determinare un intervallo (t_0, t_1), comprendente nel suo interno $\bar{t}$, e tale che, dall'essere $t_0 \leq \alpha \leq \bar{t} \leq \beta \leq t_1$ seguano le disuguaglianze

$$\left|\frac{x(\beta)-x(\alpha)}{\beta-\alpha} - x'(\bar{t})\right| < \epsilon_1, \quad \left|\frac{y(\beta)-y(\alpha)}{\beta-\alpha} - y'(\bar{t})\right| < \epsilon_1,$$
$$\left|\frac{z(\beta)-z(\alpha)}{\beta-\alpha} - z'(\bar{t})\right| < \epsilon_1,$$

dove ϵ_1 è un numero positivo piccolo a piacere, si può anche determinare un intervallo (t_0, t_1) tale che dall'essere $t_0 \leq \alpha \leq \bar{t} \leq \beta \leq t_1$ segua

$$\left|\frac{\sqrt{\{x(\beta)-x(\alpha)\}^2+\{y(\beta)-y(\alpha)\}^2+\{z(\beta)-z(\alpha)\}^2}}{\beta-\alpha} - \sqrt{\{x'(\bar{t})\}^2+\{y'(\bar{t})\}^2+\{z'(\bar{t})\}^2}\right| <$$
$$< (n_i+1)h - \sqrt{\{x'(\bar{t})\}^2+\{y'(\bar{t})\}^2+\{z'(\bar{t})\}^2},$$

e quindi

$$\left|\frac{\sqrt{\{x(\beta)-x(\alpha)\}^2+\{y(\beta)-y(\alpha)\}^2+\{z(\beta)-z(\alpha)\}^2}}{\beta-\alpha} - n_i h\right| < h.$$

Perciò, per quanto piccolo sia σ, vi è sempre un intervallo minore di σ, tutto contenuto in un intervallo di Σ_i e comprendente o come punto interno, o come estremo, il punto $\bar{t}$, per il quale è verificata la (4). $\bar{t}$, appartenendo così a tutti i $\Sigma'_{i\sigma}$, appartiene al nucleo di Σ_i'.

Poichè, dunque, Γ_{n_i} appartiene al nucleo di Σ_i', la misura di questo nucleo è maggiore od eguale a $m(\Gamma_{n_i})$ e quindi maggiore di $m_{n_i} - (i+1)\eta$. D'altra parte tale misura è minore od eguale a $m(\Sigma_i') \leq m(\Sigma_i) < m_{n_i} - i\eta$. Possiamo quindi, per la pro-

[1] Il Vitali definisce come nucleo di un gruppo Σ di segmenti di una retta, il gruppo dei punti comuni a tutti i gruppi $\Sigma\sigma$ formati coi segmenti di Σ che sono minori di σ, dove σ è un segmento piccolo a piacere.

posizione del Vitali sui gruppi di punti ricordata nell'introduzione ([1]), trovare un gruppo numerabile Σ_i'' di segmenti di Σ_i', a due a due distinti, tali che la somma delle loro lunghezze sia compresa tra $m_{n_i} - (i+1)\eta$ e $m_{n_i} - i\eta$. Dal gruppo Σ_i'' potremo poi estrarre un numero finito di segmenti

$$(\alpha_{ij},\ \beta_{ij}) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, \lambda_i) \qquad (\beta_{ij} > \alpha_{ij})$$

tali che la somma $s_i = \sum_{j=0}^{\lambda_i} (\beta_{ij} - \alpha_{ij})$ delle loro lunghezze sia anch'essa compresa tra $m_{n_i} - (i+1)\eta$ e $m_{n_i} - i\eta$. E perchè i segmenti di due qualunque Σ_i, e quindi di due qualunque Σ_i', sono tra loro distinti, ne viene che tutti i segmenti

$$(\alpha_{ij},\ \beta_{ij}) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, \lambda_i),\ (i = 0, 1, 2, \ldots, N')$$

sono due a due distinti.

Dalla (4) si ha

$$\sqrt{\{x(\beta_{ij}) - x(\alpha_{ij})\}^2 + \{y(\beta_{ij}) - y(\alpha_{ij})\}^2 + \{z(\beta_{ij}) - z(\alpha_{ij})\}^2} =$$
$$= (n_i h + \theta_{ij} h)(\beta_{ij} - \alpha_{ij})$$

dove è $|\theta_{ij}| < 1$; sommando rispetto all'indice j si ottiene

$$\sum_{j=0}^{\lambda_i} \sqrt{\{x(\beta_{ij}) - x(\alpha_{ij})\}^2 + \{y(\beta_{ij}) - y(\alpha_{ij})\}^2 + \{z(\beta_{ij}) - z(\alpha_{ij})\}^2} = n_i h s_i + \theta_i h s_i$$

dove è $|\theta_i| < 1$; e sommando ancora

$$(5) \quad \sum_{i=0}^{N'} \sum_{j=0}^{\lambda_i} \sqrt{\{x(\beta_{ij}) - x(\alpha_{ij})\}^2 + \{y(\beta_{ij}) - y(\alpha_{ij})\}^2 + \{z(\beta_{ij}) - z(\alpha_{ij})\}^2} =$$
$$= h \sum_{i=0}^{N'} n_i s_i + h \sum_{i=0}^{N'} \theta_i s_i .$$

---

[1] La proposizione è la seguente: se Σ è un gruppo di segmenti il cui nucleo abbia una misura finita m_1, esiste un gruppo finito o numerabile di segmenti di Σ, a due a due distinti, le cui lunghezze hanno una somma non minore di m_1.

Poichè i segmenti che entrano nelle somme s_i $(i=0,1,\ldots N')$ sono, per quanto abbiamo già osservato, due a due distinti, è $\sum_{i=0}^{N'} s_i < b-a$, e quindi, a più forte ragione, è

$$\sum_{i=0}^{N'} \theta_i s_i < b-a.$$

È poi, per essere $m_{n_i}-(i+1)\eta < s_i < m_{n_i}-i\eta$,

$$|s_i - m_{n_i}| < (i+1)\eta,$$

e quindi

$$\sum_{i=0}^{N'} |n_i s_i - n_i m_{n_i}| < \eta \sum_{i=0}^{N'} (i+1) n_i,$$

$$\left| \sum_{i=0}^{N'} n_i s_i - \sum_{i=0}^{N'} n_i m_{n_i} \right| < \eta \sum_{i=0}^{N'} (i+1) n_i.$$

Ma è

$$\eta \sum_{i=0}^{N'} (i+1) n_i < \eta\left(1+\sum_{i=0}^{N'}(i+1)n_i\right),$$

onde, per la

$$\eta = \frac{\epsilon}{1+\sum_{i=0}^{N'}(i+1)n_i},$$

$$\left| \sum_{i=0}^{N'} n_i s_i - \sum_{i=0}^{N'} n_i m_{n_i} \right| < \epsilon.$$

Dalla (5) si ha, perciò,

$$(6) \quad \sum_{i=0}^{N'} \sum_{j=0}^{\lambda_i} \sqrt{\{x(\beta_{ij})-x(\alpha_{ij})\}^2+\{y(\beta_{ij})-y(\alpha_{ij})\}^2+\{z(\beta_{ij})-z(\alpha_{ij})\}^2} =$$

$$= h \sum_{i=0}^{N'} n_i m_{n_i} + h\bar{\theta}\epsilon + h\bar{\bar{\theta}}(b-a)$$

con $|\bar{\theta}|<1$, $|\bar{\bar{\theta}}|<1$.

E poichè, come già abbiamo osservato, gli intervalli $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ sono tutti distinti, il primo membro della (6) è minore della lunghezza l della curva (1). Si ha, perciò,

$$h \sum_{i=0}^{N'} n_i m_{n_i} < l + h(\epsilon + b - a)$$

$$h \sum_{i=0}^{N'} n_i m_{n_i} < l + 2h(b-a),$$

giacchè, essendo ϵ minore del minore dei numeri $m_{n_0}, \ldots, m_{n_{N'}}$, è $\epsilon < b - a$.

Per la (2) è quindi

$$h \sum_{i=0}^{N} n \, . \, m_n < l + 2h(b - a).$$

Dunque tutte le somme $\sum_{i=0}^{N} n . m_n$ rimangono, per qualsiasi N, minori del numero fisso $l + 2h(b - a)$. La funzione

$$\sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}$$

è, perciò, sommabile. Dall'essere poi

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt = \lim_{h=0} h \sum_{n=0}^{\infty} n \, . \, m_n$$

e

$$h \sum_{i=0}^{\infty} n \, . \, m_n < l + 2h(b - a),$$

risulta

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt \leq l \, .$$

Resta dunque dimostrato che
l'integrale

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt,$$

esteso al gruppo E *dei punti di* (a, b) *ove le* x'(t), y'(t), z'(t), *esistono e sono finite, esiste sempre ed è, in valore, minore od eguale alla lunghezza della curva* (1). —

4. — Si introduca, ora, la condizione, per le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, dell'assoluta continuità. Allora (n. 2), preso un numero σ maggiore di zero e piccolo a piacere, si potrà trovare un corrispondente numero μ, pure maggiore di zero, tale che si abbia

$$(7) \quad \sum |x(\beta_i) - x(\alpha_i)| < \frac{\sigma}{3}, \quad \sum |y(\beta_i) - y(\alpha_i)| < \frac{\sigma}{3}, \quad \sum |z(\beta_i) - z(\alpha_i)| < \frac{\sigma}{3},$$

dove le sommatorie sono estese ad un qualsiasi gruppo d'intervalli (α_i, β_i), due a due distinti, di (a, b) avente una misura minore di μ. Fissato questo μ, poichè è $\sum_{i=0}^{\infty} m_i = b - a$ (infatti $\sum_{i=0}^{\infty} m_i$ è la misura del gruppo dei punti di (a, b) ove $\sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}$ esiste ed è finito, vale a dire è la misura di E, la quale è uguale a $b - a$), si potrà trovare un numero intero positivo $\overline{N}$ tale che, per ogni $N > \overline{N}$, sia

$$(b - a) - \sum_{n=0}^{N} m_n < \frac{\mu}{2}.$$

Sia, poi, (n. 1) $\overline{\delta}$ un numero maggiore di zero e tale che, per ogni divisione

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

dell'intervallo (a, b) in parti, ciascuna minore di $\overline{\delta}$, sia

$$l - \sum \sqrt{\{x(t_r) - x(t_{r-1})\}^2 + \{y(t_r) - y(t_{r-1})\}^2 + \{z(t_r) - z(t_{r-1})\}^2} < \sigma. \tag{8}$$

Per essere

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt = \lim_{h=0} h \sum_0^{\infty} n m_n,$$

si potrà trovare un valore $\overline{h}$ di h tale che sia

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt - \overline{h} \sum_0^{\infty} n m_n < \frac{\sigma}{2},$$

e, nel contempo,

$$\overline{h}\, 2(b - a) < \sigma.$$

Infine, sia N_1 un numero intero maggiore di $\overline{N}$ tale che sia

$$\overline{h} \sum_0^{\infty} n . m_n - \overline{h} \sum_0^{N} n . m_n < \frac{\sigma}{2}.$$

Per la coppia $\overline{h}$, N_1 avremo, perciò,

$$\begin{cases} (b - a) - \sum_{n=0}^{N_1} m_n < \frac{\mu}{2}, \quad \overline{h}\, 2(b - a) < \sigma, \\ \int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt - \overline{h} \sum_{n=0}^{N_1} n . m_n < \sigma. \end{cases} \tag{9}$$

Partendo dai valori $\bar{h}$ e N_1, si ripeta il ragionamento fatto al numero precedente, con queste sole modificazioni: gli intervalli del gruppo Σ_i' soddisfino, oltre alle condizioni già poste, anche a quella di essere tutti di ampiezza minore del numero $\bar{\delta}$ fissato sopra; e l'ϵ, già preso minore del minore dei numeri m_{n_i} $(i=0, 1, ..., N_1')$, lo si prenda anche minore di $\frac{\mu}{2}$. Si giungerà anche qui alla formola (6).

$$\sum_{i=0}^{N_1'}\sum_{j=0}^{\lambda_i}\sqrt{\{x(\beta_{ij})-x(\alpha_{ij})\}^2+\{y(\beta_{ij})-y(\alpha_{ij})\}^2+\{z(\beta_{ij})-z(\alpha_{ij})\}^2}=$$
$$=\bar{h}\sum_{i=0}^{N_1'} n_i m_{n_i}+\bar{h}\bar{\theta}\epsilon+\bar{h}\bar{\bar{\theta}}(b-a)$$

con $N_1'\leq N_1$, $|\bar{\theta}|<1$, $|\bar{\bar{\theta}}|<1$; ossia, per la (2),

$$(10)\quad \sum_{i=0}^{N_1'}\sum_{j=0}^{\lambda_i}\sqrt{\{x(\beta_{ij})-x(\alpha_{ij})\}^2+\{y(\beta_{ij})-y(\alpha_{ij})\}^2+\{z(\beta_{ij})-z(\alpha_{ij})\}^2}=$$
$$=\bar{h}\sum_{n=0}^{N_1} n m_n+\bar{h}\bar{\theta}\epsilon+\bar{h}\bar{\bar{\theta}}(b-a):$$

ed è

$$|\beta_{ij}-\alpha_{ij}|<\bar{\delta}.$$

I punti di (a, b) che non sono interni a qualche segmento $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ formano un numero finito di segmenti distinti. Ove sia necessario, si spezzi ciascuno di questi ultimi segmenti in più altri, in modo che il gruppo dei punti di (a, b) non interni ai segmenti $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ sia costituito da un numero finito di segmenti, ciascuno di ampiezza minore del numero già fissato $\bar{\delta}$. Siano, questi segmenti,

$$(\alpha_r, \beta_r) \qquad (r=0, 1, ..., q),$$

e si consideri la somma

$$\sum_{r=0}^{q}\sqrt{\{x(\beta_r)-x(\alpha_r)\}^2+\{y(\beta_r)-y(\alpha_r)\}^2+\{z(\beta_r)-z(\alpha_r)\}^2}.$$

Come è evidente, è tal somma minore od eguale a

$$(11)\quad \sum_{r=0}^{q}|x(\beta_r)-x(\alpha_r)|+\sum_{r=0}^{q}|y(\beta_r)-y(\alpha_r)|+\sum_{r=0}^{q}|z(\beta_r)-z(\alpha_r)|.$$

È, poi,

$$\sum_{r=0}^{q}(\beta_r-\alpha_r)=(b-a)-\sum_{i=0}^{N'_1}\sum_{j=0}^{\lambda_i}(\beta_{ij}-\alpha_{ij})=(b-a)-\sum_{i=0}^{N_1'}s_i\,;$$

e poichè (vedi numero precedente)

$$m_{n_i}-(i+1)\eta<s_i<m_{n_i}-i\eta\,,$$

$$m_{n_i}-s_i<(i+1)\eta\,,\ \sum_{i=0}^{N_1'}m_{n_i}-\sum_{i=0}^{N_1'}s_i<\eta\sum_{i=0}^{N_1'}(i+1)<\eta(1+\sum_{i=0}^{N_1'}(i+1)n_i),$$

e, per la

$$\eta=\frac{\epsilon}{1+\sum\limits_{i=0}^{N_1'}(i+1)\,n_i}\,,$$

$$\sum_{i=0}^{N_1'}m_{n_i}-\sum_{i=0}^{N_1'}s_i<\epsilon<\frac{\mu}{2}\,,$$

si ha

$$\sum_{r=0}^{q}(\beta_r-\alpha_r)<(b-a)-\sum_{i=0}^{N_1'}m_{n_i}+\frac{\mu}{2}.$$

Ma è

$$\sum_{i=0}^{N_1'}m_{n_i}=\sum_{n=0}^{N_1}m_n\,,$$

e, per la 1ª delle (9),

$$(b-a)-\sum_{i=0}^{N_1'}m_{n_i}<\frac{\mu}{2}\,;$$

onde

$$\sum_{r=0}^{q}(\beta_r-\alpha_r)<\mu.$$

Ne segue, per le (7), che la somma (11) è minore di σ, e quindi che è

$$\sum_{r=0}^{q}\sqrt{\{x(\beta_r)-x(\alpha_r)\}^2+\{y(\beta_r)-y(\alpha_r)\}^2+\{z(\beta_r)-z(\alpha_r)\}^2}=\sigma'.$$

con $\sigma'<\sigma$. Da questa eguaglianza e dalla (10) si ricava

$$\sum_{i=0}^{N_1'}\sum_{j=0}^{\lambda_i}\sqrt{\{x(\beta_{ij})-x(\alpha_{ij})\}^2+\dots}+\sum_{r=0}^{q}\sqrt{\{x(\beta_r)-x(\alpha_r)\}^2+\dots}=$$

$$=\bar{h}\sum_{n=0}^{N_1}nm_n+\bar{h}(\bar{\theta}\,\epsilon+\bar{\bar{\theta}}(b-a))+\sigma'.$$

Gli intervalli $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$, (α_r, β_r), costituiscono una divisione di (a, b) in un numero finito d'intervalli, ciascuno di ampiezza minore di δ. Il primo membro della eguaglianza precedente differisce quindi, per le (8), da l per meno di σ. È, perciò,

$$|l - \bar{h} \sum_{n=0}^{N_1} n m_n| < 3\sigma,$$

essendo

$$\bar{h}(\bar{\theta}\epsilon + \bar{\bar{\theta}}(b-a)) < \bar{h}(\epsilon + b - a) < \bar{h} 2(b-a)$$

e, per la 2ª delle (9),

$$\bar{h}(\bar{\theta}\epsilon + \bar{\bar{\theta}}(b-a)) < \sigma.$$

Da questa disuguaglianza e dalla 3ª delle (9) si ricava

$$\left| l - \int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}} \, dt \right| < 4\sigma.$$

Poichè σ è un numero piccolo a piacere, si ha

$$l = \int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)^2\}} \, dt.$$

Resta così dimostrato che

Se le funzioni x(t), y(t), z(t), *sono assolutamente continue, la lunghezza della curva* (1) *è data dall'integrale*

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + z'(t)\}^2} \, dt,$$

dove E *è l'insieme dei punti di* (a, b) *nei quali le derivate* x′(t), y′(t), z′(t), *esistono e sono finite.* —

5. — Data la curva continua rettificabile

$$(1) \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b),$$

supponiamo che le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, ammettano, in ogni punto di (a, b), un numero derivato (non necessariamente lo stesso per tutte tre) finito. Poichè le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, per

quanto si è ricordato al n. 1, sono a variazione limitata, i numeri derivati detti sono sommabili ed hanno per integrali indefiniti rispettivamente $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (¹). Dunque $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono delle funzioni integrali. Ma condizione necessaria (ed anche sufficiente) affinchè una funzione sia un integrale è che essa sia assolutamente continua (²); perciò le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono assolutamente continue. Il risultato del numero precedente ci porta dunque a concludere che

Se una curva continua rettificabile

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

è tale che le x(t), y(t), z(t), *ammettano ciascuna, in tutti i punti di* (a, b), *un numero derivato (che può non essere lo stesso per tutte tre) finito, la sua lunghezza è data dall'integrale*

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt,$$

dove E *è l'insieme dei punti di* (a, b) *nei quali le derivate* x′(t), y′(t), z′(t) *esistono e sono finite.* —

6. — Dimostriamo ora che

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la lunghezza l(t) *di una curva continua rettificabile*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

sia una funzione assolutamente continua è che siano tali le tre funzioni x(t), y(t), z(t).

(¹) Vedi H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration, etc.*, pag. 123 (Paris, 1904).

(²) Vedi G. Vitali, *Sulle funzioni integrali*, " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XL (1904-905); H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* (Paris, 1904), pag. 129 nota; Id., *Sur la recherche des fonctions primitives pour l'intégration*, " Atti R. Acc. Lincei ", 1907.

Infatti dall'essere

$$\left.\begin{array}{l}|x(t)-x(t')|\\ |y(t)-y(t')|\\ |z(t)-z(t')|\end{array}\right\}\leq\sqrt{\{x(t)-x(t')\}^2+\{y(t)-y(t')\}^2+\{z(t)-z(t')\}^2}\leq$$
$$\leq|x(t)-x(t')|+|y(t)-y(t')|+|z(t)-z(t')|\ (^1),$$

si ricava

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma|x(t_r)-x(t_{r-1})|\\ \Sigma|y(t_r)-y(t_{r-1})|\\ \Sigma|z(t_r)-z(t_{r-1})|\end{array}\right\}\leq\sum\sqrt{\{x(t_r)-x(t_{r-1})\}^2+\{y(t_r)-y(t_{r-1})\}^2+\{z(t_r)-z(t_{r-1})\}^2}$$
$$\leq\Sigma|x(t_r)-x(t_{r-1})|+\Sigma|y(t_r)-y(t_{r-1})|+\Sigma|z(t_r)-z(t_{r-1})|$$

dove

$$a\leq t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=t$$

è una divisione di (a, t) in un numero finito di parti. Passando al limite in modo che la massima delle parti (t_{r-1}, t_r) tenda a zero, si ottiene

$$\left.\begin{array}{l}V_x(t)\\ V_y(t)\\ V_z(t)\end{array}\right\}\leq l(t)\leq V_x(t)+V_y(t)+V_z(t),$$

dove $V_x(t)$, $V_y(t)$, $V_z(t)$, indicano, rispettivamente, le variazioni totali di $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, nell'intervallo (a, t); ed anche, se $a\leq\alpha\leq\beta\leq b$,

$$\left.\begin{array}{l}V_x(\beta)-V_x(\alpha)\\ V_y(\beta)-V_y(\alpha)\\ V_z(\beta)-V_z(\alpha)\end{array}\right\}\leq l(\beta)-l(\alpha)\leq\{V_x(\beta)-V_x(\alpha)\}+\{V_y(\beta)-V_y(\alpha)\}+$$
$$+\{V_z(\beta)-V_z(\alpha)\}.$$

---

(1) La scrittura $\left.\begin{array}{l}a\\ b\\ c\end{array}\right\}\leq M$, indica che è $a\leq M$, $b\leq M$, $c\leq M$.

Da questa relazione si ottiene poi

$$
(1)\quad \left.\begin{array}{l}\Sigma\{V_x(\beta_i)-V_x(\alpha_i)\}\\ \Sigma\{V_y(\beta_i)-V_y(\alpha_i)\}\\ \Sigma\{V_z(\beta_i)-V_z(\alpha_i)\}\end{array}\right\} \leq \Sigma\{l(\beta_i)-l(\alpha_i)\} \leq \Sigma\{V_x(\beta_i)-V_x(\alpha_i)\}+ \\ +\Sigma\{V_y(\beta_i)-V_y(\alpha_i)\}+\Sigma\{V_z(\beta_i)-V_z(\alpha_i)\},
$$

dove le sommatorie sono estese ad un qualsiasi gruppo d'intervalli distinti di (a, b).

Supponiamo, ora, che $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, siano assolutamente continue. Prefissato un σ positivo e piccolo a piacere, potremo trovare un μ tale che siano verificate le tre disuguaglianze

$$
\Sigma\{V_x(\beta_i)-V_x(\alpha_i)\}<\sigma,\ \Sigma\{V_y(\beta_i)-V_y(\alpha_i)\}<\sigma,\ \Sigma\{V_z(\beta_i)-V_z(\alpha_i)\}<\sigma,
$$

per ogni gruppo di intervalli (α_i, β_i), due a due distinti, di (a, b) avente una misura minore di μ. Per uno qualunque di tali gruppi d'intervalli avremo perciò, per la seconda parte della (1),

$$
\Sigma\{l(\beta_i)-l(\alpha_i)\}<3\sigma:
$$

dunque la $l(t)$ è assolutamente continua.

Supponiamo, invece, che sia assolutamente continua la $l(t)$. Prefissato un σ, si potrà trovare un μ tale che sia

$$
\Sigma\{l(\beta_i)-l(\alpha_i)\}<\sigma
$$

per ogni gruppo di intervalli (α_i, β_i), due a due distinti, di (a, b) avente una misura minore di μ. Per uno qualunque di tali gruppi d'intervalli avremo perciò, per la prima parte di (1),

$$
\Sigma\{V_x(\beta_i)-V_x(\alpha_i)\}<\sigma,\ \Sigma\{V_y(\beta_i)-V_y(\alpha_i)\}<\sigma,\ \Sigma\{V_z(\beta_i)-V_z(\alpha_i)\}<\sigma:
$$

dunque le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, sono assolutamente continue.

La proposizione è così dimostrata.

7. — Supponiamo che la lunghezza $l(t)$ della curva continua rettificabile

$$
x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \qquad (a\leq t\leq b)
$$

sia data dall'integrale

$$\int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt$$

dove E è l'insieme dei punti di (a, t) in cui $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, esistono e sono finite. $l(t)$, essendo una funzione integrale, è [1] assolutamente continua.

Ne segue, per la proposizione del n. 6, che sono assolutamente continue anche le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Dunque *affinchè sia*

$$l(t) = \int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt$$

è necessario che le x(t), y(t), z(t), *siano assolutamente continue.*

Questo risultato, unito a quello del n. 4, porta alla conclusione seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la lunghezza l(t) *della curva continua rettificabile*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

sia data da

$$l(t) = \int_E \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt,$$

dove E *è l'insieme dei punti di* (a, t) *nei quali le derivate* x′(t), y′(t), z′(t), *esistono e sono finite, è che le funzioni* x(t), y(t), z(t), *siano assolutamente continue.* —

---

[1] Vedi G. VITALI, loc. cit. e H. LEBESGUE, loc. cit.

Ricerche sulla distribuzione dei nervi nella milza.

Nota del Dott. FRANCESCO AGOSTI.

(Con una Tavola).

Dalla bibliografia, invero non molto numerosa, intorno alla distribuzione dei nervi nella milza, appare come non sempre gli Autori siano giunti ad identiche conclusioni e che qualche dissonanza esista tutt'ora fra di essi.

Pensando che uno studio sintetico e comparativo non sarebbe stato del tutto inopportuno, per consiglio del Prof. Fusari, ritornai su tale argomento, del quale già mi ero occupato con esito positivo alcuni anni or sono, ed il risultato delle mie ricerche faccio ora noto per completare o correggere eventualmente le risultanze dei precedenti ricercatori (1).

Tutti gli Autori sono ormai concordi sulla provenienza e sul modo di penetrazione dei nervi nella milza.

Questi provengono, cioè, dal plesso solare, sono specialmente costituiti da fibre amieliniche (Billroth, Ebner) e penetrano nell'organo dall'ilo in parte isolatamente, in parte seguendo le arterie (Fusari, Ebner, R. Monti, A. Ruffini). Arrivati nell'interno dell'organo essi vanno dividendosi in fibre di calibro minore, che si staccano dal tronco principale con legge dicotomica (Fusari, Retzius, A. Ruffini, Corti), e si allontanano da esso quasi sempre formando un angolo retto o per lo meno un angolo molto aperto (Fusari, Corti). Nel punto di biforcazione si

(1) Riguardo alla tecnica i migliori risultati ottenni colla impregnazione cromo-osmio-argentica di Golgi, secondo la formola dettata da Ramon y Cajal, e colla permanenza dei pezzi nella miscela da 4 a 6 giorni. Le ricerche furono fatte, fra i mammiferi, sul cane, sul coniglio, sul gatto, sul vitello, sul riccio, sulla cavia; fra gli uccelli, sul pollo.

nota un ingrossamento per lo più triangolare (Ruffini, R. Monti); altri rigonfiamenti, che R. Monti ha interpretato come " semplici grosse varicosità „, si osservano lungo il decorso delle fibre nervose (Fusari, R. Monti, A. Ruffini, Corti), talora a distanza, nei punti nodali, nelle curve, talora numerosissimi e ravvicinati da dare l'aspetto di " una coroncina di perle „ (R. Monti, A. Ruffini).

Anche le descrizioni dei vari Autori sui plessi perivasali si accordano nelle linee generali.

Essi esistono sempre (Retzius, Fusari, Kölliker, Ebner, R. Monti, Ruffini, Corti) ed io posso affermare che, anche quando la reazione cromo-argentica è scarsa, essi non mancano mai. Il Toldt voleva anzi che i nervi della milza fossero unicamente destinati ad innervare la tonaca muscolare dei vasi.

Il plesso nervoso perivasale costituisce sui grossi vasi una elegante trama fatta da grossi fasci, che decorrono paralleli al vaso stesso (R. Monti, A. Ruffini), e che " definiscono con esattezza i limiti dell'arteria „ (Fusari), dai quali partono sempre fibrille intrecciantisi senza regola fissa a decorso più o meno ondulato e disseminate di varicosità (Ruffini, R. Monti). Le fibrille che terminano poi sulla parete del vaso finiscono o liberamente (come vide Retzius nel Cane e nel Topo, e Ruffini nel Tritone, nella Rana, nel Vespertilio), o con una o due pallottoline (Fusari, R. Monti, A. Ruffini), o con tre pallottoline in modo da " dare l'immagine di un trifoglio „ (R. Monti), oppure con rigonfiamenti più grossi provvisti di appendici (Fusari, R. Monti, A. Ruffini).

Anche i vasi minori ed i capillari sono innervati (R. Monti, A. Ruffini); l'intreccio però risulta in genere solo di pochissime fibre (A. Ruffini), od anche solo di due fibrille che accompagnano ai due lati il vasellino, e dànno " esili rametti più o meno trasversali che terminano al solito modo, nella tonaca propria del vaso „ (R. Monti).

A proposito del plesso perivasale devo ancora accennare a " due speciali differenziazioni „ che il Corti ha osservato nei preparati in cui " l'impregnazione era per così dire al completo „. Egli si esprime così: " Generalmente i rami trasversi, cioè normali alla direzione del vaso, sono scarsi quando le fibre che costituiscono il plesso sono molto numerose e di vario calibro,

da alcune di notevole spessore, fino ad altre esilissime, e tutte decorrenti con poche tortuosità. Qualche volta però questi rami trasversi sono molto più numerosi e si anastomizzano a costituire una rete a maglie poligonali, in cui verosimilmente dominano le forme ad angoli aperti ed a lati di sviluppo subeguale; allora le fibre costituenti il plesso, che è meno ricco che nel primo caso, sono a decorso tortuoso e notevolmente varicoso „.

Io non sono riuscito a mettere in evidenza questo rapporto speciale, poichè sempre ho notato, come gli Autori che mi hanno preceduto, un ricco plesso perivasale, costituito essenzialmente da fibre di calibro maggiore a decorso più o meno ondulato, parallelo a quello del vaso, da cui si staccano numerosi rami a decorso trasversale o quasi, molto tortuoso, disseminato di varicosità più o meno abbondanti, ed anastomizzantisi fra loro in modo da costituire una fitta rete tutto attorno al vaso stesso, dalla quale poi partono i filamenti terminali.

Del resto i risultati delle mie ricerche sui plessi perivasali collimano perfettamente con quelli già descritti dagli altri Autori, risultati che non riferisco per non incorrere in inutili ripetizioni. Noterò solo che il decorso delle fibre nervose è molto più ondulato in quelle a calibro minore, che in queste assai più numerose sono le varicosità, disseminate sia lungo il decorso, sia nei punti di distacco che di incrocio, e che la forma più comune di espansione nervosa è quella a pallina.

***

I punti, in cui esistono reali controversie nella descrizione dei nervi della milza, riguardano essenzialmente:

1° la maggiore o minore ricchezza dei nervi nella polpa, l'anastomosi fra di essi ed il modo particolare di terminazione;

2° la presenza di vere cellule nervose;

3° la presenza di plessi e di fibre terminali nei corpuscoli di Malpighi;

4° la presenza di fibre nella capsula che avvolge l'organo.

Io non pretendo di dare in questo mio lavoro la parola definitiva, mi limito unicamente a riassumere la questione ed a registrare l'esito delle mie ricerche, che in alcuni punti non mi pare affatto destituito di interesse.

1. *Polpa splenica.* — La presenza di fibre nervose nella polpa splenica è stata accertata indistintamente da tutti gli Autori.

Però mentre il Retzius osserva pochi filamenti senza alcuna forma particolare di terminazione, ed un discreto numero di fibre nervose furono notate da Kölliker e da Ebner, Fusari invece constata " un fine plesso a filamenti curiosamente intrecciati „ da cui partono esili fibre, che " dopo un decorso tortuoso di lunghezza variabile sembrano terminare liberamente e solo in rari casi con un corpuscolo provveduto di fini appendici „. R. Monti ci fornisce, oltre ad una minuta descrizione, la figura di un ricco plesso parenchimatoso " simile ad una larga staccionata „, da cui partono le ultime fibrille terminanti appuntite od a pallottolina ; e press' a poco allo stesso risultato giungono le ricerche di Ruffini (nel Tritone, nella Cavia, nel Vespertilio) e di Corti (nei Pipistrelli).

Il parenchima della milza dei Mammiferi da me esaminati è in genere molto ricco di nervi ; nel Gatto, e specialmente nel Vitello, ottenni plessi di una ricchezza e finezza tali da rendere l'attenta indagine difficile e penosa. Nel Pollo invece la reazione si localizzò unicamente attorno ai vasi e nei corpuscoli di Malpighi; però, avendo esaminato soltanto due esemplari, non voglio in alcun modo infirmare la descrizione di R. Monti, che resta pur sempre la più completa.

I nervi della polpa splenica provengono in parte direttamente dall'ilo, in parte dai plessi perivasali e dalle fibre che corrono sulle trabecole di sostegno.

Quando la reazione è buona si distinguono nei grossi tronchi le varie fibrille che li costituiscono: esse hanno un decorso quasi rettilineo e si vanno man mano staccando per fornire le diramazioni terminali, le quali talora proseguono il cammino in dolci sinuosità, tal'altra cambiano bruscamente direzione abbandonandosi ai giri più bizzarri ed inaspettati.

Spesso partono dal tronco principale tre o quattro fibrille isolate, che poi si avvicinano per proseguire riunite in un fascio il cammino; spesso invece si allontanano dal tronco delle fibrille, che, tenendo un decorso parallelo a quello del tronco stesso, vi ritornano dopo breve tratto per seguitare la direzione primitiva, per modo che il tronco principale appare in questo caso munito di piccoli occhielli, di piccole maglie generalmente ovalari ed a contorni ondulati.

Le fibre originate da questi rami maggiori con un angolo retto o quasi, si vanno suddividendo per via dicotomica, percorrono il parenchima ghiandolare con un decorso che si fa sempre più tortuoso man mano che esse raggiungono un calibro minore; e varicosità più o meno abbondanti, più o meno ravvicinate, sono disseminate lungo il cammino, nei punti d'incrocio e di divisione.

Le varicosità ora tagliano proprio in mezzo la via percorsa dalla fibra nervosa, ora invece sono addossate alla fibra stessa; non hanno forma e dimensioni ben definite; triangolari generalmente nei punti di divisione, sono ovalari lungo il decorso della fibra: talora sono minutissime, esili, ravvicinate, tal'altra voluminose e sproporzionate al calibro della fibra che le sostiene.

Le fibre nervose che costituiscono il plesso interparenchimatoso si anastomizzano fra loro, e questo si può dimostrare con maggiore facilità quando la reazione si è localizzata solo in alcuni punti dell'organo; allora non è raro il caso di vedere fibre che mettono in relazione i piccoli plessi isolati della sezione.

Fusari non osservò che rare volte queste anastomosi, ma le constatarono senza dubbio più tardi R. Monti e A. Ruffini.

Dai plessi suddescritti e talora anche dai grossi tronchi partono gli esili filamenti terminali, di calibro regolare, che terminano generalmente con una o più pallottoline. La forma più frequente è quella del filuzzo terminale sormontato da una varicosità più o meno grossa, però non sono affatto rare le forme a grappolo ed a trifoglio descritte da R. Monti, le forme a corpuscolo con un esile filamento notate da Fusari. Alcune volte un'esile fibrilla sostiene una grossa varicosità, da cui partono ancora due o tre brevi filuzzi muniti di piccoli granuli e terminanti come al solito con una pallina (fig. 6).

Notevole importanza mi pare abbiano le fibre che decorrono sulle trabecole connettive, e che gli Autori hanno generalmente sino ad ora solo accennate. Esse, nei miei preparati (figg. 3-4), sono molto numerose, specie in quegli animali in cui la trama di sostegno è ricca di fibre elastiche e di fibre muscolari liscie. La disposizione è press'a poco identica a quella dei vasi: le fibre di calibro maggiore hanno un decorso parallelo alla trabecòla, e dànno origine a fibre più o meno trasversali, a zig-zag, con varicosità lungo il decorso, nei punti nodali, anastomizzate

fra loro in modo da formare un plesso a maglie irregolari. Le ultime fibrille terminano sia nella trabecola stessa colle consuete forme, sia nella polpa splenica.

Non è raro il caso di vedere anastomosi fra i plessi delle varie trabecole ed anastomosi fra essi e la rete perivasale.

2. *Cellule nervose.* — Forse l'impregnazione cromo-osmio-argentica non è molto adatta a dimostrare la presenza di cellule nervose nella milza. Poichè, se Müller trasse pel primo l'attenzione (1865) su certi rigonfiamenti esistenti lungo il tragitto dei nervi ed aventi il carattere di schiette cellule nervose, l'affermazione non è più che in parte convalidata dalle ricerche di Fusari (1892), che, studiando su milze di ratto e di vitello, non ha trovato che " in pochi casi cellule nervose ". Inoltre è completa la concordia degli Autori che contemporaneamente o posteriormente si occuparono della questione nell'asserire di non aver trovato cellule nervose nella milza (Billroth 1861-62, Retzius 1892, Kölliker 1893, Ebner 1899, R. Monti 1898-99, Corti 1903, A. Ruffini 1900-906).

Io stesso nelle due riprese del mio lavoro non riscontrai mai alcuna forma che potesse interpretarsi come una cellula gangliare.

3. *Corpuscoli di* Malpighi. — Già Fusari aveva notato nervi numerosi nei corpuscoli di Malpighi, provenienti da quelli della polpa e terminanti sulla superfice del vaso capillare sanguigno; però questo fatto non fu confermato che da R. Monti (uccelli) e in parte dal Ruffini (cavia). Il Kölliker, l'Ebner, il Corti non ammettono alcuna rete endo-corpuscolare.

Non sempre io ho potuto nei Mammiferi dimostrare un plesso endo-corpuscolare con fibre terminali, però in una numerosa serie di preparati di milza di Cavia ebbi risultati assolutamente positivi.

Questi nervi provengono ora direttamente dalla polpa, ora dal plesso che circonda l'arteria propria del corpuscolo, ora dalle fibre che corrono lungo le trabecole. Spesso queste fibre assumono nel corpuscolo una disposizione concentrica; le anastomosi non sono rare, ed il modo di terminazione è, come già ha notato R. Monti, il consueto.

Il corpuscolo è sovente circondato da nervi che corrono alla sua periferia e l'avvolgono come in un cerchio, dando le

fibre che vanno verso l'interno; talvolta invece le fibre vi penetrano direttamente dalla polpa correndo verso il vaso arterioso centrale. Non raro è il caso di vedere staccarsi dal plesso endocorpuscolare alcune fibre che attraversando l'intero corpuscolo vanno a finire nella polpa; come non è raro vedere allontanarsi da questo plesso una fibra che si risolve dopo breve tratto in un gomitolo di fibrille, le quali dànno origine alle fibrille terminali pel corpuscolo stesso.

Un fatto assai interessante, che a me occorse di osservare per la prima volta, è quello illustrato dalla figura 1, in cui è evidente lo stretto rapporto esistente fra i plessi di tre corpuscoli malpighiani vicini: il corpuscolo mediano è legato cioè ai due laterali, a destra per mezzo di un ramo anastomotico, a sinistra con due esili fibrille terminali.

4. *Capsula fibrosa.* — Le fibre nervose nella capsula sono state sino ad ora osservate e descritte solo da R. Monti e da Corti.

Io non posso pronunziarmi in proposito, perchè nei miei preparati, a causa del precipitato della reazione, non se ne può studiare il decorso: essi però, se non nell'abbondanza descritta dai due AA. suddetti, esistono, perchè ho potuto osservare fibre nervose, che correndo lungo le trabecole di sostegno arrivano alla periferia dell'organo, e si nascondono sotto gli abbondanti precipitati, togliendosi così allo sguardo dell'osservatore.

* * *

Conclusione. — Dalle mie ricerche e da quelle degli Autori, che in questo studio mi hanno preceduto, mi pare di poter per ora stabilire che:

La milza è un organo abbondantemente provvisto di fibre nervose, le quali si distribuiscono ai vasi, alle trabecole di sostegno, al parenchima, ai corpuscoli di Malpighi ed alla capsula, anastomizzandosi variamente fra loro.

Queste fibre hanno un decorso ondulato, presentano varicosità varie di numero, forma e dimensione, e terminano liberamente od a pallottolina.

Istituto di Anatomia normale della R. Università di Torino,
diretto dal Prof. R. Fusari.

BIBLIOGRAFIA

1861-62. — Billroth, *Beiträge zur verg. Anatomie der Milz*, " Zeitschrift für wiss. Zoologie „.

1863. — Schweigger-Seidel, *Untersuchungen über den Milz*, " Virchow's Arch. f. Pathol. Anat. und Physiol. „, XXVII Bd.

1865. — Müller W., *Ueber den feineren Bau der Milz*. Leipzig.

1892. — R. Fusari, *Terminazioni nervose nel parenchima della milza*, " Monitore Zoologico „, anno III, n. 7-8.

1892. — Retzius, *Zur Kenntnis der Nerven der Milz und der Niere*, " Biologische Untersuchungen „, Neue Folge, III. Stockolm.

1893. — Kölliker, *Die Nerven der Milz und der Nieren und Gallencapillaren*, " Sitzungsberichten der Würzburger Phys. mediz. Gesellschaft „.

1898-99. — R. Monti, *Su la fina distribuzione e le terminazioni dei nervi nella milza degli uccelli*, " Bollett. scient. „, N. 4, anno 1898 e N. 1, 1899.

1899. — Ebner (v.), *Die Milz*, Kölliker's, " Handbuch der Gewebelehre des Menschen „, III Bd., Sechste Auflage. Leipzig.

1900. — A. Ruffini, *Distribuzione dei nervi e loro terminazioni nella milza di cavia, salamandra, pipistrello*, " Società medico-chirurgica di Bologna „, 19 aprile.

1903. — A. Corti, *La minuta distribuzione dei nervi nella milza dei pipistrelli nostrali*, " Monitore Zoologico italiano „, anno XV, N. 10.

1906. — A. Ruffini, *Contributo alla conoscenza della distribuzione ed espansione dei nervi nella milza di alcuni vertebrati*, " Internationale Monatschrift für Anat. und Phys. „, Bd. XXIII.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. *Pollo*. — Plessi nervosi nei corpuscoli di Malpighi, con anastomosi. — Ob. 5, Oc. 3, Koristka.

Fig. 2. *Cavia*. — Plesso nervoso e terminazioni nel corpuscolo di Malpighi. — Ob. im. 3 mm. Zeiss, Oc. 3.

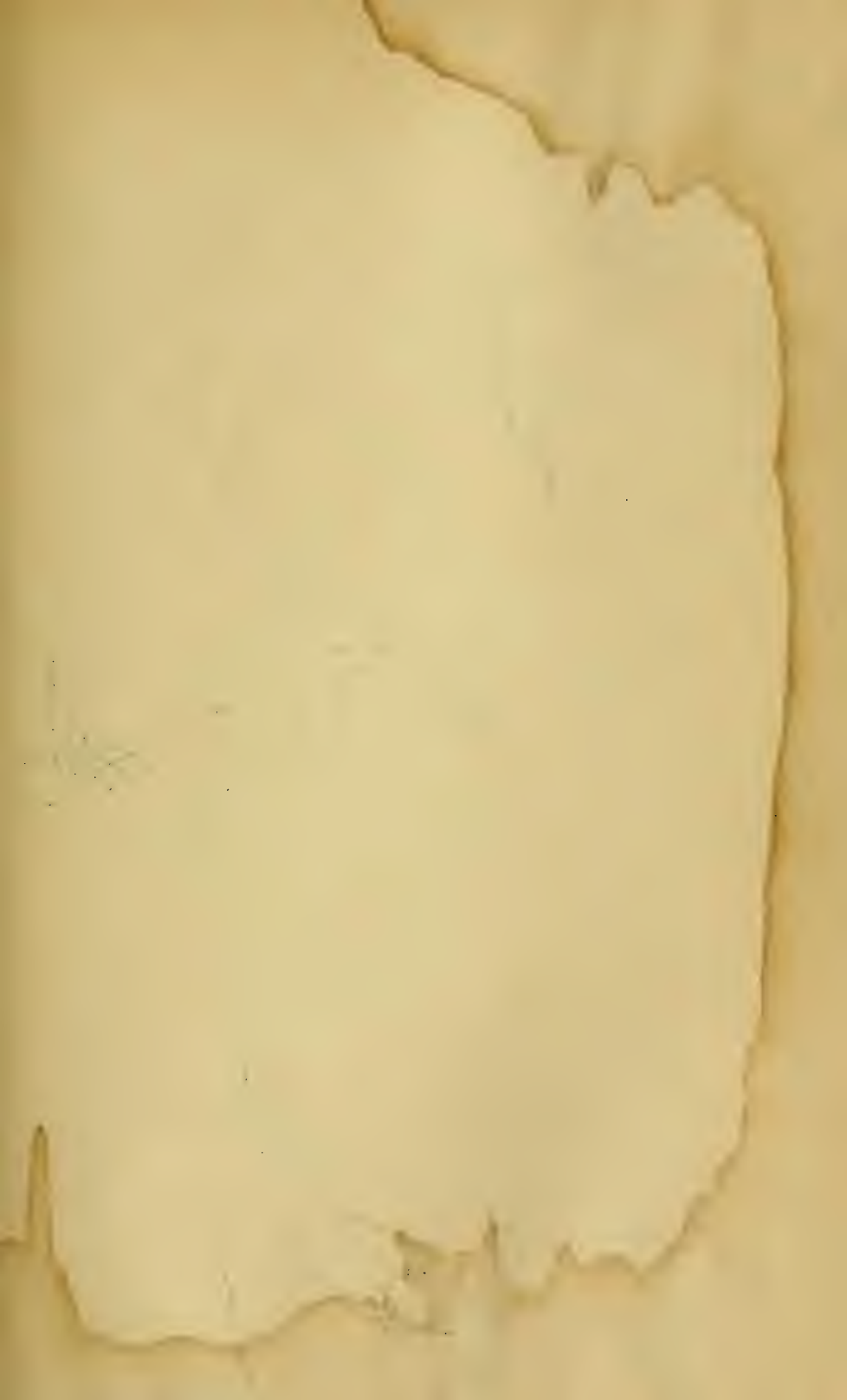
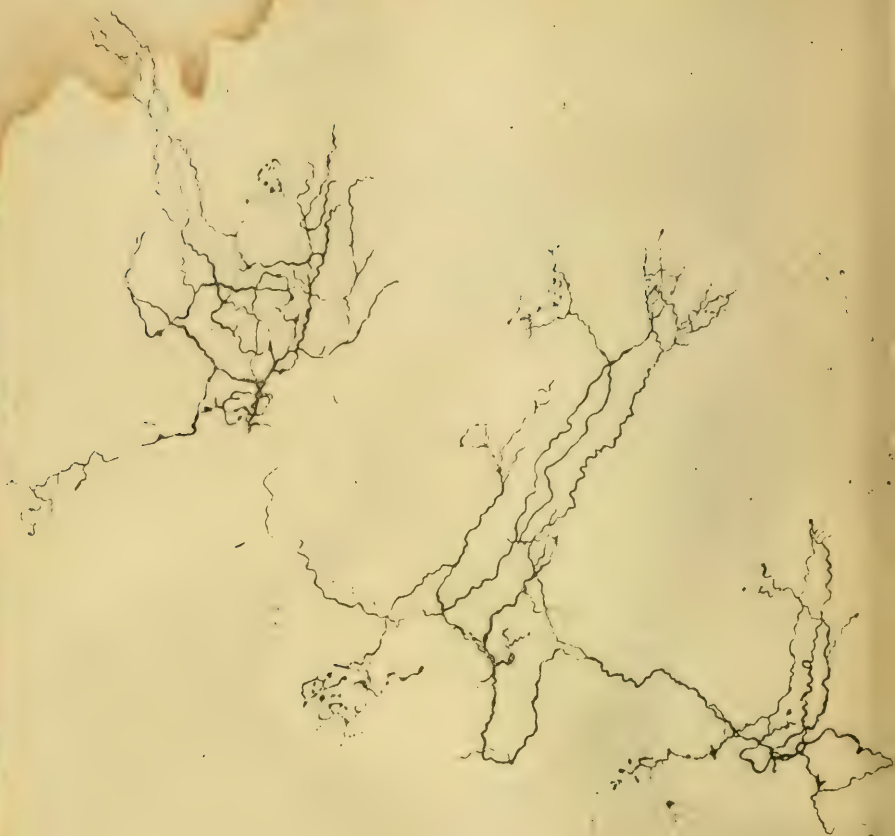
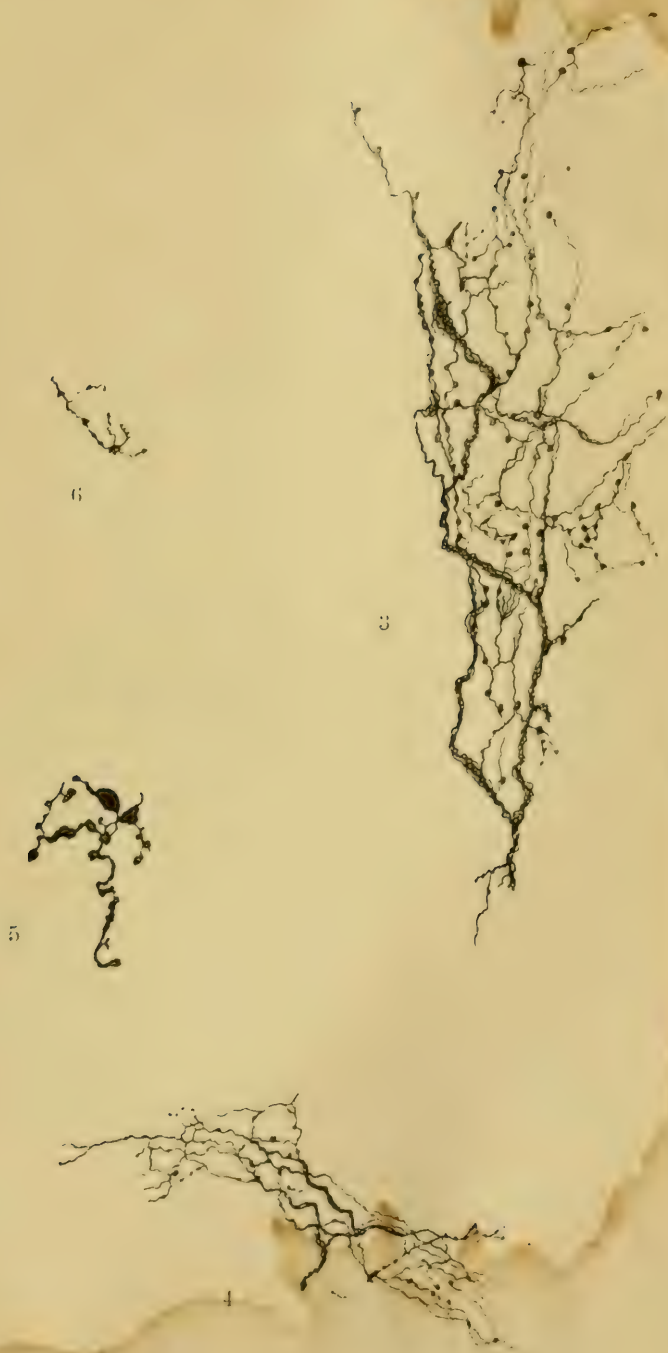
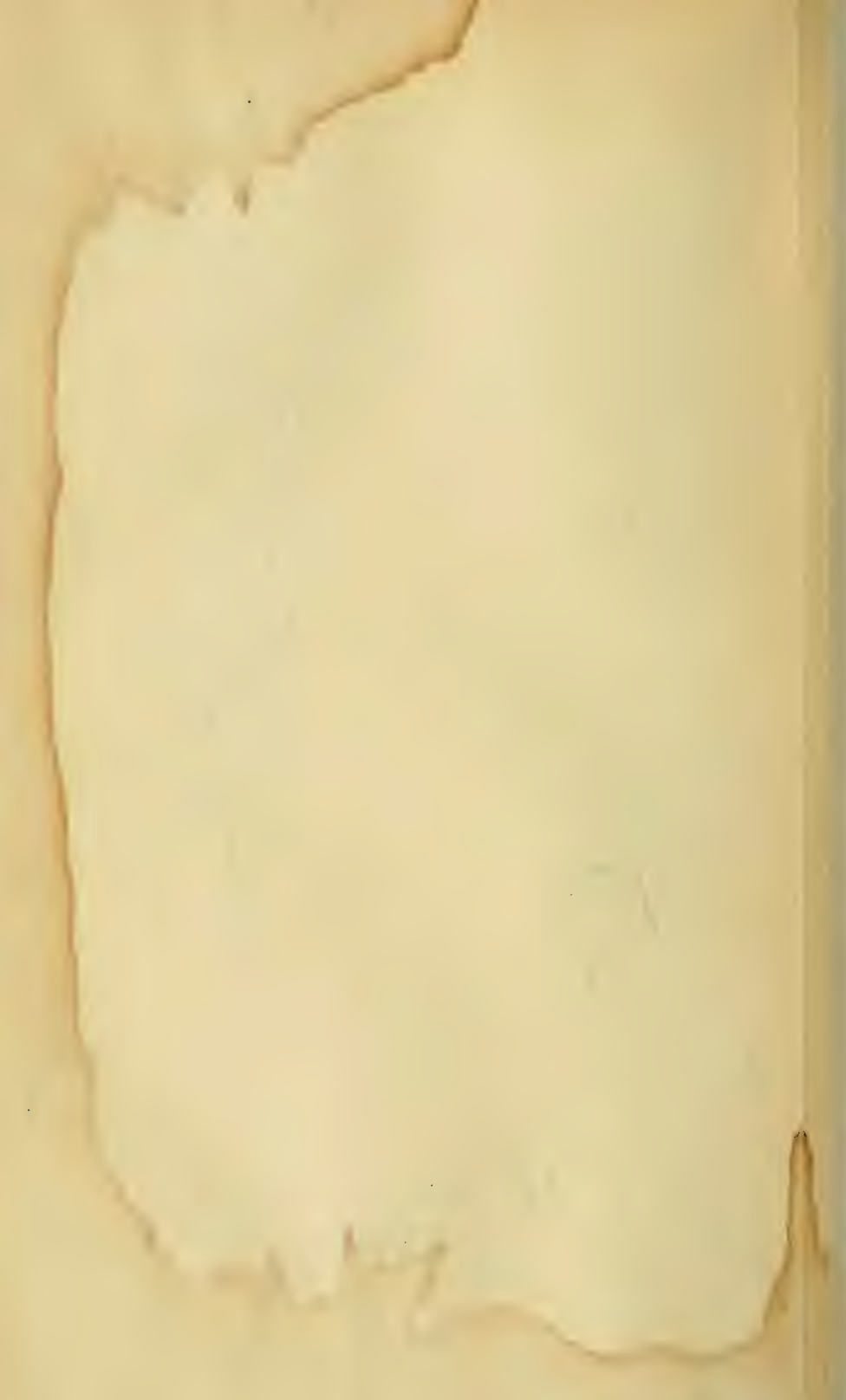
Fig. 3. *Cavia*. — Plesso nervoso su una trabecola. — Ob. 8, Oc. 3, Koristka.

Fig. 4. *Cavia*. — Plesso su una trabecola con terminazioni nella polpa. — Ob. D Zeiss, Oc. 3.

Fig. 5. *Riccio*. — Terminazioni nella polpa. — Ob. 8, Oc. 3, Koristka.

Fig. 6. *Pollo*. — Terminazioni nervose nella polpa. Ob. 8, Oc. 3, Koristka.

1
2

Officina Fototecnica Ing. G. Molfese - Torino

Contributo alla teoria degli archi elastici.

Nota del Socio CAMILLO GUIDI.

Nella mia Memoria " *L'arco elastico senza cerniere* „ (¹) indicai una costruzione grafica generale del poligono delle pressioni per un arco incastrato comunque caricato, e la dedussi dalle *tre equazioni di elasticità* ricavate col teorema dei lavori virtuali, riportando il caso di un arco a parete piena a quello di un certo arco reticolare ideale che gli è equivalente per quanto riguarda le deformazioni elastiche.

Colla presente Nota mi propongo di mostrare come si giunga in modo semplice alle stesse equazioni ed alle stesse costruzioni grafiche seguendo la teoria della ellisse di elasticità.

Prenderò in esame prima il caso di un arco reticolare triangolare, nel quale si tenga separatamente conto dell'elasticità delle singole aste di contorno, trascurando per semplicità, come si suol fare, le deformazioni delle aste di parete; tratterò poi il caso di un arco reticolare, ovvero di un arco a parete piena, divisi in tronchi, di cui le deformazioni elastiche sono regolate dalle relative ellissi parziali di elasticità, per mezzo delle quali, come è noto, si può anche, se vuolsi, tener conto delle deformazioni delle aste di parete, o di quelle prodotte dal taglio se l'arco è a parete piena.

Nel primo caso, seguendo il noto metodo dell'ellisse di elasticità, il peso elastico di ogni asta di contorno è *concentrato* nel nodo che rappresenta il relativo polo, ed ha per espressione $\Delta \mathcal{G} = w = \frac{s}{EFr^2}$ rappresentando s, E, F, r rispettivamente la lunghezza dell'asta, il modulo di elasticità normale del materiale di cui è formata, l'area della sua sezione trasversale, e la distanza che essa ha dal polo. Nel secondo caso il peso

(¹) " Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino „, Serie II, Tom. LII, 1902.

elastico di ciascun tronco è diffuso per tutto il tronco, la risultante è applicata al baricentro elastico del tronco stesso e vale $\Delta \mathcal{G} = w = \frac{2\Delta s}{EFh^2}$ se trattasi di un arco reticolare pel quale E, F, h rappresentino rispettivamente il modulo di elasticità normale, l'area della sezione trasversale di ciascun corrente, l'altezza teorica della sezione, e Δs sia la lunghezza del tronco considerato; vale invece $\Delta \mathcal{G} = w = \frac{\Delta s}{EJ}$ nel caso di un arco a parete piena, di cui J rappresenti il momento d'inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse di flessione, e gli altri simboli abbiano il significato già dichiarato. L'ellisse parziale di elasticità del tronco ha per semiasse radiale nel caso di un arco reticolare $\rho = \frac{h}{2}$, nel caso di un arco a parete piena il raggio stesso d'inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse di flessione, e per semiasse longitudinale un segmento dipendente dalla natura del reticolato nel primo caso, ed avente l'espressione $\rho_1 = \sqrt{\frac{\Delta s^2}{12} + \frac{E}{G} \chi \rho^2}$ nel secondo, dove G e χ rappresentano rispettivamente il modulo di elasticità tangenziale ed il noto coefficiente numerico, dipendente dalla forma della sezione trasversale, che entra in considerazione nelle deformazioni prodotte dal taglio. Se si trascurano tali deformazioni, come quelle delle aste di parete, nei due casi si ha semplicemente $\rho_1 = \Delta s \sqrt{\frac{1}{12}}$.

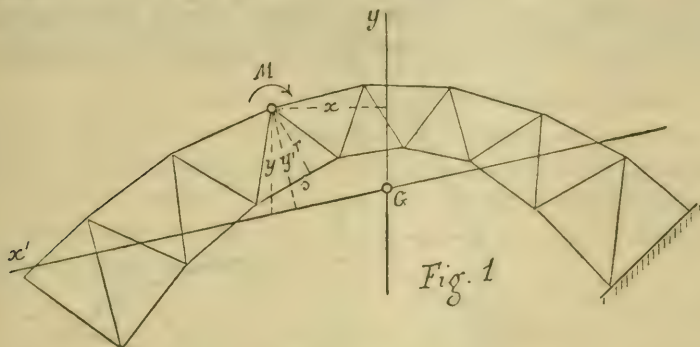
Arco reticolare (pesi elastici concentrati). — Qualunque sia la condizione di carico, se per un'asta di lunghezza s (Fig. 1) la risultante relativa alla sezione di Ritter occorrente per determinare lo sforzo in quell'asta produce un momento M intorno al suo polo, per effetto della variazione di lunghezza Δs di quell'asta, dovuta alla sua deformazione elastica, la sezione terminale sinistra dell'arco, supposta liberata dall'incastro, come pure qualunque punto con essa invariabilmente connesso, p. es. il baricentro elastico G di tutto l'arco, subisce una rotazione

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{r} = \frac{Ms}{EFr^2} = Mw.$$

Lo spostamento che ne deriva del punto G ha per proiezioni sugli assi y ed x' (y asse verticale baricentrico nel sistema dei pesi elastici w, ed x' asse baricentrico coniugato ad y nel detto sistema):

$$\delta_y = \Delta\varphi \,.\, x = Mwx$$
$$\delta_{x'} = \Delta\varphi \,.\, y' = Mwy'$$

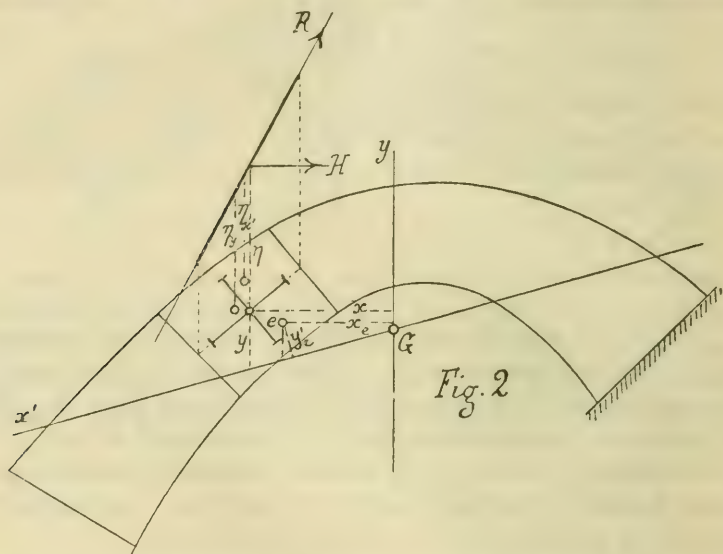
essendo x ed y' le distanze normali del polo dell'asta dagli assi y ed x'.

Fig. 1

Ora, se le imposte sono rigide (e vedremo qui appresso come si valuta separatamente l'effetto prodotto da cedimenti delle imposte) il complesso delle deformazioni di tutte le aste dev'essere tale da annullare anche gli spostamenti del punto G invariabilmente connesso colla sezione terminale, ed allora, potendosi sostituire l'ordinata normale y' colla sua proporzionale y verticale, si avranno le tre *equazioni di elasticità*:

$$(1) \qquad 0 = \Sigma Mw, \quad 0 = \Sigma Mwx, \quad 0 = \Sigma Mwy.$$

Queste equazioni permettono di dedurre, nel modo che fu spiegato nella citata Memoria, da un poligono funicolare qualunque connettente le forze, verticali o parallele all'asse x', applicate all'arco, il *poligono delle pressioni*, con una costruzione grafica che diviene notevolmente spedita e semplice nel caso di un arco simmetrico e simmetricamente caricato.

Arco reticolare od a parete piena, diviso in tronchi. — Se l'arco reticolare, oppure a parete piena, viene diviso in tronchi Δs,

e prendiamo in esame le deformazioni prodotte dall'elasticità di uno di essi, pel quale, come è indicato nella Fig. 2, siano tracciati gli assi dell'ellisse di elasticità, e sia R la relativa risultante delle forze esterne, che supporremo sia o possa ritenersi la stessa per tutti gli elementi ds costituenti il tronco Δs, la sezione terminale sinistra dell'arco, supposta svincolata dall'imposta, e con essa il baricentro elastico G subiranno, per effetto della deformazione suddetta una rotazione Mw, se M è il momento di R rispetto al baricentro del tronco, e w il peso elastico di quest'ultimo. Questa rotazione avviene intorno all'antipolo e di R rispetto all'ellisse di elasticità del tronco Δs; indicandone

con x_e ed y_e' le distanze normali dagli assi y ed x', gli spostamenti del punto G, causati da tale rotazione, misurati secondo l'asse y e secondo l'asse x' hanno rispettivamente per espressioni Mwx_e ed Mwy_e'.

Dovendo la somma degli spostamenti prodotti dalla elasticità di tutti i tronchi Δs riuscire nulla, a causa della rigidità delle imposte, e potendosi perciò sostituire all'ordinata y_e' normale all'asse x' la sua proporzionale verticale y_e, si avranno (nell'ipotesi fatta riguardo alle forze R) le tre equazioni di elasticità:

$$0 = \Sigma Mw, \quad 0 = \Sigma Mwx_e, \quad 0 = \Sigma Mwy_e$$

ovvero, considerando il caso di carichi verticali (considerazioni analoghe possono svolgersi pel caso di forze parallele all'asse x', V. Memoria citata) ed essendo allora $M = H\eta$ (H = spinta orizzontale, η = distanza verticale del baricentro del tronco dalla R) si ha ancora:

$$(2) \qquad 0 = \Sigma w\eta, \quad 0 = \Sigma w\eta x_e, \quad 0 = \Sigma w\eta y_e.$$

I prodotti $w\eta x_e$, $w\eta y_e$ rappresentano rispettivamente i momenti centrifughi del peso elastico diffuso nel tronco Δs rispetto alla R ed all'asse y, rispetto alla R ed all'asse x', valutando verticalmente le distanze η ed y_e ed orizzontalmente la x_e. Chiamando x, y le distanze rispettivamente orizzontale dall'asse y e verticale dall'asse x' del baricentro del tronco, ed η_y ed $\eta_{x'}$ le distanze verticali dalla R degli antipoli degli assi y ed x' rispetto all'ellisse del tronco, i momenti centrifughi suddetti possono anch'essere espressi da $wx\eta_y$, $wy\eta_{x'}$, e le equazioni di elasticità assumono allora la forma:

$$0 = \Sigma w\eta, \quad 0 = \Sigma wx\eta_y, \quad 0 = \Sigma wy\eta_{x'},$$

e ponendo $\eta = \eta' - y$, $\eta_y = \eta_y' - y_y$, $\eta_{x'} = \eta'_{x'} - y_{x'}$, dove η', η_y', $\eta'_{x'}$ sono le distanze verticali fra l'asse x' e la R in corrispondenza rispettivamente del baricentro del tronco e dei due antipoli relativi agli assi y ed x', si avrà ancora:

$$0 = \Sigma w\eta' - \Sigma wy$$
$$0 = \Sigma wx\eta'_y - \Sigma wxy_y$$
$$0 = \Sigma wy\eta'_{x'} - \Sigma wyy_{x'}.$$

Ora per il sistema dei pesi elastici w essendo baricentrici e coniugati gli assi x' ed y, si ha $\Sigma wy = 0$, $\Sigma wxy_y = 0$ e quindi le equazioni di elasticità assumono la forma:

$$(3) \qquad \begin{aligned} 0 &= \Sigma w\eta' \\ 0 &= \Sigma wx\eta_y' \\ 0 &= \Sigma wy\eta'_{x'} - \Sigma wyy_{x'}. \end{aligned}$$

Se s'immagina che il peso elastico di ciascun tronco Δs sia diffuso in modo uniforme lungo la projezione di Δs sulla R, fatta in direzione verticale, cioè lungo il segmento della R più marcatamente indicato nella figura, per questo nuovo sistema elastico non solo l'asse y è ancora evidentemente baricentrico, ma lo è anche l'asse x', come risulta dalla prima delle (3), mentre la seconda delle dette equazioni esprime che gli stessi assi sono pure coniugati. *Gli assi* x' *ed* y *sono adunque baricentrici e coniugati anche rispetto al nuovo sistema elastico.* Alla terza equazione, se con distanza polare arbitraria H_1 si connettono i carichi con un poligono funicolare di cui si costruisca l'asse x_1' corrispondente di x_1, e s'indicano con η_1' le ordinate analoghe alle η', e situate sulle stesse verticali, si può sostituire l'altra:

$$0 = H_1 \Sigma w y \eta_1'{}_{x'} - H \Sigma w y y_{x'}$$

che, come è noto, serve a determinare il rapporto di affinità fra il poligono di tentativo ed il poligono delle pressioni.

Dopo quanto è stato osservato la costruzione del poligono delle pressioni procede nel modo identico a quello indicato nella citata Memoria, e si riassume nelle seguenti operazioni. Applicati ai baricentri dei singoli tronchi i relativi pesi elastici w, se ne trova il baricentro e l'asse x' coniugato a quello verticale y (se la costruzione è simmetrica l'asse x' diviene l'asse x orizzontale baricentrico); si costruisce il momento d'inerzia $\lambda_1\lambda_2 n = \Sigma w y y_{x'}$ di tutto l'arco rispetto all'asse x' (applicando nel primo poligono funicolare di distanza polare λ_1 le forze w ai baricentri dei tronchi, e nel secondo, di distanza polare λ_2, le forze momenti statici agli antipoli dell'asse x' rispetto alle ellissi parziali dei tronchi); si traccia con distanza polare arbitraria H_1 un poligono funicolare p_1 dei carichi, vi si projettano sopra verticalmente i baricentri dei tronchi e si suppongono questi nuovi punti affetti dagli stessi pesi elastici w; di questo nuovo sistema elastico si determina il baricentro e l'asse baricentrico x_1' coniugato all'asse verticale y; si costruisce da ultimo la sommatoria $\Sigma w y \eta_1'{}_{x'} = \lambda_1\lambda_2 n_1$ projettando verticalmente sul poligono p_1 gli antipoli dell'asse x' precedentemente determinati, e facendo agire parallelamente al-

l'asse x_1' nei punti così ottenuti le forze momenti statici $\frac{wy}{\lambda_1}$ e collegandole con altro poligono di distanza polare λ_2. Si ha allora

$$\frac{H}{H_1} = \frac{n_1}{n}$$

che, come è noto, risolve il problema del tracciamento del poligono delle pressioni.

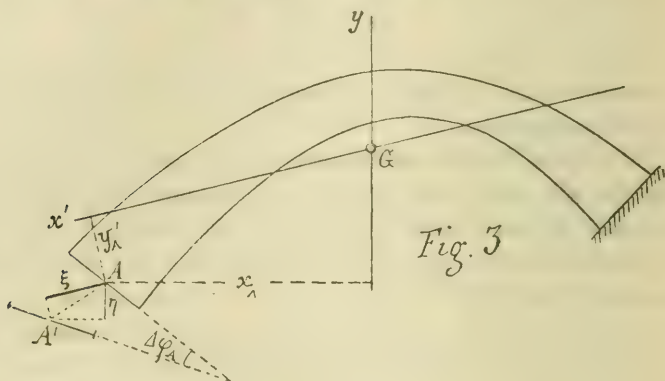
Nella citata Memoria feci notare (n° 25) che se si trascurasse di eseguire gli *spostamenti* delle linee d'azione delle *forze momenti statici* dei pesi elastici w relativi ai tronchi Δs, le soluzioni coinciderebbero con quelle approssimate che si ottengono sostituendo i Δs ai ds, e trascurando le deformazioni prodotte dallo sforzo normale e dal taglio. Ciò risulta chiaramente dalla teoria dell'ellisse di elasticità: infatti trascurare le deformazioni suddette significa ritenere cimentato ciascun tronco esclusivamente da un momento flettente, cioè da una coppia od anche da una forza infinitamente piccola e lontana, ed allora la rotazione elementare dovuta alla deformazione di un tronco Δs avviene attorno al baricentro del tronco stesso ed in conseguenza le equazioni di elasticità assumono la stessa forma delle (1)

$$0 = \Sigma Mw, \quad 0 = \Sigma Mwx, \quad 0 = \Sigma Mwy$$

e le costruzioni grafiche si svolgono come se si trattasse di forze *w isolate*, applicate ai baricentri dei tronchi.

Cedimento delle imposte. — Si è detto che l'effetto prodotto da tale deformazione può essere valutato separatamente, ed ecco in qual modo. Immaginando riportata l'imposta destra alla sua posizione primitiva, lo spostamento relativo delle due imposte (il solo che dia luogo a sforzi interni) può essere decomposto in una rotazione $\Delta\varphi_A$ (Fig. 3) che supporremo verso sinistra, della sezione d'imposta sinistra ed in uno spostamento AA' del suo baricentro A, del quale spostamento indicheremo con η e ξ le projezioni fatte in direzione normale rispettivamente sulla verticale, e su di una parallela all'asse x'; supporremo la prima diretta verso il basso, l'altra verso sinistra. Il baricentro elastico G della travatura, supposto invariabilmente connesso colla

sezione suddetta, subirà, in seguito alla rotazione $\Delta\varphi_A$ una rotazione eguale e di più uno spostamento le cui proiezioni fatte in direzione normale sull'asse y e sull'asse x' saranno rispettivamente $x_A \Delta\varphi_A$ ed $y_A' \Delta\varphi_A$, se x_A ed y_A' rappresentano le di-

stanze normali del punto A dagli assi y ed x', projezioni dirette verso l'alto la prima, verso sinistra la seconda; inoltre il detto punto G subirà ancora gli stessi anzidetti spostamenti η e ξ. La reazione dell'imposta sinistra originata da tali cedimenti avrà quindi per parametri, secondo la teoria dell'ellisse di elasticità,

$$\mathfrak{M} = - \frac{\Delta\varphi_A}{\mathfrak{G}}$$

$$A = - \frac{\eta - x_A \Delta\varphi_A}{J_y}$$

$$H_{x'} = - \frac{\xi + y_A' \Delta\varphi_A}{J_{x'}}$$

nelle quali $\mathfrak{G}$ rappresenta il peso elastico totale dell'arco, $J_{x'}$ e J_y i suoi momenti d'inerzia normali rispetto agli assi y ed x'.

Difetto di costruzione. — Le stesse espressioni hanno i parametri della reazione d'imposta provocata da una sforzatura esercitata sulla travatura nel montaggio per ovviare a difetto di costruzione.

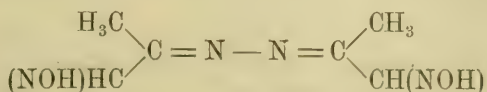
Torino, 10 Maggio 1908.

Sulla preparazione di alcune azine.

Nota dei D[ri] G. PONZIO ed R. GIOVETTI.

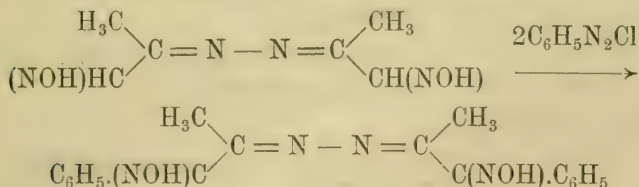
Studiando il comportamento dell'idrazina verso i composti contenenti il gruppo $>NOH$. Rothenburg (1) credette di poter concludere che questo è sempre sostituito dal gruppo $>N.NH_2$.

Le esperienze che formano oggetto di questa Nota dimostrano che l'asserzione di detto chimico non è esatta: in realtà noi abbiamo potuto ottenere dall'isonitrosoacetone $CH_3.CO.CH(NOH)$ l'azina corrispondente

$$\begin{matrix} H_3C \diagdown & & & & \diagup CH_3 \\ & C = N - N = C & & & \\ (NOH)HC \diagup & & & & \diagdown CH(NOH) \end{matrix}$$

e da questa, con una reazione molto semplice e di carattere generale, le azine di isonitrosochetoni misti $CH_3.CO.C(NOH).Ar$ e quali non è possibile preparare direttamente.

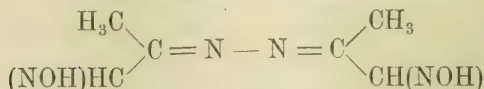
Mediante i cloruri di diazonio ArN_2Cl si riesce infatti a sostituire in detta azina gli atomi di idrogeno legati al carbonio dei gruppi $-CH(NOH)$ con due radicali aromatici: in tal modo si ottengono, p. es., l'azina dell'isonitrosofenilacetone

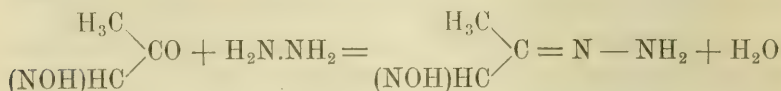
$$\begin{matrix} H_3C \diagdown & & \diagup CH_3 \\ & C = N - N = C & \\ (NOH)HC \diagup & & \diagdown CH(NOH) \end{matrix} \xrightarrow{2C_6H_5N_2Cl}$$

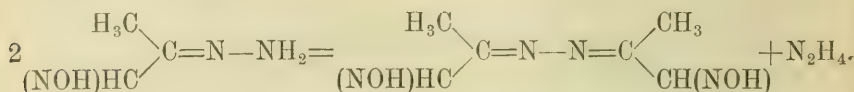
$$\begin{matrix} H_3C \diagdown & & \diagup CH_3 \\ & C = N - N = C & \\ C_6H_5.(NOH)C \diagup & & \diagdown C(NOH).C_6H_5 \end{matrix}$$

e parecchie altre azine della stessa serie, tutte solide, ben cristallizzate, non trasformabili in pirazoline, ma facilmente invece, per azione degli acidi diluiti, nei dichetoni misti $CH_3.CO.CO.Ar$.

(1) *Berichte 26*, 2060 (1893).

Azina dell'isonitrosoacetone

$$\begin{matrix} H_3C \\ (NOH)HC \end{matrix}\!\!>\!C = N - N = C\!<\!\!\begin{matrix} CH_3 \\ CH(NOH) \end{matrix}$$

Si forma aggiungendo alla soluzione di due molecole di isonitrosoacetone $CH_3.CO.CH(NOH)$ in idrato sodico al 20 % una molecola di solfato di idrazina polverizzato. Anche in questo caso, come in quelli già studiati da Curtius e Thun (1), si può ammettere che si formi dapprima un'idrazina asimmetrica instabile

$$\begin{matrix} H_3C \\ (NOH)HC \end{matrix}\!\!>\!CO + H_2N.NH_2 = \begin{matrix} H_3C \\ (NOH)HC \end{matrix}\!\!>\!C = N - NH_2 + H_2O$$

due molecole della quale perdono poi immediatamente una molecola di idrazina

$$2\begin{matrix} H_3C \\ (NOH)HC \end{matrix}\!\!>\!C{=}N{-}NH_2 = \begin{matrix} H_3C \\ (NOH)HC \end{matrix}\!\!>\!C{=}N{-}N{=}C\!<\!\!\begin{matrix} CH_3 \\ CH(NOH) \end{matrix} + N_2H_4.$$

Acidificando con acido cloridrico diluito l'azina si separa in laminette bianche e si può cristallizzare dall'alcool o dall'acqua, ove è poco solubile a caldo e pochissimo a freddo, mentre è quasi insolubile nei comuni solventi organici.

Si fonde a 221° con decomposizione e si scioglie inalterata negli alcali.

I. Gr. 0,4628 di sostanza fornirono gr. 0,7177 di anidride carbonica e gr. 0,2460 di acqua.

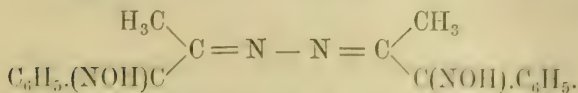
II. Gr. 0,1095 di sostanza fornirono cc. 32,3 di azoto ($H_0 = 727,90$ $t = 17°$), ossia gr. 0,036087.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_6H_{10}N_4O_2$
	I	II	
Carbonio	42,29	—	42,35
Idrogeno	5,91	—	5,80
Azoto	—	32,95	32,94

(1) *Journ. f. Prakt. Chem. 44*, 161 (1891).

Azina dell'isonitrosofenilacetone

$$\begin{matrix} H_3C \diagdown & & & & \diagup CH_3 \\ & C = N - N = C & & & \\ C_6H_5.(NOH)C \diagup & & & & \diagdown C(NOH).C_6H_5. \end{matrix}$$

Trattando con solfato di idrazina la soluzione alcalina dell'isonitrosofenilacetone $CH_3.CO.C(NOH).C_6H_5$ esso non si trasforma che in parte nell'azina corrispondente, la quale però non si può isolare, perchè ha press'a poco la stessa solubilità dell'isonitrosocomposto che rimane inalterato. Questa si forma invece facilmente dall'azina dell'isonitrosoacetone addizionandone la soluzione in idrato sodico al 10 %, di due molecole di cloruro di fenildiazonio (ottenuto diazotando l'anilina nel modo solito). Ha luogo un abbondante sviluppo di azoto, cessato il quale si acidifica il liquido rosso bruno con acido acetico diluito, con che l'azina dell'isonitrosofenilacetone si separa subito solida.

Cristallizza dall'alcool, ove è discretamente solubile a caldo e poco a freddo, in aghi giallo-rossi, fusibili a 187°-188° con decomposizione, ed è quasi insolubile nei comuni solventi organici.

I. Gr. 0,3639 di sostanza fornirono gr. 0,8915 di anidride carbonica e gr. 0,1860 di acqua.

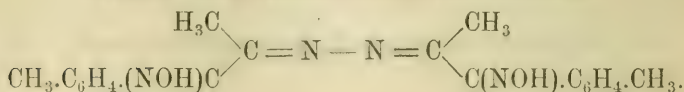
II. Gr. 0,0910 di sostanza fornirono cc. 14 di azoto ($H_0 = 738,20$ $t = 15°$), ossia gr. 0,016011.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{18}H_{18}N_4O_2$
	I	II	
Carbonio	66,81	—	67,08
Idrogeno	5,67	—	5,59
Azoto	—	17,59	17,39

Riscaldata con acido solforico al 10 % si trasforma in solfato di idrazina, il quale si separa cristallizzato col raffreddamento, e in acetilbenzoile $CH_3.CO.CO.C_6H_5$, che distilla col vapore e costituisce un liquido giallo bollente a 222°.

Azina dell'isonitroso-p-tolilacetone

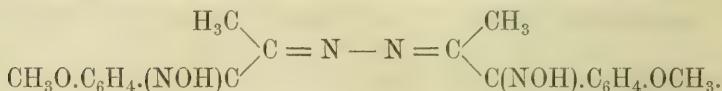
$$\begin{matrix} H_3C \diagdown & & \diagup CH_3 \\ & C = N - N = C & \\ CH_3.C_6H_4.(NOH)C \diagup & & \diagdown C(NOH).C_6H_4.CH_3. \end{matrix}$$

Si ottiene trattando la soluzione alcalina dell'azina dell'isonitrosoacetone con cloruro di p-diazotoluolo ed acidificando poi il liquido con acido acetico diluito, dopo cessato lo sviluppo di azoto. Cristallizza dall'alcool, ove è discretamente solubile a caldo e poco a freddo, in laminette gialle, fusibili a 198°-99° con decomposizione, ed è quasi insolubile negli altri solventi organici.

Gr. 0,1246 di sostanza fornirono cc. 17,4 di azoto ($H_0 = 733,10$, $t = 16°$), ossia gr. 0,019688.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{22}N_4O_2$
Azoto	15,80	16,00

Azina dell'isonitrosoanisilacetone

$$\begin{matrix} H_3C \diagdown & & \diagup CH_3 \\ & C = N - N = C & \\ CH_3O.C_6H_4.(NOH)C \diagup & & \diagdown C(NOH).C_6H_4.OCH_3. \end{matrix}$$

Si prepara, in modo analogo alle precedenti, dall'azina dell'isonitrosoacetone mediante il cloruro di p-diazoanisol. Cristallizza dall'alcool, ove è discretamente solubile a caldo e poco a freddo, in prismetti gialli fusibili a 193°-94° con decomposizione.

Gr. 0,1501 di sost. fornirono cc. 19,2 di azoto ($H_0 = 731,11$, $t = 16°$), ossia gr. 0,021167.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{20}H_{22}N_4O_4$
Azoto	14,36	14,65

È quasi insolubile negli altri comuni solventi organici; distillata con acido solforico al 10 %, fornisce solfato di idrazina e acetil-p-anisoile $CH_3.CO.CO.C_6H_4.OCH_3$, il quale forma aghi gialli fusibili a 44°-45° ed è volatile col vapore.

Torino, Istituto Chimico della R. Università, aprile 1908.

L'Accademico Segretario
LORENZO CAMERANO.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 17 Maggio 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: Pizzi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi e Renier fungente da Segretario. — Scusano l'assenza il Vice-Presidente Boselli, il Direttore della Classe Manno, il Segretario De Sanctis e il Socio Brusa.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 3 maggio 1908.

Il Presidente legge la lettera con cui il Socio Allievo ringrazia la Classe per la parte da essa presa nel suo acerbo dolore di padre.

A nome del Vice-Presidente Boselli è presentato d'ufficio, con encomio, l'opuscolo di Alberto Beneduce: *Della natalità, studio di demografia comparata*, Roma, Tip. Nazionale, 1908.

Il Socio D'Ercole fa omaggio di un fascicolo recente (Lugano, 1908) della rivista *Coenobium*, in cui è inserito un suo articolo sul filosofo Pietro Ceretti.

Per l'inserzione negli *Atti* il Socio Stampini presenta una Nota di Oreste Nazari, intitolata: *Umbrica, nuova serie*.

LETTURE

VMBRICA

Nuova Serie.

Nota del Prof. ORESTE NAZARI.

AVVERTENZA.

La presente NUOVA SERIE fa seguito a due opuscoli dell'A.: **Vatuva Ferine**, Torino, 1900 e **Umbrica**, ib., 1901. Accennerò per sommi capi alle interpretazioni in essi contenute, perchè nella versione dei luoghi, qui presi in esame, ad esse mi attengo.

Traduco **vatuva ferine feitu** " lustrationes praefericulo facito „. Il tema *vatu̯o-* risponde a **lā-tu̯o-* da **lavā-tu̯o-* (cfr. lat. *lātrīna* da *lavātrīna*); *l* iniziale originario è in umbro normalmente riflesso da *v*, e il suffisso primario *-tu̯o-* è aggiunto alla base verbale *lavā-* per conguagliamento analogico di forme corrispondenti alle latine *lavāre*, *lavĕre*. **ferine** è abl. sing. del tema *feriōn*/*ferin-*, da rad. *fer-*, indoeur. *bher-*, da cui con significato affine il gr. ἀμφορεύς e il suo derivato lat. *amphora*, nonchè lat. *prae-fer-i-culu-m* ' vaso sacro '.

Traduco **tuva tefra spantimař prusekatu** " duo frusta ad oblationem prosecato „, e **tertiama spantim triia tefra prusekatu** " tertiam ad oblationem tria frusta prosecato „, e lo **spantea** di II. a. 30 " oblativa „. Derivo **spanti-** da **spn̥d-i-ti-*, cioè dalla stessa rad. donde gr. σπένδω σπονδή e lat. *spondeo* (per *tt*, *t* da *-d-t-* cfr. osco **úíttiuf** ' usio, fructus ', lat. *cette, mattus, adgretus*). **tefro-** risale a **tem-es-ro-* da rad. *tem-* (cfr. gr. τέμ-νω τέμ-ενος, lat. *tem-p-lum*).

Traduco **upetu** " obīto „ nel senso di " sibi parato „, e **upetuta** " obeunto „ = " sibi paranto „.

Traduco **vepurus felsva** di **esunesku vepurus felsva... prehubia** " sacris cum liquoribus liba... praebeat „ e **vepuratu** di **kapiře**

punes vepuratu " capide (abl. di mezzo) poscae (genit. partit.) infundito „. Già il von Planta accostò **vepurus** a *liquoribus*; quanto a **felsva**, lo connetto con lat. *helluō helluāri*.

Traduco **nuřpener** " *nudipendiis „ nel significato di " sole contribuzioni in denaro, esclusa ogni altra contribuzione in natura „. È bensì vero che lat. *nudu-s* risale a **nogʷedo-s*, che in umbro avrebbe dovuto dare **nobed(o)s*, ma per la sincope di *ĕ* nel preumbro si ebbe **nogdos* (cfr. umbro *ninctu* ' ninguito ') e poi **nōdos* (cfr. umbro **speture** ' spectori '), di cui il *-d-* intervoc. passò normalmente in **ř**. **-pener** = *-pendiis* con *nn* da *nd* usualmente scritto in umbro con *n*, per l'*i* mancante nell'umbro cfr. umbro **spina spinia**, *rūbinam* **rupinie**.

Traduco *ruseme* " in terra „ connettendolo con lat. *rūs* da **rous *reus* e per la flessione riferendomi a umbro *toteme* ' in civitate '.

Traduco *ponne oui furfant* di VI. b. 43 e I. b. 1 " quom oves tondent „, connettendo *furfant* con lat. *forfex*, e perciò l'*efurfatu* di VI. b. 17 e VII. a. 38 " effundito „, quasi " extondeto „ nel senso di ' togliere (tagliare) via solo il pelo del liquido della libazione per gettarlo sul fuoco '.

---

cehefi dia, VI a 20.

Di *cehefi* furono tentate parecchie spiegazioni, e la prima questione che si presenta è della lettura di questa parola. È essa bisillaba con *ehe* rappresentante *ē* (così come *ihi* rappresenta *ī* in umbro *persnihimu* ' precamino '), o è essa trisillaba, e in questo caso è l'*h* per avventura etimologico (da *gh*, come in *mehe* ' mihi ', **Vehiies** ' Veiis ' ecc.) o mero segno di separazione tra due vocali (come in *pihatu* ' piato ' ecc.)? Di più è *cehefi* connesso etimologicamente con **kukehes** di Tab. III. 21, anch'esso d'ignoto significato? E perchè il *c*, **k** davanti ad *e* non subì in queste parole il solito processo di palatilizzazione? A queste domande fu variamente risposto.

Anzitutto considerando *cehe* = *cē-* il Bücheler dapprima connesse *cehefi* con lat. *candeo ac-cendo* facendolo corrispondere a

un ipotetico lat. **censim* con *f* umbro rispondente a lat. *ns*, e il v. Planta, *Gramm. d. oskisch-umbr. Dialekte*, p. 368 sg. attribuisce la conservazione del *c* alla vocale nasale *eⁿ* proveniente da *n* sonante risalendo per *cehefi* a *kn̥d-ti-* (cfr. ibidem p. 315 e 422), con che sarebbe risolta anche la questione della rispondenza dell'*e* umbro all'*a* latino di *candeo*.

Se invece *cehefi* è trisillabo, allora **kukehes** potrebbe avere connessione con esso e la conservazione del *c*, **k** troverebbe la sua ragione nella provenienza dell'*e*, che gli segue, da *ai*, e se l'*h* è etimologico dovremmo risalire ad una radice *kaigh-*, che troviamo in gr. ἔκιχον κιγχάνω anglosass. *higian* ' sforzarsi ' ant. ind. *çighrá-* ' veloce ', per cui **ku-kehes** avrebbe press'a poco il significato di ' raggiungerà '; però in questo caso sarebbe difficilissimo spiegare *cehefi*. Se l'*h* non è etimologico, il Huschke, il Newmann e il Bücheler connettono le due parole con gr. καίω ' brucio, accendo ', provenendo il quale da *καϝι̯ω si aspetterebbe in umbro *keve-* invece di *kehe-*, o, se si ammettesse **kaiv-* da *kavi-* qual forma fondamentale (cfr. lat. *saevio*, umbro *sauitu*), sarebbe difficile da spiegare il dileguo del *v* (cfr. v. Planta op. cit. p. 368 sg.).

Se gravi sono le difficoltà fonetiche per ritenere legittima la derivazione di *cehefi* sì da rad. *kand-* che da rad. *kav-*, non meno gravi sono quelle morfologiche. *cehefi* bisillabo potrebbe essere un sostantivo formato col suffisso *-ti-*, onde *cehefi dia* varrebbe **accensim det* in nesso quale *venum dare*, *pessum dare*, oppure un supino in *-tu*, onde varrebbe *accensum dare*, ma in quest'ultimo caso non si spiegherebbe *en* umbro di fronte ad *an* di lat. *candeo*, giacchè il supino italico si forma della radice in grado medio. *cehefi* trisillabo e connesso con gr. καίω fu pure spiegato dal Bronisch come forma del perfetto soggiuntivo passivo umbro con *-f-* (quale **herifi** ' oportuerit ', *pihafi* ' piatum sit ') e varrebbe ' accendatur ', ma il v. Planta stesso trova piuttosto duro il nesso sintattico, che ne risulterebbe, *ea* (*vasa*) *sic adhibeto ut ignis* (opp. *ignem*) *ab igne accendatur det* (op. cit. 406). La conclusione dei tentativi fatti finora sta purtroppo nelle parole del Buck (*A Gramm. of Oscan and Umbr.*, p. 90) " for *cehefi* ' accensum sit '? **ku-kehes**, there is no satisfactory etymology (connection with Grk. καίω from *καϝ-ιω impossible) „.

Prima di esporre la nostra interpretazione di *cehefi* — per

ora non ci occuperemo di **kukehes** (1) — passiamo a vedere le due proposte di *dia* già messe innanzi entrambe dal Bücheler, *Umbrica* p. 52, tra le quali non avremo che da scegliere quella che meglio s'attaglia alla nostra di *cehefi*.

dia col significato di ' incendat ' risale a **dūāt* = **dūi̯āt* e deriva dalla rad. *du-* ' bruciare ', che troviamo riflessa nel gr. δαίω (*δαϝi̯ω) e nell'ant. ind. *du-no-ti* ' brucia ' trans., *dū-ya-te* ' brucia ' intr.; col significato di ' det ' risale a protoitalico **dūāt* e deriva da rad. *du-* ' dare ', che troviamo nel lat. *duat* ' det ', *creduat*, *venum duit*. Delle due interpretazioni accediamo alla prima.

cehefi, leggasi *kēfi*, riflette foneticamente e morfologicamente a puntino gr. κεῖθι ' ibi ', monotongatosi il dittongo originario *ei* in umbro *e* (cfr. umbro **prever** ' singulis ' con osco *preiuatud* ' reo ' e lat. *prīvos*, umbro **etu** *eetu* da **ei-tōd* con lat. *ītō*, umbro *erer* ' eius ' con osco **eiseís** ' eius ' ecc. ecc.), rispondendo normalmente l'umbro *f* a gr. θ, indoeur. *dh* e l'-*i* finale a gr. -ι. Ben è vero che l' *i* finale protoitalico pronunciossi aperto nell'osco e nell'umbro e che nell'umbro, quando non si dileguò, diventò -*e* come in latino (cfr. umbro **ote** *ote* ' aut ' con osco *auti*, umbro **sakre** *sacre* ' sacre, hostia ' nom. acc. sing. ntr. di tema in -*i*, ecc.), però accanto all'abl. sing. **kapiře** ' capide ' **karne** ' carne ' *curnase* ' cornice ' ecc. troviamo anche **peři** *persi* ' pede ' *scalsi-e* ' in patera? ', dove al segnacaso -*i* del loc. (abl.) sg. dei temi in consonante vediamo rispondere in lat. -*e*, in umbro per lo più -*e* e talvolta anche -*i*.

L'avverbio locativo umbro *cehefi* del resto non è morfologicamente isolato, ma si trova in compagnia con umbro **pufe** *pufe* osco **puf** ' ubi ', umbro **ife** *ife if* ' ibi ' *if-ont* ' ibidem ', peligno *ecuf* ' hic ', lat. *ubĭ ibĭ*, gr. πόθι ' ubi? ' αὐτόθι οἴκοθι αὖθι κεῖθι, ant. ind. *adhi* ' su ', uscenti col suffisso formativo indoeuropeo -*dhi*, affine ai suffissi congeneri indoeur. -*dhe* e gr. -θεν, dei quali discorre il Brugmann in *Kurze vergl. Gramm.* p. 454 sg., § 580.

---

(1) **kukehes** del resto, sì foneticamente (come 3. pers. fut. di rad. indoeur. *kaigh*, umbro *kēh*, cfr. gr. ἔ-κιχ-ον ant. ind. *çīgh-rá-*) che pel nesso logico si può tradurre ' conveniet, perveniet ' nell'unico luogo, in cui si presenta, Tab. III, 21: **inenek vukumen esunumen etu ap vuku kukehes iepi persklumaŕ kaŕitu**, che tradotto suona: *tum in aedem ad sacrificium ito. Ubi (ad) aedem perveniet, ibi ad precationem vocato.*

Passando alla parte tematica della parola, vi ravvisiamo il tema pronominale indoeur. *ḱo- ḱi-*, che preceduto dalla particella dittica *e* dà il pronome *eko-* 'hic' in osco εκο '?' **ekak** 'hanc' **ekik** 'hoc' **ekas ekask** 'hae' **ekass** 'has', peligno *ecic* 'hoc' *ecuc* avv. 'huc' *ecuf* avv. 'hic' (cfr. gr. ἐκεῖ, ἐκεῖνος), dal quale unito col tema pronominale *so-* proviene il pron. osco **eksú-** *exo-* 'hic' e umbro *esso- eso-* 'hic'. Da questo stesso tema *k̂o-* proviene indubbiamente anche l'enclitica osco-umbra **-k** (cfr. per l'umbro **esuk** *esoc issoc* accanto a **esu** *eso iso* 'sic, ita', **isek** *isec* 'ibi, eo', **inumk inuk enuk inumek inenek** accanto a **enu** *enom ennom eno enno* 'tum', **itek** 'ita') e lat. *-ce -c* (cfr. lat. *hic, haec hoc* ecc. *huiusce*, *ecce* ecc.) nonchè il prefisso *ce-* di osco *cebnust* 'venerit' e lat. *ce-do ce-tte*).

In *cehefi*, rispondente nella forma del tema e del suffisso a gr. κεῖθι e nel suffisso ai citati **pufe** *pufe* **ife** *ife if ecuf*, noi troviamo conservata la velare davanti ad *e* probabilmente perchè in altre forme dello stesso tema (non restateci nei pochi documenti delle iscrizioni umbre) la velare si conservava davanti a vocale non palatale, così come abbiamo in umbro il gen. sg. *Naharcer* su *Naharcom*, il dat. sg. *fratreci* '*fratrico, magistro fratrum' su **fratreks** nom., *fratreca* abl. femm., *fratrecate* loc. sg. 'in fratrum magisterio', l'abl. plur. *todceir* su *todcor* nom. pl. masch. o ntr. ecc. e del resto troviamo sopravvivenze del periodo anteriore alla palatalizzazione in umbro **kebu** 'cibo' e inoltre in **Akeȓunie** *Acersoniem* di oscura origine.

Dimostrata sotto tutti i punti di veduta la rispondenza di *cehefi* a gr. κεῖθι, vediamo ora se nel testo, dove la parola ricorre, essa si possa logicamente tradurre per *ibi*.

uasor uerisco treblanir porsi ocrer pehaner paca ostensendi eo iso ostendu pusi pir pureto cehefi dia surur uerisco tesonocir surur uerisco uehieir.

cioè:

" Vasa ad portam Trebulanam, quae montis piandi causa ostendentur, ea sic ostendito ut ignem ab igne ibi accendat. Item ad portam Tesenacam. Item ad portam Veiam ".

Ibi dunque vale 'ad portam Trebulanam', ch'è il punto della cerimonia e che deve essere precisato perchè analogamente la cerimonia deve ripetersi tal quale altre due volte, alla porta Tesenaca e alla Veia.

fato fito VI. b. 11.

Se l'interpetrazione di *fato fito* è ancora un indovinello e la versione 'factum fitum' data dal v. Planta e dal Buck nulla dice, tuttavia in nessun altro luogo forse delle Tab. Ig. si rasentò più da presso la verità senza vederla. Già nel 1851 Aufrecht e Kirchhoff, *die Umbr. Sprachdenkmäler* II 200, interpetrarono **fato** con 'fatum', che il v. Planta, op. cit. I 352, dichiara " non ben rispondente pel significato „ e poi il Bücheler, Umbrica 67, con felice divinazione scrisse: " proventum eventumque prosperum comprehendunt *fato fito*, faciendi fiendique copia, facultas et felicitas. Nam illud a *fac* ductum pro *fahto* est (cfr. bonum factum pro ἀγαθῇ τύχῃ), hoc autem umbr. *fuiest* latinumque *fiet*, φῖτυ fetum significat grammatice, conexa actionem passionemque continent incrementi. *perne postne* πρόσσω καὶ ὀπίσσω, ut Iani gemina frons, ut Porrimam Romani Postvertamque colunt ipso prolis nomine „. Nello stesso modo interpetra il Buck, che a pag. 222 della sua Grammar of Oscan and Umbrian trattando dell'asyndeton scrive: " *fato fito* 'successo e buona fortuna' (quasi latino *factum fitum*, il primo riferendosi ad 'efficienza, prospero compimento', il secondo a 'ciò che avviene, riesce bene, buona fortuna') „. Tralasciando di citare altri tentativi d'interpetrazione meno felici, rileviamo solo che se foneticamente umbro **fato**- potrebbe rispondere a protoitalico *facto*-, nondimeno in linea di fatto a lat. *facto*- corrisponde in umbro **fēto*- da radice *fēk*-, cfr. umbro **aanfehtaf** 'infectas', **feta** 'factā' (vedi Buck op. cit. 168), e d'altra parte nè nella costituzione morfologica dei due vocaboli *fato fitu*, nè nel loro presunto significato troviamo nelle altre lingue indoeuropee alcuna rispondenza, onde sorse la strana versione latina di *factum fitum*, con cui furono resi.

Si presenta ovvia invece l'interpetrazione di *fato* per *fata* (acc. plur. ntr.) (1), la quale non fa una grinza nè dal lato fo-

---

(1) È notorio che la desinenza protoitalica -*ā* del nom. sing. della 1. declin. e del nom. acc. voc. ntr. plur., la quale finì per abbreviarsi in latino, si conservò in osco-umbro e si oscurò tanto che in osco riuscì a -**ú** -*o* e in umbro a -**a** -**u** -*o*. Tralasciamo di recarne esempi, di cui abbiamo dovizia;

netico nè dal morfologico, e di *fito* per *bona*; questa invece ha bisogno di qualche spiegazione, data la quale, passeremo a dimostrare come non solo la versione *fata bona* per sè sia accettabile, ma essa risulti anche dal nesso logico del luogo, dove le parole in questione si trovano.

fito è acc. plur. ntr. di *fīto-*, part. pass. della rad. indoeur. *bhū-* ‘ essere, diventare ’ (cfr. ant. ind. *bhū-tá-s* ‘ diventato ’) e risale a protoitalico **fū-to-* col mutamento di *ū* in *ī*, normale nell’umbro, come si vede da **pir** ‘ ignis ’ = gr. πῦρ, **sim** ‘ suem ’ = gr. ὗ-ν, *frif* da **frūg-f* ‘ frūges ’, *trefi* ‘ tribū ’, **aȓputrati** ‘ arbitratū ’, **mani** ‘ manū ’.

Quanto al valore di ‘ buono ’ che assegniamo a umbro *fīto-* ricordiamo che dalle due radici supplementari *es-* e *bhū-* derivano aggettivi sostantivi e avverbi, che contengono l’idea di ‘ bontà ’, p. e. da rad. *es-* deriva gr. ἐύς ἠύς avv. ἐύ εὖ (1), ant. ind. *su su-*, avest. *hu-* ant. pers. *u-* (*uv-*) med. pers. *hu-*, gall. irl. *su-*, cimr. *hy* ‘ bene ’, ant. ind. *sant-* ‘ essente, buono ’ *satya-s* ‘ vero ’, e da rad. *bhū-* deriva ant. ind. *bhū-ti-s* (morfologicamente corrispondente a gr. φῦσις), che vale ‘ prosperità, benessere, felicità ’.

E benessere, felicità, buoni destini sul popolo Iguvino invoca dal dio Fisovio Sancio la preghiera contenuta nella Tab. Iguv. VI. b. 9-15, che riferiamo:

Fisouie Sanšie tiom esa mefa spefa Fisouina ocriper Fisiu totaper Jiouina erer nomneper erar nomneper. Fisouie Sanšie ditu ocre Fisi tote Jouine ocrer Fisie totar Jouinar dupursus peturpursus fato fito perne postne sepse sarsite uouse auie esone futu fons pacer pase tua ocre Fisi tote Jiouine erer nomne erar nomne Fisouie Sanšie saluo seritu ocrem Fisi totam Jouinam Fisouie Sanšie saluo seritu ocrer Fisier totar Jouinar nome nerf arsmo uiro pequo castruo frif salua seritu futu fons pacer pase tua ocre Fisi tote Jiouine erer nomne erar nomne Fisouie Sanšie tiom esa mefa spefa Fisouina ocriper Fisiu totaper Jiouina erer nomneper erar nomneper Fisouie Sanšie tiom subocau Fisouie frite tiom subocau.

---

e mentre rileviamo che **fato fito** potrebbe pure essere acc. sing. con attenuamento e dileguo di *-m* finale, rimandiamo al seguito della trattazione di mettere in evidenza le ragioni per le quali è preferibile il plurale.

(1) Sulla connessione di gr. εὖ ecc. con ant. ind. *su* vedi la postilla etimologica dell’A. in Riv. di Fil. Cl. XXXII, 95 sgg.

La quale latinamente suona:

" Fisovi Sanci, te hoc libo *sparso* Fisovino pro monte Fisio, pro civitate Iguvina, pro eius (montis) nomine, pro eius (civitatis) nomine. Fisovi Sanci, dato monti Fisio, civitati Iguvinae, montis Fisii civitatis Iguvinae bipedibus quadrupedibus fata bona, ante post, *separatim* *sarcite, *voto* augurio sacrificio; esto favens propitius pace tua monti Fisio, civitati Iguvinae, eius (montis) nomini, eius (civitatis) nomini. Fisovi Sanci, salvum servato montem Fisium, civitatem Iguvinam. Fisovi Sanci, salvum servato montis Fisii, civitatis Iguvinae nomen, principes, ritus, viros, pecua, fundos, fruges salvas servato; esto favens propitius pace tua monti Fisio, civitati Iguvinae, eius (montis) nomini, eius (civitatis) nomini. Fisovi Sanci, te hoc libo *sparso* Fisovino pro monte Fisio pro civitate Iguvina, pro eius (montis) nomine, pro eius (civitatis) nomine. Fisovi Sanci, te invo*cavi*, Fisovi fiducia te invo*cavi* „.

Il *ditu fato fito* ' dato fata bona ' della Tab. Iguv. ci richiama infine alla mente il *quod bonum felix fortunatumque sit* spesso ricorrente sulla bocca dei Romani, e l'aggiunta *perne postne* ' ante post ' riceve la sua illustrazione dalla prece solenne del Carmen Seculare Oraziano:

> Vosque veraces cecinisse, Parcae,
> Quod semel dictum est, stabilisque rerum
> Terminus servet, bona iam peractis
> Iungite fata.

dove abbiamo quasi le identiche parole, rispondendo bona fata a *fato fito*, iam peractis a *perne* ' ante ' e iungite a *ditu postne.*

erus, *erus* (24 volte *passim*).

Il Bücheler definì *erus* ' quod dis datur peractis sacris ' (Umbr. in lessico) dandogli come equivalente in latino ' augmen, magmentum ' (ib. 70) e lo confrontò con lat. *erus* ' dominus ', *eritudo* presso Paolo = *servitudo*, *eritio* nelle glosse di Placido = *dominatio*, vocaboli, secondo lui, da non disgiungere da umbro **eretu** *heritu* ptc. ' optato, consulto ', sicchè *erus* perduto l'*h* iniziale originario, significherebbe ciò che " deo homo χαρίζεται ἱερὰ ῥέζων, partem deo acceptissimam, si quidem *herum herium* velle

cupere accipere significat. *herter* placet convenit. *neip eretu* ἀκούσια „.

Anzitutto è da notare che non v'è connessione tra lat. *erus*, connesso verisimilmente con avest. *anhus* 'dominus', e umbro *heritu* ecc. (da rad. *her-* 'velle') connesso con lat. *horior hortor* gr. χαίρω ant. ind. *hár-yā-mi*. Inoltre l'Osthoff in *Curt. St.* 278 notò che *erus* non presenta mai l'aspirazione e per di più la sillaba finale non è sincopata, laonde egli vede in *erus* un acc. sg. ntr. derivante da **erfs* = **erfos* corrispondente a gr. ἄλθος e ant. ind. *rādhas*; però coll'etimologia Osthoffiana non ci sapremmo render ragione dell'*u* di *erus*, giacchè umbro *fratrus* 'fratribus', citato in confronto, proviene da **fratr-u-bh*(*o*)*s* e, come tutti i dat. abl. pl. dei temi in conson. dell'umbro, trae l'*u* dall'analogia dei temi in *u* (mentre il lat. e l'osco traggono l'-*i*- dai temi in *i*; cfr. l. *leg-i-bus* con osco *leg-i-s* 'legibus', lat. *termin-i-bus* con osco **teremn-i-ss** 'terminibus' ecc.).

Scartate pertanto le proposte etimologie, si pensò a osco **aisusis** 'sacrificiis', marruc. *aisos* 'dis opp. sacrificii?', marso *esos* 'dis', volsco *esaristrom* 'sacrificium', umbro *esono-* 'divinus, sacer' (Bugge, *Rhein. Mus.* 40, 473 sgg.) e dal Huschke anche a ted. *Ehre* con *r* da *s*, chè ted. *ehre* ant. alt. ted. *era* risponde a got. **aiza* (cfr. got. *aistan* lat. *aestimare*), e poichè il nesso logico non ammette la spiegazione di *erus* come dat. plur. 'dis' il von Planta (op. cit. I 523) trova possibile che sia neutro acc. sing. corrispondente a ted. *ehre* 'onore', che pel significato calza, e nota opportunamente (ib. 231) che dobbiamo vedere in *erus* un tema neutro in *-us-* (come ant. ind. *tapus-*), dove l'*ŭ* non fu sincopato, mentre *ŏ ĕ ĭ* di sillabe finali nell'osco-umbro di regola si sincopa.

Anche il Buck (op. cit. 74 e 304 sg.) ritiene come possibile la connessione di *erus* con osco **aisusis**, umbro *esono-* ecc. e lo traduce pure con 'magmentum', annotando che la parola dinota un'offerta supplementare con cui la cerimonia è terminata.

Come vediamo dunque l'interpetrazione Bücheleriana *magmentum* si è impòsta come l'unica possibile se non certa, qualunque sia l'etimologia della parola. Ma è poi veramente indispensabile di vedere in *erus* un'offerta supplementare agli dei per finire un sacrificio? Al Bücheler pare di vederla designata chiaramente in Tab. II a 27: **katles tuva tefra terti erus pruse-**

katu, che traduce " catuli duo tefra, tertium erus prosecato ", dove, egli dice, " opponitur hostiae partibus duabus, quarum nomen combusturam prodit, tertia tanquam praestabilior ", ma nel testo umbro nè si scorge contrapposizione di parti nè precellenza di *erus* sui *catuli duo tefra*.

Tentiamo dunque un'altra interpetrazione e vediamo se foneticamente e logicamente sia sostenibile.

Per quel che riguarda l'etimologia di *erus*, questo vocabolo corrisponde foneticamente ad ant. ind. *arus* ntr. ' ferita ', ch'è connesso nella radice con ant. ind. *ar-mās* masch. pl. ' avanzi, ruine ' e *ar-ma-ka-s* ' frammentario ', e quanto al rapporto semasiologico tra *arus* e *armas* confrontisi lat. *feriō* con gr. φάρω ' spezzo ', sicchè ant. ind. *arus* significò originariamente ' rottura, spezzamento ' e il suo riflesso umbro *erus* significa ' pezzo, avanzo ' latinamente ' reliquom ' (cfr. per i vocaboli derivati della stessa radice, quali lat. *rārus rēte*, gr. ἀραιός ἐρῆμος ecc. e altri delle altre lingue indoeuropee A. Walde, *Lat. Etym. Wört.* sotto *rarus* e W. Prellwitz, *Etym. Wört. d. Gr. Spr.*[2] sotto ἀραιός ἐρῆμος).

A farci ritenere legittima la data etimologia concorrono, oltre la fonetica e la semantica, tre altre ragioni, la prima che nei 24 luoghi, in cui ricorre la parola *erus*, è sempre consona al nesso logico del testo la traduzione ' reliquom ', giacchè *erus* ' il restante della vittima o della libazione ' è mentovato sempre al termine d'ogni sacrificio e spesso dopochè è già stato detto che della vittima si sono offerte agli dei delle parti; la seconda che in Tab. V. b. 8-18 sono stabilite da una parte le contribuzioni che certe *gentes* devono dare regolarmente al collegio dei fratelli Atiedii e da l'altra le porzioni delle vittime che loro i fratelli Atiedii devono dare nell'occasione del sacrificio, per la qual cosa il frequente *erus ditu* ' reliquom dato ' e simili si riferisce evidentemente alle parti date dai sacerdoti ai rappresentanti delle varie genti acciocchè colle genti rappresentate piglino parte non solo colla presenza ma anche in realtà al banchetto divino (" Clavernii dent oportet fratribus Atiediis in singulos *annos* farris lecti pondo IIII agri Latii Piquii Martii, et cenam hominibus duobus, qui far arcessierint, aut asses VI. Claverniis dent oportet fratres Atiedii sementivis decuriis pulpamenti suilli in singulos *annos* partes X, caprini partes V, priores

sale (*conditas*), posteriores —, et cenam aut asses VI. Casilas det oportet fratribus Atiediis in singulos *annos* farris lecti pondo VI agri Casili Piquii Martii, et cenam hominibus duobus, qui far arcessierint, aut asses VI. Casilati dent oportet fratres Atiedii sementivis decuriis pulpamenti suilli in singulos *annos* partes XV, caprini partes VII semissem, et cenam aut asses VI „. E il Buck, di cui abbiam riferita la versione, annota a pag. 302 che le due gentes qui menzionate sono tra le dieci (formanti la decuria) noverate in II b, e che questo passo è indubbiamente solo la conclusione di un decreto fissante le contribuzioni e le distribuzioni di carne per tutte dieci, la principale parte del quale era su una delle tavole perdute); la terza che *erus* non è mai accompagnato dal verbo **façiu** ' facere ' o **purdoriom* ' porricere ', che sono nelle Tab. Iguv. i termini tecnici sacri dell'offerire, del sacrificare agli dei, ma dal verbo *dare*, il quale incontriamo avente per complemento di termine uomini e non dei nella mentovata Tab. V. b. 8. 11. 13. 16, nel significato di concedere da parte degli dei agli uomini in VI. b. 10 e di consegnare materialmente, porgere in II a 40.

Sarebbe troppo lungo riferire qui nel testo e nella versione tutti i luoghi dove ricorre la parola *erus*, solo accenneremo a quelli in cui essa non è seguìta dal verbo dare.

In II a 27 si dice: **katles tuva tefra terti erus prusekatu** cioè “ catuli duo frusta tertium (avv.) reliquom prosecato „; in II a 40: **esuf pusme herter erus kuveitu teřtu** cioè “ ipse quem oportet reliquom congerito dato „; in II a 32: **iepru erus mani kuveitu** cioè “ iecurum (?) reliquom manu congerito „, e infine in IV. 14 leggiamo **putrespe erus,** che il Bücheler e il von Planta traducono “ utriusque gratia „, mentre il Buck crede omesso dopo *erus* il solito **teřtu**, nel qual caso tradurremo “ utriusque reliquom dato „, cioè si distribuisca il restante delle due prime mentovate pecore sacrificate agli dei, delle quali è detto prima che furono loro offerte già varie parti.

pelsatu VI b 40, **pelsans** II a 43, **pelsanu** II a 6, III 32, *pelsana* VI b 22, **pelsana** I a 26.

Le surriferite forme derivano da una base verbale *pelsā-*, verisimilmente proveniente da un part. pass. come lat. *pulsus* per **pultus* (accanto a *pulsāre* il lat. arcaico ha ancora *pultare*) *lapsus* per **laptus*, *haesum* per **haestum* ecc. con *s* per *t* analogamente alle radici uscenti in dentale, e le etimologie, che se ne possono dare, si riducono a quattro (1). Il Bréal, *Les Tabl. Eug.* 143 si riferì a umbro *pelmner* lat. *pulmentum* e tradusse *pelsatu* ecc. con 'coquito' ecc., però *pelmner* sta per **pelpmener* e *pulmentum* ha accanto la forma più piena *pulpamentum*, voci che derivano da protoital. **pelpa* lat. *pulpa*. Il Bücheler, Umbr. 38, 71, 139, 213 traduce *pelsatu* ecc. per θαπτέτω 'sepelito', però lat. *sĕ-pel-īre* difficilmente vi è connesso (tuttavia Stokes-Bezzenberger in *Fick* II⁴ 43 congetturano un celt. **pels-* 'seppellire'). Il lat. *pulsāre*, dice il v. Planta, ne è lontano pel suo significato e del pari con difficoltà si può pensare, dice ancora il v. Planta, a umbro **pelō* = lat. *colō* (*pelso* = l. **culsus* per *cultus*), cfr. v. Planta op. cit. I 498, II 437. Anche il Buck col Bücheler e col v. Planta traduce *pelsā-* con *sĕpelire*, dichiarando questa la versione più probabile (cfr. Buck op. cit. 191 e 305).

Delle citate etimologie l'unica che nulla lasci a desiderare dal lato fonetico è che umbro *pelsā-* risponda a lat. *pulsā-re*, giacchè in osco-umbro *el* originario si conserva, mentre in lat. mutasi in *ol* davanti a vocale e in *ul* in fin di parola e davanti a consonante che non sia *l* (cfr. umbro *pelmner* 'pulmenti' con lat. *pulmentum*, **veltu** 'deligito' e **eh-velklu** 'sententiam' con lat. *volt vult*, **sumel** con lat. *simul*, osco *famel* con lat. *famul*).

---

(1) Non si può prendere in considerazione l'etimologia proposta da E. W. Fay in *Class. Rev.* XIII, f. 17, che *pelsā-* significhi 'coprire con pelli' (cfr. l. *pellītus*). Il Fay ammette in umbro un vocabolo corrispondente a lat. *pellis* con tema uscente in *-es-* come sinonimo di *vellus* e *tergus* e trae in confronto il gr. ἄπελας ἐρυσίπελας. Sarebbe però bene strano che si rivestissero di pelli le vittime nell'atto di squartarle o, comunque, di servirsene pel sacrificio!

Quanto al significato, l'umbro *pelsā-* equivale a lat. *pulsāre* ' picchiare, percuotere ' eufemisticamente usato per ' uccidere ', al qual proposito è da notare che nelle Tab. Iguv., dove pure tanto spesso si accenna al sacrificio delle vittime, se questo non è non vi sarebbe altro verbo che indichi l'atto dell'uccidere, atto significato in latino eufemisticamente con *immolāre*, ' cospargere di *mola*, o farro macinato con sale, le vittime da uccidere', con *mactāre*, per la cui etimologia vedi A. Walde op. cit., e simili.

Quanto al nesso logico con ciò che è detto nei luoghi, dove il vocabolo in questione ricorre, è da rilevare che la versione *sepelīre*, se può sembrar legittima in un solo passo, cioè in II. a. 43, e tollerabile in altri due, cioè in I a 26 e II a 6, non è ammissibile nè in III. 32 nè in VI. b. 22 e 40. Nei citati luoghi o è indifferente, come nei primi tre, tradurre con *pulsāre=mactare*, o pel senso non si può ammettere altra versione che questa, come nei tre ultimi luoghi citati, i quali devono essere tenuti in maggiore considerazione perchè hanno connessione logica di senso con quanto precede e segue nelle Tabulae Iguvinae.

Passiamoli in rassegna.

La Tab. II. a, la quale dalla linea 15. alla 43. tratta del sacrificio d'un cane, termina le prescrizioni relative ad esso colle parole: **katel asaku pelsans futu**, le quali si potrebbero bensì intendere ' catulus apud aram *sepeliendus* (anzichè *pulsandus*) esto'. Però è ovvio pensare che le riferite parole siano un'aggiunta finale fatta allo scopo di rimediare ad una omissione dell'incaricato dell'incisione del testo, giacchè dopo le prescrizioni precedenti, per le quali varie parti del cane già sono state arrostite e distribuite, come si potrebbe concludere col seppellimento del cane?

Nella Tab. II. a. 6 troviamo isolate le parole **luvie unu erietu sakre pelsanu fetu**, sicchè mancando relativamente ad esse ogni connessione con quanto precede e con quanto segue, riesce indifferente tradurre ' Iovio unum arietem sacrificum *sepeliendum* facito ' oppure ' *pulsandum* facito '.

Del pari di tre agnelle da sacrificare a Tefro Iovio non si dice altro in Tab. I. a. 26 se non che **pelsana fetu** ' *sepeliendas* facito ' oppure ' *pulsandas* facito ', ed è solo da deplorare, se qui pure **pelsana** vuol dire 'sepeliendas', lo spreco che di tanta grazia

di Dio facevano i buoni sacerdoti Iguvini, i quali seppellivano arieti agnelli e altre vittime e placavano il loro appetito canino con dei quarti, e non tutti, di cane!

Adagio però nel calunniare di bonomia i sacerdoti Iguvini! Essi nella Tab. III. 32, sgg. ci dicono: **uvem peŕaem pelsanu feitu ererek tuva tefra spantimaŕ prusekatu eŕek peŕume purtuvitu struçla aŕveitu inumek etrama spanti tuva tefra prusekatu eŕek ereçluma puemune pupŕike purtuvitu erarunt struhçlas eskamitu aveitu inumek tertiama spanti triia tefra prusekatu** ecc. Dove se traduciamo **uvem... pelsanu feitu** con 'ovem (masch. = montone?) sepeliendum facito', come mai dopo averlo seppellito (a proposito del cane il presunto *sepeliendum* si trovava almeno in fine della prescrizione e si sarebbe trattato di far al più rinuncia di quel che forse non era mangiabile) se ne potevano ancora toglier via tante parti quante sono noverate dopo? Traduciamo: " ovem *humi stratum* pulsandum facito. Eius duo frusta ad oblationem prosecato, tum in fossam porricito, struem addito. Tunc alteram ad oblationem duo frusta prosecato, tum ad sacrarium Pomono Publico porricito, eiusdem struis — addito. Tunc tertiam ad oblationem tria frusta prosecato ecc. „. Dabbenuomini non eravamo piuttosto noi a trovare tre fianchi nel loro montone, traducendo **spantimaŕ..... etrama spanti..... tertiama spanti** con 'ad latus..... alterum ad latus..... tertium ad latus'? (1). Sicchè dunque questo luogo è decisivo per farsi ripudiare l'interpetrazione *sepelire* di *pelsā-* e farci adottare piuttosto l'interpetrazione *pulsare* = *mactare*.

Per la medesima ragione non si può tradurre *sepeliendas* il *pelsana* di VI. b. 22, nel qual luogo è detto: *post uerir uehier habina trif fetu tefrei ioui ocriper fisiu totaper iiouina serse fetu pelsana fetu aruio feitu poni fetu tasis pesnimu prosesetir strušla ficla arueitu*, che traduciamo " post portam Veiam *agnas* tris facito Tefro Iovio pro monte Fisio, pro civitate Iguvina. Sedens facito, pulsandas facito, frumenta facito, posca facito, tacitus precator. Prosectis struem, offam addito „, giacchè se le tre

---

(1) In **Umbrica**, Torino, Tip. Baglione, 1901, tentai di dimostrare tra l'altro che umbro *spanti-* è connesso con gr. σπένδω σπονδή e lat. *spondeo* e vale 'oblatio', e *tefro-* da **tem-es-ro-* deriva dalla rad. italo-greco-slava *tem-* 'tagliare' (cfr. gr. τέμ-ν-ω τέμ-ενος, lat. *tem-p-lu-m ton-d-eo*) e vale 'frustum'.

agnelle fossero seppellite, come si potrebbe poi aggiungere *struem* et *offam* ai *prosectis*? I *prosecta* qui evidentemente non possono essere che delle tre agnelle.

Infine in VI. b. 40-42 leggiamo: *enom pesondro sorsalem persome pue persnis fust ife endendu pelsatu enom pesondro staflare persome pue pesnis fus ife endendu pelsatu enom uaso porse pesondrisco habus serse subra spahatu anderuomu sersitu arnipo comatir pesnis fust serse pisher comoltu serse comatir persnimu purdito fust*, cioè " tum *figmentum suillum* in fossam ubi precatus erit ibi imponito, pulsato. Tum *figmentum ovillum* in fossam, ubi precatus erit, ibi imponito, pulsato. Tum vasa, quae ad *figmenta* habuerit, sedens superiacito. Inter — sedeto, donicum commolitis precatus erit. Sedens quilibet commolito, sedens commolitis precator. Porrectum erit ". Che siano i pesondro non sappiamo; è però probabile la spiegazione che leggiamo in Buck, op. cit. p. 305, che così si chiamasse un'offerta simbolica, una imagine d'animale fatta di farina offerta per l'animale stesso (cfr. Serv. ad Aen. 2. 116, Festus ed. Thewrewk p. 548). Or questa vittima simbolica era pur simbolicamente ammazzata e non già sepolta, poichè più sotto si dice che i pesondro devono esser fatti in pezzi e su questi pezzi si deve pregare.

sufafia- II a 22. 41.

Il Bücheler, che pure nella versione delle Tab. Iguv. trascrive in latino *sufafia-* l'umbro **sufafia-**, nel commento non solo intravide il significato di questa parola, ma ne diede la versione, sicchè sarebbe il caso di rilevare appena il fatto, se dopo lui altri per pretese ragioni fonetiche non ci lasciasse nell'incertezza del tradurre la parola in questione.

Riferiremo per esteso le parole del Bücheler, il quale a pag. 132 di Umbrica scrive: " *sufafia* constat *sub* praepositione et eo nomine quod notionem serendi ac ligandi habuisse videtur. Plautus militis v. 1180 palliolum naucleri describit *conexum in umero laevo exfafillato bracchio* id est exserto, extra amictus vincula prolato. ita libri Plautini, ita Paulus Festi et Placidus, p. 40, 21 Deuerl. qui praeterea glossam hanc exhibet p. 41, 16 *exfabilla-*

vero exeruero, unde Luxorius AL. 19 p. 70, 3 R. lusit *fabulae quam mentor exfabillavit altiboans* id est quam primus in publicum protulit magnus poeta, correxi enim quae in codice leguntur et apud Riesium expertia sensus *exfafillare* illud quod more latino in *exfabillare* deinceps traductum est, ipsi Romani quid significaret coeperant oblivisci, itaque in Plauti versu *expapillato* substituebant vocem obscuram permutantes magis aperta, quamvis absurda haec esset atque etiam numeris contraria, sic enim hiatus carmini infertur alienus a pristina scriptura, si quidem cur produci negemus in *fafilla* ut in *fabella pupilla* primam nulla causa est. *sufafia* igitur e Plautino verbo efficimus dictas esse tamquam subligacula corporis: in visceribus Graeci praecordia appellarunt ὑπόζωμα, ut hominis cervicibus stellaque Orionis Latini iugulos iugula iugulas „.

Il raffronto del Bücheler tra umbro **sufafia** ed il lat. arcaico *exfafillare exfabillare* (= *exserere*), risalendo ad una radice protoitalica *faf-*, non può, secondo il v. Planta, condurci alla radice indoeur. *bhendh-* ' legare ' (alto ted. mod. *binden*, lat. *fend-* in *offendimentum*, ecc.) " perchè da una parte la parola umbra presenta *a* in luogo di *e* oppure *o*, da l'altra in latino *exfabillavero* presenta *b* anzichè il normale *nd* „, perciò egli propende a derivare italico *faf-* da indoeur. *dhabh-* ' adattare ', con cui è connesso got. *ga-daban ga-dōfs*, lit. *dabìnti*, ant. sl. *doba* ecc. Fick I[4] 462); ma egli non tenta di dare un significato alla parola umbra, che lascia introdotta nella versione, colla quale accompagna il testo (v. Planta, op. cit. 460 sg.).

Il Buck traduce **sufafia-** ' pars exserta ', sottolineandola come di dubbia interpretazione, e a pag. 210 si limita al raffronto con *ex-fafillato* Plautino e *effafillatum* ' exertum ' di Festo ed. Thewrewk, dichiarando prudentemente la sua versione solo come probabile. Però, ammesso che *faf-* significhi ' legare, adattare ' e corrisponda nel significato a *serere* ' intrecciare, legare ', non si può assolutamente ammettere che una parola risultante dalla composizione con *sub* possa indicare l'azione contraria a quella indicata dalla parola semplice, anzichè solo una delimitazione, una varia modalità, nel nostro caso, del significato di ' sero ', quale press'a poco intercede tra *sub-ligo* e *lego*, *sub-jungo* e *jungo*, *sub-necto* e *necto* ecc., per citare solo verbi affini nel significato a *sero*.

Non rimane dunque che da precisare il significato di **sufafia-**,

che equivale al latino *praecordia* e al gr. ὑπόζωμα (il vocabolo greco negli elementi costitutivi della parola si accosta meglio all'umbro, ὑπο = *su*[*b*], ζῶμα semasiologicamente risponde a **fafia-**) e da vedere se foneticamente l'umbro **faf-** può ricondursi alla rad. indoeur. *bhendh-*.

Non mi dilungherò a dimostrare con esempi, poichè è cosa nota, che l'indoeur. *bh* e *dh* è riflesso in umbro da *f*; quanto all'*a* (per *an*) di *faf* (per *fanf*), esso rappresenta *n̥*, cfr. osco *ancensto* 'non censa, incensa', umbro *asnata* 'non umecta, sicca', **aseçeta** 'non sectā, insectā', *anhostatu* 'non hastatos' dove *an-* rappresenta *n̥*, mentre in lat. *in* da *en-* sta per *n̥*; inoltre in osco abbiamo *tanginom* 'sententiam', che nella radice risponde a lat. *tongeo tongitiō*, e **anafriss** 'Imbribus?', ch'è stato connesso con lat. *imber* da **m̥bri-* (cfr. ant. ind. *abhrá-* 'nuvola', gr. ἀφρός) e che deriva da *m̥bhri-*, in umbro abbiamo **spanti-**, che nella radice risponde, secondo la mia interpretazione a gr. σπένδω σπονδή e a lat. *spondeo* e vale *oblatio*, secondo l'interpetrazione del Bücheler a lat. *sponda* e vale *latus*, e in osco e in umbro troviamo *anter* corrispondente a lat. *inter*. L'omissione di *n*, perchè debolmente pronunciato, è in umbro davanti a muta e a spirante frequentissima, cfr. umbro **ustetu** allato a **ustentu** 'ostendito', **iveka** allato a *iuenga* 'iuvencas', **kupifiatu kumpifiatu** e *combifiatu* 'nuntiato', **azeriatu** *aseriatu* imp. e **anzeriatu** *anseriato* 'observatum', *dirsas* e *dirsans* 'dent', **sis** e *sins* 'sint', **Saçe** e *Sansie* 'Sanci', **aferum** *afero* 'circumferre' allato a *anferener* 'circumferendi'.

Adunque *faf-* è, variato solo il grado apofonico, corrispondente a lat. *fend-* 'legare' di *offendimentum, offendix* e d'un vocabolo affine nel significato a *praecordia*, di *fendicae -ārum* 'budelli d'animali, trippe'.

Il latino *exfafillato effafillatum*, connesso certamente con umbro *faf-*, come dimostra l'ultimo *f* è evidentemente di origine dialettale e il *b* di *exfabillare* è dovuto a latinizzazione di un vocabolo importato dalla plebe italica confluente a Roma, così come il gr. ἐξαντλεῖν fu latinizzato, riducendo a *cl* il nesso *-tl-*, in *exanclare* (in Plauto leggiamo ancora *exantlare*), il gr. ἀμόργη in lat. *amurca* e con trasformazione fonetica maggiore il gr. βλήχων 'puleggio' in lat. *pulegium* e *pulējum* ecc., che anzi l'aborrimento di *f* interno nella parola si rileva in tutta la storia della latinità, tanto che da lat. *forfex* si dovette passare a **forbex*

per avere l'italiano *forbice* e da lat. *Confluentes* abbiamo il nome dell'odierna *Coblentz.*

Traduciamo quindi:

katles supa hahtu sufafiaf supaf hahtu
" catuli suppa capito, praecordia suppa capito „

e

struhçlas fiklas sufafias kumaltu
" struis, offae, praecordiorum (genitivi partitivi) commolito „.

puntes terkantur, III. 4-10.

Il Bücheler, Umbr. 152, crede che " sine dubio partes fratrum ita (cioè *puntes*) vocantur in quas de more collegium dividitur ubi sententia ferenda est aut facienda discessio, atque in versibus 9 et 10 *puntes* pro ipsis fratribus appellatae videntur „, e quanto all'etimologia inclina " ut a quinario numero *puntes* dictas credam tamquam πεντάδας „. E continua nel dire che " pontifices nomen inde traxisse quod pontem vel pontes facerent in aperto est, sed pons utrum latinus ille (ch'è maschile) an haec umbrica (ch'è femminile) intelligenda sit non liquet, neque umbrici vocabuli originatio eo arguitur esse falsa quod Latini *pontifices* non potuere provenire ex *quinque* „. Anche al v. Planta (op. cit. I. 342) la spiegazione più verisimile di **puntes puntis** sembra sia πεντάδες πεντάσι e crede questo vocabolo foggiato direttamente su **pompe* ' quinque ', giacchè con protoital. *-nkt-* in osco abbiamo **saahtúm** ' sanctum ', in umbro *sahata* ' sanctam ' da **sankt-* e in umbro *śihitu* ' cinctos ' da **kinkto-*, per cui dovremmo secondo le leggi fonetiche aspettarci da **ponkti-* o **penkti-* in umbro un **põhti-* o **pẽhti-*. Pure il Buck, op. cit. 92, traduce **puntes** con ' cinquine ' basandosi sulla stessa etimologia.

Molto opportunamente il Bücheler accosta l'umbro *ponti-* colla prima parte del vocabolo latino *ponti-fex*, vocabolo che i Romani derivarono da *pontem facere* (il qual ufficio nulla ci attesta sia mai stato di competenza dei pontefici) e che poi si spiegò da *pons* o nella sua più antica significazione di ' via ' (onde *ponti-fex* varrebbe ' facitor di vie ', cfr. Netušil, *Berl.*

Phil. Wochenschr. 1891, 1867 sg.) o nella significazione di 'ponte', detto però di sacrifici propiziatorî agli dei fluviali per il tragitto (cfr. Keller, *Volksetym.* 337), spiegazioni senza base di attestazioni e per le quali non si spiegherebbe come questi facitori di vie e sacerdoti tragittatori potessero assurgere a tanta dignità nella religione romana, senza notare che con questa etimologia verrebbe meno ogni connessione col vocabolo umbro, il quale, secondo ogni verisimiglianza, è identico colla prima parte di *ponti-fex*.

Il Walde nell'ottimo suo Lat. Etym. Wört., trattando dell'etimologia di *pontifex*, si richiama all'umbro *ponti-*, ch'egli traduce 'piatio, lustratio', " laonde *pontifex* è 'chi fa la lustratio'. Questo *ponti-* è evidentemente dello stesso tema del *quinquāre* 'lustrare' tramandato da Charisio ed insieme di origine osco-umbra, sì che con ciò i pontefici ci si rivelano come un elemento sabino dei collegi sacerdotali romani. Connessione col numero *quinque* (: *pompe*), che Stolz H. G. I 596 accetta per *quinquāre*, è foneticamente ammissibile, tuttavia del tutto incerta per il significato, giacchè non si può più provare una speciale importanza del numero cinque nel rituale ". Però la significazione 'piatio, lustratio' non è così evidente, come pare al Walde, il quale dalle parole della Tab. III. 4 sgg. **huntak vuke prumu pehatu inuk uhturu urtes puntes frater ustetuta**, che traduce " cisternam aedis primum piato. Tum auctorem ortis *pontibus fratres ostendunto ", trae l'evidenza che **urtes puntes** sia la concettuale ripetizione di **huntak pehatu**, mentre anzi la cosa significata da *ponti-* (tre volte ripetuta in poche linee) ha nel testo valore maggiore dell'atto di *piare cisternam aedis*, ch'è una minuscola cerimonia. Inoltre è detto, subito sotto, **uvem urtas puntes fratrum upetuta**, le quali parole non darebbero senso se fossero tradotte " ovem ortae lustrationes fratrum optanto ". Di più, che ci autorizza a credere di origine sabina l'istituzione del pontificato romano? basta l'unico argomento di una etimologia congetturale, che ci fa comodo?

Poichè umbro **puntes** e latino *ponti-* di *pontifex* pare siano la stessa parola, vediamo quale interpretazione paia corrispondere al senso voluto da **pontes** nelle Tab. Ig. e spiegare convenientemente il vocabolo *pontifex*.

Nelle Tabb. VI. a-VI b. 48 (= I. a-I. b. 9) vi sono per la

purificazione del sacro monte Fisio le prescrizioni di otto sacrifici consecutivi da fare in diverse località, il primo davanti la porta Trebulana, il secondo dietro, il terzo davanti la porta Tesenaca, il quarto dietro, il quinto davanti la porta Veia, il sesto dietro, il settimo al tempio (?) Iovio, l'ottavo al tempio (?) di Coredio, poi si deve fare la purificazione del monte e si conclude che se ha avuto luogo qualche omissione la cerimonia è irrita e bisogna ricominciare da capo tornando alla porta Trebulana. In VI. b. 48-VII. a. 54 (= I. b. 10-45) sonvi le prescrizioni per la lustratio del popolo, e il flamine dopo aver preso gli auspici con due assistenti procede colle vittime per la via augurale fino al suburbio Acedonio, poi si proclama l'espulsione degli stranieri, e gli Iguvini sono ordinati in squadre, quindi il flamine e gli assistenti vanno in processione attorno ad essi tre volte colle vittime e il fuoco. Al termine di ogni giro si fa una preghiera invocante mali sugli stranieri e benedizioni sugli Iguvini. Quindi ha luogo un sacrificio a Fontuli, poi un altro a Rubinia, quindi un altro sulla Via Sacra. Poscia si dà l'*erus* (secondo noi " il resto dei sacrifici „ da distribuire ai rappresentanti delle gentes Iguvine) nel luogo dove furono sacrificati i cinghiali, poi a Rubinia, poi sulla Via Sacra. In seguito tornano a Rubinia e pregano sulle focacce spezzate, dopo di che tornano nella Via Sacra a fare lo stesso, poi si prega Torra Iovia colle stesse parole usate al termine di ogni giro e segue il sacrificio delle giovenche (Buck, op. cit. 302-308).

Come si vede, queste solennità hanno il carattere di vere processioni con sacrifici e preghiere, quali erano le greche θεωρίαι e πομπαί, e dovevano chiamarsi con vocabolo italico *ponti-* (umbro **puntes** nom. pl., latino *ponti-*, vocabolo conservato solo in *ponti-fex*).

Il protoital. *ponti-* ' processione ' si connette con gr. πέμπω πομπή πέμψις, di cui finora non s'era potuto trovare riflesso sicuro in altre lingue indoeuropee, ed evidentemente risale a *pomp-ti-*, che presenta la vocale radicale in grado apofonico forte (quale troviamo p. e. in *mons montis* da *mon-ti-* da rad. *men-* ' elevarsi ', in *fons fontis* da rad. *dhen* 'fluire, scorrere', cfr. Walde, op. cit. alla voce *mons* e *fons*) e il di cui *p* interconsonantico s'è dileguato come in *lanterna* da gr. λαμπτήρ rifatto su *lucerna* e in *tentāre* da e accanto a *temptāre* (cfr. Sommer, *Lat. Laut-*

und Formenl. 266 sg.). Il vocabolo poi si conservò in umbro, ma nel latino eziandio per differenziarsi dall'omeotropo *pons* 'ponte', ch'è di diversa etimologia, fu sostituito dal greco *pompa* affine anche nel suono (i Romani certamente non pensavano all'affinità etimologica), rimanendo solo in *pontifex*, il cui valore originario era di 'ordinatore delle solenni processioni', le quali erano le manifestazioni maggiori del culto. Difatti anche nell'età imperiale nelle processioni primo veniva il *Pontifex Maximus* e gli otto *Pontifices Maiores*, secondi i *Pontifices Minores* coi tre *Flamines Maiores* e i dodici *Minores*, terzo il *Rex sacrificulus* colla *Regina*, e poi gli *Augures*, i *Sacerdotes Sibyllini*, i VII *viri Epulones*, le *Vestales* colla *Vestalis Maxima* e così di seguito.

Tornando alle Tab. Ig., prima di dare tradotto il luogo in questione dobbiamo dire poche parole riguardo a **terkantur**, che il Bücheler, il quale traduce 'suffragentur', è incerto se deve connettere con gr. δέρκομαι o con lat. *testāri*, ch'egli deriva da **terk-stāri* come *postulo* da **pors-sco posco*. Però, dice il v. Planta, op. cit. I. 397, l'osco **tristraamentud** 'testamento' rende difficile la connessione di **terkantur** con *testis* e *testari*. Anche il Buck, op. cit. 348, ammette come solo possibile la connessione con δέρκομαι e traduce 'suffragentur'.

Secondo noi e in conformità colla interpetrazione nostra di **puntes**, il vocabolo **terkantur** si deve tradurre 'dedicentur, si inaugurino', riflettendo esso un protoumbro *de-d(i)c-antur* congiuntivo coniugato sul paradigma della terza coniugazione per analogia del semplice *dic-ere*, da cui deriva. Difatti il **t** iniziale di **terkantur** rappresenta *d*, giacchè il paleoumbro, com'è noto, segna con **t** sì la sorda dentale che la sonora dentale muta, la vocale breve di *-dĭc-* è normalmente sincopata in umbro, e l'**r** sta per **ř** (cui nell'umbro si riduce *d* originariamente intervocalico) come vediamo in **mersuva** 'iusta, solita' da **medes-u̯o-* accanto a **meřs** 'ius, mos' da **medos* e così in **tertu** accanto a **teřtu** 'dato', in **armamu** accanto a *arsmahamo* 'ordinamini', in *tribrisine* 'ternione' accanto a **tribřiçu** 'ternio' ecc.

Veniamo ora al testo. Esso dice:

inuk uhturu urtes puntis frater ustentuta puře fratru mersus fust kumnakle inuk uhtur vapeře kumnakle sistu sakre uvem uhtur teitu puntes terkantur inumek sakre uvem urtas puntes fratrum upetuta.

che traduciamo:

" tum auctorem, ortis pompis, fratres ostendunto, quomodo fratrum ex moribus erit in conventu. Tum auctor in sella in conventu considito. Hostiam, ovem auctor dicito, pompae dedicentur. Tunc hostiam, ovem ortae pompae fratrum obeunto (= sibi paranto) „. dove vediamo che **puntes fratrum** vale 'i fratelli in processione', giacchè i fratres Atiedii dovevano recarsi a scegliere le vittime sul posto d'origine, com'è detto in Tab. V a 7-10, che abbiamo illustrato in Umbrica p. 8 sg.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

Torino - VINCENZO BONA, Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 24 Maggio 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Direttore della Classe, Salvadori, Spezia, Segre, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera, Grassi, Somigliana, Fusari e Camerano Segretario.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica l'invito pervenuto all'Accademia dal Comitato esecutivo per le onoranze che si tributeranno alla memoria del generale Giovanni Cavalli, nella ricorrenza del centenario della sua nascita, di assistere alla funzione commemorativa che avrà luogo il 30 maggio corrente nella R. Accademia militare. A tale funzione egli rappresenterà l'Accademia e mette a disposizione dei Soci i biglietti d'invito.

Il Segretario presenta alla Classe il manoscritto del signor F. Tavani intitolato: *Intorno all'esistenza di un limite superiore di una serie a termini positivi e decrescenti* $\sum^{\infty} \frac{1}{1 a_n k+1}$ sul quale l'A. chiede il giudizio dell'Accademia. Il Presidente delega i Soci Peano e Morera ad esaminare detto lavoro.

Vengono presentati per l'inserzione negli *Atti* i lavori seguenti:

1° Prof. Bertini e F. Severi, *Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale*, dal Socio Segre;

2° Ing. Giulio SACCO, *Aberrazioni e riflessioni nocive prodotte dai filtri di luce negli apparecchi fotografici*, Nota 2ª: *Corso d'un filtro diedro costituito da un solo mezzo*, dal Socio JADANZA;

3° Ing. E. GATTI, *Segmenti corrispondenti ad imagini reali in alcuni sistemi diottrici centrati*, dal Socio JADANZA;

4° Dr. G. PICCININI, *Su alcune ortoamino- ed ortoossi-chetoidropiridine*, Nota 1ª, dal Socio GUARESCHI;

5° Dr. Luigi COGNETTI DE MARTIIS, *Lombrichi di Costa Rica e del Venezuela*, dal Socio CAMERANO.

Il Socio FUSARI, a nome anche del Socio CAMERANO, legge la relazione intorno alla memoria del Dott. Angelo Cesare BRUNI, intitolata: *Intorno ai derivati scheletrici estracranici del secondo arco branchiale nell'uomo*. La relazione favorevole è approvata all'unanimità e la Classe con votazione segreta approva la stampa del lavoro del Dott. BRUNI nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio NACCARI, a nome anche del Socio JADANZA, legge la relazione sulla memoria del prof. G. B. RIZZO, intitolata: *Nuovo contributo allo studio della propagazione dei movimenti sismici*. La relazione favorevole è approvata all'unanimità e la Classe con votazione segreta approva la stampa del lavoro del Prof. RIZZO nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio FOÀ presenta per l'inserzione nei volumi delle *Memorie* il suo lavoro, intitolato: *Sulle alterazioni del fegato di origine splenica e sulle alterazioni della milza di origine epatica*. La Classe con votazione segreta approva l'inserzione del lavoro del Socio FOÀ nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio JADANZA presenta per la stampa nelle *Memorie* il lavoro del Dr. AIMONETTI, intitolato: *Determinazione astronomica della latitudine della specola geodetica della R. Università di Torino*.

Il Presidente delega i Soci JADANZA e NACCARI ad esaminare il lavoro del Dr. AIMONETTI.

LETTURE

Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale.

Estratti di lettere dei Prof.i E. BERTINI ed F. SEVERI.

I.

(Lettera del Prof. E. Bertini al Prof. F. Severi).

Come Ella sa, Castelnuovo (*) chiama ipersuperficie *aggiunta* ad una curva irriducibile qualunque C di uno spazio S_r una ipersuperficie che in ogni punto s^uplo^ di C si comporti come il cono che proietta da un S_{r-3} generico una curva aggiunta alla proiezione piana di C: precisamente che per ogni ramo uscente da ciascun punto s^uplo^ di C sia obbligata ad avere col ramo tanti punti comuni quanti ne ha la curva aggiunta per essere tale col ramo corrispondente della curva piana proiezione; e Castelnuovo dimostra il teorema che le ipersuperficie aggiunte di ordine abbastanza elevato segnano sopra C (prescindendo dai punti che dipendono dall' aggiunzione) una serie completa non speciale.

Applichisi questo teorema nel caso che C sia completa intersezione di $r-1$ ipersuperficie di S_r: $f_1 = 0, f_2 = 0, ..., f_{r-1} = 0$ e sieno Φ_l ipersuperficie aggiunte che segnano sopra C una serie completa. È facile allora vedere che le Φ_{l-1} aggiunte, se esistono, segnano pure sopra C una serie completa. Invero sia G il gruppo di punti in cui un iperpiano generico $x_0 = 0$ sega C e sia Φ_l una ipersuperficie aggiunta a C e passante per G (certo esistente se esistono le Φ_{l-1} aggiunte). Questa Φ_l passa per tutti i punti semplici comuni alle $f_1 = 0, f_2 = 0, ..., f_{r-1} = 0, x_0 = 0$ e però è rappresentabile nella forma (**)

$$(1) \qquad \Phi_l \equiv A_1 f_1 + A_2 f_2 + \dots + A_{r-1} f_{r-1} + \Phi_{l-1} x_0,$$

(*) Nella Nota: *Sui multipli di una serie lineare...*, " Rend. del Circolo matem. di Palermo ", VII, 1893.

(**) Sua Nota: *Rappresentazione di una forma qualunque...*, " Rend. dei Lincei ", vol. XI, serie 5a, 1902, n. 6.

nella quale Φ_{l-1} non può essere identicamente nulla, perchè Φ_l non passa per C (mentre possono essere nulle tutte le A, cioè quando le Φ_l per G si spezzino necessariamente in x_0 e nelle Φ_{l-1}). La precedente identità mostra che Φ_{l-1} è pure superficie aggiunta e segna su C la stessa serie che vi segna Φ_l, escluso il gruppo G, serie completa perchè residua di questo gruppo rispetto ad una serie ammessa completa.

Potendosi in egual modo passare dalle Φ_{l-1} aggiunte alle Φ_{l-2} aggiunte e così via, si conclude che *sopra una curva completa intersezione di $r-1$ ipersuperficie, irriducibile e del resto qualunque, le ipersuperficie aggiunte di qualsiasi medesimo ordine segnano una serie completa (astraendo dai punti che caratterizzano l'aggiunzione)*, il che, per quanto so (*), era stato osservato soltanto nel caso che la curva fosse priva di punti multipli.

Ne discende immediatamente il Restsatz nel caso considerato. Si può anche notare che il teorema del n. 2 della Sua Nota " Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve... „ (**), è un caso particolare del teorema precedente.

Se una curva C irriducibile e del resto qualunque non è completa intersezione di $r-1$ ipersuperficie, si può certo far passare per essa $r-1$ ipersuperficie così che la residua intersezione C' sia priva di parti multiple. Basta osservare infatti che, presa una prima ipersuperficie passante per C, si possono considerare ipersuperficie pure passanti per C dello stesso ordine (ad es. dell'ordine di C, onde fra esse sono i coni che la proiettano dagli S_{r-3} di S_r) che segnino su quella prima ipersuperficie una serie lineare di cui un elemento generico non abbia (escluso C, se $r=3$) parti fisse e quindi nemmeno, per un teorema notissimo (***), parti multiple. Presa per seconda ipersuperficie una generica di queste, si potrà analogamente considerarne una terza che abbia comune colla intersezione della

(*) Sua Nota: *Su alcune questioni di postulazione*, " Rend. del Circolo matem. di Palermo „, XVII, 1903, § 2.

(**) " Rend. dei Lincei „, vol. XII, serie 5ª, 1903.

(***) Cfr., ad es., il n. 18 del cap. 10° del mio libro: *Introduzione alla Geometria projettiva degli iperspazii*. Pisa, Spoerri, 1907.

prima e della seconda (escluso C, se $r=4$) una varietà senza parti multiple e così di seguito.

Si può porre la questione: Le ipersuperficie dello stesso ordine abbastanza alto passanti per C' e aggiunte a C (nel senso già dichiarato) segnano sopra C una serie completa? Se la risposta fosse affermativa (il che non mi è riuscito di vedere), con una considerazione analoga a quella fatta dianzi, fondata sull'identità (1), si estenderebbe la proprietà a ipersuperficie di ordine qualunque passanti per C' ed aggiunte a C e si avrebbe il Restsatz in ogni caso.

È noto che la risposta è affermativa facendo le ipotesi particolari che C' sia pure irriducibile e che tanto C quanto C' sieno prive di punti multipli. In questo caso la dimostrazione si può fare nel modo seguente forse più semplice di quello noto (*).

Supposto l opportunamente grande (quanto occorra per le considerazioni seguenti) la serie segnata sopra C dalle ipersuperficie Φ_l di ordine l passanti per C' e non per C è una serie non speciale, cioè una serie $g_{lm-\delta}^{lm-\delta-p-\gamma_l}$, se si escludono i δ punti comuni a C, C' e se si indica con γ_l la deficienza della serie stessa. Per dimostrare appunto che $\gamma_l=0$, si noti che la dimensione delle Φ_l passanti per $C+C'$ è

$$(2)\qquad \binom{l+r}{r}-1-(m+m')l+\frac{1}{2}(m+m')(\Sigma n_i-r-1)$$

(§ 1, n. 3 della Sua Nota ora citata): cosicchè, indicando con ρ_l la dimensione del sistema delle Φ_l passanti per C' soltanto, si ha

$$lm-\delta-p-\gamma_l=\rho_l-\binom{l+r}{r}+1+(m+m')l-$$

$$-\frac{1}{2}(m+m')(\Sigma n_i-r-1)-1\,,$$

(*) Cfr. il § 2 già citato della Sua Nota dei " Rend. di Palermo ", 1903. Adotto nella dimostrazione le indicazioni di questa Nota: cioè sono m, m' gli ordini, p, p' i generi delle C, C' e sono $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$ gli ordini delle $r-1$ ipersuperficie passanti per $C+C'$: onde $m+m'=n_1 n_2 \ldots n_{r-1}$.

ossia

$$(3) \qquad \rho_l = \binom{l+r}{r} - lm' - \delta - p - \gamma_l + \frac{1}{2}(m+m')(\Sigma n_i - r - 1).$$

La dimensione ρ_l si può calcolare anche in quest'altro modo. Le Φ_l passanti per i δ punti comuni (sempre per l abbastanza alto) formano un sistema di dimensione

$$(4) \qquad \binom{l+r}{r} - 1 - \delta$$

e segnano sopra C', prescindendo dai detti δ punti, una serie completa non speciale (perchè tale è, per il teorema di Castelnuovo ricordato in principio, la serie segnata su C' da tutte le Φ_l), cioè una serie $g_{lm'}^{lm'-\delta-p'}$. Segue che la dimensione delle Φ_l passanti per C' è anche

$$(5) \qquad \rho_l = \binom{l+r}{r} - 2 - lm' + p'.$$

Eguagliando i due valori trovati di ρ_l si ha

$$\frac{1}{2}(m+m')(\Sigma n_i - r - 1) = p + p' + \gamma_l + \delta - 2$$

la quale, confrontata colla somma delle due relazioni

$$2p - 2 + \delta = m(\Sigma n_i - r - 1), \quad 2p' - 2 + \delta = m'(\Sigma n_i - r - 1)$$

(§ 1, n. 3, b), l. c.), mostra essere $\gamma_l = 0$: onde è completa la serie segnata su C dalle Φ_l passanti per C' quando l è opportunamente grande (*). Ed ora si dimostra il teorema per le Φ_{l-1},

(*) Scambiando C con C' invece della (5) si ha

$$(6) \qquad \binom{l+r}{r} - 2 - lm + p$$

come dimensione delle Φ_l passanti per C. Le dimensioni (2), (3), (4), (6) sono manifestamente stabilite senza presupporre la irriducibilità di C' ed inoltre sono (3), (6) rispettivamente le dimensioni dei sistemi di Φ_l passanti per C', C e (2) è la dimensione del loro sistema d'intersezione. Dall'osservare che la

passanti per C' e non per C, se esistono, proprio colla considerazione fatta nel caso che C sia completa intersezione. Cioè, detto G il gruppo di punti in cui un iperpiano generico $x_0 = 0$ sega $C + C'$ e Φ_l una ipersuperficie passante per C' e per G, si potrà scrivere la (1): donde ecc.

Terminerò coll'osservare che la dimostrazione da Lei data del teorema del n. 2 della Sua Nota " Sulla deficienza della serie caratteristica... ", il quale si ottiene qui semplicemente, come già dissi, mediante la (1), conduce con lieve modificazione alla seguente notevole proposizione: — *Se sopra una curva* C *irriducibile qualunque un sistema lineare di ipersuperficie d'ordine* l, Φ_l, *completo rispetto ad un gruppo base, segna una serie completa, condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema lineare di ipersuperficie d'ordine* $l-1$, Φ_{l-1}, *completo rispetto allo stesso gruppo base, segni pure su* C *una serie completa, è che le* Φ_l *del sistema completo passanti per* C *e quelle passanti per il gruppo* G *di punti determinato su* C *da un iperpiano generico* α *seghino questo iperpiano nel medesimo sistema lineare.* — Basta sostituire, nella sua dimostrazione, C a D, n (ordine di C) a kn, $\binom{r-1+l}{r-1}$ ad $\binom{l+2}{2}$, e notare che le Φ_l del sistema completo contenenti C segano su α un sistema di dimensione

$$\binom{r-1+l}{r-1} - 1 - n + \zeta_l - \delta_l$$

indicando con δ_l la deficienza di questo sistema. Allora come condizione necessaria e sufficiente perchè la serie segnata su C dalle Φ_{l-1} sia completa si trova (invece dalla Sua $\theta_l + \zeta_l = z_l$)

$$\theta_l + \zeta_l = z_l + \delta_l :$$

ma questa, per l'ultima parte del Suo ragionamento, è appunto

somma delle (3), (6) è eguale a quelle delle (2), (4) allora e allora soltanto che sia $\gamma_l = 0$ si ha che (sempre per l sufficientemente alto), se $\gamma_l = 0$, il sistema delle Φ_l passanti per i δ punti comuni, cioè di dimensione (4), è il sistema congiungente dei due sistemi (3), (6) e viceversa (senza imporre la irriducibilità di C').

condizione necessaria e sufficiente perchè coincidano i due sistemi lineari segnati su α dalle Φ_l per C e dalle Φ_l per G.

La condizione è certo soddisfatta se le Φ_l per C segnano su α un sistema completo, chè allora quello segnato dalle Φ_l per G, dovendo manifestamente comprenderlo, coincide con esso.

Pisa, 10 maggio 1908.

II.

(Lettera del Prof. F. Severi al Prof. E. Bertini).

1. — A complemento di quanto Ella espone nella Sua lettera, osserverò che si può rispondere affermativamente alla questione da Lei posta, di sapere cioè se le ipersuperficie d'ordine abbastanza alto aggiunte — nel senso di Castelnuovo — ad una curva C di S_r, e passanti per la curva C' ulteriormente comune ad $r-1$ ipersuperficie condotte genericamente per C, seghino sulla C medesima una serie lineare completa (fuori delle intersezioni fisse).

A tal uopo dimostrerò questa proposizione più generale:

Se le ipersuperficie d'ordine assai alto passanti per un dato gruppo base A *— che può esser formato da punti, curve, superficie,... con assegnati comportamenti lungo ciascuna di esse — segnano sopra* C, *fuori delle eventuali intersezioni fisse, una serie lineare completa, lo stesso accade per le ipersuperficie d'ordine assai elevato che passano pel gruppo base* A + B, *ove* B *è un altro gruppo base arbitrario* (*).

Alla dimostrazione di tale proprietà si adatta benissimo il ragionamento che ho altrove esposto per le curve gobbe (**).

Giova per brevità e chiarezza, d'introdurre in questo caso generale, il *concetto di molteplicità d'intersezione, in un punto comune ad una curva* C *e ad un gruppo base.* S'intenderà con ciò

(*) I due gruppi base A, B potranno ben presentare delle condizioni comuni: è appena necessario avvertire che le ipersuperficie per $A+B$ dovranno soddisfare *doppiamente* ad esse: una volta in quanto passano per A e un'altra volta in quanto passano per B.

(**) *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve...*, " Atti della R. Acc. di Torino ", t. 40, 1905, n. 3.

il numero i delle intersezioni che quel punto assorbe nel numero complessivo delle intersezioni di C con un'ipersuperficie d'ordine l assai alto, passante pel gruppo base. La definizione è legittimata da ciò che il numero i non potendo che decrescere col crescere di l, per l assai elevato deve restare costante.

Ciò premesso, s'immagini condotta genericamente pel gruppo base B un'ipersuperficie d'ordine elevato q, Φ_q, che non contenga C. Delle intersezioni di Φ_q con C, alcune — cioè quelle che eventualmente cadano in punti di B — resterebbero fisse al variare di Φ_q, mentre le altre, costituenti un gruppo che indicherò con M, varierebbero. La genericità di Φ_q consente pertanto di affermare che il gruppo M è costituito da un certo numero ϵ_q di punti distinti (semplici) della curva C.

Quanto ai punti fissi, in ciascuno di essi la Φ_q avrà con C moltiplicità d'intersezione eguale a quella che ivi ha con C il gruppo base B.

Per ipotesi le ipersuperficie Ψ_l d'ordine l assai alto ($> t$), passanti pel gruppo base A, segnano sulla C una serie lineare *completa* g, fuori dei punti fissi, ciascuno dei quali deve contarsi tante volte quant'è ivi la molteplicità d'intersezione di C col gruppo A. La stessa serie g può anche staccarsi su C, fuori dei punti fissi, dalle ipersuperficie d'ordine $l+q$ pel gruppo base $A+B+M$. I punti fissi, oltre che in M, cadono in quei punti di A e di B che restano fissi al variare rispettivamente di Φ_q e di Ψ_l: anzi ciascuno di tali punti dovrà contarsi tante volte quant'è in esso la molteplicità d'intersezione di C col gruppo base $A+B$ (somma delle molteplicità relative ad A, B). Tutto ciò segue dall'osservare che tra le ipersuperficie d'ordine $l+q$ pel gruppo base $A+B+M$, ve ne sono di quelle spezzate nella Φ_q ed in una Ψ_l.

Elevando, se occorre, il valore del limite t, si può ottenere che gli ϵ_q punti del gruppo M impongano condizioni indipendenti alle ipersuperficie d'ordine $l+q$ che già passano pel gruppo base $A+B$; sicchè la serie staccata su C, fuori dei punti fissi, da queste ultime ipersuperficie risulterà *completa*, c. d. d.

2. Si applichi questa proposizione al caso in cui il gruppo A è definito dalla condizione di aggiunzione nei punti multipli di C e il gruppo B dal passaggio per la curva C', e si scenda poi

dall'ordine $h = t + q$ all'ordine $h - 1$ o colla considerazione da Lei esposta quando C' manca o estendendo il ragionamento con cui si chiude il n° 3 della mia Nota citata.

Si perviene allora alla conclusione che *se si definiscono come aggiunte ad una curva* C *di* S_r, le ipersuperficie che passano per C' e soddisfano alla condizione di aggiunzione nei punti multipli di C, *le aggiunte di un ordine dato* arbitrario *staccano su* C, *fuori dei punti fissi, una serie lineare completa.*

3. Il risultato si può estendere alla superficie e poi per induzione, senza difficoltà di concetto, alle varietà superiori. Mi limito ad esporre rapidamente la cosa per le superficie.

Sia F una superficie algebrica di S_r, dotata di singolarità qualunque, e definiamo dapprima come " ipersuperficie subaggiunte „ ad F quelle che segnano sopra un S_{r-1} generico, ipersuperficie aggiunte — nel senso di Castelnuovo — alla curva sezione, e che passano inoltre con molteplicità $s - 1$ per ogni punto s^{plo} isolato *improprio* di F (punto non abbassante il genere di una sezione curvilinea generica per esso) (*). Complessivamente, poichè anche il punto variabile sopra una linea multipla è un punto multiplo improprio, le condizioni precedenti si potranno citare come " condizioni di aggiunzione rispetto a tutti i punti multipli impropri di F „.

Evidentemente i coni che proiettano da un S_{r-4} le superficie subaggiunte alla proiezione di F da quello S_{r-4} sopra un S_3, sono ipersuperficie subaggiunte.

Fissato un S_{r-4} generico, Ω, s'indichi con Γ la curva luogo dei punti d'appoggio delle corde di F incontranti Ω. Al variare di Ω, la Γ descrive un sistema *razionale*, il quale è contenuto totalmente in un sistema *lineare*. Le ipotesi che questo sistema abbia una curva fissa o sia composto colle curve di un fascio si escludono facilmente e si conclude pertanto che la Γ è irreducibile. Si noti ch'essa avrà un punto s^{plo} in ogni punto s^{plo} improprio isolato di F e tre punti doppi nei punti d'appoggio dei piani trisecanti di F incontranti Ω secondo una retta. Indicheremo con G il gruppo di tali punti doppi.

(*) Le " aggiunte „ si otterrebbero imponendo alle subaggiunte un punto base $(s - 2)^{plo}$ per ogni punto s^{plo} *proprio*.

Il sistema lineare di tutte le subaggiunte d'un ordine l arbitrario, che passano per Γ, contiene i coni subaggiunti d'ordine l col vertice in Ω, e quindi segna su F un sistema lineare completo (sempre fuori delle linee fisse).

Ora, per la proposizione del n° 1, le subaggiunte soddisfacenti inoltre alle condizioni di aggiunzione rispetto a Γ, quando l sia grande, segnano su tale curva una serie completa. Da ciò segue che è completo il sistema $|C|$ staccato su F dalle subaggiunte d'ordine assai alto, che passano nel modo debito pei punti multipli di Γ.

Infatti il sistema completo $|D|$, che contiene totalmente $|C|$, segna su Γ la stessa serie (completa) che vi segna $|C|$, e il residuo di Γ rispetto a $|D|$ coincide necessariamente col residuo di Γ rispetto a $|C|$, perchè quest' ultimo è completo. Onde $|D|$ e $|C|$ hanno la stessa dimensione, cioè $|C|$ è completo.

Elevando l, si può esigere che i punti di G presentino condizioni indipendenti alle subaggiunte d'ordine l. Allora per una cagione analoga a quella ora addotta per provare la completezza di $|C|$, risulta completo il sistema staccato su F, fuori delle linee fisse, dalle subaggiunte d'ordine l.

Ciò premesso, si ragioni come ai n[i] 1, 2 riferendosi ad una superficie anzichè ad una curva. Si concluderà che *le ipersuperficie d'un ordine dato* arbitrario *subaggiunte alla superficie* F, *segano ivi, fuori delle linee fisse, un sistema lineare completo.* Per " subaggiunte " si debbono qui intendere le ipersuperficie che soddisfano non solo alla condizione di aggiunzione rispetto a tutti i punti multipli impropri di F, ma anche alla condizione di passare per una superficie F' ulteriore intersezione di $r-2$ ipersuperficie condotte genericamente per F.

Padova, 12 maggio 1908.

Aberrazioni e riflessioni nocive prodotte dai filtri di luce negli apparecchi fotografici.

Caso d'un filtro diedro costituito da un solo mezzo.

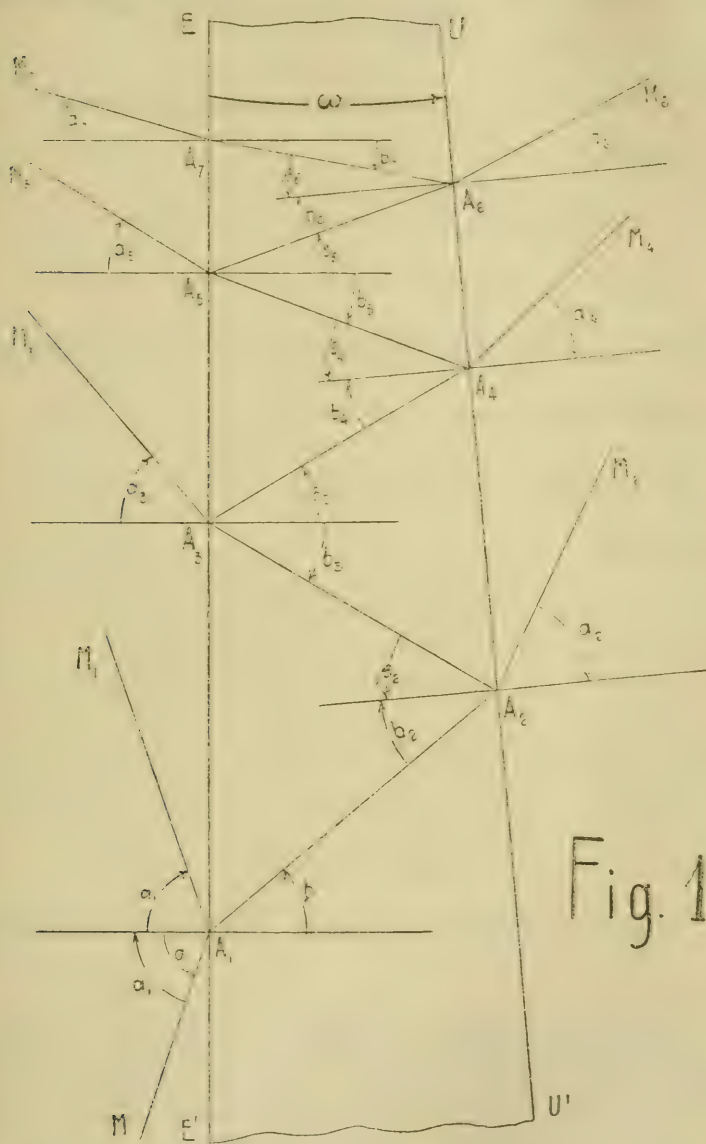
Nota 2ª dell'Ing. GIULIO SACCO.

In una nota recentemente pubblicata esaminammo la distorsione e la luce parassita originate da un filtro di luce fotografico costituito da un numero indeterminato di mezzi isotropi a superficie dividenti piane e rigorosamente parallele, e vedemmo che le dette perturbazioni sono intimamente connesse colla posizione del filtro. Ci pare utile esaminare ora quali perturbazioni produca un filtro costituito da un solo mezzo (di regola il vetro) il quale manchi alla condizione del parallelismo perfetto delle facce.

La fig. 1 rappresenti con $EE'UU'$ la sezione, fatta normalmente allo spigolo supposto in alto, d'un filtro di vetro isotropo le cui facce siano piane, ma formino fra loro un angolo $\omega < 0,01$, angolo che supponiamo misurato andando dalla faccia d'entrata EE' alla faccia d'uscita UU' attraverso alla materia del filtro.

Un raggio MA_1 che colpisca la faccia EE' in un punto A_1 coll'angolo d'incidenza a dà luogo ad un raggio A_1M_1 riflesso secondo un angolo $a_1 = -a$ e ad un raggio rifratto secondo un angolo b, raggio che farà incidenza sulla UU' in A_2 secondo un angolo b_2. Da A_2 partirà un raggio A_2A_3 per riflessione secondo l'angolo $\beta_2 = -b_2$, raggio che farà incidenza sulla EE' in A_3 secondo un angolo b_3; da A_2 emerge inoltre un raggio A_2M_2 secondo un angolo a_2, ecc., ecc. Si ha così una spezzata

$A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots$ che in ciascun vertice ha un raggio incidente, uno riflesso e uno rifratto.

Fig. 1

Se stabiliamo positivi gli angoli misurati in senso contrario a quello delle lancette d'orologio, e conveniamo che gli angoli

con vertice sulla EE' siano misurati andando dalla normale ad EE' verso il raggio di luce e gli angoli con vertice sulla UU' siano misurati andando dal raggio di luce verso la normale alla UU', avremo le seguenti relazioni:

$$b + b_2 = \omega; \quad \beta_2 + b_3 = \omega; \quad \beta_3 + b_4 = \omega; \text{ ecc.}$$

Cioè:

$$b + b_2 = \omega; \quad - b_2 + b_3 = \omega; \quad - b_3 + b_4 = \omega; \text{ ecc.}$$

Onde:

$$b_2 = \omega - b; \quad b_3 = 2\omega - b; \quad b_4 = 3\omega - b; \ \dots \ b_{k+1} = k\omega - b.$$

Si ha d'altra parte:

$$\sin a = n \sin b \quad \sin a_2 = n \sin b_2 \quad \dots \quad \sin a_{k+1} = n \sin b_{k+1}.$$

Quindi:

$$\sin a_{k+1} = \sin k\omega \sqrt{n^2 - \sin^2 a} - \cos k\omega \sin a. \tag{1}$$

Ponendo $-a_1$ in luogo di a [1], la (1) diventa:

$$\sin a_{k+1} = \sin k\omega \sqrt{n^2 - \sin^2 a_1} + \cos k\omega \sin a_1. \tag{1'}$$

E sarà:

$$\sin a_{k+1} - \sin a_{h+1} = \tag{2}$$

$$= (\sin k\omega - \sin h\omega) \sqrt{n^2 - \sin^2 a_1} + (\cos k\omega - \cos h\omega) \sin a_1.$$

---

[1] D'ora in poi, invece di a, consideriamo a_1, per ottener formole in cui tutti i simboli angolari abbiano un indice. La (2) assumerà così un carattere d'applicabilità generalissimo, e ne potremo dedurre tutte le relazioni che seguono per indici h e k variabili fra zero e un numero intero arbitrario (purchè non troppo grande). Il significato di a_1 sarà doppio, cioè a_1 potrà, secondo i casi, indicare l'*angolo d'incidenza misurato andando dal raggio* MA_1 *verso la normale*, oppure l'*angolo di riflessione misurato andando dalla normale verso il raggio riflesso* A_1M_1.

Le differenze fra seni e fra angoli che ci interessano sono:

$\sin a_2 - \sin a_1$ e $a_2 - a_1$, differenze che debbono esser determinate con grande esattezza,

$\sin a_4 - \sin a_2$, $a_4 - a_2$, $\sin a_3 - \sin a_1$ e $a_3 - a_1$, per cui basta un'esattezza molto minore,

$\sin a_5 - \sin a_1$, $a_5 - a_1$, $\sin a_7 - \sin a_1$, $a_7 - a_1$, per cui basta un'approssimazione grossolana, e che si considerano solo per casi in cui sia $\omega \leqq 0{,}001$.

Ciò posto, la (2) può assumer la forma:

$$(2') \qquad \sin a_{k+1} - \sin a_{h+1} = (k-h)\omega\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1} - 0.5(k^2 - h^2)\omega^2 \sin a_1 .$$

Limitandoci ancora a casi in cui sia $a_1 \leqq 55°$ la (2') si riduce, con errore minimo, a:

$$(2'') \qquad \sin a_{k+1} - \sin a_{h+1} = (k-h)\omega\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1} \quad (^1).$$

Noi ne vogliamo dedurre l'espressione di $a_{k+1} - a_{h+1}$. Ora, per note relazioni trigonometriche, si ha:

$$(3) \qquad 2\sin\frac{1}{2}(a_{k+1} - a_{h+1}) = \frac{\sin a_{k+1} - \sin a_{h+1}}{\cos\frac{1}{2}(a_{k+1} + a_{h+1})} =$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}(a_{k+1} - a_{h+1})\frac{\sin a_{k+1} - \sin a_{h+1}}{\cos a_{k+1} + \cos a_{h+1}} .$$

---

[1] L'errore relativo che ne risulta è:

$$\epsilon = 0.5(k+h)\omega\frac{\sin a_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}$$

e l'errore assoluto nel calcolo delle differenze fra angoli sarà:

$$e'' = 0.5(k^2 - h^2)\omega^2 \operatorname{tg} a_1 \times R''$$

dove R'' è il valore del raggio in secondi.

Ad es., per la differenza $a_2 - a_1$, che è quella che ci interessa calcolar col massimo rigore, per $\omega = 0.006$, massimo valore che constatammo nei filtri, e per $a_1 = 35°$, limite massimo pratico del mezzo campo d'una veduta senza distorsione e con definizione omogenea, troveremmo:

$$\epsilon = \frac{1.2}{1000} \qquad e'' = 3'' \text{ circa}$$

errori assolutamente trascurabili. Anche per $\omega = 0.01$ e $a_1 = 55°$ gli errori si conservano piccolissimi.

Ora $a_{k+1} - a_{h+1}$ è piccolo; quindi la (3) si riduce a:

$$(4) \qquad a_{k+1} - a_{h+1} = 2 \cdot \frac{\sin a_{k+1} - \sin a_{h+1}}{\sqrt{1 - \sin^2 a_{k+1}} + \sqrt{1 - \sin^2 a_{h+1}}}.$$

Il numeratore della (4) si ha dalla (2''). Riguardo al denominatore, osserviamo che si può scrivere la (1') come segue, trascurando le potenze di ω superiori alla prima:

$$\sin a_{k+1} = \sin a_1 + k\omega \sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}.$$

Quindi la (4) diventa:

$$(4') \quad a_{k+1} - a_{h+1} = \frac{2(k-h)\,\omega \sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}{\sqrt{1-(\sin a_1 + k\omega\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1})^2} + \sqrt{1-(\sin a_1 + h\omega\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1})^2}}$$

che dopo opportuni sviluppi e soppressione degli infinitesimi di ordini superiori al primo, prende la forma:

$$(5) \qquad a_{k+1} - a_{h+1} = \frac{(k-h)\omega\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}{\cos a_1 - 0.5(k+h)\omega \operatorname{tg} a_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}.$$

Di qui deduciamo subito:

$$(5') \qquad a_2 - a_1 = \frac{\omega\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}{\cos a_1 - 0.5\,\omega \operatorname{tg} a_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}$$

$$(5'') \qquad a_3 - a_1 = \frac{2\omega\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}{\cos a_1 - \omega \operatorname{tg} a_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}$$

$$(5''') \qquad a_4 - a_2 = \frac{2\omega\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}{\cos a_1 - 2\omega \operatorname{tg} a_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}$$

$$(5^{\text{IV}}) \qquad a_5 - a_1 = \frac{4\omega\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}{\cos a_1 - 2\omega \operatorname{tg} a_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}$$

$$(5^{\text{V}}) \qquad a_7 - a_1 = \frac{6\omega\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}{\cos a_1 - 3\omega \operatorname{tg} a_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}.$$

Di queste cinque differenze due sole ci sono essenziali, $a_2 - a_1$ che ci servirà a calcolare la deviazione e la distorsione, e $a_4 - a_2$ che ci dà l'angolo fra il fascio uscente utile e il fascio parassito di 1° ordine. Le differenze $a_3 - a_1$, $a_5 - a_1$ e $a_7 - a_1$ ser-

vono solo a chi voglia dedurre il grado di diedria del filtro dalla loro osservazione con metodi di cui parleremo alla fine di questo studio.

Il valore approssimato dell'angolo fra il raggio utile o il primo raggio riflesso A_1M_1 e i raggi d'origine catadiottrica può essere ricavato dalla forma semplificata della (5):

$$(6) \qquad a_{k+1} - a_{h+1} = \text{appross.}\ (k-h)\,\omega\,\frac{\sqrt{n^2-\sin^2 a_1}}{\cos a_1} \text{ [1]}$$

dalla quale risultano le uguaglianze *approssimate*:

$$(6') \qquad \begin{cases} a_7 - a_1 = 3(a_3 - a_1) \\ a_5 - a_1 = 2(a_3 - a_1) \\ a_3 - a_1 = a_4 - a_2 = 2(a_2 - a_1). \end{cases}$$

Perciò alla misura strumentale di $a_4 - a_2$ si può sostituire quella di $a_3 - a_1$ o dei suoi multipli $a_5 - a_1$ ed $a_7 - a_1$, senza che il piccolo errore commesso abbia importanza.

Sì la (5) che la (6), per valori di a_1 piccoli ci dànno per $a_{k+1} - a_{h+1}$:

$$(6_0) \qquad (a_{k+1} - a_{h+1})_0 = (k-h)n\omega.$$

---

[1] L'errore relativo e l'errore assoluto che si commettono trascurando il 2° termine del denominatore nel 2° membro sono rispettivamente espressi con grande approssimazione da:

$$\epsilon = -0.5(k+h)\omega\,\frac{\operatorname{tg} a_1}{\cos a_1}\sqrt{n^2-\sin^2 a_1}$$

$$\epsilon'' = -0.5(k^2-h^2)\omega^2\,\frac{\operatorname{tg} a_1}{\cos^2 a_1}(n^2-\sin^2 a_1).$$

Questi errori nella determinazione dei raggi d'origine catadiottrica non hanno mai grande importanza.

Posto $n = 1.55$ e supposte le condizioni più sfavorevoli: $a_1 = 55°$ e $\omega = 0{,}01$ pel calcolo di $a_3 - a_1$ e di $a_4 - a_2$, ed $\omega = 0{,}006$ pel calcolo di $a_5 - a_1$ e di $a_7 - a_1$, si troverebbero errori relativi non sorpassanti il 6.5 per mille, e perciò trascurabili in codesti calcoli.

Pel calcolo della distorsione ci serviremo della formola (5), che è più esatta.

Sarà quindi:

$$(6_0') \quad (a_2-a_1)_0=n\omega\,;\ (a_3-a_1)_0=(a_1-a_2)_0=2n\omega\,;\ (a_5-a_1)_0=4n\omega\,;\ (a_7-a_1)_0=6n\omega$$

equazioni che valgono per a_1 compreso fra -5° e $+5^\circ$ con errore d'estrema piccolezza.

Detto δ l'angolo di deviazione, che conveniamo di misurare andando dal raggio uscente A_2M_2 al raggio entrante MA_1, risulta dalla figura 1 e dalla $(5')$:

$$(7) \quad \delta=a+a_2-\omega=a_2-a_1-\omega=\omega\left[\frac{\sqrt{n^2-\sin^2 a_1}}{\cos a_1-0.5\omega\operatorname{tg} a_1\sqrt{n^2-\sin^2 a_1}}-1\right]$$

funzione positiva e crescente di a_1, che ci dà, posto $n=1.5$ circa:

Per a_1 compreso fra -5° e $+5^\circ$

$$(7_0) \quad \delta_0=(n-1)\omega=\frac{1}{2}\,\omega \text{ circa,}$$

che è la minima deviazione;

Per $a_1=\pm 35^\circ$

$$(7_*) \quad \delta_*=\frac{3}{4}\,\omega \text{ circa.}$$

Passeremo ora ad esaminare alcuni effetti diottrici e catadiottrici della diedria del filtro. Siccome però l'esaminar tutti i casi possibili di posizione del filtro esorbiterebbe dai confini d'una breve nota, ci limiteremo al caso comunissimo d'un filtro situato fra l'obbiettivo e l'oggetto, che supponiamo piuttosto lontano.

Effetti della deviazione. — Per l'applicazione del filtro l'asse ottico si spezza in *asse anteriore* (dalla parte dell'oggetto) e *asse posteriore*, assi che fanno fra loro l'angolo δ_0. La deviazione δ subita dai raggi entranti cresce col crescer del valore assoluto di a_1, e per un angolo di campo $2a_1=70^\circ$, δ raggiunge, come risulta dalla (7_*), circa i $\frac{3}{4}$ dell'angolo ω del filtro. Nella fotografia ordinaria non fotogrammetrica, δ non ha importanza finchè l'esposizione del negativo si fa dietro un solo filtro. Ma

nella fotografia ortocromatica, quando si fa l'esposizione in due tempi, dietro due filtri di tinta diversa, di cui il secondo è detto *filtro "continuatore"*, il danno può esser grave. Se infatti il primo filtro ha un angolo ω_1 e il secondo un angolo ω_2, le due deviazioni diverse che ne conseguono fanno che le due impressioni successive non coincidano, e, come facilmente si comprende, se gli spigoli dei due filtri si trovarono da due lati diametralmente opposti (ad es. uno a destra e l'altro a sinistra dell'obbiettivo), le due aberrazioni δ_1 e δ_2 risultano sommate. Limitandoci ad un *maximum* d'angolo di campo $2\alpha_1 = 70^\circ$, risulterà, per la (7_*):

$$\delta_1 + \delta_2 = \text{appross. } 0{,}75\,(\omega_1 + \omega_2). \tag{8}$$

Ogniqualvolta $\delta_1 + \delta_2$ superi il valore $\frac{1}{4000}$, che rappresenta l'acuità dell'occhio normale, l'occhio situato alla distanza della pupilla d'uscita dalla fotografia scoprirà la mancanza di registro delle due impressioni; l'immagine apparirà a contorni doppi o confusi. Ad evitar questo danno deve dunque essere:

$$0{,}75\,(\omega_1 + \omega_2) < \frac{1}{4000}, \text{ cioè } \omega_1 + \omega_2 < 0{,}000333.$$

Il fotografo, che, acquistando un corredo di filtri, intendesse usarli eventualmente in successione per lo stesso negativo, dovrebbe dunque esigere che *per ciascuno di essi* fosse soddisfatta la condizione:

$$\omega < 0{,}000167,$$

ossia, in secondi:

$$\omega'' < 34''.4. \tag{9}$$

E, pur allargando la tolleranza, come è ammesso quasi sempre in fotografia, è certo imprescindibile che sia:

$$\omega'' < 60''. \tag{9'}$$

Un filtro il cui angolo oltrepassi i 60″ è decisamente cattivo come filtro continuatore.

La distorsione. — Quando su un filtro a facce piane i raggi

cadono da punti lontani, lo spessore del filtro non influisce sulla direzione dei raggi uscenti dal filtro; perciò nella fig. 2 noi supponiamo che i raggi passino tutti a distanza infinitamente piccola dallo spigolo e al disotto di esso, supposto nell'alto della figura.

Fig. 2

Siano VE e VU rispettivamente le facce d'entrata e d'uscita, VN_e e VN_u le loro normali, che fanno fra loro l'angolo $N_eVN_u = \omega$. Le rette VA e VP rappresentino rispettivamente gli assi anteriore e posteriore, che, per la (7_0), formano l'angolo (misurato da VP verso VA):

$$PVA = (n-1)\omega. \tag{10}$$

Gli angoli degli assi colle normali siano:

$AVN_e = \eta_1$; $PVN_u = \eta_2$ (angoli d'incid^a ed emerg^a *piccoli*).

Un raggio entrante VM formi i seguenti angoli:

Ang. d'*incidenza* $MVN_e = a_1$
Ang. d'*entrata* $MVA = \varphi_1$.

Il corrispondente raggio uscente VM_2 formi i seguenti angoli:

Ang. d'*emergenza* $M_2VN_n = \alpha_2$

Ang. d'*uscita* $M_2VP = \varphi_2$.

Per piccoli η_1 ed η_2 vale la (6_0); quindi è:

$$\eta_2 - \eta_1 = n\omega, \tag{11}$$

relazione che è esatta anche quando η_1 od η_2 sia di $\pm 5^\circ$ circa [1].

Dalla fig. 2 risulta poi:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_1 - \eta_1 \\ \varphi_2 = \alpha_2 - \eta_2. \end{cases} \tag{12}$$

Perciò e per la (11) avremo:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha_2 - \alpha_1 - (\eta_2 - \eta_1) = \alpha_2 - \alpha_1 - n\omega, \tag{13}$$

oppure, per le (7) e (7_0):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \delta - \delta_0, \tag{13'}$$

grazie alla quale chi esamini un filtro con uno strumento goniometrico può aver la differenza fra gli angoli d'uscita e d'entrata misurando la differenza di due deviazioni.

La (13), grazie alla (5') assume la forma:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \omega \left[\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1}}{\cos\alpha_1 - 0.5\,\omega \operatorname{tg}\alpha_1 \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1}} - n \right]. \tag{13''}$$

---

[1] Ne segue che, sebbene l'angolo fra gli assi anteriore e posteriore sia una grandezza ben definita, la direzione d'uno di essi ha un po' d'arbitrario. Si potrebbe ad es. considerare per semplicità come asse posteriore l'asse ottico dell'obbiettivo. se la faccia d'uscita del filtro è a buon contatto coll'orlo del parasole, e in tal caso si avrebbe: $\eta_2 = 0$ ed $\eta_1 = -n\omega$. Se, invece, il filtro è montato in modo che la faccia normale all'asse dell'obbiettivo sia la faccia d'entrata, si potrebbe considerare come asse anteriore la normale alla faccia d'entrata, nel qual caso sarebbe: $\eta_1 = 0$ $\eta_2 = n\omega$. Si potrebbe infine prender per asse posteriore od anteriore l'asse dell'obbiettivo, *comunque sia inclinato il filtro* entro i limiti ammessi.

Oppure, essendo per le (12) e (11), $a_1 = \varphi_1 + \eta_1$ ed $\eta_1 = \eta_2 - n\omega$:

$$(13''') \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \left[\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(\varphi_1 + \eta_1)}}{\cos(\varphi_1 + \eta_1) - 0.5\,\omega\,\mathrm{tg}(\varphi_1 + \eta_1)\sqrt{n^2 - \sin^2(\varphi_1 + \eta_1)}} - \right.$$

$$(13^{IV}) \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \left[\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(\varphi_1 + \eta_2 - n\omega)}}{\cos(\varphi_1 + \eta_2 - n\omega) - 0.5\omega\mathrm{tg}(\varphi_1 + \eta_2 - n\omega)\sqrt{n^2 - \sin^2(\varphi_1 + \eta_2 - n\omega)}} \right.$$

Entro i limiti di a_1 o di φ_1 che si incontrano nella pratica, $\varphi_2 - \varphi_1$ è funzione positiva e crescente di a_1 e di φ_1 [1].

Posto, ad es., $n = 1.54$, $\omega = 0,006$ ed $\eta_1 = -0,007$, la (13‴) ci darebbe:

Per	$\varphi_1{}^\circ = +24'$	$+25^\circ.24'$	$+45^\circ.24'$	$+55^\circ.24'$
$(\varphi_2 - \varphi_1)'' =$	0	$+1'.58''$	$+8'.22''$	$+15'.33''$

dove $\varphi_1{}^\circ$ è l'angolo φ_1 espresso in gradi e minuti primi, e $(\varphi_2 - \varphi_1)''$ è $\varphi_2 - \varphi_1$ in primi e secondi.

Per valori di $\varphi_1{}^\circ$ inferiori a $24'$ o negativi, $(\varphi_2 - \varphi_1)''$ assume valori inferiori d'una piccola quantità, perchè il 2° termine del denominatore della (13‴) cambia segno.

Dalla tabella ora data risultano evidenti i danni che in tricromia causerebbe una terna di filtri non piano-paralleli. Infatti nella sintesi dei tre monocromi non si potrebbero sovrapporre esattamente che i punti sull'asse e nelle vicinanze dell'asse; i punti lontani dell'asse sarebbero fuor di registro d'un angolo che potrebbe eccedere di molto l'angolo di acuità

---

[1] Le (13″), (13‴) e (13^{IV}), e la (15) che ne consegue, essendo dedotte da trasformazioni della (1) nelle quali si trascurarono gli infinitesimi di ordine superiore al 1°, sono tanto meno prossime al rigore assoluto quanto maggiori sono ω e l'angolo d' incidenza o d'entrata. Tuttavia, anche nel peggiore dei casi, cioè, per $n = 1.54$; $\omega = 0,01$ ed $a_1 = 55°$ troveremo:

Con calcolo assolutamente rigoroso:	$(\varphi_2 = \varphi_1)'' = 26'.18''$		
Coll'equazione (13″):	$(\varphi_2 - \varphi_1)'' = 26'.30''$		
	Differenza	$=$	$12''$
	Errore relativo	$=$	7.6 per mille

errori tanto più trascurabili in quanto essi sono dell'ordine delle aberrazioni di *definizione* necessariamente prodotte da una lastra di vetro non perfettamente pianparallela.

normale. Della fortunatissima... e inverosimile coincidenza che i tre angoli ω fossero uguali e che i tre filtri fossero collocati collo spigolo nell'identica posizione non è certo il caso di tener conto.

Affinchè $\varphi_2 - \varphi_1$ si mantenga inferiore ad $\frac{1}{4000}$ anche per $\alpha_1 = 55°$, risulta dalla (13'') che deve essere: $\omega < 0{,}000333$, cioè, in primi e secondi:

$$\omega'' < 1'.11''. \tag{14}$$

La distorsione [1] $\mathfrak{D}$ è data dalla nota formola:

$$\mathfrak{D} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Per esprimere $\mathfrak{D}$ in funzione di ω, n, φ_1 ed η_1, osserviamo che, per una nota relazione trigonometrica, è:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)\,(1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_1).$$

Siccome la differenza tra φ_2 e φ_1 è piccola, potremo scrivere, con errore relativo minimo:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1 = (\varphi_2 - \varphi_1)\,(1 + \operatorname{tg}^2\varphi_1).$$

Quindi:

$$\mathfrak{D} = (\varphi_2 - \varphi_1)\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1} + \operatorname{tg}\varphi_1\right] = 2\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\sin 2\varphi_1}.$$

[1] La differenza $\varphi_2 - \varphi_1$ fra gli angoli d'uscita e d'entrata in un sistema diottrico non basta a dimostrar la distorsione, perchè potrebbe con ciò esser soddisfatta la condizione delle tangenti:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1} = \text{cost.}$$

nel qual caso un filtro situato fra l'obbiettivo ed un oggetto *lontano* non produrrebbe distorsione. Noi dimostrammo infatti in una nota precedente che l'effetto distortico prodotto dall'aberrazione della pupilla d'entrata del sistema, per un filtro fra l'obbiettivo e l'oggetto, si fa sentire solamente quando la distanza d fra l'oggetto e codesta pupilla è poco superiore alla distanza fra il primo piano focale e la stessa pupilla, mentre è praticamente nullo per grandi valori di d. La (15), che stiamo per dedurre, dimostra però chiaramente che nell'applicazione di un filtro diedro la condizione delle tangenti non è mai soddisfatta.

E, per la (13‴):

$$(15) \qquad \mathfrak{D} = \frac{2\omega}{\sin 2\varphi_1} \left[\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(\varphi_1 + \eta_1)}}{\cos(\varphi_1 + \eta_1) - 0.5\omega \operatorname{tg}(\varphi_1 + \eta_1)\sqrt{n^2 - \sin^2(\varphi_1 + \eta_1)}} - n \right]$$

funzione che cambia di segno col cambiar di segno dell'angolo d'entrata (Un esempio dei valori che può raggiungere è dato in una tabelletta in fine della presente nota).

La distorsione da grave diedria del filtro può compromettere l'esattezza dei lavori fotogrammetrici. Una caratteristica della distorsione da diedria del filtro è che questa passa da circa zero per raggi giacenti in un piano parallelo allo spigolo e pressochè normale alle facce ad un massimo per raggi giacenti in un piano normale allo spigolo [1].

L'immagine parassita. — I raggi A_4M_4, A_6M_6, ecc. (Fig. 1) sono raggi parassiti che attraversano l'obbiettivo con un angolo d'entrata diverso da quello del raggio utile A_2M_2. Però il solo raggio A_4M_4 ha un' intensità relativa capace di recar qualche danno. L'angolo ρ compreso fra A_2M_2 e A_4M_4 è dato dalla (5‴), o più brevemente, dalla sua forma approssimata:

$$(16) \qquad \rho = a_4 - a_2 = 2\omega \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 a_1}}{\cos a_1}$$

funzione positiva e crescente di a_1. Per $a_1 = 0$ si ha:

$$(16_0) \qquad \rho_0 = 2n\omega = \text{appr. } 3\omega.$$

---

[1] Lo scontorcimento delle immagini causato dai filtri diedri produce dunque una dissimmetria rispetto ad un asse. Se, ad es., usando un filtro diedro applicato in modo che lo spigolo sia verticale, si fotografa una croce a quattro braccia uguali di cui una coppia sia verticale e l'altra orizzontale, le braccia verticali della croce saranno riprodotte con deformazione assolutamente insignificante e senza allungamenti o accorciamenti, mentre l'immagine d'un braccio orizzontale risulterà accorciata, e quella dell'altro braccio orizzontale risulterà allungata. Un cerchio presenterà l'aspetto d'un eccentrico. Queste deformazioni, estremamente piccole e assolutamente impercettibili nella fotografia artistica, sono però dannose nei lavori fotografici di precisione, se l'angolo del filtro ha certi vistosi valori che disgraziatamente si constatano talora nei filtri del commercio.

Per $n = 1.53$ e $\omega = 0,001$, troviamo, esprimendo ρ in primi e secondi:

Per $a_1^\circ =$	0°	15°	30°	45°
$\rho'' =$	$10'.31''$	$10'.43''$	$11'.28''$	$13'.09''$.

Per quanto risultò da nostre misure, nei filtri del commercio ω può raggiungere il valore *0,006*, e forse anche valori maggiori. Le conseguenze di cotesta grave deformità sono evidenti quando si pensi che i raggi utile e parassito anche all'uscita dall'obbiettivo fanno fra loro l'angolo ρ dato dalla (16). Le immagini utile e parassita potrebbero, se poco differenti d'intensità, essere separate dall'occhio situato alla distanza della pupilla d'uscita ogniqualvolta ρ superasse l'angolo d'acuità $\frac{1}{4000}$ (circa $52''$); però notiamo che, l'immagine utile essendo chiarissima (bianco puro in un positivo ordinario), l'occhio abbacinato da questa non può separare da essa una immagine parassita pochissimo chiara che ne disti di $\frac{1}{4000}$ della distanza visuale. Notiamo inoltre che il punto oggettivo che produce un'immagine parassita ha sempre un tale splendore da produrre nell'immagine utile un alone da irradiazione laterale del bromuro d'argento illuminato. Allentando dunque il rigore delle condizioni teoriche, quintuplichiamo la tolleranza, contentandoci di imporre che sia:

$$\rho < \frac{1}{800} \text{ circa.}$$

Ciò posto, e supponendo $n = 1.53$ e $a_1 = 55^\circ$, la (16) darà per ω la condizione:

$$(17) \qquad \omega \overline{<} 0,000283, \text{ cioè } \omega'' \overline{<} 60'' \text{ in cifra tonda.}$$

Dall'ispezione delle (9), (9'), (14) e (17) concludiamo che:

L'angolo d'un buon filtro non deve sorpassare un minuto primo, e sarebbe bene che non sorpassasse di molto il mezzo minuto primo.

Verifica del pianparallelismo. - Le (9), (14) e (17) presuppongono che l'indice di rifrazione del filtro non differisca molto

da 1,53, condizione che è verificata in pratica. La determinazione dell'angolo ω basta dunque da sola a far giudicare se un filtro a facce piane sia o no diottricamente ineccepibile.

Ecco ora alcuni metodi semplici di verifica del pianparallelismo, il primo dei quali è noto e intuitivo:

1° *Metodo.* — Con un calibro Palmer che dia il centesimo di millimetro si fa una serie di misure di spessore agli estremi di molti diametri del filtro. Per un certo diametro si troverà una differenza massima fra gli spessori alle estremità. Se D è il diametro del filtro, e σ codesta differenza, sarà $\omega = \frac{\sigma}{D}$. E dovendo in un buon filtro essere $\omega < 0,0003$, dovrà essere:

$$\sigma < 0,0003\, D. \tag{18}$$

Questo metodo vale solo per filtri in cui sia $D \geqq 35$ mm. Tuttavia, grazie alla sua semplicità, dovrebbe sempre esser applicato alla prima verifica d'un filtro di qualsiasi diametro.

2° *Metodo.* — Questo consiste nell'apprezzare ad occhio nudo l'angolo che il raggio d'origine catottrica A_1M_1 fa coi raggi d'origine catadiottrica A_3M_3, A_5M_5 e A_7M_7. L'osservatore si colloca alla massima distanza possibile da una sorgente di luce poco estesa, e, tenendo verticalmente il filtro accosto all'occhio, cerca di veder riflessa contro la prima faccia l'immagine della sorgente e fa rotare il filtro nel suo piano. Se durante questa rotazione si vede sempre riflessa nettamente un'immagine sola, il filtro può esser considerato praticamente pianoparallelo, purchè, ben inteso, l'osservatore sia emmetrope ed abbia una buona acuità.

Nei filtri in cui ω è sensibilmente maggiore di $\frac{1}{4000}$ si vedrà oscillare da sinistra a destra, e viceversa, dell'immagine principale, e intensamente colorata, l'immagine prodotta dal fascio dei raggi A_3M_3. Se l'angolo d'incidenza è molto grande, si vedono anche le immagini prodotte dai raggi A_5M_5 ed A_7M_7. Siccome, per le (6') è $a_5 - a_1 = 2(a_4 - a_2)$, ed $a_7 - a_1 = 3(a_4 - a_2)$, il difetto di parallelismo risulta molto visibile. L'osservatore, se ha fatto un po' di pratica su filtri esaminati comparativamente con questo metodo e col calibro Palmer, può giudicar discretamente bene ad occhio che gravità abbia il non-parallelismo ac-

cusato dai fasci A_1M_1, A_3M_3, A_5M_5 ed A_7M_7. Le diverse immagini si distinguono per differenze di tinta.

3° *Metodo.* — Si esamina il filtro come nel 2° metodo, valendosi però d'un cannocchiale. Se l'ingrandimento di questo è I, gli angoli $a_3 - a_1$ $a_5 - a_1$ $a_7 - a_1$ risultano magnificati I volte. Sarà bene montare il filtro a circa 45° coll'asse del cannocchiale. Questa montatura davanti all'obbiettivo non è difficile; basta un pezzo di tubo di cartone tagliato a 45° col proprio asse.

4° *Metodo.* — Si osservi una sorgente di luce piccola o lontana con un cannocchiale il cui obbiettivo sia stato mascherato col filtro per circa la metà della sua area utile. Si vedranno così due immagini, di cui una proviene dalla porzione di fascio entrante filtrata. L'angolo dei due fasci uscenti dall'obbiettivo, per la (7_0), è dato da $\delta_0 = (n-1)\omega =$ appr. $0{,}53\,\omega$. Detto I l'ingrandimento del cannocchiale e γ l'angolo dei due fasci uscenti dall'oculare, sarà:

$$\gamma = I\delta_0 = \text{appr. } 0{,}53\,I\omega.$$

Siccome in un buon filtro deve essere: $\omega < 0{,}0003$, dovrà essere:

$$\gamma < 0{,}00016\,I$$

ossia, in secondi

$$\gamma'' < 33'' \times I.$$

È bene che I non sia troppo piccolo, perchè, quando l'immagine non filtrata e l'immagine filtrata sono molto vicine fra loro, è difficile giudicare di quanto l'una dista dall'altra, specialmente tenendo conto del fatto che in pratica la sorgente mirata (becco a gas o simile) non è puntiforme.

Anche questo metodo esige che l'osservatore abbia acquistato un po' di pratica facendo sui filtri osservazioni comparate col metodo ora descritto o con misure mediante il calibro [1].

[1] Nelle nostre aggiunte personali alla versione d'un'opera inglese di fotografia (Hasluck, *La Fotografia*. Unione Tip.-Editr., Torino, 1905, pag. 512) suggerimmo diversi metodi identici o poco differenti da quelli ora descritti per la verifica del pianparallelismo d'un filtro; ma, per riguardo al pub-

Naturalmente, il miglior metodo d'esame d'un filtro consiste nel misurare ω e i diversi valori di δ e di $a_3 - a_1$ per diversi angoli d'incidenza con un buon goniometro a cannocchiale. Ciò facemmo nell'aprile del 1908 servendoci d'un goniometro-spettrometro di Brunner esistente nelle collezioni dell'Istituto di Fisica della R. Università di Torino (¹). Ci risultò che, su quattro filtri scelti a caso, *uno solo* aveva un angolo che stesse nella tolleranza; per esso era $\omega'' = 55''$. Per un secondo filtro era $\omega'' = 215''$, per un terzo filtro trovammo $\omega' = 4' \, ^1/_2$ circa, pel quarto $\omega' = 20' \, ^1/_2$ circa! (²).

A chiusa del nostro lavoro presentiamo in tabella il raffronto fra i risultati di misura e di calcolo riferentisi ad una lastrina colorata nel classico giallo di media forza per ortocromatismo.

Benchè questa appartenesse ad un corredo ottico non fotografico, volemmo far su essa i più circostanziati calcoli e misure, per le seguenti ragioni:

1° Perchè dal confronto fra i valori calcolati e i valori osservati per questa lastra, affetta da un angolo ω molto grande, si poteva avere una buona riprova materiale dell'esattezza, anche in casi sfavorevolissimi, delle formole approssimate che abbiamo trovato.

---

blico a cui l'opera s'indirizzava, non demmo di codesti metodi alcuna giustificazione matematica. Crediamo che, sulla base di quanto esponemmo nel presente studio, il lettore potrà facilmente capire entro quali limiti essi sono valevoli e quale approssimazione si può ottener con essi.

(¹) Dobbiamo l'aver potuto far queste misure al benevolo interessamento del nostro antico e illustre maestro Nicodemo Jadanza, Professore di Geodesia nella R. Università di Torino, ed alla squisita cortesia del chiar.^mo Prof. Andrea Naccari, Direttore dell'Istituto di Fisica nella stessa R. Università, il quale ci mise a disposizione gli strumenti del suo gabinetto. Ad essi, ed ai sig.^ri assistenti dell'Istituto Fisico, Prof.^ri Dott.^ri Adolfo Campetti e Mario Nozari, esprimiamo qui i nostri più sentiti ringraziamenti per l'aiuto che vollero concedere alle nostre ricerche.

Coll'egregio Dott. Prof. M. Nozari facemmo una prima serie di misure dei δ per diversi valori di φ_1, e in giorno susseguente rifacemmo le misure da soli. Le due serie concordarono a meno di qualche secondo.

(²) Questo filtro fu scelto a caso fra quelli che una ditta estera assai riputata, *ma non specialista in ottica*, fornisce per certe sue lastre ad emulsione pancromatica. Noi lo provammo anche facendo qualche fotografia d'interno, e ne ottenemmo una visibilissima immagine parassita.

2° Perchè la grandezza delle perturbazioni causate da lastre aventi un angolo diverso si deduce senza difficoltà da quelle che stiamo per presentare, considerando che entro limiti assai vasti le perturbazioni causate da filtri sono proporzionali al loro angolo ω, supposto che tutti i filtri di vetro abbiano indici di rifrazione poco differenti (circa 1.53).

Lastrina di vetro giallo, a facce piane, del diametro di 35 mm.	Osservazioni
$\omega'' = 26'.16'',1 \quad \omega'' : R'' = \omega = 0,007641$ $\delta_0'' = 13'.54'' \quad \delta_0'' : R'' = \delta_0 = 0,004043$ Indice di rifrazione dedotto colla (7_0): $n = 1.5292$	ω'' e δ_0'' furono determinati ciascuno con una terna di misure, leggendo per ciascuna misura i 4 nonii. Ciascun nonio dava i 3'' sessagesimali.

Angolo d'entrata φ''_1	$(\delta - \delta_0)''$ misurato m	$(\varphi_2 - \varphi_1)'' = (\delta - \delta_0)''$ calcolato c	$c - m$	Differenza relativa $\frac{c-m}{m}$
+55°	20'.14''	19'.42''	—32''	$-\frac{2.64}{100}$
+45°	10'.47''	10'.34''	—13''	$-\frac{2.01}{100}$
+35°	5'.34''	5'.30''	— 4''	$-\frac{1.20}{100}$
+25°	2'.36''	2'.33''	— 3''	$-\frac{1.92}{100}$
—25°	2'.04''	2'.18''	+14''	$+\frac{11.3}{100}$
—35°	4'.52''	5'.05''	+13''	$+\frac{4.45}{100}$
45°	9'.36''	9'.50''	+14''	$+\frac{2.42}{100}$
—55°	18'.06''	18'.15''	+9''	$+\frac{0.83}{100}$

Il calcolo dei valori di $\varphi_2 - \varphi_1$ fu fatto colla (13'') supponendo [vedi la nota (1) a pag. 12] che fosse $\varphi_1 = a_{11}$ cioè $\eta_1 = 0$.

Le collimazioni si fecero sull'*asse* dell'immagine della feritoia, immagine alquanto larga e poco netta, causa la grave diedria e fors' anche l' imperfetta planeità delle facce.

L'andamento della distorsione calcolato colla (15), supposto $\varphi_1 = \alpha_1$ e sulla base dei valori *misurati* di $\varphi_2 - \varphi_1$ è il seguente:

$\varphi_1^0 =$	$+55^\circ$	$+45^\circ$	$+35^\circ$	$+25^\circ$	-25°	-35°	-45°	-55°	
$\mathfrak{D} =$	$+12.6$	$+6.2$	$+3.45$	$+1.98$	-1.57	-3.02	-5.6	-11.3	p. $^0/_{00}$

Misurammo anche, per riprova materiale delle (5''), (5''') e (16), qualche valore di $\alpha_3 - \alpha_1$ e trovammo pure una buona concordanza fra il calcolo e la misura, benchè, come è facile comprendere, l'immagine della feritoia risultasse ancor meno ben definita che nella misura dei valori di $\mathfrak{d} - \mathfrak{d}_0$.

Segmenti corrispondenti ad immagini reali in alcuni sistemi diottrici centrati.

Nota dell'Ing. ENRICO GATTI.

(Con una Tavola).

1. — Le lenti P, M, N (Fig. 1) immerse nell'aria e centrate secondo l'asse XY, abbiano come distanze focali rispettive $f > 0$; φ_1; $\varphi_2 > 0$.

Rappresentino le coppie di punti

$$\begin{matrix} e_1 e_1^* & E_1 E_1^* & E_2 E_2^* \\ f_1 f_1^*, & F_1 F_1^*, & F_2 F_2^* \end{matrix}$$

rispettivamente ed ordinatamente il primo ed il secondo punto / fuoco principale di esse: sia $e_1^* E_1 = d$; $E_1^* E_2 = \Delta$ ed indicato con N^* il secondo vertice della lente M e con c il segmento $E_1^* N^*$ si assuma $\Delta - \varphi_2 > c$ e si ritenga essere P la lente che prima è incontrata da raggi incidenti.

Considerato un punto A dell'asse come un punto oggettivo e fatto

$$A e_1 = p; \quad A E_1 = D; \quad A E_2 = y$$

e supposte in A_1, A_2, A_3 le immagini di A rispettivamente dovute a tutto il sistema, o al solo sistema MN, od alla sola lente N, si ponga:

$$E_2{}^*A_1 = x_1 ; \quad E_2{}^*A_2 = x_2 ; \quad E_2{}^*A_3 = x_3 .$$

Si diranno: punti d'ascissa p, x_1; D, x_2; y, x_3; i punti dell'asse che si supporranno essere nelle condizioni ammesse pei punti A, A_1; od A, A_2; od A, A_3: punti corrispondenti quelli dei quali le immagini reali dovute al sistema PMN ed alla lente N, od al sistema MN ed alla lente stessa, oppure al sistema PMN ed al sistema MN riescono coincidenti: segmenti corrispondenti dell'asse i segmenti di punti corrispondenti.

Si vogliono trovare i segmenti corrispondenti dell'asse XY tanto per rispetto al sistema PMN ed alla lente N, quanto per rispetto al sistema stesso ed al sistema MN.

2. — Si determinino i punti dell'asse XY del sistema MN, isolatamente considerato, i quali dànno immagine di ascissa $x_2 > \varphi_2$.

Fra l'ascissa D d'un punto oggettivo dell'asse XY e l'ascissa x_2 della immagine dovuta al sistema, passa la nota relazione [1]:

$$x_2 = \frac{\Delta(D \mp \varphi_1) \mp D\varphi_1}{(\Delta - \varphi_2)(D \mp \varphi_1) \mp D\varphi_1}\, \varphi_2 \tag{1}$$

nella quale si userà il segno $\mp$ secondochè sarà $\varphi_1 \gtrless 0$.

Si indichino rispettivamente con A, B / A_1, B_1 il numeratore ed il denominatore della (1) quando $\varphi_1 \gtrless 0$.

Se $\varphi_1 > 0$:

sarà $A \gtreqless 0$ secondochè

$$D \lesseqgtr -\frac{\Delta\varphi_1}{\varphi_1 - \Delta} \quad \text{per} \quad \Delta < \varphi_1$$

$$D \gtreqless \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta - \varphi_1} \quad \text{per} \quad \Delta > \varphi_1$$

ed $A < 0$ se $\Delta = \varphi_1$

e $B \gtreqless 0$ secondochè

$$D \lesseqgtr -\frac{\Delta - \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}\,\varphi_1 \quad \text{se} \quad \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta > 0$$

$$D \gtreqless \frac{\Delta - \varphi_2}{\Delta - \varphi_1 - \varphi_2}\,\varphi_1 \quad \text{se} \quad \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta < 0$$

essendo $B < 0$ per $\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta = 0$

---

[1] N. Jadanza, *Teorica dei cannocchiali, ecc.* (ed. 1906), pag. 221.

Quando sia $\varphi_1 < 0$ poichè si ammise essere $\Delta - \varphi_2 > c$ sarà $\varphi_1 + \Delta - \varphi_2 > 0$

$$A_1 \gtreqless 0 \qquad D \gtreqless - \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta + \varphi_1}$$

e sarà per

$$B_1 \gtreqless 0 \qquad D \gtreqless - \frac{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta - \varphi_2}$$

Fatto $V = B - A$ e $V^1 = B_1 - A_1$

$$V = -\varphi_2(D - \varphi_1)$$

è

$$V' = -\varphi_2(D + \varphi_1)$$

$$B > 0 \quad \text{ed} \quad A > 0 \qquad\qquad D \lesseqgtr \varphi_1$$

sicchè se sarà $B \gtreqless A$ ed $x_2 \lesseqgtr \varphi_2$ secondochè

$$B < 0 \quad \text{ed} \quad A < 0 \qquad\qquad D \gtreqless \varphi_1$$

$$B_1 > 0 \quad \text{ed} \quad A_1 > 0 \qquad\qquad D \lesseqgtr -\varphi_1$$

e se sarà $B_1 \gtreqless A_1$ ed $x_2 \lesseqgtr \varphi_2$ secondochè

$$B_1 < 0 \quad \text{ed} \quad A_1 < 0 \qquad\qquad D \gtreqless -\varphi_1$$

Indicato con $\frac{F}{E}$ il primo $\frac{\text{fuoco}}{\text{punto}}$ principale del sistema MN e con H il punto che nel sistema ha per immagine E_2^*, per formule note:

1° se $\varphi_1 > 0$

$a)$ $$E_1 - F = -\frac{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \qquad \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta > 0$$

$b)$ $$E_1 - F = \frac{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1}{\Delta - \varphi_1 - \varphi_2} \qquad \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta < 0$$

è ove sia

$c)$ $$E_1 - H = -\frac{\Delta\varphi_1}{\varphi_1 - \Delta} \qquad \Delta < \varphi_1$$

$d)$ $$E_1 - H = \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta - \varphi_1} \qquad \Delta > \varphi_1$$

essendo $\frac{F}{H}$ infinitamente lontano se $\begin{matrix} \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta = 0 \\ \Delta = \varphi_1 \end{matrix}$;

2° Se $\varphi_1 < 0$ è:

$$e) \qquad E_1 - F = -\frac{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta - \varphi_2}$$

$$f) \qquad E_1 - H = -\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta + \varphi_1}$$

avendosi in valore assoluto:

$$g) \qquad \frac{\Delta - \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} < \frac{\Delta}{\varphi - \Delta}$$

$$h) \qquad \frac{\Delta - \varphi_2}{\Delta - \varphi_1 - \varphi_2} > \frac{\Delta}{\Delta - \varphi_1}$$

$$l) \qquad \frac{\Delta - \varphi_2}{\varphi_1 + \Delta - \varphi_2} < \frac{\Delta}{\Delta + \varphi_1}.$$

Ciò stabilito:

I. — Sia $\varphi_1 > 0$ ed:

$$A) \qquad \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta > 0.$$

I punti F, H cadranno in tale ordine (a, c, g) (Fig. 2) a destra del segmento F_1E_1 se $\Delta < \varphi_1$: se $\Delta = \varphi_1$ (Fig. 3) F cadrà a destra di E_1 ed H a distanza infinita: se sarà $\Delta > \varphi_1$ (Fig. 4) di essi punti il primo cadrà a destra di E_1 e l'altro a sinistra di F_1.

Quando:

$$a) \qquad \Delta < \varphi_1$$

per valori di:

$$D > 0 \text{ sarà } x_2 \lesseqgtr \varphi_2 \text{ secondochè } D \gtreqless \varphi_1$$
$$D = 0 \quad \text{„} \quad x_2 > \varphi_2$$

e per valori di $D < 0$ se:

$$D \leqq E_1F \quad \text{è} \quad x_2 \geqq \begin{matrix}\varphi_2 \\ \infty\end{matrix}$$
$$E_1F < D < E_1H \quad \text{„} \quad x_2 < 0$$
$$D = E_1H \quad \text{„} \quad x_2 = 0$$
$$D > E_1H \quad \text{„} \quad x_2 < \varphi_2$$

$$b) \qquad \Delta = \varphi_1.$$

Si trovano i casi ora esaminati limitati alla condizione $E_1 - H = -\infty$.

$$c) \qquad \Delta > \varphi_1.$$

Per valori positivi di D se:

$$D \geqq HE_1 \quad \text{è} \quad x_2 \leqq 0$$

$$D < HE_1 \quad „ \quad x_2 \lesseqgtr \varphi_2 \text{ secondochè } D \gtreqless \varphi_1$$

e se

$$D = 0 \quad „ \quad x_2 > \varphi_2.$$

Per valori negativi di D se:

$$D < E_1F \quad \text{si ha} \quad x_2 > \varphi_2$$

$$D = E_1F \quad „ \quad x_2 = \infty$$

$$D > E_1F \quad „ \quad x_2 < 0.$$

$B)$ $$\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta = 0.$$

In tale caso (Fig. 5) $E_1 - F = -\infty$ ed H si trova alla sinistra di F_1.

Per valori di

$$D \geqq HE_1 \quad \text{sarà} \quad x_2 \leqq 0$$

e quando sia

$$D < HE_1 \text{ si avrà } x_2 \lesseqgtr \varphi_2 \text{ secondochè } D \gtreqless \varphi_1$$

$C)$ $$\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta < 0.$$

I punti F, H si troveranno in tale ordine (Fig. 6) (b, d, h) a sinistra di F_1.

Pei valori di

$$D \geqq FE_1 \quad \text{è} \quad x_2 \geqq \begin{matrix}\varphi_2 \\ \infty\end{matrix}$$

$$HE_1 < D < FE_1 \quad „ \quad x_2 < 0$$

$$D = HE_1 \quad „ \quad x_2 = 0$$

$$D < HE_1 \quad „ \quad x_2 \lesseqgtr \varphi_2 \text{ secondochè } D \gtreqless \varphi_1.$$

II. — Sia $\varphi_1 < 0$.

I punti F, H cadranno in simile ordine (e, f, l) (Fig. 7) nel segmento E_1F_1.

Quando si abbia

$$D \geqq 0 \quad \text{è} \quad x_2 > \varphi_2.$$

Per valori negativi di D se

$$
\begin{array}{lll}
D < E_1F & \text{si ha} & x_2 > \varphi_2 \\
D = E_1F & \text{"} & x_2 = \infty \\
E_1F < D < E_1H & \text{"} & x_2 < 0 \\
D = E_1H & \text{"} & x_2 = 0
\end{array}
$$

$D > E_1H$ sarà $x_2 \lesseqgtr \varphi_2$ secondochè $D \gtreqless -\varphi_1$

In ciascuno dei casi considerati hanno quindi immagini di ascissa positiva x_2 i punti dell'asse XY del sistema i quali sono posti sul segmento HF e sono maggiori di φ_2 le ascisse delle immagini dei punti del segmento F_1F, eccettuato F_1, stimati essendo tali segmenti nel verso XY secondo il quale si intende che la luce si propaghi.

3. — L'ascissa x_3 dell'immagine d'un punto oggettivo di ascissa y dell'asse, quando si consideri isolatamente la lente X, è:

$$x_3 = \frac{y\varphi_2}{y - \varphi_2} \tag{2}$$

e la relazione fra le ascisse D, y di due punti corrispondenti dell'asse stesso, si otterrà ponendo:

$$x_2 = x_3$$

cioè colla

$$y = \Delta \mp \frac{D\varphi_1}{D \mp \varphi_1} \tag{3}$$

che ne deriva e nella quale si assumerà il segno $\mp$ secondochè sarà $\varphi_1 \gtreqless 0$.

I punti d'ascissa D corrispondenti a punti d'ascissa $y > \varphi_2$ avranno immagini d'ascissa $x_2 > \varphi_2$ e però apparterranno, in ogni caso ed ove esistano, al segmento F_1F stimato nel senso XY corrispondendo ai punti F_1 ed F, d'ascissa D, rispettivamente i punti d'ascissa $y = \infty$ ed $y = E_1F_2$.

L'ascissa D del punto corrispondente ad X^* di ascissa

$$y = \Delta - c$$

$$D = -\frac{c\varphi_1}{\varphi_1 - c} \quad \text{se} \quad \varphi_1 > 0 \tag{5}$$

è

$$D = -\frac{c\varphi_1}{\varphi_1 + c} \quad \text{se} \quad \varphi_1 < 0. \tag{6}$$

Venne ammesso essere $\Delta - \varphi_2 > c$ e però quando sia

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \geqq 0$$

si dovrà nel valore di D determinato dalla (5) assumere — come del resto accade nelle comuni lenti — $c < \varphi_1$ e così quel valore sarà negativo.

Indicato con I il punto d'ascissa D determinato tanto dalla (5) quanto dalla (6), poichè in valore assoluto è

$$\frac{\varphi_1 c}{\varphi_1 - c} < \frac{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}$$

tal punto cadrà in ogni caso sul segmento E_1F contato nel senso XY.

Ne consegue che:

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta > 0$$

quando

$$\varphi_1 + \Delta - \varphi_2 > 0$$

ciascun punto di ascissa D situato sul segmento finito IF, troverà il suo corrispondente in un punto d'ascissa y del segmento N^*F_2 e se

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \leqq 0$$

ciascun punto d'ascissa D del segmento $I\infty$ avrà il suo corrispondente in un punto del segmento $N^*F_1^*$ essendochè a $D = \infty$ corrisponde $y = \Delta - \varphi_1$.

4. — Prendendo ora a considerare il sistema delle tre lenti P, M, N, si osservi che, se si vorranno avere punti di ascissa p, i quali abbiano come corrispondenti punti del segmento N^*F_2 (Fig. 2, 3, 4, 7) o del segmento $N^*F_1^*$ (Fig. 5, 6), dovrà l'immagine reale di quei punti, dovuta alla lente P, cadere nel segmento IF o nel segmento $I\infty$.

Perciò si dovrà assumere:

$$f < d + \frac{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta} \quad \text{se} \quad \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta > 0 \tag{7}$$

$$f < d + \frac{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1}{\varphi_1 + \Delta - \varphi_2} \quad \text{se} \quad \varphi_1 + \Delta - \varphi_2 > 0 \tag{8}$$

e ad f si potrà dare qualunque valore purchè finito e positivo quando sia

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \gtreqless 0.$$

I punti di ascissa D, corrispondenti a punti d'ascissa p, cadranno sullà parte dell'asse XY lasciata libera fra le lenti P, M e condizione necessaria perchè questi ultimi esistano è che sia $f < d$.

Detta, in ogni caso, $d - D$ la distanza da e_1* della immagine dovuta alla lente P di un punto di ascissa p dell'asse XY, è:

$$p = \frac{d - D}{d - D - f} f \tag{9}$$

dalla quale

$$D = d - \frac{pf}{p - f}. \tag{10}$$

Ond'è che dovendosi assegnare a p un valore positivo, ove sia

$$f \geqq d \text{ sarà } D = \begin{matrix} < 0 \\ -\infty \\ > d \end{matrix} \text{ secondochè } p \gtreqless f$$

e se $f < d$, indicato con p_0 il punto di ascissa:

$$p_0 = \frac{df}{d - f} \tag{11}$$

che ha per immagine per rispetto alla lente P il punto E_1 si avrà:

$$\begin{array}{lll} 0 < D < d & \text{se} & p > p_0 \\ D = 0 & \text{"} & p = p_0 \\ D < 0 & \text{"} & f < p < p_0 \\ D = \infty & \text{"} & p = f \\ D > d & \text{"} & p < f. \end{array}$$

Segnato con J il punto il quale per rispetto alla lente P ha per immagine il punto I, risulta:

$$Ie_1 = \frac{\varphi_1 c \pm d(\varphi_1 \mp c)}{\varphi_1 c + (\varphi_1 \mp c)(d - f)} f \tag{12}$$

nella quale si assumerà il segno $\mp$ secondochè $\varphi_1 \gtrless 0$:

$$\text{sarà} \quad Je_1 \begin{matrix} >0 \\ =\infty \\ <0 \end{matrix} \quad \text{per}$$

$$f \begin{matrix} \leq \\ = \\ > \end{matrix} d + \frac{\varphi_1 c}{\varphi_1 \mp c} \tag{13}$$

e potrà verificarsi una qualunque delle (13) ancora quando debba soddisfarsi l'una o l'altra delle (7-8).

La differenza fra il denominatore ed il numeratore del rapporto $\frac{p_0}{Je_1}$ è $-f\varphi_1 c$ e però quando sia

$$f < d \qquad \text{sarà} \qquad p_0 > Je_1.$$

Nei diversi casi che si possono presentare:

a) Se $f \geqq d$, quando esistano punti corrispondenti d'ascissa p e d'ascissa y, quelli giaceranno a sinistra di f_1 se

$$f \geqq d + \frac{\varphi_1 c}{\varphi_1 \mp c}$$

ed apparterranno al segmento Jf_1 se

$$f < d + \frac{\varphi_1 c}{\varphi_1 \mp c}\ ;$$

b) Quando sia $f < d$, se potranno esistere punti corrispondenti di ascissa p e di ascissa D, quelli giaceranno a sinistra del punto p_0, e i punti d'ascissa p corrispondenti a quelli d'ascissa y apparterranno al segmento Jf_1.

5. — Si determini ora la relazione fra le ascisse p ed x_1 eliminando D dalle (1-9) mutando x_2 in x_1 ed assumendo il segno $\mp$ secondochè la lente M sarà convergente o divergente.

I. Si supponga la lente M convergente.

Ad eliminazione compiuta si ottiene:

$$x_1 = \frac{\Delta\varphi_1(p-f) + (\varphi_1 - \Delta)(p-f)d - (\varphi_1 - \Delta)pf}{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1(p-f) + (\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta)(p-f)d - (\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta)pf}\,\varphi_2. \tag{14}$$

Indicando rispettivamente con A_2, B_2 il numeratore ed il denominatore della relazione (14) con p_a, p_b i valori ottenuti considerando A_2 e B_2 quali equazioni in p, si trova che

$$p_a = \frac{\Delta\varphi_1 + (\varphi_1 - \Delta)d}{\Delta\varphi_1 - (\varphi_1 - \Delta)(f - d)} f \tag{15}$$

$$p_b = \frac{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1 + (\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta)d}{\varphi_1(\Delta - \varphi_2) - (\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta)(f - d)} f. \tag{16}$$

Dei punti p_b e p_a, d'ascissa p omonima, p_b è il primo fuoco del sistema composto PMN e p_a il punto che nel sistema stesso ha per immagine $E_2{}^*$.

Si indichino ordinatamente con $\begin{matrix} C_1 & C_2 \\ D_1 & D_2 \end{matrix}$ il $\begin{matrix}\text{numeratore}\\ \text{denominatore}\end{matrix}$ di p_b e p_a e si ponga

$$V_1 = D_1 - C_1 \quad \text{e} \quad V_2 = D_2 - C_2.$$

Si avrà:

$$C_1 > 0 \quad D_1 > 0 \quad \text{se} \quad \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \geqq 0$$

$$\text{e} \quad \left.\begin{matrix} C_1 \gtreqless 0 \\ \\ D_1 \gtreqless 0 \end{matrix}\right\} \text{se } \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta < 0 \text{ per } \left\{\begin{matrix} d \lesseqgtr \dfrac{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1}{\Delta - \varphi_1 - \varphi_2} \\ f \gtreqless d - \dfrac{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1}{\Delta - \varphi_1 - \varphi_2} \end{matrix}\right.$$

$$C_2 > 0 \quad \text{e} \quad D_2 > 0 \quad \text{se} \quad \Delta \leqq \varphi_1$$

$$\text{e} \quad \left.\begin{matrix} C_2 \gtreqless 0 \\ \\ D_2 \gtreqless 0 \end{matrix}\right\} \text{se } \Delta > \varphi_1 \text{ per } \left\{\begin{matrix} d \lesseqgtr \dfrac{\Delta\varphi_1}{\Delta - \varphi_1} \\ f \gtreqless d - \dfrac{\Delta\varphi_1}{\Delta - \varphi_1} \end{matrix}\right.$$

E poichè:

$$V_1 = -f(\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta) \quad \text{e} \quad V_2 = -f(\varphi_1 - \Delta)$$

$$\text{se} \quad \left.\begin{matrix} C_1 > 0 \text{ e } D_1 > 0 \\ \\ C_1 < 0 \text{ e } D_1 < 0 \end{matrix}\right\} \text{sarà } p_b \gtreqless f \text{ per } \left\{\begin{matrix} \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \gtreqless 0 \\ \\ \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \lesseqgtr 0; \end{matrix}\right.$$

$$\text{e se} \quad \left.\begin{matrix} C_2 > 0 \text{ e } D_2 > 0 \\ \\ C_2 < 0 \text{ e } D_2 < 0 \end{matrix}\right\} \text{sarà } p_a \gtreqless f \text{ per } \left\{\begin{matrix} \Delta \lesseqgtr \varphi_1 \\ \\ \Delta \gtreqless \varphi_1. \end{matrix}\right.$$

Le considerazioni che precedono sul valore di D_1 e D_2, e, la (14), che può scriversi sotto la forma:

$$x_1 = \frac{D_2(p - p_a)}{D_1(p - p_b)} \varphi_2 \tag{14'}$$

mostrano che sarà:

$B_2 \gtreqless 0$ per valori di $p \gtreqless p_b$ ove sia $\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \geqq 0$
o se $\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta < 0$ con $f > d - FE_1$

essendo $B_2 > 0$ quando $f = d - FE_1$;

e $B_2 \gtreqless 0$ per valori di $p \lesseqgtr p_b$ quando $\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta < 0$
ed $f < d - FE_1$;

e che pure sarà:

$A_2 \gtreqless 0$ per valori di $p \gtreqless p_a$ se $\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta > 0$ e $\Delta \leqq \varphi_1$
e quando $\Delta > \varphi_1$ se $\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \gtreqless 0$ con $f > d - HE_1$

riuscendo $A_2 > 0$ per $f = d - HE_1$

ed $A_2 \gtreqless 0$ per valori di $p \lesseqgtr p_a$ se è $\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \gtreqless$ o
con $\Delta > \varphi_1$ ed $f < d - HE_1$.

Ora, fatto $V = B_2 - A_2$, poichè è

$$V = -\varphi_2[p(\varphi_1 + f - d) - f(\varphi_1 - d)]$$

quando sieno $B_2 > 0,\ A_1 > 0$ / $B_2 < 0,\ A_2 < 0$ saranno $B_2 \gtreqless A_2$ ed $x_1 \lesseqgtr \varphi_2$ per $V \gtreqless 0$ / $V \lesseqgtr 0$

mentre si avrà:

$V \gtreqless 0$ secondochè $p \lesseqgtr \dfrac{\varphi_1 - d}{f + \varphi_1 - d} f$ se $f + \varphi_1 - d > 0$

$p \gtreqless \dfrac{d - \varphi_1}{d - \varphi_1 - f} f$ se $f + \varphi_1 - d < 0$

e $V < 0$ quando sia $f + \varphi_1 - d = 0$.

Si osservi che indicati con p_f, p_f' i punti d'ascisse omonime

$$(17) \qquad p_f = \frac{d-\varphi_1}{d-\varphi_1-f} f \qquad p_f' = \frac{\varphi_1-d}{f+\varphi_1-d} f$$

hanno tali punti, ordinatamente al caso al quale appartengono, per immagine F' per rispetto alla lente P e che:

$$p_f > p_0 \quad \text{e} \quad p_f' < f.$$

Si osservi pure che nella relazione

$$\frac{p_b}{p_a} = \frac{C_1 D_2}{D_1 C_2}$$

essendo $D_1 C_2 - C_1 D_2 < 0$

$$\text{se} \begin{array}{l} C_1 D_2 > 0 \quad \text{e} \quad D_1 C_2 > 0 \\ C_1 D_2 < 0 \quad \text{e} \quad D_1 C_2 < 0 \end{array} \text{si avrà} \begin{array}{l} p_b > p_a \\ p_b < p_a. \end{array}$$

Essendo poi:

$$\frac{p_b}{Je_1} = \frac{C_1[c\varphi_1 + (d-f)(\varphi_1 - c)]}{D_1[c\varphi_1 + d(\varphi_1 - c)]}; \quad \frac{p_a}{Je_1} = \frac{C_2[c\varphi_1 + (d-f)(\varphi_1 - c)]}{D_2[c\varphi_1 + d(\varphi_1 - c)]}$$

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{C_1(d-f)}{D_1 d} \qquad \frac{p_a}{p_0} = \frac{C_2(d-f)}{D_2 d}$$

$$\frac{p_b}{p_f} = \frac{C_1(d-\varphi_1-f)}{D_1(d-\varphi_1)} \qquad \frac{p_a}{p_f} = \frac{C_2(d-\varphi_1-f)}{D_2(d-\varphi_1)}$$

nei casi singoli nei quali si abbia $Je_1 > 0$ od $f < d$, poichè sono positive le differenze fra il denominatore ed il numeratore di ciascuno dei rapporti scritti, quando sieno:

$$\begin{array}{l} C_1 > 0 \quad \text{e} \quad D_1 > 0 \\ C_1 < 0 \quad \text{e} \quad D_1 < 0 \end{array} \quad \text{saranno } Je_1, p_0, p_f \quad \begin{array}{l} \text{maggiori} \\ \text{minori} \end{array} \text{ di } p_b$$

e quando si abbia

$$\begin{array}{l} C_2 > 0 \quad \text{e} \quad D_2 > 0 \\ C_2 < 0 \quad \text{e} \quad D_2 < 0 \end{array} \quad \text{saranno } Je_1, p_0, p_f \quad \begin{array}{l} \text{maggiori} \\ \text{minori} \end{array} \text{ di } p_a$$

Ne segue che se:

$$A) \qquad \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta > 0 \quad \text{e} \quad \Delta \leqq \varphi_1$$

sono $\qquad p_b > f \quad p_a \geqq f \quad p_b > p_a$

e potrà essere $\qquad f + \varphi_1 - d \gtreqless 0$

quando sia $f + \varphi_1 - d \geqq 0$ con $f < d$ si ha $p_0 > Je_1 > p_b > p_a > f$

quando sia $f + \varphi_1 - d < 0$ si ha $p_f > p_0 > Je_1 > p_b > p_a > f$.

Pei valori di p compresi fra p_a ed f, A_2 e B_2 sono negativi e comunque sia $f + \varphi_1 - d \gtreqless 0$ sarà $x_1 < \varphi_2$ e quindi il segmento $p_a f_1$ non ha corrispondente.

$$B) \qquad \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \geqq 0 \quad \text{e} \quad \Delta > \varphi_1.$$

È $\qquad p_b \geqq f$

se $\quad d \leqq HE_1$ sono $f > d - HE_1$ e $p_a \begin{smallmatrix} < f \\ = 0 \end{smallmatrix}$

se $d > HE$ sarà $p_a \begin{matrix} < 0 \\ = -\infty \\ > f \end{matrix}$ secondochè $f \gtreqless d - HE_1$ e nel caso in cui $p_a > f$ risulta $p_a > p_b$.

$$C) \qquad \varphi_1 + \varphi_2 - \Delta < 0$$

quando si abbia:

$d \leqq HE_1$ sono $f > d - HE_1$, $p_b < f$, $p_a \begin{smallmatrix} < f \\ = 0 \end{smallmatrix}$ e $p_b > p_a$;

$HE_1 < d \leqq FE_1$ si hanno $f > d - FE_1$ e $p_b \begin{smallmatrix} < f \\ = 0 \end{smallmatrix}$

e potrà essere $f \gtreqless d - HE_1$ con $p_a \begin{matrix} < 0 \\ = -\infty. \\ > f \end{matrix}$

Se $d > FE_1$ si potrà avere:

$$f > d - FE_1 \quad \text{con} \quad p_b < 0 \quad \text{e} \quad \text{sarà}$$

$$p_a \begin{matrix} < 0 \\ = -\infty \\ > f \end{matrix} \quad \text{secondochè} \quad f \gtreqless d - HE_1;$$

oppure $f = d - FE_1$ con $p_b = -\infty$ e $p_a > f$; od anche $f < d - FE_1$ con $p_b > p_a > f$.

Nei casi ora esaminati (B, C) potrà essere

$$f + \varphi_1 - d \gtreqqless 0 \quad \text{se} \quad f > d - HE_1$$

e sarà

$$f + \varphi_1 - d < 0 \quad \text{se} \quad f \leqq d - HE_1.$$

Quando sia:

$$p_0 > Je_1 > p_b \geqq f > p_a \qquad (B)$$

$f + \varphi_1 - d \geqq 0$ con $d > f$ si ha

$$p_0 > Je_1 > f > p_b > p_a. \qquad (C)$$

Avendosi $f + \varphi_1 - d < 0$

$$p_f > p_0 > Je_1 > p_b \geqq f > p_a \qquad (B)$$

se $f \geqq d - HE_1$ risulta

$$p_f > p_0 > Je_1 > f > p_b > p_a \qquad (C)$$

$$p_a > p_f > p_0 > Je_1 > p_b \geqq f \qquad (B)$$

se $f < d - HE_1$ e $p_b < p_a$ è

$$p_a > p_f > p_0 > Je_1 > f > p_b \qquad (C)$$

e se $f < d - FE_1$ si ha

$$p_b > p_a > p_f > p_0 > Je_1 > f \qquad (C)$$

È agevole ora verificare che in ognuno dei casi (A, B, C) avranno immagini di ascissa $x_1 > 0$ i punti d'ascissa p del segmento $p_a p_b$ e che sarà $x_1 > \varphi_2$ per le immagini dei punti del segmento $p_f p_b$ — escluso p_f — stimati essendo, tali segmenti, nel verso XY.

II. — La lente M sia divergente.

Si avrà:

$$(18) \quad x_1 = \frac{\Delta\varphi_1(p - f) + (\varphi_1 + \Delta)(p - f)d - (\varphi_1 + \Delta)pf}{(\Delta - \varphi_2)\varphi_1(p - f) + (\varphi_1 + \Delta - \varphi_2)(p - f)d - (\varphi_1 + \Delta - \varphi_2)pf}\varphi_2.$$

Indicati con A_2', B_2' il numeratore ed il denominatore della (18) pei valori ammessi (8) per f

$$A_2' \gtreqqless 0 \qquad p \gtreqqless p_a'$$

sarà se

$$B_2' \gtreqqless 0 \qquad p \gtreqqless p_b'$$

$$p_a' = \frac{\Delta\varphi_1 + (\varphi_1 + \Delta)d}{\Delta\varphi_1 - (\varphi_1 + \Delta)(f - d)} f$$

essendo

$$p_b' = \frac{\varphi_1(\Delta - \varphi_2) + (\varphi_1 + \Delta - \varphi_2)d}{\varphi_1(\Delta - \varphi_2) - (\varphi_1 + \Delta - \varphi_2)(f - d)} f$$

e

$$p_b' > p_a' > f.$$

Posto $$V' = B_2' - A_2'$$

è $$V' = -\varphi_2[p(\varphi_1 + d - f) - f(\varphi_1 + d)].$$

Ma per la (8) è necessariamente

$$\varphi_1 + d - f > 0$$

e quindi sarà:

$$V' \gtreqless 0 \qquad \text{secondochè} \quad p \lesseqgtr \frac{\varphi_1 + d}{\varphi_1 + d - f} f$$

e se $B_2' > 0$ ed $A_2' > 0$ $\quad$ si avrà $B_2' \gtreqless A_2'$ ossia $x_1 \lesseqgtr \varphi_2$ per $V' \gtreqless 0$

 $B_2' < 0$ ed $A_2' < 0$ $\quad$ $V' \lesseqgtr 0$.

Il punto p_f'' di ascissa omonima

$$p_f'' = \frac{\varphi_1 + d}{\varphi_1 + d - f} f$$

è quello che ha per immagine F' rispetto alla lente P e nei casi nei quali

sia $Je_1 > 0$ $\quad$ riesce $Je_1 > p_b' > p_a' > p_f'' > f$

 $f < d$ $\quad$ $p_0 > Je_1 > p_b' > p_a' > p_f'' > f$.

Qui ancora, come nel caso precedente (I), è facile verificare che i punti di ascissa p del segmento $p_a' p_b'$ che ha per estremi i punti d'ascisse omonime p_a', p_b' avranno immagini di ascissa $x_1 > 0$ e che daranno immagini d'ascissa $x_1 > \varphi_2$ i punti del segmento $p_f'' p_b'$ — escluso p_f'' — stimati essendo, quei segmenti, nel verso XY.

Siccome però a valori di $p < p_f''$ rispondono valori di $D < -\varphi_1$ (9) e quindi valori di $y > \Delta$, così non vi sono segmenti corrispondenti al segmento $p_f'' f_1$.

6. — I casi compresi nel (§ 5, I, II) si possono raggruppare nel seguente modo.

I. Si può avere:

(1′) $\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta \geqq 0$ ed in ciascun caso $f + \varphi_1 - d \geqq 0$

od essere

(2′) $\varphi_1 + \Delta - \varphi_2 > 0$ con $\varphi_1 + d - f > 0$;

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

Fig. 9

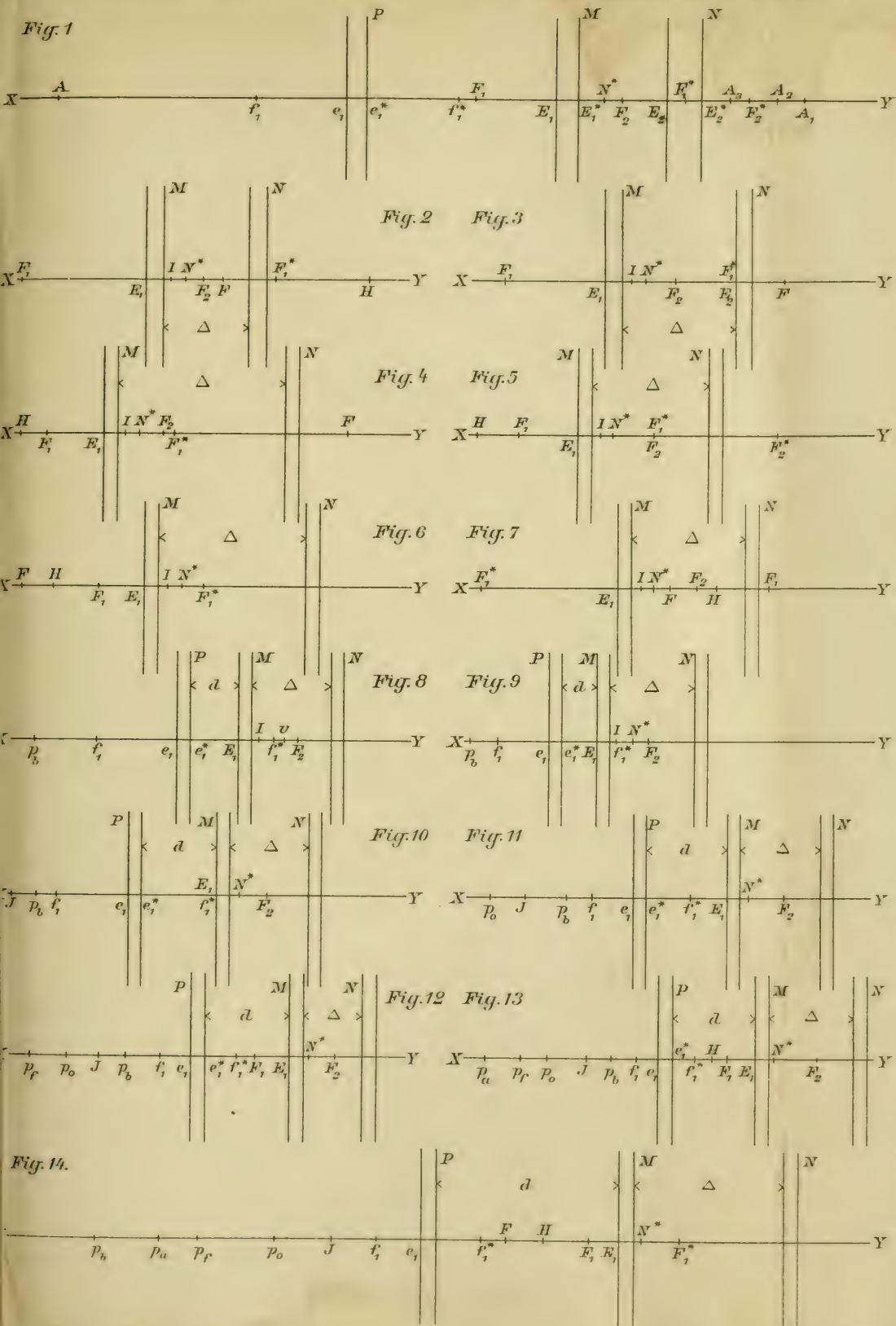
Fig. 10

Fig. 11

Fig. 12

Fig. 13

Fig. 14.

Soc. An. It. Industrie Grafiche, Torino

a) Quando sia:

$$f + \varphi_1 - d > 0 \ (1') \quad \text{o} \quad \varphi_1 + d - f > 0 \ (2')$$

potrà essere $f \gtreqless d$ e sarà

$$f < d \quad \text{se} \quad f + \varphi_1 - d = 0.$$

E così:

se $f \geqq d + E_1 I$ (Fig. 8-9) indicato con v il punto d'ascissa y (Fig. 8) corrispondente a quello d'ascissa $E_1 f_1^*$, si corrisponderanno i segmenti ∞p_b e $\begin{matrix} vF_2 \\ N^*F_2 \end{matrix}$;

se $d < f < d + E_1 I$ od $f = d$ si avranno (Fig. 10) come corrispondenti i segmenti Jp_b ed N^*F_2;

se $f < d$ ai segmenti ∞p_0, Jp_b (Fig. 11) corrisponderanno i segmenti $f_1^*E_1$, N^*F_2.

b) Se $$f + \varphi_1 - d < 0$$

finchè $p_b > p_a$ i segmenti ∞p_f; $p_f p_0$; Jp_b avranno come corrispondenti rispettivi i segmenti $f_1^*F_1$; F_1E_1; N^*F_2 (Fig. 12).

Quando sia $p_a > p_b$ (Fig. 13) avranno corrispondenza i segmenti $p_a p_f$; $p_f p_0$; Jp_b coi segmenti HF_1; F_1E_1; N^*F_2.

II. Può essere:

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta < 0$$

e qui ancora si potrà avere $f + \varphi_1 - d \gtreqless 0$.

Ai casi nei quali è $p_b < f$ rispondono quelli ora esaminati al (§ I, *a*, *b*) e però si giungerà alle stesse conclusioni colà trovate pur di mutare nei segmenti corrispondenti p_b in f_1 ed F_2 in F_1^*. Quando invece sia $p_b > p_a$ con $p_a > f$ allora (Fig. 14) i segmenti ∞p_b; $p_a p_f$; $p_f p_0$; Jf_1 avranno come segmenti corrispondenti rispettivi f_1^*F; HF_1; F_1E_1; $N^*F_1^*$.

Dall'Istituto Omar — Novara, Marzo 1908.

Su alcune ortoamino- ed ortoossi-chetoidropiridine.

Nota 1ª del Dott. GALEAZZO PICCININI.

Se durante questi ultimi quindici anni le notizie sugli amino-composti della serie piridica sono venute via via aumentando da un lato per opera del Marckwald (1), che diede un elegante metodo di sintesi delle aminopiridine, e di altri autori quali H. Meyer (2), Philips (3), Pollak (4), Blumenfeld (5), ecc., che sperimentarono con felice esito la reazione di Hofmann sulle amidi di acidi piridinici, dall'altro per gli studi di Collie (6) e allievi i quali, profittando della facilità di preparazione dei nitroderivati delle ossipiridine, ne ottennero per riduzione le corrispondenti amine; ben diversamente vanno le cose per quanto riflette le serie idropiridiniche.

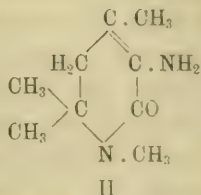
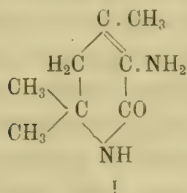
In fatto sino ad ora non si conoscono amino-derivati nè delle *di-idro-* nè delle *tetraidro-piridine*; nella serie piperidinica sono note alcune amino-basi preparate da Harries (7).

D'altra parte le ricerche di Bamberger sulle *tetraidronaftilamine* e in parte anche quelle di Noyes e Ballard sulla Δ^3-*tetraidroanilina*, hanno dimostrato che i composti aminici, come quelli che posseggono natura chimica così diversa nei corpi aromatici o alifatici, sono certamente i più adatti a portar luce sulle proprietà dei composti aliciclici.

Allo scopo di portare un piccolo contributo allo studio delle tetraidropiridine, mi sono accinto alla preparazione di amino-

(1) B. *26*, pag. 2189 e *27*, pag. 1320.
(2) M. *15*, pag. 839.
(3) B. *27*, pag. 839.
(4) M. *16*, pag. 55.
(5) M. *16*, pag. 718.
(6) J. Ch. Soc., *71*, pag. 838 e *73*, pag. 229.
(7) Ann. *294*, pag. 352-355 e Ch. C., 1898, II, pp. 1170.

composti riferibili alla serie tetraidropiridica, limitando per ora lo studio a sostanze contenenti in β- un gruppo aminico e in α un gruppo, che con la massima probabilità è chetonico; e in particolare in questa nota riferisco sulla *orto-amino-cheto*-α'α'γ-*trimetil-idropiridina* I (che per brevità chiamerò β-*aminotrimetilpiperideone*) e sull'*orto-amino-cheto-n-metil*-α'α'γ-*trimetil-idropiridina* II (β-*amino-n metil-trimetilpiperideone*):

```
           C . CH3                          C . CH3
          /\                               /\
      H2C    C . NH2                   H2C    C . NH2
CH3\   |      |                  CH3\   |      |
    >C       CO                      >C       CO
CH3/   \    /                    CH3/   \    /
         NH                               N . CH3
          I                                 II
```

Queste basi le ho ottenute, mediante la reazione di Hofmann, dalle amidi degli acidi α'α'γ-*trimetil*α*cheto-idropiridin* β-*carbonico* e *n-metil*α'α'γ-*trimetil*α*cheto-idropiridin*-β-*carbonico*, che furono descritte in una nota precedente (1) e che si preparano facilmente idrolizzando il β-*ciantrimetilpiperideone* (rispett. il suo *n-metilderivato*) con acido solforico concentrato.

Data la facilità di preparazione dei nitrili *ossi-piridinici* e *ossi-idropiridinici* più svariati, e dell'idrolisi di questi ad amidi con acido solforico concentrato, si potranno per questa via ottenere moltissimi aminoderivati delle ossi-idropiridine, che sarebbe molto più lungo e difficile avere con altri metodi.

Le due *ortoaminochetoidropiridine* suddette sono basi un po' più deboli dell'ammoniaca, non assorbono l'anidride carbonica dell'aria: precipitano l'allumina dai suoi sali. Nei sali si comportano da monoacide, come la maggior parte delle aminopiridine.

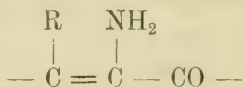
Sono basi meno energiche delle *ac-tetraidronaftilamine* e dalla Δ^3-*tetraidroanilina* e anche nel comportamento generale si allontanano molto da questi composti aliciclici per avvicinarsi in modo sorprendente a corpi alifatici non saturi strutturalmente somiglianti. Ciò è dovuto certamente alla presenza di

(1) Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLIII.

un gruppo (CO), che manca nelle dette basi alicicliche e in parte anche al fatto che in questi composti l'*amino*-gruppo è unito ad un atomo di carbonio terziario e leggermente elettro-negativo per la vicinanza del carbonile e del doppio legame.

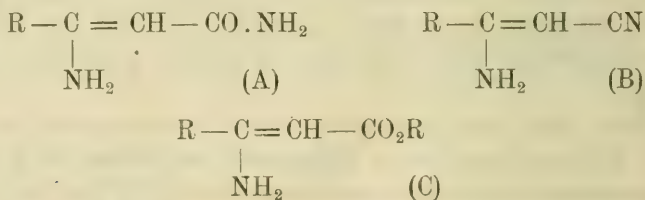
E nemmeno paragonabili con le mie basi sono le ar-tetraidronaftilamine, perchè, se in queste l' NH_2 è attaccato ad un atomo di carbonio terziario, esso si trova però in un nucleo non idrogenato; d'altra parte nella letteratura non ho trovato cenno nè della Δ'-tetraidroanilina nè degli *ortoamino-chetoderivati* dell'idrobenzene i quali ultimi composti certamente dovranno avere insieme con l'analogia di costituzione anche una forte rassomiglianza di comportamento con le orto-amino-cheto-idropiridine. Questi composti cercherò di preparare in seguito, perchè m'interessano per gli studii che ho in corso sulla mobilità del gruppo aminico nei composti ciclici.

Le peculiari proprietà delle mie basi, e in particolar modo la facilità con cui reagiscono con acido nitroso e la mobilità che ha in esse il gruppo NH_2 verso gli agenti idrolizzanti, sono dovute certamente alla presenza del gruppo

$$\begin{array}{ccc} R & & NH_2 \\ | & & | \\ -C & = & C - CO - \end{array}$$

in un nucleo idrogenato.

Proprietà del tutto uguali possiedono alcune serie di composti a catena aperta, contenenti un doppio legame e strutturalmente analoghi, quali i β-*amino-derivati* delle *amidi* (A), dei *nitrili* (B) o degli *eteri* (C):

$$\begin{array}{l} R-C=CH-CO.NH_2 \\ \;\;\;\;| \\ \;\;\;NH_2 \qquad\qquad (A) \end{array} \qquad \begin{array}{l} R-C=CH-CN \\ \;\;\;\;| \\ \;\;\;NH_2 \qquad (B) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R-C=CH-CO_2R \\ \;\;\;\;| \\ \;\;\;NH_2 \qquad\qquad (C) \end{array}$$

cosicchè l'analogia, che fu dimostrata dal Baeyer e dal Bamberger nelle serie idroaromatiche fra i composti ciclici parzialmente idrogenati e gli alifatici non saturi, riceve in questi casi

in modo sicuro e mediante reazioni eleganti una brillante conferma anche per la serie idropiridinica.

Mentre le *ac-tetraidronaftilamine* e la Δ^3*tetraidroanilina* danno con l'acido nitroso dei sali (non molto stabili, come hanno osservato Noyes e Ballard (1)) paragonabili ai nitriti di alcune amine di tipo:

$$\begin{matrix} R \\ R' \end{matrix} \!\! > CH - NH_2$$

che sono instabili in soluzioni concentrate a temperature poco superiori all'ordinaria, più stabili in soluzioni molto diluite (2), i miei β-amino composti in soluzione, contenenti anche solo 1 % di acido solforico e 0.2 — 0.3 % di sostanza, si scompongono quantitativamente già a freddo in pochi minuti con acido nitroso, dando azoto e β-ossi-composti corrispondenti.

Una notevole influenza sul modo di comportarsi dell'aminogruppo verso l'acido nitroso la esercita certamente anche il nucleo piridinico per sè, perchè per molte aminopiridine è difficile limitare l'azione dell'acido nitroso e preparare i diazocomposti. Tuttavia Marckwald ha stabilito che le α- e γ-*aminopiridine* svolgono azoto e si trasformano in ossipiridine solamente facendo agire l'acido nitroso sulla soluzione delle basi in acidi concentratissimi, mentre in soluzioni diluite non avviene la diazotazione: d'altra parte lo stesso A. osservò che le β-*aminopiridine* si diazotano regolarmente, e il Pollak più tardi ottenne la scomposizione della β-aminopiridina in β-ossipiridina solo scaldando quella base a 100° con acido nitroso.

Ora nei miei composti il gruppo aminico, pure essendo situato in β, è instabilissimo in presenza di acido nitroso, come in genere è per le amine alifatiche.

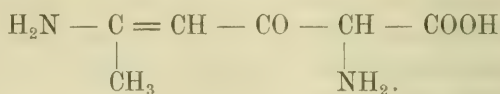
Ma più curiosa e interessante è la mobilità dell'NH_2 in queste aminochetoidropiridine in presenza di agenti idratanti.

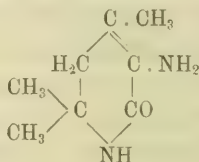
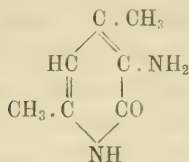
Mi basti accennare per ora (in seguito darò maggiori particolari su questo argomento, che sto studiando) che le due basi in soluzione acquosa svolgono ammoniaca già a temperatura

(1) B. *27*, pag. 1449.
(2) Am. Ch. J., *15*, pag. 539.

ordinaria, scambiando l'aminogruppo con un ossidrile. E la medesima trasformazione subiscono i loro cloroplatinati per semplice ricristallizzazione dell'acqua bollente leggermente acida per acido cloridrico.

Questa reazione, nelle condizioni in cui si effettua, non è paragonabile con la trasformazione, osservata da Collie e Lapworth (1), della β-*aminodiossi*-α-*picolina* in *triossipicolina*, tanto più che la *cosidetta* β-aminodiossiα-picolina, anche secondo gli AA., funziona in tutto come un acido di-aminico di costituzione:

```
H2N — C = CH — CO — CH — COOH
      |             |
      CH3           NH2.
```

Se si pensa poi che il β-*aminopseudolutidostirile* di Collie e Tickle, a quanto asseriscono gli AA., non subisce la trasformazione che ho accennato per le ortoamino-chetotrimetil-idropiridine, paragonandone le formule di costituzione:

```
          C . CH3                         C . CH3
         /  \                            /  \
      HC      C . NH2                H2C      C . NH2
      ||      |                 CH3\  |       |
 CH3 . C      CO                    >C        CO
         \  /                   CH3/   \    /
          NH                             NH
```

si è condotti naturalmente ad ammettere, che il comportamento speciale delle due basi, da me preparate, sia dovuto all'essere idrogenato il nucleo.

In condizioni analoghe, invece, i β-*aminoderivati* delle *amidi* (A), *nitrili* (B), *eteri* (C) (citati a pag. 5) s'idrolizzano, cedono ammoniaca, trasformandosi in amidi-, nitrili-, eteri-β chetonici.

L'analogia completa fra le mie basi e questi composti non saturi alifatici dimostra che nei composti ciclici idrogenati i singoli gruppi, che fanno parte del nucleo, conservano una funzionalità molto simile a quella che avrebbero, se essi fossero contenuti in composti a catena aperta strutturalmente analoghi.

---

(1) Loco citato.

I.

Preparazione
della o-amino-cheto α′α′γ-trimetil-idropiridina.

Le varie esperienze fatte allo scopo di ottenere questa base, usando soluzioni variamente concentrate di ipobromito, mi portano a concludere che il metodo, che dà maggior rendimento, è il seguente: Gr. 21 dell'amide dell'acido γ-α′α′*trimetil*-α-*piperideon* β-*carbonico* in polvere finissima sono sciolti in circa 200 cm^3 di acqua; al liquido si aggiunge a poco a poco la soluzione di ipobromito, preparata al momento dell'esperienza sciogliendo gr. 18,7 di Br. in 250 cm^3 di potassa caustica al 10 % mantenuta ben fredda.

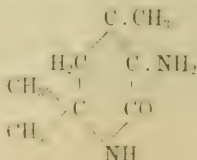
L'ipobromito agisce subito e la soluzione si scolora rapidamente con svolgimento di calore: il bromo è tutto assorbito in pochi minuti. Prove fatte per separare la bromoamide con acido acetico, hanno dato resultato negativo; questa deve essere molto solubile nell'acqua; come non interessava a me separare questo composto, non me ne sono occupato particolarmente.

La soluzione, scaldandosi da sè, da incolora diviene a poco a poco di un bel color rosso chiaro. Si scalda a b. m. bollente per 10-15 minuti oppure $^1/_4$ d'ora in corrente di vapore. Nel distillato, in tal caso, passa una piccola quantità di ammoniaca.

La soluzione ben raffreddata con acqua e ghiaccio si estrae indi dibattendo 12-15 volte con doppio volume di etere. L'etere asciugato con solfato di sodio anidro e distillato lascia in complesso un residuo cristallino che, così greggio, pesa gr. 11-12 e fonde già verso 126°.

Per cristallizzazione dal benzene bollente si ha una sostanza ben pura e fondente a 130°-131°. Il rendimento è di 9,5 gr. di questa base purissima. Nel benzene rimane una sostanza oleosa di cui forse avrò occasione di rioccuparmi.

Ortoamino-cheto-α′α′γ-*trimetil-idropiridina* $C_8H_{14}N_2O$ (β-*amino-trimetilpiperideone*):

```
                C.CH3
               /
          H2C     C.NH2
   CH3      |       |
      \    C      CO
   CH3        \  /
               NH
```

È in cristalli prismatici friabili, leggermente fluorescenti in azzurro.

Fonde costantemente a 130°-131°, se scaldata regolarmente.

A 100° non subisce alterazione, si mantiene bianchissima e non perde di peso.

All'analisi la sostanza secca a 100° diede:

I. Gr. 0,1228 = cm³ 19.7 N a 16° e 737 mm,

II. Gr. 0,1247 = gr. 0,2856 CO_2 e gr. 0,1018 H_2O,

di cui

C	%	62.46
H	„	9.07
N	„	18.17

per il β-aminotrimetilpiperideone $C_8H_{14}N_2O$ si calcola

C	%	62.33
H	„	9.09
N	„	18.18.

Molto solubile negli ordinari solventi: può cristallizzare bene dall'acqua: si scioglie poco in etere, pochissimo in etere di petrolio e nelle soluzioni alcaline concentrate.

In soluzione acquosa ha forte reazione alcalina: gr. 0,1912 di base richiesero gr. 0,0401 di HCl per la neutralizzazione (indicatore metilarancio). La titolazione deve essere fatta con cautela perchè il passaggio al color roseo è un po' graduale.

trovato HCl % 20.96

per $C_8H_{14}N_2O + HCl$ si richiederebbe HCl % 23.6; cosicchè il liquido è acido all'indicatore quando solo 88,7 % dell'acido cloridrico calcolato è rimasto combinato con la base.

Indirettamente con questo metodo si avrà la misura del grado di idrolisi dei sali, giacchè le determinazioni di conducibilità elettrica non mi furono possibili in causa della alterabilità della sostanza.

Non è volatile con vapor d'acqua.

Si altera facilmente all'aria specialmente sotto l'influenza della luce; in essiccatori di vetro rosso si conserva bene anche per dei mesi.

In soluzione acquosa precipita l'allumina dai suoi sali: non sposta invece la magnesia; con i sali di nickel dà una colorazione azzurro-verde dovuta forse alla formazione di qualche complesso solubile.

Nelle soluzioni concentrate di cloruro mercurico forma un precipitato bianco, che non fu esaminato. Con i sali di rame anche diluitissimi dà un'intensa colorazione azzurra, come in genere fanno gli amino-acidi della serie grassa.

Il cloruro ferrico colora in rosso-ranciato, poi in rosso-sangue intenso le soluzioni della base; lasciando a sè 2-3 giorni e acidulando con acido cloridrico si manifesta una bella colorazione azzurra o azzurro-verde, dovuta al β-ossi-composto, che si è formato in questo tempo.

Con reattivi ossidanti, quali bicromato e H_2SO_4 concentrati, o acido nitrico e solforico, o ferricianuro di potassio non dà colorazioni.

In soluzione di alcali caustici si colora leggermente in roseo.

Riduce a caldo subito il reattivo di Fehling, a freddo nemmeno dopo 2-3 giorni; riduce il nitrato d'argento ammoniacale (e anche in soluzione neutra) a freddo un po' lentamente, rapidamente già a 30°-40°, formando un bello specchio, come le aldeidi; riduce in soluzione cloridrica l'acido cromico, dando un liquido colorato in violetto.

La soluzione cloridrica, preparata di recente, precipita con la maggior parte dei reattivi degli alcaloidi; a freddo l'acido fosfomolibdico e fosfotungstico sono ridotti subito; alcalinizzando con ammoniaca le soluzioni, nelle quali sono precipitati i relativi sali, si ha intensa colorazione azzurra.

La soluzione acquosa con poche goccie di acido cloridrico, 1-2 goccie di fenolo, poi ipoclorito di calcio dà un intorbidamento e colorazione rossa; alcalinizzando con ammoniaca si ottiene una colorazione verde-azzurra non molto intensa. (Reazione dell'indofenolo).

Non si colora con ipoclorito di calcio.

Cloroplatinato $(C_8H_{14}N_2O)_2 . H_2PtCl_6$. — Si precipita la soluzione della base in HCl (quantità corrispondente a 2 mol. per 1 mol. di base) con eccesso di acido cloroplatinico (sol. al 10 %), si filtra e si lava varie volte con acqua sul filtro. Il sale deve

essere raccolto dopo poco tempo che fu precipitato, altrimenti si corre rischio di avere una mescolanza di cloroplatinato della base e di ammonio.

Secco all'aria fonde scomponendosi a 235°. Al microscopio si presenta in prismi irregolari.

Non può essere cristallizzato senza decomposizione. Il sale secco all'aria e a 100° diede all'analisi:

Gr. 0,3144 = gr. 0,0858 di Pt

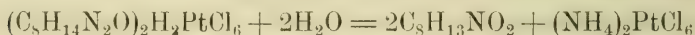
	trovato	calcolato per $(C_8H_{14}N_2O)_2H_2PtCl_6$
Pt °/₀.	27.29	27.14

Se si cristallizza dall'acqua bollente, acidulata con acido cloridrico, per raffreddamento si ottiene un sale in bellissimi ottaedri. che non fonde più sotto 300° e che l'analisi dimostrò essere cloroplatinato di ammonio; infatti:

Gr. 0,214 diedero gr. 0,0936 di Pt

	trovato	calcolato per $(NH_4)_2PtCl_6$
Pt °/₀	43.73	43.92

Evaporando a secco la soluzione, da cui fu separato il cloroplatinato di ammonio, e riprendendo il residuo con alcool assoluto, in questo si scioglie una sostanza fond. a 138°-140° circa, che si colora intensamente in azzurro ed altro non è che il β-ossicomposto formatosi secondo la equazione:

$$(C_8H_{14}N_2O)_2H_2PtCl_6 + 2H_2O = 2C_8H_{13}NO_2 + (NH_4)_2PtCl_6$$

Azione dell'acido nitroso sul β-amino-trimetilpiperideone.

La decomposizione del β-aminotrimetilpiperideone fu fatta in un piccolo apparecchio, pieno di anidride carbonica pura, e disposto in modo che il gas svolgentesi nella reazione si lavasse passando attraverso a una soluzione satura di solfato ferroso e ad una alcalina di permanganato potassico prima di raccogliersi nell'azotometro, montato come nell'analisi con il metodo Dumas.

A gr. 0,1542 (1 mol.) di sostanza sciolta in 30 cm^3 di acqua, si aggiunsero cm^3 5 di H_2SO_4 al 10 °/₀ circa e indi 5 cm^3 di soluzione di nitrito sodico al 2 °/₀ (quantità un po' superiore

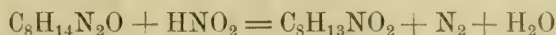
della teorica). Appena il nitrito viene in contatto delle soluzioni si ha un'effervescenza, come se si aggiungesse un acido a un carbonato, e dopo pochi minuti la reazione è terminata, come si può dedurre spostando tutto il gaz azoto con una corrente di anidride carbonica. I risultati ottenuti in due esperienze condotte nelle stesse condizioni sono:

I. Gr. 0,1542 di base diedero cm^3 21.12 di gas azoto puro a 0° e 760 mm,

II. Gr. 0,1542 di base diedero cm^3 22.98 di gas azoto puro a 0° e 760 mm.

Teoricamente se ne dovevano svolgere cm^3 22.45.

Tuttavia questo metodo non serve bene per la preparazione dell'ortoossichetoidropiridina che si genera secondo l'equazione:

$$C_8H_{14}N_2O + HNO_2 = C_8H_{13}NO_2 + N_2 + H_2O$$

perchè dalle soluzioni acquose acide, neutre o leggermente alcaline questo composto non si estrae che difficilmente con etere; ed evaporando le soluzioni a b. m. si perde del composto che è volatile col vapor d'acqua.

II.

Preparazione della o-aminocheto $\alpha'\alpha'\gamma$-trimetil-n-metilidropiridina.

Il β-*amino-n-metil-trimetilpiperideone* è un po' più difficile a prepararsi e ottenersi puro, sia per causa della più facile decomponibilità sia per la sua gran solubilità nei comuni solventi. Ho dovuto far numerose prove, per avere in fine un discreto rendimento in prodotto puro. Alcuni AA. come Blumenfeld ed altri, consigliano di usare l'ipobromito di potassio in soluzione molto diluita, e in presenza di una quantità rilevante di potassa caustica; altri, infine, usano proporzioni di bromo molto maggiori di quella che è prescritta secondo il metodo classico di Hofmann. Io ho provato a diluire le soluzioni di ipobromito e aggiungere un eccesso d'alcali, sia a mettere in reazione una quantità di Br. corrispondente a 2 mol. per 1 mol. di amide, ma i risultati sono sempre stati peggiori, che col metodo che ho seguìto più tardi e cioè il seguente:

Gr. 15 di amide dell'acido *n-metil-α'α'γ-trimetil α-piperideon β-carbonico* finamente polverizzata sono sospesi in circa 150 cm^3 di acqua: a questo liquido si aggiunge in due porzioni una soluzione fresca di ipobromito di potassio, fatta sciogliendo a freddo gr. 14 di Br. in 160 cm^3 di KOH al 10 $^0/_0$. L'amide si scioglie rapidamente e il liquido dopo pochi minuti è incoloro; nello stesso tempo si ha forte svolgimento di calore: la temperatura s'innalzò, in un'esperienza, da + 12° a + 35°. Si scalda poi a b. m. bollente per circa $^1/_4$ d'ora oppure 15-20 minuti in corrente di vapore; in tali condizioni passa nel distillato ammoniaca in piccole quantità, ma in modo continuo attestando una decomposizione, che avviene in seno al liquido, (forse trasformazione del *β-amino-n-metiltrimetilpiperideone* nel corrispondente *β-ossicomposto*). Anche scaldando per soli 10 minuti in corrente di vapore si ha una scomposizione di circa 10 $^0/_0$ dell'amide primitiva.

Si raffredda con acqua e ghiaccio e si estrae il liquido alcalino con il triplo volume di etere, avendo cura di ripetere 8-10 volte le estrazioni, farle nel minor tempo possibile e raccogliere a parte i residui che lasciano gli ultimi estratti eterei, perchè meno puri.

L'etere deve essere rapidamente seccato con solfato di sodio anidro, non con potassa caustica, perchè questa altera la base, l'etere si fa torbido e si colora in roseo.

Gli estratti eterei distillati a bassa temperatura svolgono sempre piccole quantità, percettibili, di ammoniaca; infine quando sono già molto concentrati, lasciano deporre per raffreddamento tenue quantità di una sostanza cristallina, che deve essere separata; questa fonde verso 137°; non ho potuto ancora ben caratterizzarla, perchè si forma in piccolissima quantità.

Si finisce di evaporare l'etere su acido solforico nel vuoto in essiccatore, dove sia presente anche qualche pezzetto di potassa caustica.

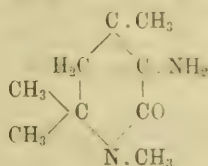
In tal modo da gr. 15 di amide si hanno gr. 10-11 di prodotto cristallino greggio, da cui per pressione fra carta si estrae una porzione oleosa di cui riferirò in altra occasione.

Il *β-amino-trimetil-n metilpiperideone* rimane ben cristallino e fondente a 55°-56°. Da gr. 10 di prodotto greggio se ne hanno così gr. 7-7.5 cioè circa il 50 $^0/_0$ dell'amide adoprata.

Sciogliendolo in poco etere ed evaporando, non completamente, su acido solforico, sebbene con una certa difficoltà, si può averlo in cristalli prismatici incolori, che si lavano rapidamente con poco etere, e si asciugano sempre in essiccatore ad acido solforico.

In questo modo si perde un po' di sostanza, ma questa si ha abbastanza bella e ben pura; durante i successivi trattamenti i residui eterei si colorano sempre più in giallo e rimangono inquinati di sostanza oleosa.

*Ortoamino-cheto-*α'α'γ *trimetil-n-metil-idropiridina* (β*-amino-n-metil-*α'α'γ *trimetil-*α*-piperideone*) $C_9H_{16}N_2O$:

```
               C.CH3
              /    \
          H2C        C.NH2
  CH3\     |         |
      >C             CO
  CH3/     \        /
              N.CH3
```

Questa base è in cristalli prismatici duri, incolori o solo leggermente giallognoli, un po' fluorescenti. Secca nel vuoto su H_2SO_4, fonde costantemente a 60°-61°.

È anidra. Lasciata lungo tempo in essiccatore su potassa caustica si colora prima in giallo, poi in ranciato e si fa molle e un po' pastosa.

Questo avviene anche in essiccatori di vetro rosso. Si mantiene meglio in essiccatori su acido solforico conc. e nel vuoto.

All'aria assorbe l'umidità e diviene pastosa; allora comincia a svolgere ammoniaca e in breve tempo la base subisce una notevole scomposizione.

Anche distillandola a pressione ordinaria si scompone, svolge grandi quantità di ammoniaca e infine passa fra 257°-260° una miscela di basi a forte odore viroso, mentre nel palloncino rimane un forte residuo carbonoso.

La base cristallizzata dall'etere e ben secca diede all'analisi:

I. Gr. 0,111 = cm^3 16.4 di N a 15° e 732^{mm},

II. Gr. 0,1361 = gr. 0,1157 H_2O e gr. 0,3215 CO_2

da cui

C	%	64.42
H	„	9.44
N	„	16.70.

La determinazione del peso molecolare col metodo crioscopico (solvente benzene) diede:

Sostanza . . .	gr.	0,3446
Benzene	„	15,62
P. F. solvente	„	2°,305
P. F. soluzione	„	1°,67
Δ =	„	0°,635
P^{m} trovato =		173,7.

per il β-amino-trimetil-n-metil-piperideone $C_9H_{16}N_2O$ si calcola:

C %	64.19
H „	9.51
N „	16.64

Peso molecolare = 168.

Solubilissima nei comuni solventi organici, tranne che in etere di petrolio; dalle soluzioni benzeniche con etere di petrolio si ha oleosa oppure solida un po'pastosa; questa miscela di solventi non conviene per la cristallizzazione.

Si scioglie poco nelle soluzioni alcaline concentrate.

Non è volatile con vapor d'acqua.

Reagisce fortemente alcalina al tornasole. Precipita l'idrato d'alluminio dai suoi sali; precipita anche con soluzioni concentrate di sali mercurici.

I. Gr. 0,1018 di base richiesero gr. 0,0176 di HCl per la neutralizzazione

II. Gr. 0,3207 richiesero gr. 0,0559 di HCl, sempre usando il metilarancio.

trovato HCl % I 17.42 II 17.42

mentre per $C_9H_{16}N_2O + HCl$ si calcola HCl % 21.7; il liquido si mostra acido quando si è aggiunto solo 80,2 % circa dell'acido calcolato.

È base monoacida; non potei ottenere il cloridrato $C_9H_{16}N_2O + HCl$ perchè la sostanza si scompone rapidamente in presenza dell'acido cloridrico.

In soluzione acquosa, o acida (anche per acido tartarico) si scompone abbastanza rapidamente dando ammoniaca e il

β-ossi-derivato; la reazione che è molto dimostrativa può divenire anche un metodo di preparazione di questo β-ossi-derivato.

Dà le medesime reazioni di riduzione, già accennate a pag. 10, per il composto non metilato all' azoto, con nitrato d'argento ammoniacale, con il liquido di Fehling, con l'acido iodico (a freddo un po' lentamente), con gli acidi fosfo-molibdico e -tungstico. Lo stesso sia detto, per quanto concerne le reazioni con cloruro ferrico, solfato di rame diluitissimo, e la reazione dell'indofenolo.

Anche con l'acido nitroso si comporta analogamente alla base non metilata all'azoto: da gr. 0,149 di base in 40 cm^3 di acqua, aggiungendo cm^3 5 di acido solforico al 10 % e 2 cm^3 di soluzione (al 10 %) di nitrito sodico ebbi cm^3 19.3 di gas azoto puro, corretto a 0° e 760^{mm}. La quantità teorica era cm^3 19.7. La reazione dunque avviene, si può dire, quantitativamente, anche in liquidi molto diluiti. Questo metodo non è molto conveniente per la preparazione del β-*ossi-trimetil-n-metilpiperidcone* per le ragioni accennate a pag. 12.

Cloroplatinato $(C_9H_{16}N_2O)_2.H_2PtCl_6 + H_2O$. — È il sale che si ha precipitando con cloruro di platino (sol. al 10 %) la soluzione lievemente acida della base pura. Si lava varie volte con acqua e si asciuga all'aria. Fonde scomponendosi a 196°-197°. All'analisi diede:

I. Gr. 0,1479 diedero cm^3 9.2 di N a 13° e 751^{mm}.

II. Gr. 0,2559 persero a 100° gr. 0,0062 e lasciarono gr. 0,0645 di Pt.

III. Gr. 0,249 persero a 100° gr. 0,0053 e lasciarono gr. 0,0639 di Pt.

IV. Gr. 0,2106 diedero gr. 0,235 di AgCl = gr. 0,0582 di Cl.

	trovato		calcolato per $(C_9H_{16}N_2O)_2H_2PtCl_6+H_2O$
H_2O %	2.42 ;	2.12	2.35
Pt „	25.2 ;	25.66	25.5
Cl „	27.63		27.88
N „	7.3		7.3

Dalle soluzioni, da cui fu separato il sale, per lunga dimora e concentrazione si depositano poco a poco dei bellissimi ottaedri di cloroplatinato di ammonio. E lo stesso sale si ottiene se si tenta di ricristallizzare il cloroplatinato della base dall'acqua bollente acida per HCl. Il cloroplatinato ottenuto per ricristallizzazione diede:

Gr. 0,1336 = gr. 0,0588 di Pt.

da cui

Pt % 44.01

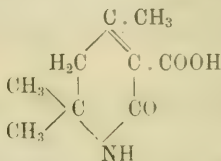
mentre per $(NH_4)_2PtCl_6$ si calcola

Pt % 43.89

Nel liquido acido rimane sciolto il β-*ossi-trimetil-n-metil-piperideone.*

Riassumendo risulta che anche nella serie idropiridinica la reazione di Hofmann può essere messa in pratica con buon risultato per la preparazione degli amino-composti e nei casi da me studiati non ebbi a notare che si formassero amino-composti bromurati nel nucleo. Confrontando questi amino-piperideoni con acidi e basi ossidropiridiniche della stessa serie, si vede che i gruppi uniti al carbonio terziario in β sono dotati di una grande mobilità.

Infatti in un lavoro precedente (1) ho osservato che nell'acido

```
                C . CH3
               /  \\
          H2C       C . COOH
   CH3\    |        |
       >C           CO
   CH3/    \       /
              NH
```

e nel suo n-metil-derivato, il carbossile si stacca con grande facilità dal nucleo (già ad es.: per semplice evaporazione delle soluzioni dei sali alcalini a b. m. bollente), mentre in genere gli acidi *ossi-* e *diossi-piridin-*β-*carbonici* si scompongono solo a temperature più elevate e in presenza di acidi concentrati.

(1) " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino „, vol. XLIII.

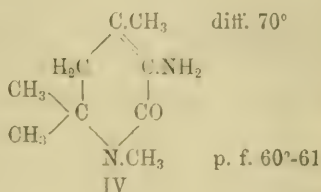
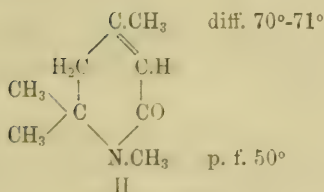
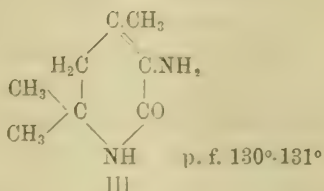
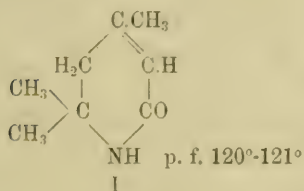
Queste *orto-aminochetoidropiridine* funzionano in tutto come basi non sature a catena aperta e danno anche le reazioni degli amino-acidi della serie alifatica, come la riduzione dei sali mercurosi, la colorazione con cloruro ferrico e con solfato di rame anche diluitissimo.

D'altra parte si assomigliano anche agli aminofenoli; con questi hanno in comune, ad es., la reazione dell' indofenolo.

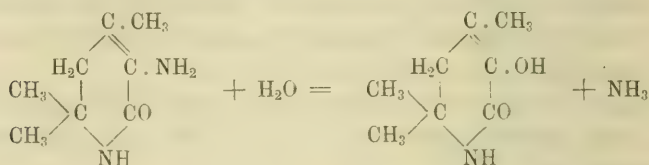
Notevole è infine il forte potere riducente di queste due basi, dovuto probabilmente a piccole quantità dei β-ossicomposti che si generano nelle condizioni di reazione.

Degna di nota è la relazione che esiste fra i punti di fusione delle cheto-idropiridine I e II e delle orto-amino-cheto-idropiridine III e IV

```
              C.CH3                                  C.CH3
             /  \\                                  /  \\
         H2C      C.H                          H2C      C.NH2
 CH3\     |       |                    CH3\     |       |
     >C           CO                       >C           CO
 CH3/     \      /                     CH3/     \      /
              NH      p. f. 120°-121°                NH        p. f. 130°-131°
              I                                      III

              C.CH3      diff. 70°-71°              C.CH3      diff. 70°
             /  \\                                  /  \\
         H2C      C.H                          H2C      C.NH2
 CH3\     |       |                    CH3\     |       |
     >C           CO                       >C           CO
 CH3/     \      /                     CH3/     \      /
              N.CH3       p. f. 50°                  N.CH3      p. f. 60°-61
              II                                     IV
```

e cioè: 1° i composti n-metilati all'azoto fondono 70 gradi più basso; 2° i composti contenenti l'amido-gruppo in β- fondono 10-11 gradi più alto delle corrispondenti cheto-idropiridine. Sarà interessante stabilire se questa relazione sussiste anche per altri composti analoghi.

A proposito delle proprietà di due ortoaminochetoidropiri-dine ho accennato che queste basi a temperatura ordinaria in presenza di acqua o, meglio ancora, di soluzioni diluite di acido cloridrico si trasformano molto facilmente nei corrispondenti ortoossicheto-composti. La reazione curiosissima e molto interessante, che, per la *ortoaminocheto*-α′α′γ-*trimetil-idropiridina* può essere rappresentata dall'equazione:

```
              C.CH3                               C.CH3
             /    \                              /    \
          H2C      C.NH2                      H2C      C.OH
   CH3\    |       |        + H2O =    CH3\    |       |        + NH3
       >C        CO                        >C        CO
   CH3/    \    /                      CH3/    \    /
             NH                                  NH
```

mi ha permesso di preparare la *orto-ossicheto-trimetil-idropiridina* e il suo n-metilderivato in modo elegante e molto dimostrativo.

Questa importante reazione, che ha qualche punto di analogia con la trasformazione delle nitroaniline o del trinitroamidobenzene in nitrofenoli e in acido picrico, sarà sperimentata su altri corpi per stabilire se è generale per le *ortoaminochetoidropiridine* e se può estendersi a composti analoghi nelle serie idrogenate del benzene, perchè date le innumerevoli applicazioni degli aminocomposti, è molto importante fissare sin dove può arrivare la mobilità dell'amino-gruppo dipendentemente dai gruppi presenti nella molecola.

Pur riservandomi di dare in seguito più ampie notizie, credo poter dire già sin d'ora che la trasformazione avvenga per un semplice fenomeno d'idrolisi senza rottura del nucleo. Resta a stabilire se la reazione è reversibile, come è facile ipotetizzare *a priori* e come farebbero indurre le esperienze di Merz sulla preparazione delle amine aromatiche dai fenoli, e, nel caso, in quali condizioni, utilizzando la reazione inversa, si potranno preparare gli amino- dai corrispondenti ossi-composti.

Noto di passaggio, che queste ortoossichetoidropiridine da me preparate sono i primi composti di-ossigenati della serie tetraidropiridinica contenenti il doppio legame in β-γ, e che di composti simili, nelle serie di-idropiridinica, è nota solamente la *trimetilcheto-ossi-di-idropiridina* $C_8H_{11}NO_2$, di Conrad e Gast (1)

(1) B. *31*, pag. 1342.

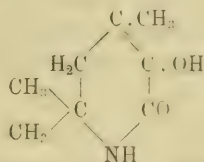
la quale differisce dalla mia *ortoossicheto*-$\alpha'\alpha'\gamma$-*trimetil-idropiridina*, oltre che per contenere due atomi di idrogeno in meno, anche per la diversa disposizione dei gruppi.

Per la preparazione delle suddette ortoossichetoidropiridine si può operare in due modi: 1° La *ortoaminochetoidropiridina* è sciolta in pochissima acqua e la soluzione è lasciata a sè sotto una campana in presenza di un becher contenente acido solforico titolato; subito principia a svolgersi l'ammoniaca e dopo 3-4 giorni nel liquido limpido si formano dei bellissimi cristalli che aumentano via via. La reazione dapprima piuttosto veloce, diminuisce di velocità coll'andar del tempo; ma dopo 20-25 giorni, se la soluzione è molto concentrata, è praticamente finita. Si raccoglie la sostanza, e si ha già quasi pura, se si parte dalla base aminica pura; si può ricristallizzare con le avvertenze che saranno accennate caso per caso.

2° Si scioglie la base in acido cloridrico 2 volte normale in modo che per 1 mol. di base sieno presenti 2 mol. di acido e si lascia a sè per circa 4-5 giorni alla temperatura di 25°.

La ortoossichetoidropiridina cristallizza così benissimo in seno al liquido e si può separare per filtrazione. Con i due metodi si ottiene un buon rendimento di prodotto.

Orto-ossi-cheto-$\alpha'\alpha'\gamma$-*trimetilidropiridina* (β-*ossitrimetil* α-*piperideone*) $C_8H_{13}NO_2$

```
                 C.CH3
                /     \
            H2C        C.OH
      CH3 \  |         |
           >C          CO
      CH3 /   \       /
                 NH
```

Si ottiene facilmente coi due metodi descritti con un rendimento del 90-95 % del teorico. Si può avere più rapidamente svaporando a b. m. bollente le soluzioni cloridriche della *orto-amino-chetotrimetil-idropiridina*, allora se ne perde una certa quantità nell'evaporazione, perchè questa sostanza è volatile con vapor d'acqua.

Ricristallizzato dall'acqua bollente è in belle fogliette splendenti che fondono costantemente a 143°. È anidro; a 100° non si scompone e non perde di peso.

All'analisi la sostanza secca a 100° diede:

I. Gr. 0,114 = cm³ 9.2 di N a 19° e 742^{mm}

II. Gr. 0,1996 = gr. 0,1515 di H_2O e gr. 0,451 di CO_2

	trovato	calcolato per $C_8H_{13}NO_2$
C °/₀	61.62	61.87
H „	8.38	8.46
N „	9.09	9.04

Non è molto solubile in acqua a freddo, molto più a caldo; in benzene e alcool è solubilissimo a caldo, in acetone anche a freddo. Poco solubile in etere sia a freddo che a caldo.

La soluzione acquosa ha reazione neutra.

Non forma sali con gli acidi minerali energici nelle condizioni ordinarie, e anche dalle soluzioni in acido cloridrico concentrato caldo per raffreddamento si depone inalterato.

La soluzione acquosa, satura a freddo, non si colora col reattivo di Millon; con soluzione di solfato di rame si colora in verde giallo; con acqua di bromo non dà precipitato, ma scolora il reattivo; non precipita con acetato di piombo.

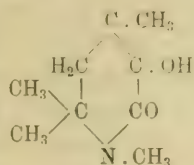
Con cloruro ferrico si colora in bleu intenso, e la colorazione si mantiene anche in presenza di molto acido cloridrico, purchè sia diluito; con poco acido cloridrico concentrato passa al verde oliva e al giallo; diluendo riappare la colorazione azzurra. La reazione è così sensibile, che può essere data anche da frazioni di milligrammo della sostanza sciolta in 2-3 cm³ di acqua.

La sostanza scaldata con potassa caustica concentrata, in presenza di cloroformio, dà colorazione ranciata, poi rossa.

Più interessante è il potere riduttore di questo composto: riduce già a freddo il nitrato d'argento ammoniacale, e a caldo rapidamente il reattivo di Fehling; riduce l'acido iodico piuttosto lentamente a freddo, rapidamente invece l'acido fosfomolibdico e fosfotungstico.

Precipita con alcuni dei più sensibili reattivi degli alcaloidi, quali appunto i due acidi predetti, e il ioduro di potassio iodurato; non dà precipitato con acido cloroplatinico e picrico.

Ortoossicheto-α'α'γ-*trimetil-n metil-idropiridina* (β-*ossi-trimetil-nmetilpiperideone*) $C_9H_{15}NO_2$

```
           C . CH3
          /    \
     H2C        C . OH
CH3\  |         |
    >C          CO
CH3/   \      /
         N . CH3
```

Si prepara come ho accennato precedentemente dalla *orto-aminocheto*-α'α'γ-*trimetil-n-metilidropiridina*. Il rendimento è buono e il prodotto che si ottiene con i due metodi è già quasi puro.

Anche in presenza di acidi organici non molto forti, quali il tartarico, la *ortoaminochetotrimetil-n-metilidropiridina* subisce la stessa idrolisi e trasformazione in ortoossi-derivato. In una delle molte prove fatte per purificare la base aminica tentai di prepararne il tartrato sciogliendo la base in poca acqua e aggiungendovi una soluzione concentrata di acido tartarico in modo che per 1 mol. di base fosse presente 1 mol. di acido. Evaporando nel vuoto su acido solforico dopo 2 giorni ottenni un sale acido, che ricristallizzato varie volte dall'acqua, aveva tutti i caratteri del tartrato acido di ammonio; era anidro non fondeva ma si scomponeva a 245°-250° e all'analisi diede:

Gr. 0,1704 = cm^3 12.7 di N a 18° e 734 mm da cui:

N % 8.33

mentre per il tartrato acido di ammonio si calcola N % 8.38.

Il liquido da cui fu separato questo sale, neutralizzato con carbonato di sodio e dibattuto con etere, cedè a questo l'*ortoossichetoidropiridina* f. a 95°.

Ricristallizzata dall'alcool molto diluito è in aghetti incolori bellissimi che fondono a 95° in un liquido incoloro. È anidra.

All'analisi il composto ben secco nel vuoto su acido solforico diede:

I. Gr. 0,1205 = cm^3 8,7 di N a 15°5 e 740 mm

II. Gr. 0,1298 = gr. 0,303 di CO_2 e gr. 0,1058 H_2O

da cui:

C %	63.67
H „	9.00
N „	8.23

La determinazione del peso molecolare col metodo crioscopico (solvente benzene) diede:

p	P	C	Δ	Peso molecolare trovato
Gr. 0,1392	gr. 20.98	0,663	0°225	147.5
„ 0,2259	„	1,076	0°345	155.2
„ 0,3498	„	1,667	0°505	165.1
„ 0,3989	„	1,901	0°565	168.2

mentre per il β-*ossi-trimetil-n-metilpiperideone* $C_9H_{15}NO_2$ si calcola:

C %	63.90
H „	8.87
N „	8.28

Peso molecolare = 169

Solubile in alcool assoluto, benzene, acetone, poco solubile in etere e meno ancora in acqua.

La soluzione acquosa ha reazione neutra.

Si scioglie bene in acqua in presenza di alcali o di acidi forti.

È volatile col vapor d'acqua.

Con poco cloruro ferrico la soluzione si colora in violaceo, con eccesso di reattivo la colorazione passa all'azzurro-bleu intenso; aggiungendo acido cloridrico concentrato a poco a poco si ha una serie di colori cominciando dal verde azzurro, verde smeraldo, per arrivare al verde oliva; pochi milligrammi di sostanza necessitano una considerevole quantità di HCl conc. perchè si abbia questo passaggio.

Se si diluisce con circa doppio volume di acqua la soluzione verde oliva, ricompare la colorazione azzurra intensa. È una reazione molto bella che si ottiene anche con frazioni di milligrammo di sostanza.

Notevole è il potere riducente di questo β-ossi-composto. Riduce a freddo il nitrato d'argento ammoniacale con formazione di specchio metallico: a caldo il reattivo di Fehling. A freddo rapidamente riduce l'acido fosfomolibdico e fosfotungstico; le soluzioni cloridriche del β-ossi-composto con questi reattivi danno abbondanti precipitati, alcalinizzando con ammo-

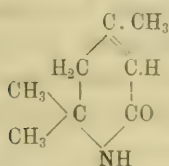
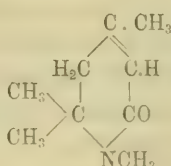
niaca si ha subito colorazione bleu intensa nel 1° caso e azzurra più chiara nel secondo.

Riduce a freddo, ma piuttosto lentamente, l'acido iodico.

Scolora l'acqua di bromo, ma non precipita con questa.

Non si colora col reattivo Millon per i fenoli, scaldata con potassa caustica concentrata e indi aggiungendo cloroformio dà una colorazione ranciata poi rossa, ma piuttosto fugace.

Riassumendo: le due *ortoossichetoidropiridine* descritte sono sostanze a reazione neutra, che, pur rassomigliando per alcune reazioni ai fenoli biossidrilici, hanno un comportamento e una natura speciale e diversa dagli ordinarii fenoli, come lo dimostra il fatto ch'esse non danno molte delle reazioni generali dei fenoli.

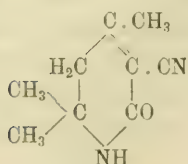
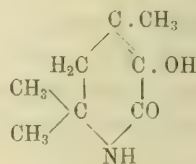
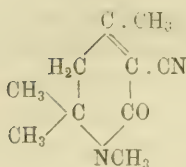
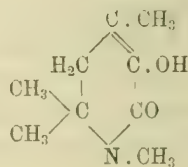
Paragonandole con le corrispondenti *chetoidropiridine* (*A*) e (*B*):

```
            C.CH3                              C.CH3
           /  \\                              /  \\
        H2C    C.H                          H2C    C.H
  CH3\   |      |                     CH3\   |      |
      >C       CO                         >C       CO
  CH3/   \    /                       CH3/   \    /
           NH                                 NCH3
              (A)                                        (B)
```

riesce evidente quale variazione abbia portato nella natura dei composti l'entrata dell'ossidrile in β.

Le *orto-ossichetoidropiridine* sono forti riducenti, mentre le *chetoidropiridine* (*A* e *B*) non riducono affatto; le *ortoossichetoidropiridine* non formano, nelle condizioni ordinarie, sali con gli acidi minerali energici, le *chetoidropiridine* suddette danno sali ben definiti; le prime sono volatili con vapor d'acqua, le seconde non lo sono affatto, come non lo sono neppure le *ortoaminochetoidropiridine*. Infine le orto-ossichetoidropiridine si colorano intensamente con cloruro ferrico, mentre le chetoidropiridine suddette non dànno alcuna colorazione con questo reattivo.

Aumentando la quantità di ossigeno nella molecola s'innalza anche qui, come in genere, il punto di fusione dei composti:

$C_8H_{13}NO$	p. f.	120°-121°	$C_9H_{15}NO$	p. f.	50°
$C_8H_{13}NO_2$	„	143°	$C_9H_{15}NO_2$	„	95°

Degna di nota è la relazione che esiste fra i punti di fusione delle *orto-ossichetoidropiridine* e della β-*cian-chetoidropiridine*:

```
              C.CH3                                  C.CH3
             /    \                                 /    \
          H2C      C.CN                          H2C      C.OH
   CH3\    |       |                      CH3\    |       |
       >C          CO                         >C          CO
   CH3/    \      /                       CH3/    \      /
              NH                                    NH
                    f. a 194°-195°                          f. a 143°

                C.CH3                                 C.CH3
               /    \\         diff. 51°             /    \\        diff. 48°
            H2C      C.CN                         H2C      C.OH
     CH3\    |       |                     CH3\    |       |
         >C          CO                        >C          CO
     CH3/    \      /                      CH3/    \      /
               NCH3                                  N.CH3
                        f. a 143°                             f. a 95°
```

cioè: 1° i composti *n.* metilati all'azoto hanno un punto di fusione più basso di circa 50°; 2° analogamente i composti β-*ossidrilati* hanno un punto di fusione di circa 50° più basso dei corrispondenti β-*ciancomposti*, dai quali per successive trasformazioni essi furono ottenuti. Resta a vedere se questa relazione è più che casuale.

Laboratorio di Chimica Farmaceutica e Tossicologica
della R. Università di Torino. Maggio 1908.

Lombrichi di Costa Rica e del Venezuela.

Nota del Dr. LUIGI COGNETTI DE MARTIIS.

(Con una Tavola).

Ho riunito in questa nota i risultati dello studio di due collezioni appartenenti al R. Museo Zoologico di Torino. La prima proviene da Costa Rica: è dovuta alle diligenti ricerche del compianto Prof. P. Biolley, del Prof. A. Alfaro e del Prof. I. F. Tristàn, benemeriti del detto Museo pei ripetuti doni di materiale zoologico costarricense; la seconda, venduta al Museo dal sig. Rosenberg di Londra, proviene da Escorial, località del Venezuela a 3000 m. s. m. Entrambe le collezioni sono conservate in alcool.

Le specie di Venezuela appartengono al ricco genere *Rhinodrilus* da me riordinato recentemente in una monografia cui toccò l'onore d'essere inserita nelle Memorie di cotesta R. Accademia delle Scienze (1). Sono in tutto due, ma entrambe nuove; una è tipo d'un nuovo genere. Le specie di Costa Rica, più numerose, non sono nuove.

Fam. **Megascolecidae.**

Subfam. **Megascolecinae.**

Pheretima heterochaeta Michlsn.

1907. *Ph. heteroch.*, Cognetti, in: Atti R. Acc. Sci. Torino, vol. 42, pag. 2.

1907. *Ph. heteroch.*, Michaelsen, in: Fauna Südwest-Australiens, vol. I, pag. 226, ubi syn.

Loc.: Costa Rica, Santa Maria de Dota (1600 m. s. m.), coll. Prof. J. F. Tristàn, I, 1906.

Questa specie peregrina già altre volte venne raccolta in Costa Rica, come ebbi occasione di ricordare nelle mie note sulla

---

(1) *Gli Oligocheti della regione neotropicale*, ser. 2ª, tom. 56.

drilofauna di quell'interessante regione (**2**, pag. 2; **3**, pag. 2; **5**, pag. 34; **8**, pag. 4), e cioè nelle seguenti località: Chemin de Carrillo (600-1000 m.); La Palma (1600 m.); Cachì (1000 m.); San Josè (1160 m.); Rancho Redondo (2000 m.); Pianure di Santa Clara, presso il fiume Reventazòn; Turrùcares; Tablazo (1850 m.); Tejar de Cartago (1400 m.).

Subfam. **Trigastrinae**.

Dichogaster hilaris Cogn.

1904. *D. h.*, Cognetti, in: Boll. Musei Torino, vol. 19, n. 462, p. 2.
1907. *D. h.*, Cognetti, in: Atti R. Acc. Sci. Torino, vol. 42, p. 7.

Loc.: Costa Rica, Llano Grande, 2100 m. s. m., coll. Prof. A. Alfaro, VIII, 1906.

Quattro esemplari adulti.

Di questa specie sono già noti due esemplari, raccolti pure in Costa Rica, l'uno a Rancho Redondo (1700 m.), l'altro a Tablazo (1850 m.).

Dichogaster sporadonephra Cogn.

1905. *D. s.*, Cognetti, in: Boll. Musei Torino, vol. 20, n. 495, p. 2.
1905. *D. s.*, Cognetti, in: Mem. R. Acc. Sci. Torino, ser. 2ª, vol. 56, p. 43,

Loc.: Costa Rica, Turrialba, coll. Prof. I. F. Tristàn, IV, 1908.

Un esemplare adulto.

Di questa specie erano finora noti soltanto i tipi, provenienti dal Darien: i caratteri del nuovo esemplare esaminato s'accordano assai bene con la mia descrizione (**5**, p. 43, e tav. figg. 20-27).

Dichogaster sp.

Quattro esemplari giovani.

Loc.: Costa Rica, Llano Grande, 2100 m. s. m., coll. Prof. A. Alfaro.

Fam. **Glossoscolecidae.**

Subfam. Glossoscolecinae.

Pontoscolex corethrurus (Fr. Müll.).

1900. *P. c.*, Michaelsen, Oligochaeta, in: Das Tierreich, Lief. 10, p. 425, ubi syn.

Alcuni esemplari, in parte adulti.

Loc.: Costa Rica, Esparta (Pacif.), 50 m. s. m., " bord d'un ruisseau sous les pierres „, coll. P. Biolley, II, 1907.

Rhinodrilus (Rhinodrilus) venezuelanus n. sp.

Otto esemplari adulti e sette giovani.

Caratteri esterni. — L'esemplare adulto più grosso misura 540 mm. in *lunghezza*, ed ha uno *spessore* di 13 mm. davanti al clitello e di mm. 10 a metà del corpo; si compone di 212 segmenti. L'esemplare adulto più piccolo è lungo 250 mm., spesso 7 mm. al clitello, e mm. 5,5 a metà del corpo, e si compone di 151 segmenti. Alcuni esemplari sprovvisti di clitello misurano oltre 400 mm. in lunghezza, mm. 8-12 in spessore e constano di circa 200 segmenti.

La *forma* del corpo è in complesso cilindrica, l'estremità cefalica conica, la caudale subtronca; dopo il clitello il diametro appare sensibilmente attenuato, soprattutto quello dorso-ventrale.

Il *colore* è giallo-bruno, grigio-bruno sul dorso.

Il *prostomio* è in quasi tutti gli esemplari protratto, e appare come una appendice digitiforme collegata alla parete interna dorsale del primo segmento (Tav. fig. 1) (1). Questo è breve, rudimentale, al pari del 2°; entrambi sono segnati da due solchi longitudinali, superiori alle linee laterali: i *solchi nefroboccali* di Rosa (**13**, pag. 116). In nessuna parte del corpo i segmenti sono ravvicinati.

(1) Per le figure che illustrano questa specie mi valsi degli esemplari di minor mole.

Le *setole* sono ovunque geminate, più le dorsali che le ventrali. I primi tre o quattro segmenti ne sono privi; le dorsali compaiono a partire dal 10° segmento. Al 4°, 5° e 6° segmento le setole ventrali hanno una curiosa disposizione: sono cioè assai prossime al margine posteriore del segmento rispettivo, più le inferiori (*a*) delle superiori (*b*), e inoltre strettamente geminate. Anche ai segmenti 7° e 8° le setole ventrali sono ravvicinate al margine posteriore, ma in minor misura: di più rimangono allineate con quelle dei segmenti che precedono e che seguono le sole setole inferiori (*a*), trasformate in setole copulatrici; le setole superiori (*b*), pure trasformate in copulatrici, si spostano per mettersi in rapporto con le spermateche (v. sotto). Identico spostamento si ripete al 9° segmento, ove le setole inferiori (*a*) sono però equidistanti dai due margini (Tav. fig. 2). Dal 10° segmento in poi, eccezion fatta pel clitello (v. sotto), la disposizione delle setole si conserva pressochè invariata: $aa = 4\,ab$, aa poco $< bc$; $ab < 3\,cd$: dd poco $< ^1/_2$ perimetro.

Le setole normali, sia prima che dopo il clitello, sono leggermente sigmoidi, e mostrano un nodulo più o meno distinto; sul tratto distale, che è più dritto e più acuminato del prossimale, possiedono un'ornatura fatta di lievi archi allineati in quattro serie longitudinali alternate: ogni serie consta di 3-7 archi. Misurano poco meno di 1 mm. in lunghezza e circa mm. 0,04 in spessore (Tav. fig. 3).

Le setole copulatrici si trovano a sostituire le ventrali dei segmenti 7°, 8°, 9°, e dei segmenti clitelliani 19°-24°: sono dritte, o leggermente curve alla base, prive di nodulo, munite sui $^2/_3$ distali di un'ornatura simile a quella delle setole normali, ma più pronunciata, essendo gli archi più sporgenti e più numerosi (50-90) pur rimanendo disposti in quattro serie longitudinali alternate; l'estremo distale, per un tratto di circa mm. 0,1, è privo di ornatura. Tali setole sono lunghe mm. 2,3 a 4,4, spesse alla base mm. 0,065, nel tratto ornato mm. 0,04; hanno generalmente maggior sviluppo in lunghezza le ventrali esterne (*b*), soprattutto quelle dei segmenti 7°, 8°, 9°.

Alla regione clitelliana le setole dorsali sono irriconoscibili all'esame esterno; le ventrali sono assai lassamente geminate ($ab = aa$), e ai segmenti 21°-24° le ventrali esterne (*b*) sono inoltre spostate più o meno verso il margine anteriore del

segmento rispettivo (Tav. fig. 4). Qualche setola copulatrice del clitello è circondata da una piccola areola ghiandolare.

Il *clitello* è a sella, spesso tumido: i suoi margini longitudinali, mal distinti, non oltrepassano le linee occupate dalle setole ventrali esterne: s'estende sui segmenti 16°-25°. Ha tinta giallíccia, e mostra poco distinti i solchi intersegmentali. Vi si riconoscono assai bene due stretti solchi longitudinali, disposti poco esternamente alle setole ventrali esterne (*b*) sui segmenti 20°-22°, per modo che congiungendosi con i solchi intersegmentali $^{19}{}_{20}$ e $^{22}{}_{23}$ delimitano un'*area ventrale* rettangolare, che spicca per la tinta bruniccia, al pari del tratto ventrale (*bb*) non ghiandolare degli altri segmenti clitelliani. Nell'area ventrale si notano alcune lievi e brevi fossette trasverse od oblique, appaiate, prossime ai margini dei segmenti che la compongono: da quelle prossime al margine anteriore sporgono le setole copulatrici (*b*) (Tav. fig. 4).

Tubercula pubertatis, sotto forma di cordoni ghiandolari longitudinali, quali si osservano in parecchi *Rhinodrilus*, non sono riconoscibili.

I *pori maschili* sono all'intersegmento $^{19}{}_{20}$, all'estremo anteriore dei solchi longitudinali sopra ricordati. I pori femminili sono invisibili.

Le *aperture delle spermateche*, in numero di tre paia, appaiono come brevi fessure trasverse poste presso al margine anteriore dei segmenti 7°, 8°, 9°, lungo due linee più o meno interne a quelle occupate dai nefridiopori (Tav. fig. 2, *r*., e fig. 5) (1).

I *nefridiopori* sono distintamente visibili al margine anteriore d'ogni segmento, a partire dal 3°, allineati coi fasci dorsali: sono circondati ognuno da un'areola biancastra, onde risultano due linee biancastre lungo i fianchi dell'animale (Tav. figg. 4 e 5).

CARATTERI INTERNI. — I *dissepimenti*, sono tutti più o meno sottili, tranne i setti $^{13}{}_{14}$ a $^{15}{}_{16}$ che sono un po' ispessiti: primo riconoscibile in tutta la sua estensione è l'$^{11}{}_{12}$, alquanto imbuti-

(1) In un esemplare giovane la spermateca sinistra dell'ultimo paio si apre al margine posteriore del 9° segmento, alquanto più internamente di quelle che la precedono (Tav., fig. 4, *r*. 9°). Attraverso alle aperture delle spermateche sporge talvolta una setola copulatrice.

forme al pari di quelli che seguono fino all'inizio del clitello. I dissepimenti $^{19}/_{20}$ a $^{23}/_{24}$ mostrano alquanto ispessito il margine latero-ventrale.

La parete del corpo appare in qualche esemplare più robusta nell'intervallo medio ventrale (*aa*) che altrove, ricordando quanto già ho descritto per altri *Rhinodrilus* (**6**, pag. 152).

È presente un robusto *ventriglio* muscoloso il cui asse longitudinale appare alquanto inclinato dal basso in alto, dall'avanti all'indietro: è riferibile al 6° segmento (Tav. fig. 6, *v.*). Seguono al ventriglio, dopo breve tratto, tre paia di *tasche esofagee* (*t.'*, *t.''*, *t.'''*), digitiformi, originate dalla faccia ventrale del tubo digerente, e dirette verso il dorso: sono da riferire ai segmenti 7°, 8°, 9°, trovandosi l'ultimo paio immediatamente davanti alla parete anteriore delle capsule seminali del 10° segmento. L'intestino sacculato s'inizia circa al 17° segmento.

L'ultimo paio di *cuori* è al 12°.

I *nefridî* del primo paio sono assai sviluppati, e hanno rapporto con la funzione di nutrizione (fagonefridî, Cognetti, **4**, p. 2); il tratto distale del loro tubulo è rettilineo e privo di cieco presso il poro esterno. Un cieco comincia a farsi manifesto ai nefridî del 17° o 18° segmento: esso è rivolto verso la linea mediana ventrale del corpo (Tav. fig. 7, *n.*, *cn.*). A partire dalla regione clitelliana i nefridî sono disposti trasversalmente, laddove nei segmenti che precedono sono più o meno protesi all'indietro.

Sistema riproduttore. — *Rh.* (*Rh.*) *venezuelanus* è olandrico cleistorchide (1): le *capsule seminali*, riferibili al 10° e all'11°, sono espanse e addossate all'esofago che ricingono totalmente, senza però saldarsi sul dorso (Tav. fig. 8, *c.'*, *c.''*). Sotto l'esofago le capsule di ciascun paio comunicano fra loro per breve tratto. Le capsule dell'11° segmento avvolgono un paio di *sacchi seminali* mediocri, oblunghi, a superficie liscia, che ricevono sperma dalle capsule del 10°; un secondo paio di *sacchi seminali* pende libero nel 12° segmento dal setto anteriore (*s.'*, *s.''*).

I vasi deferenti, originati dal margine posteriore delle capsule seminali, raggiungono subito la parete ventrale del corpo, e in corrispondenza dei pori maschili appaiono un po' dilatati

---

(1) Vedasi pel significato di questi due termini: Michaelsen 1903 (**12**, pag. 33), e Cognetti (**6**, pag. 148).

(Tav. fig. 7, s). I fasci di setole ventrali dei segmenti 19°-24° sono avvolti ognuno da una massa ghiandolare bianchiccia, simile a quelle che si osservano presso le spermateche (v. sotto), e trattenuti alle pareti laterali del corpo da muscoli retrattori: l'emissione delle setole (copulatrici) di quei fasci dev'essere favorita dal contrarsi dei muscoli che rafforzano il margine latero-ventrale dei sepimenti di quella regione.

Gli *ovarî* sono al 13° segmento.

Le *spermateche*, in numero di tre paia, sono disposte nei segmenti 7°, 8°, 9°; constano di un'ampolla sacciforme, oblunga, attenuata per un tratto più o meno lungo nella porzione distale cui fa seguito il canale, breve, ma fortemente muscoloso, sicchè appare di forma tondeggiante (Tav. fig. 9, *r.*, *s.*). Sbocca all'esterno assieme al canale anche un lungo follicolo setigero (*f.*), trattenuto alla parete laterale del corpo da un muscolo retrattore e circondato da una massa ghiandolare bianchiccia, subtondeggiante (1).

Loc.: Venezuela, Escorial 3000 m. s. m.

Rh. (*Rh.*) *venezuelanus* va annoverato tra le specie di Oligocheti gigantesche. La specie congenere cui più s'accosta è *Rh.* (*Rh.*) *brunneus* Michlsn.

Andiorrhinus Salvadorii n. gen., n. sp.

Mi valsi per la descrizione che segue di tre esemplari adulti.

CARATTERI ESTERNI. — *Lunghezza* mm. 150 circa; *diametro* 4-5 mm.; *segmenti* 180-190.

Il *colore* è cenerognolo-gialliccio, un po' più scuro sul dorso, più chiaro al clitello.

La *forma* è cilindrica, l'estremità anteriore è conica, la posteriore subtronca. I segmenti preclitelliani sono più allungati degli altri, tranne i due primi che sono brevi e rudimentali, segnati da due leggeri solchi nefro-boccali. Il *prostomio*, digitiforme, è alquanto allungato, e sporge dall'apertura boccale.

Le *setole* sono ovunque geminate, le dorsali un po' più delle ventrali; le ventrali sono presenti a partire dal 4° segmento,

(1) Masse ghiandolari simili già trovai in *Rh. (Thamnodrilus) ophioides* Cogn.; cfr. 6, pag. 218.

le dorsali dal 5°. A metà del corpo: *aa* poco $< 3\,ab$; $bc = 3\,ab$; $ab = {}^3/_2\,cd$; $dd =$ circa $^1/_2$ perimetro.

Ai segmenti 7°, 8°, 9°, che s'intercalano alle aperture delle spermateche, le setole ventrali sono più o meno spostate lateralmente, le ventrali esterne (*b*) sono inoltre spostate verso il margine anteriore del rispettivo segmento, per modo da avvicinarsi alle aperture delle spermateche, allineate con i fasci dorsali. Al 10° segmento le setole dorsali sono geminate più strettamente che ai segmenti contigui.

Ai segmenti clitelliani la geminazione delle setole ventrali è assai poco pronunciata (Tav. fig. 10).

Al 21° segmento le setole ventrali interne (*a*) sono fra loro assai ravvicinate.

I fasci ventrali dei segmenti 7°, 8°, 9°, e 17°-23° portano *setole copulatrici* esili, leggermente sigmoidi o un po' curve presso la base, lunghe mm. 1,6 a 2,6, spesse circa mm. 0,03, ornate di molti archi allineati in quattro serie longitudinali alterne lungo un tratto che si estende per circa $^3/_4$ della lunghezza a partire dall'apice. Tale ornatura è affatto simile a quella figurata da MICHAELSEN (**9**, tav. fig. 6) per *Andiodrilus Schütti*. Le setole copulatrici interne sono generalmente più lunghe delle esterne. Le setole normali sono leggermente sigmoidi, munite di nodulo distinto; portano poche incisioni trasverse (1) alla curvatura interna del tratto distale, ed hanno (a differenza delle setole copulatrici) il tratto prossimale più lungo del distale. Alla regione caudale la curvatura del tratto prossimale si fa più accentuata (Tav. fig. 11, *a* e *b*).

Il *clitello* è a sella, esteso sui segmenti 16°-25°, poco tumefatto. I suoi margini ventrali, assai mal definiti, trovansi in corrispondenza dei fasci ventrali (Tav. fig. 10, *cl.*); ai segmenti $^1/_3$ 19°-23° s'arrestano esternamente a quei fasci, lungo i *tubercula pubertatis* che hanno appunto tale estensione, e appaiono come due strette fascie perlacee, poste lateralmente alle setole ventrali superiori (*b*), e fiancheggiate esternamente da un leggero solco longitudinale che le separa da un cordoncino ghiandolare non rilevato, appartenente al clitello.

Le *aperture maschili*, puntiformi, sono al 21° segmento,

(1) Corrispondenti agli archi delle setole copulatrici.

vicinissime fra loro, entro due brevissimi solchi longitudinali. disposti a fianco della linea mediana ventrale (Tav. fig. 10).

Le *aperture femminili* sono irriconoscibili all'esame esterno.

Le *aperture delle spermateche*, in numero di tre paia, sono distribuite agl'intersegmenti $^6/_7$, $^7/_8$, $^8/_9$, in direzione dei fasci dorsali. In questa medesima direzione sono allineati i *nefridiopori*. posti al margine anteriore di ogni segmento, a partire dal 3°.

CARATTERI INTERNI. — I *dissepimenti* sono tutti sottili: primo riconoscibile è l'$^{11}/_{12}$, la cui inserzione alla parete dorsale del corpo cade circa a metà del 12° segmento. Esso e alcuni di quelli che seguono sono marcatamente imbutiformi.

Nell'interno del prostomio si contiene un robusto muscolo retrattore, inserito all'indietro alla parete dorsale del 5° segmento.

Il *ventriglio* muscoloso, riferibile al 6° segmento è, come nella specie precedente, inclinato in avanti (Tav. fig. 12, *v.*): seguono ad esso tre paia di *tasche esofagee* (*t.'*, *t.''*, *t.'''*) oblunghe, attaccate mediante un sottile peduncolo alla parete *dorsale* dell'esofago. Quelle del primo paio sono a una certa distanza dal ventriglio, ma riferibili al 7° segmento, essendo esse intimamente collegate ai tubuli nefridiani (*n.*) di quel segmento, protesi in avanti a raggiungerne il margine anteriore.

L'ampio intestino medio comincia al 21°.

L'ultimo paio di *cuori* è al 12° segmento.

I *nefridî* mostrano, a partire dal 19°, un cieco presso l'apertura esterna, diretto ventralmente.

Sistema riproduttore. — *Andiorrhinus Salvadorii* è olandrico cleistorchide (1). I *testes* sono al 10° e 11° segmento, rivelati dalle masse giallicce e iridescenti dei rispettivi padiglioni cigliati. che fanno ernia alla superficie superiore delle *capsule seminali*. Queste sono depresse, ed espanse sul lato esterno in ampi lobi. pure depressi, che avvolgono il tubo digerente, ma senza saldarsi sul dorso, laddove le due capsule di ogni segmento sono fuse ventralmente. Non posso affermare se vi sia comunicazione fra le capsule del 10° e quelle dell'11°.

I lobi laterali espansi sostituiscono nella funzione i veri

(1) V. la nota a pag. 6.

sacchi seminali, che qui mancano affatto (1). Tali lobi sono da riferirsi ai medesimi segmenti occupati dalle capsule relative, cioè al 10° e 11°; invero quelli del secondo paio sono avvolti all'indietro dall'esile dissepimento $^{11}/_{12}$, imbutiforme (Tav. fig. 13). Dalla faccia inferiore (ventrale) delle capsule si originano i quattro vasi deferenti (Tav. fig. 14).

Le *spermateche* sono piccole, sacciformi, disposte agli intersegmenti $^6/_7$, $^7/_8$, $^8/_9$. Mostrano circa a metà una lieve strozzatura che distingue una porzione prossimale da una distale (Tav. fig. 15, *r.*, *s.*). Quest'ultima presenta la parete esterna liscia, ma la parete interna invaginata in molti punti nello spessore dell'organo a formare altrettanti loculi tondeggianti.

Si ripete qui ciò che MICHAELSEN (**10**, pagg. 252, 256) ricordò pei suoi *Andiodrilus pachoensis* e *A. bogotaënsis*. Accanto alle spermateche che sono ripiegate all'indietro, sporgono nella cavità del corpo i follicoli delle setole peniali (*f.*) e le masse ghiandolari che vi si connettono, più numerose in corrispondenza delle ventrali esterne (*b*), ma più grosse in corrispondenza delle interne (*a*). Presso il margine anteriore dei tre segmenti 7°, 8°, 9° si scorgono dei robusti muscoli disposti trasversalmente (*m.*), i quali contraendosi concorrono forse all'emissione delle setole copulatrici.

Il nuovo genere istituito per la specie di Venezuela, è affinissimo ai due generi *Andiodrilus* MICHAELSEN 1900 (**10**, pag. 250, e **11**, pag. 427) e *Rhinodrilus* (cfr. COGNETTI, **6**, pag. 171, *ubi liter.* e pag. 173); ciò ho voluto ricordare nel dargli nome. A *Rhinodrilus* s'avvicina fra altro anche pel carattere della oloandria, ma tutti i *Rhinodrilus* possiedono sacchi (= vescicole) seminali *i. s. s.*, appaiati e pendenti nei segmenti 11° e 12° dal setto anteriore, e quelli di ciascun paio in un segmento posteriore (2) a quello che contiene i *testes* da cui ricevono sperma. Tali organi mancano invece in *Andiorrhinus*, allo stesso modo che nel genere *Andiodrilus*. Quest'ultimo genere è però proandrico.

(1) Intendo quali sacchi seminali i. s. s. quelli formati per estroflessione dei sepimenti. Vedasi anche quanto è detto più innanzi alla fine della presente descrizione.

(2) Generalizzando la definizione si tenga presente che i sacchi seminali i. s. s. possono trovarsi anche in un segmento anteriore, possono essere impari mediani e possono espandersi in più segmenti consecutivi.

I lobi laterali delle capsule seminali che s'incontrano in *Andiorrhinus* e in *Andiodrilus*, non possono a mio avviso ritenersi del tutto omologhi ai sacchi o vescicole seminali dei *Rhinodrilus*. I sacchi seminali, secondo le norme di Vejdovsky (**15**, p. 136), di Beddard (**1**, pag. 92, *ubi lit.*), di Michaelsen (**11**, pag. 9), sono estroflessioni di dissepimenti. Ai sacchi delle capsule, che anch'io nella descrizione di un *Andiodrilus* (**2**, pag. 8) distinsi col nome di vescicole seminali (= sacchi sem.!) seguendo l'esempio di Michaelsen (**10**, pag. 250; **11**, pag. 427), credo più opportuno dare semplicemente la denominazione di *lobi delle capsule*. La loro funzione è simile a quella dei *sacchi seminali i. s. s.*, ma non simile è il modo di formazione (1).

Altro carattere, che prova maggiormente la stretta parentela di *Andiorrhinus* con *Andiodrilus*, risiede nella struttura delle spermateche, e ancora nella presenza di setole copulatrici al clitello e presso le spermateche.

Per gli opportuni confronti riferisco qui la diagnosi del nuovo genere *Andiorrhinus*, uniformandomi a quelle dei generi affini riferite in " Das Tierreich " (**11**).

" Lobo cefalico foggiato a proboscide, retrattile. Setole gemi-
" nate; setole copulatrici con archi disposti in 4 serie longitu-
" dinali. Pori maschili nella regione clitelliana; aperture delle
" spermateche agl'intersegmenti $^{6}/_{7}$, $^{7}/_{8}$, $^{8}/_{9}$. Ventriglio muscoloso,
" robusto, al 6°; tre paia di tasche esofagee, a struttura com-
" plessa, nei segmenti 7°, 8°, 9°. Ultimi cuori al 12°. Due paia
" di *testes* e padiglioni cigliati al 10° e 11°, inclusi in capsule
" seminali che mandano *lobi* laterali rispettivamente nel mede-
" simo segmento in cui sono contenute. Tratto distale dei vasi
" deferenti semplice. Spermateche con loculi alla porzione distale
" nello spessore della parete ".

(1) Analoga distinzione occorrerebbe fare per gli stessi organi nel genere *Pheretima*, ripresi recentemente in esame da Ude (**14** pag. 478 e seg.), ma chiamati da questo autore coll'unico nome di " Samensäcke ". Già ne feci cenno in altro mio lavoro (5, pag. 31), paragonando l'apparato centrale maschile di *Pheretima biserialis* (E. Perr.) a quello dei *Rhinodrilus (Thamnodrilus)*.

Fam. **Lumbricidae.**

Halodrilus (Bimastus) parvus (Eisen).

1900. *H. (B.) p.*, MICHAELSEN, Oligochaeta, in: Das Tierreich, Lief. 10, p. 502, ubi lit.

1905. *H. (B.) p.*, COGNETTI, in: Ann. Mus. Civ. Genova, ser. 3ª, vol. 2, p. 118.

Due esemplari adulti, lunghi 21 e 23 mm.

Il clitello è in entrambi esteso sui segmenti 24°-30°; al 24° segmento s'arresta alle setole ventrali esterne (*b*), in seguito raggiunge le ventrali interne (*a*). Veri *tubercula pubertatis* non potei ravvisare all'esame esterno; è noto d'altra parte che in questa specie tali organi possono mancare, come ho ricordato in un mio lavoro (**7**, pag. 118).

Loc.: Costa Rica, Llano Grande, 2100 m. s. m., collez. A. Alfaro, VIII, 1906.

Questa specie venne già raccolta precedentemente in altre località della regione neotropicale, e della stessa America centrale.

OPERE CITATE

(1) BEDDARD Fr. E., 1895 — *A Monograph of the order of Oligochaeta.* Clarendon, Oxford.

(2) COGNETTI DE MARTIIS L., 1904 — *Oligocheti di Costa Rica*, in: Boll. Musei Zool. e Anat. comp. Torino, vol. 19, n. 462.

(3) ID., 1904 — *Nuovi Oligocheti di Costa Rica*, in: id. vol. 19, n. 478.

(4) ID., 1905 — *Sui Peptonefridî degli Oligocheti*, in: id. vol. 20, n. 512.

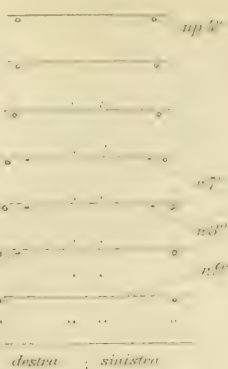
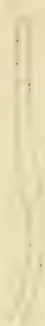
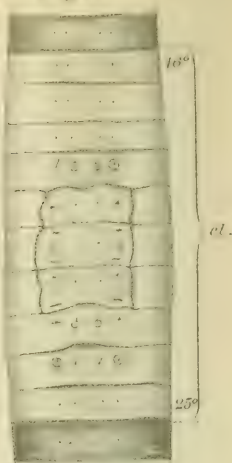
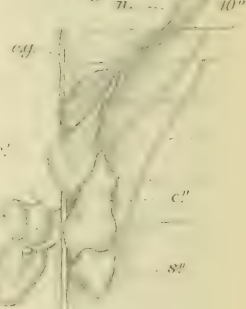
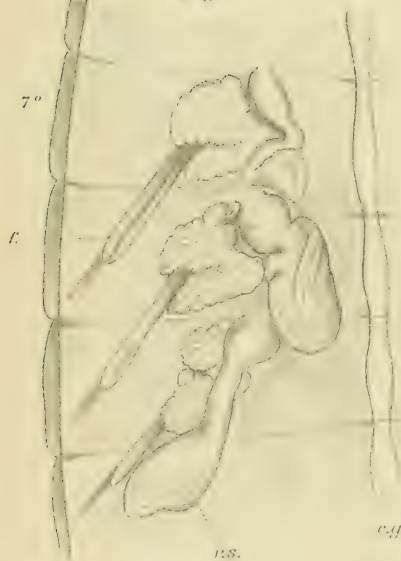
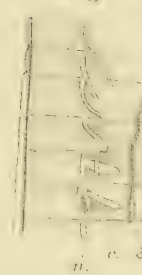
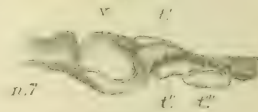
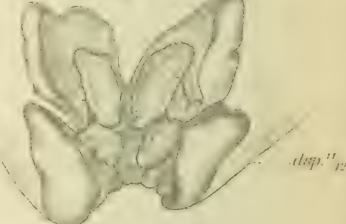
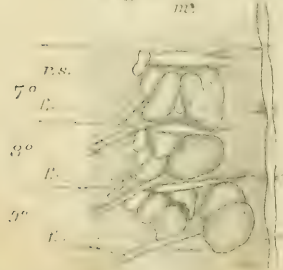
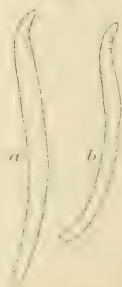
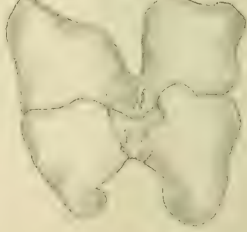
(5) ID., 1905 — *Gli Oligocheti della Regione Neotropicale*, parte I, in: Mem. R. Accad. Scienze di Torino, ser. 2ª, vol. 56, pag. 1-72.

(6) ID., 1906 — *Id.*, parte II, in: id. id., pag. 147-262.

(7) ID., 1906. — *Lombrichi liguri del Museo Civico di Genova*, in: Annali Mus. Civ. Genova, ser. 3ª, vol. 2°, pag. 102-127.

(8) ID., 1907 — *Nuovo contributo alla conoscenza della drilofauna neotropicale*, in: Atti R. Accad. Scienze Torino, vol. 42.

L. Cognetti de Martiis dis.

Soc. An. Industrie Grafiche, Torino

(9) Michaelsen W., 1895 — *Zur Kenntnis der Oligochaeten*, in: Abhandlungen Natwiss. Verein Hamburg, vol. 13.
(10) Id., 1900 — *Die Terricolen-Fauna Columbiens*, in: Arch. f. Naturg., vol. 66, Hft. 1, pag. 231-266.
(11) Id., 1900 — *Oligochaeta*, in: Das Tierreich, Lief. 10.
(12) Id., 1903 — *Die geographische Verbreitung der Oligochaeten*. Friedländer Berlino.
(13) Rosa D., 1895 — *Contributo allo studio dei Terricoli neotropicali*, in: Mem. Accad. Scienze Torino, ser. 2ª, vol. 45.
(14) Ude H., 1905 — *Terricole Oligochaeten von den Inseln der Südsee und von verschiedenen andern Gebieten der Erde*, in: Z. f. wiss. Zool., vol. 83, pag. 405-501.
(15) Vejdovsky Fr., 1884 — *System und Morphologie der Oligochaeten*. Rivnač, Praga.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Rhinodrilus (Rhinodrilus) venezuelanus n. sp.

Fig. 1. Estremità cefalica (× 2).
„ 2. Porzione preclitelliana semischematica onde mostrare i rapporti di posizione tra setole, nefridiopori, e aperture delle spermateche.
„ 3. Setola ventrale, normale, del 6° segmento (× 48).
„ 4. Regione clitelliana vista ventralmente (× 2).
„ 5. Porzione preclitelliana vista dal lato sinistro (× 2).
„ 6. Tratto esofageo col ventriglio e le tasche esofagee (× 2).
„ 7. Superficie interna laterale sinistra della parete del corpo al principio del clitello per mostrare lo sviluppo graduale dei ciechi nefridiali, e l'apertura del vaso deferente all'esterno (× 2).
„ 8. Apparato maschile centrale: sul lato sinistro sono omesse le capsule seminali (× 2).
„ 9. Spermateche del lato sinistro e ghiandole annesse (× 4 $^{1}/_{2}$).

Andiorrhinus Salvadorii n. g. n. sp.

Fig. 10. Clitello visto ventralmente (× 2).
„ 11. Setole normali tolte a metà del corpo (*a*), e alla coda (*b*) (× 48).
„ 12. Tratto esofageo col ventriglio e le tasche esofagee (× 2).
„ 13. Apparato centrale maschile come appare togliendo il tubo digerente (× 4 e $^{1}/_{2}$).
„ 14. Id. visto dalla faccia ventrale (× 4 e $^{1}/_{2}$).
„ 15. Spermateche del lato sinistro e ghiandole annesse (× 4 e $^{1}/_{2}$).

ABBREVIAZIONI

c'., *c''*. = capsule seminali del 1° e del 2° paio.
c. g. = catena gangliare ventrale.
cl. = clitello.
c. n. = cieco nefridiano.
dsp. = dissepimento.
f. = follicolo setigero.
m. = fascio muscolare.
n. = tubulo nefridiano.
np. = nefridioporo.
r. = apertura di spermateca.
r. s. = spermateca.
s'., *s''*. = sacchi seminali del 1° e del 2° paio.
t'., *t''*., *t'''*. = tasche esofagee del 1°, 2° e 3° paio.
v. = ventriglio.
v. d. = vaso deferente.

♂ = poro maschile.

I numeri corrispondono ai segmenti.

Relazione sulla Memoria del Dott. Angelo Cesare Bruni, intitolata: *Intorno ai derivati scheletrici estracranici del secondo arco branchiale nell'uomo.*

Il Dottore Angelo Cesare Bruni, settore nell'Istituto anatomico di Torino, espone nella Memoria i risultati delle sue diligenti ricerche sulla catena ioidea eseguite sul feto umano, sul bambino e sull'uomo adulto. Il lavoro è diviso in sette capitoli. Nel primo, che serve da introduzione, l'Autore fa la storia dell'argomento e specialmente si diffonde sulle omologie trovate o credute di trovare fra i diversi pezzi dell'arco ioideo dell'uomo e quello di altri mammiferi e dei vertebrati inferiori; nota specialmente la diversa e complicata terminologia proposta ed usata da vari osservatori in base alle idee morfologiche seguite, osserva che tutto il lavoro di comparazione fatto mancava di solide basi, perchè non si era seguito che molto saltuariamente lo sviluppo della catena ioidea dell'uomo e dei mammiferi, nè ancora appariva certo se alcuni pezzi derivano direttamente dalla cartilagine del secondo arco branchiale oppure si sviluppano, secondariamente, dai legamenti della catena. Nel secondo capitolo l'A. parla della tecnica usata e del materiale suo di osservazione. Egli esaminò 39 catene ioidee di feti (dal 3° mese al termine della vita endouterina) e 144 di individui giovani (dalla nascita al 28° anno). Le osservazioni sono in parte microscopiche, in parte macroscopiche, condotte col sussidio dei metodi di dimostrazione dello scheletro attraverso alle parti molli proposti dallo Schultze e dal Lundvall. Nel terzo capitolo riferisce sulla maniera di segmentarsi della cartilagine del Reichert dal terzo mese della vita fetale alla nascita. Egli trovò che al terzo mese ed anche al principio del quarto mese la cartilagine può ancora trovarsi continua, ma che ordinariamente è già divisa in due segmenti, uno prossimale, l'altro distale; aggiunge che in alcuni casi il numero dei segmenti cartilaginei è superiore a due, per divisione secondaria dei due segmenti primitivi. La segmentazione si verifica quando

il secondo arco viscerale trovasi allo stato precartilagineo e allo stato cartilagineo. Il quarto capitolo tratta delle modificazioni della catena ioidea dalla nascita al terzo anno. Fatto importante rilevato in questo periodo è che non si verifica più alcun fenomeno di riduzione della cartilagine del Reichert; i segmenti che si trovano alla nascita persistono per tutta la vita. Nel quinto capitolo si descrive la comparsa dei punti di ossificazione dei segmenti cartilaginei, ossificazione che incomincia al 4° anno e termina al 16° anno ed anche più in là. L'ossificazione vi è studiata minutamente al microscopio, ed in questi studi l'A. rileva che essa ha luogo con diversi processi; in uno di questi il pezzo osseo si sostituisce al pezzo cartilagineo, come la mandibola si sostituisce ad alcune parti della cartilagine del primo arco branchiale. Nel sesto capitolo si considera la catena ioidea nell'adulto e si riassumono dati statistici sulle varietà presentate da tale catena. Nell'ultimo si espongono le considerazioni generali e le conclusioni. Fra le conclusioni questa pare importante, specialmente dopo tutti gli schemi morfologici messi in campo per la catena ioidea, ed è che non si possono stabilire omologie di tutti i segmenti della catena ioidea umana con quelli presentati dai pesci; il legamento stiloioideo non è omologo del cheratoiale.

Come si è detto, le ricerche dell'A. vennero condotte con grande diligenza, ciò è anche dimostrato dalle belle figure che illustrano il lavoro; i risultati sono importanti, sia perchè le ricerche furono eseguite in un terreno quasi del tutto inesplorato, sia perchè vengono a togliere dal campo della scienza una quantità di schemi ingombranti ed a sostituire a questi dei fatti nettamente stabiliti.

Per tali considerazioni i sottoscritti propongono che il lavoro del Dott. Bruni sia accolto per la stampa fra le Memorie.

L. Camerano,
Romeo Fusari, *relatore*.

Relazione sulla memoria del Prof. G. B. Rizzo intitolata: *Nuovo contributo allo studio della propagazione dei movimenti sismici.*

Nelle traccie che i terremoti lontani segnano sui sismografi si distinguono due serie di tremiti percursori a cui segue la fase principale. Anche in questa si possono distinguere più parti.

Si ammette dai più che i primi e i secondi tremiti si trasmettano dall'epicentro ad un punto qualunque della superficie terrestre attraversando la massa interna della terra, mentre invece le ondulazioni della fase principale si propagherebbero lungo la superficie terrestre seguendo un arco di cerchio massimo che passa per l'origine e per il luogo d'osservazione.

Quest'opinione è fondata su ciò, che le velocità di trasmissione di quest'ultime ondulazioni misurate sulla superficie appaiono costanti, mentre invece si credette di poter affermare che le velocità dei tremiti precursori, misurate anch'esse sulla superficie, crescevano al crescere della distanza.

Il Rizzo espresse già in altri scritti il parere che non vi sia ragione sufficiente per credere che i tremiti precursori si propaghino attraverso la massa del globo anzichè alla superficie. Nella memoria che venne affidata al nostro esame, egli si vale delle registrazioni relative al terremoto della Calabria del 23 ottobre 1907, quali gli vennero comunicate da 51 osservatorii per discutere e verificare la propria tesi.

Anche nella fase principale si possono distinguere tre gruppi. Appaiono dapprima delle onde di lungo periodo e di piccola ampiezza, poi delle onde molto più ampie a periodo ancora lento e seguono in fine delle onde rapide, che per lo più comprendono le oscillazioni di massima ampiezza. Il Rizzo tenne conto di questi tre gruppi di oscillazioni, sicchè i tempi, di cui egli si valse per il calcolo delle velocità, sono cinque: quelli dell'arrivo dei due gruppi precursori e quelli dell'arrivo dei tre gruppi della fase principale ora indicati.

Egli costruì per queste cinque fasi della scossa le così dette *odografe* di Schmidt, cioè le curve che hanno per ascisse le distanze dall'origine dei vari strumenti registratori e per ordinate i tempi impiegati a percorrere quelle distanze. Egli giunge a questa conclusione, che tutte quelle varie fasi del moto sismico si propaghino con velocità che, contate sulla superficie terrestre, variano al variare della distanza con la medesima legge, e che non v'è quindi ragione per ammettere che i tremiti precursori non si propaghino per la superficie terrestre come le oscillazioni della fase principale.

Come si vede l'argomento trattato dal Rizzo è importante ed egli lo discute in questa memoria con molta accuratezza e con abbondanza di dati d'osservazione. Noi crediamo che questo scritto meriti d'essere letto alla Classe e inserito nei volumi accademici.

N. Jadanza,
A. Naccari, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 31 Maggio 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Graf, Brusa, Allievo, Chironi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Sforza e Renier in funzione di Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Brondi.

L'atto verbale dell'adunanza antecedente, 17 maggio, è approvato.

Per l'inserzione negli *Atti* il Socio Allievo presenta una propria nota dal titolo: *L'indirizzo storico e sociologico della pedagogia contemporanea.*

Per le *Memorie* è dal Socio Stampini presentata una monografia del prof. Clemente Merlo, *Degli esiti di lat.* -GN- *nei dialetti dell'Italia centro-meridionale con un'appendice sul trattamento degli sdruccioli nel dialetto di Molfetta.* Il Presidente incarica di riferirne in una prossima adunanza il Socio proponente Stampini ed il Socio Renier.

Raccoltasi poscia la Classe in seduta privata, è proposta dalla Presidenza una modificazione nelle norme per l'accettazione dei lavori di estranei. Sinora, nella Classe di scienze morali, si mantenne l'uso che di un medesimo estraneo ogni Socio non potesse presentare in un anno accademico se non una nota

per gli *Atti* ed una monografia per le *Memorie*. Si propone che, giusta la deliberazione presa molti anni sono dalla Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, si possano presentare, per ogni estraneo, o un *atto* ed una *memoria*, ovvero due *atti*, sempre rimanendo ferma l'inibizione di presentare due *memorie*. La proposta è accolta ad unanimità dalla Classe.

Si procede all'elezione di Soci corrispondenti. Riescono eletti i seguenti:

nella Sezione di scienze filosofiche: Giuseppe ZUCCANTE e Roberto ARDIGÒ;

nella Sezione di scienze storiche: Adolfo VENTURI, Alessandro LUZIO, Giovanni MONTICOLO;

nella Sezione di archeologia: Paolo ORSI, Giovanni PATRONI;

nella Sezione di geografia ed etnografia: Vittore BELLIO, Cosimo BERTACCHI;

nella sezione di linguistica e filologia orientale: Carlo SALVIONI, Fausto LASINIO, Giacomo Ernesto PARODI, Celestino SCHIAPARELLI, Emilio TEZA;

nella Sezione di filologia, storia letteraria e bibliografia: Girolamo VITELLI, Francesco FLAMINI, Egidio GORRA.

LETTURE

L'indirizzo storico e sociologico della pedagogia contemporanea.

Nota del Socio GIUSEPPE ALLIEVO.

In cerca della Pedagogia.

La scienza dov'è? Con questa dimanda io esordiva nella mia prolusione di Antropologia. La Pedagogia dov'è? Con quest'altra dimanda io incomincio le mie lezioni pedagogiche, giacchè in mezzo all'attuale rimestìo di tutte le scienze filosofiche e sociali più non ci vien dato di scorgere dove essa veramente abbia il suo posto.

Una scienza non può affermare la sua esistenza se non a condizione che possegga un'orbita sua propria, si proponga problemi veramente suoi, miri ad un intendimento affatto speciale, pur mentre conserva i suoi punti di contatto colle altre discipline più o meno contermini. Tale era appunto la condizione della pedagogia, primachè il modernismo (mi si permetta qui questo vocabolo) fosse penetrato nel campo della scienza. Allora la pedagogia era veramente pedagogia: lavorava intorno a un disegno propriamente suo: i problemi che andava svolgendo, e le indagini intorno a cui si travagliava, riflettevano tutti il suo proprio oggetto, cioè l'educazione contemplata nelle sue origini, ne' suoi caratteri, nelle sue leggi, nel suo fine, nelle sue parti e specie, fisica e mentale, infantile e giovanile, maschile e femminile, privata e pubblica, perfezionatrice ed emendatrice. Poi venivano le sue pratiche applicazioni alla didattica dell'insegnamento, agli ordinamenti degli istituti scolastici, alle istituzioni civili e sociali. Nè la scienza pedagogica rifiutava il sussidio e l'intervento delle altre discipline, ma ne faceva tesoro per allargare il suo orizzonte, e per rassicurare il risultato delle sue indagini.

Ora lo stato delle cose è profondamente mutato. La pedagogia ha perduto il suo carattere distintivo, la sua propria impronta: si agitano problemi che si appellano pedagogici, ma che in realtà non si sa più a quale scienza appartengano. Quindi abbiamo una pedagogia sociale, una pedagogia antropologica e psicologica, una pedagogia storica, una pedagogia infantile, val quanto dire una pedagogia che non è pedagogia. Quale sia l'origine di tanta confusione, di un così deplorabile pervertimento scientifico, non è malagevole il rintracciarle. Da qualche tempo in qua nella coscienza sociale si è fatto sentire più vivo il bisogno e l'efficacia dell'opera educativa; si è riconosciuto che l'educazione è il più potente, il più poderoso strumento di civiltà e di progresso. Quindi per natural conseguenza la pedagogia si trovò di fronte a nuovi, a gravi, ad ardui, complicatissimi problemi, per risolvere i quali le occorreva attingere lume e consiglio da parecchie altre scienze, alcune delle quali erano pressochè in sul nascere ed ancora malferme sulla propria base. Tutto questo era giusto, conveniente, ragionevole, ma nel fatto non si serbò nè modo, nè misure e si trascese agli estremi. La pedagogia pur mentre faceva tesoro delle conoscenze altrui, doveva mantenere intatta la sua impronta, e non abdicare in faccia a nessun'altra scienza. Così non fu. Le scienze sussidiarie usurparono il suo dominio e diventarono padrone del campo. Così la pedagogia è scompigliata e la sociologia, la storia, la politica, l'evoluzionismo si disputano qua e là i suoi brandelli. Io ripeto la mia dimanda: La pedagogia dov'è?

Un'altra ragione, che spiega l'attuale scompiglio della scienza pedagogica, può ritrovarsi nelle nuove dottrine antropologiche e sociali, che facendole sentire la loro smisurata influenza le impressero diversi indirizzi non conciliabili fra di loro e col fine supremo dell'arte educativa. Ben si sa, l'uomo e la sua educazione son due termini che perfettamente si corrispondono, tantochè il prospero od infelice successo del magistero educativo dipende dal giusto o falso concetto, che si ha dell'uomo educando. Ora è cosa notissima, che ai giorni nostri l'uomo fu oggetto di ampii e svariatissimi studi, e che si seguirono nuove vie, si tentarono nuovi metodi per giungere ad una compiuta e chiara comprensione della sua natura. Di qui sorsero molteplici, nuove dottrine antropologiche e sociali in mezzo a cui la

pedagogia si trovò implicata a segno da perdere il suo essere proprio e smarrirsi nell'orbita delle altre scienze.

Volgendo uno sguardo allo stato attuale della pedagogia contemporanea, ognun vede che essa è percorsa da diverse e contrarie correnti, che non le consentono di seguire un procedimento concorde ed uniforme. Fra i molteplici e svariatissimi indirizzi pedagogici di cui facciamo parola, due vanno segnalati, che si contrastano il campo, e che comprendono in sè tutti gli altri particolari, e sono l'indirizzo positivistico e l'indirizzo spiritualistico. Entrambi furono presi ad esame il primo nel mio opuscolo *La nuova scuola pedagogica ed i suoi pronunciati*, il secondo nell'altro opuscolo *Il concetto antropologico, principio informatore della scienza pedagogica*. Ma siccome le dottrine positivistiche si svolsero sotto diversissime forme, così fra i molteplici indirizzi pedagogici, che da esse si informano, prenderò qui a particolare disamina lo storico ed il sociologico.

Indirizzo storico.

È cosa meritevole di essere avvertita, che oggidì il metodo storico ha acquistato un gran predominio nel campo degli studi a segno da ridurre tutta una scienza alla storia della medesima. Io avviso che questa tendenza così viva e spiccata verso gli studi storici sia una delle tante conseguenze, che logicamente fluiscono dal positivismo oggidì predominante, siccome quello, che rinchiude tutto quanto il sapere nella nuda cerchia dei fatti, e ben si sa che anche i fatti umani, anche i mentali, appartengono alla storia. Secondo questo modo di vedere, anche la scienza della pedagogia va a confondersi colla sua storia.

Ciò posto, l'indirizzo storico pedagogico, come lo indica lo stesso vocabolo, proclama che il principio fondamentale della pedagogia e la fonte suprema delle conoscenze pedagogiche risiedono nello studio dei fatti educativi, quali si sono successivamente svolti nel corso dei secoli presso i diversi popoli. Questo studio storico assume poi due forme differenti, secondo che ha per oggetto la storia dell'educazione quale fu data di fatto sia nel seno delle famiglie, sia negli istituti scolastici educativi, oppure la storia della scienza pedagogica quale si svolse nelle

dottrine dei pensatori, essendochè altro è l'educazione, ossia l'opera educativa, altro la scienza dell'educazione, ossia la conoscenza teorica della medesima. Così la storia dell'educazione ritrarrà le diverse forme, che essa prese presso i diversi popoli antichi e moderni, è propriamente in gran parte la storia della scuola considerata sotto tutte le sue forme, nel suo sviluppo successivo, in tutte le sue gradazioni dall'asilo all'università, in tutto il suo ordinamento interiore riguardante i programmi, l'insegnamento, la formazione dei maestri, la disciplina e via discorrendo. Invece la storia della pedagogia ci apprende non come si educò di fatto nel tal secolo, presso il tal popolo, bensì che cosa si è pensato, meditato e scritto intorno l'opera educativa: essa è una esposizione ordinata e critica delle molteplici dottrine e teorie pedagogiche dai tempi più antichi fino a noi.

Esposto così il concetto dell' indirizzo storico pedagogico, necessita esaminare il suo valore scientifico. Nessuno vorrà mettere in forse i vantaggi notevolissimi, che esso arreca al progresso della scienza e dell'arte educativa, quando sia tenuto nei suoi giusti confini e saggiamente seguito. La storia, a qualunque ordine di studi si riferisca, è sempre maestra di verità, quando sia giustamente intesa. Ma lo studio storico pedagogico è esso fornito di tanto valore intrinseco e di tanta efficacia da essere riguardato siccome il principio centrale e la fonte suprema di tutta la scienza pedagogica, o non piuttosto abbisogna di uno studio superiore che lo preceda, lo illumini, lo sorregga? In altri termini, lo studio storico è esso tutta quanta la scienza pedagogica? Ecco la questione.

Lo studio storico pedagogico si fonda sul fatto educativo. Ora un fatto, di qualunque specie esso sia, è sempre di sua natura cieco, epperò abbisogna di un concetto superiore, di un'idea che lo illumini: tanto è che può essere interpretato in differentissime guise e venire assunto in sostegno di contrarie ed opposte opinioni. Quindi il fatto educativo, sia esso un fenomeno scolastico, sia una teoria pedagogica, per se stesso non ci apprende nessuna verità, non può essere inteso ed apprezzato senza essere illuminato da un concetto ideale preesistente nel pensiero. Io entro in una scuola: veggo il maestro, che insegna una data materia, il discepolo che ascolta, il contegno della

scolaresca, l'ordine, la disciplina, che vi regna. Ma tutto quest'insieme di fatti rimarrebbe per me lettera morta senza significato, se dalla scienza pedagogica non avessi attinto tutte quelle notizie teoriche, le quali riguardano l'insegnamento del maestro, la coltura intellettuale del discepolo, la didattica, la disciplina scolastica e via via. Senza tali notizie come potrei portare giudizio intorno l'attitudine del maestro, il progresso del discepolo, lo svolgimento del programma, la bontà dell'istituto scolastico? Similmente, apro una storia della pedagogia, trovo esposta la teoria di questo o quell'altro pedagogista; ma che cosa posso io capirne, se sono affatto digiuno di studi pedagogici? Eppure i nostri esagerati seguaci dell'indirizzo storico nelle loro recenti pubblicazioni intorno i nuovi riordinamenti scolastici vanno ripetendo che fin qui la pedagogia si è sciupata in generalità vaghe ed inconcludenti, intorno l'educazione considerata nel suo concetto formale, nelle sue leggi, nel suo fine, nelle sue parti e specie, e che è giunto il tempo di abbandonare tutte queste vuote astruserie e ritornare al fatto educativo senza più.

Proseguiamo il nostro esame. Il fatto non solamente è cieco di sua natura ed abbisogna di un'idea, che lo illumini, ma è particolare, è contingente e talvolta disforme dall'ordine e dalle norme razionali, invece la scienza si compone di proposizioni, che sono universali, necessarie e sempre vere. Perciò lo studio storico per se solo non può essere la scienza pedagogica. Abbiamo superiormente avvertito, che esso abbraccia sia la storia dell'educazione quale fu data di fatto o nella famiglia o nella scuola, sia la storia dei sistemi e delle dottrine pedagogiche. Ora la storia dell'educazione ci pone sott'occhio il come essa fu amministrata presso i popoli antichi e presso i moderni, presso i greci e presso i romani, presso le genti del medio evo e presso le nazioni dei tempi nostri. Ma gli è evidente che non tutte queste guise di educare possono essere apprezzate ed encomiate, come non tutte vanno biasimate: i fatti non sempre sono quali debbono essere, e l'educazione, che è anch'essa un fatto, non sempre fu conforme alla natura umana ed alle esigenze della ragione.

A volerla dunque giudicare occorre un criterio, un tipo, a cui raffrontare i diversi fatti educativi. Ora nessuna delle di-

verse maniere di educare date dalla storia può essere presa come criterio tipico per giudicare della bontà delle altre, non la greca, non la romana, non la moderna francese, italiana, inglese, tedesca: tutte le forme educative storiche hanno i loro pregi ed i loro difetti. Il simigliante si dica delle dottrine pedagogiche: la storia ce le schiera lì sott'occhio, ma da per tutto ed in ciascuna teoria il vero ed il certo trovasi frammisto col falso e coll'incerto. Anche qui ci vuole un criterio per sincerare il vero dall'erroneo, criterio, che non risiede in veruna di esse, ma trascende la sfera dei fatti pedagogici quali che siano.

A sostegno dell'indirizzo storico pedagogico altri potrebbe accampare questa osservazione. La storia ci schiera sott'occhio i fatti educativi nella loro successione e coesistenza attraverso i tempi ed i luoghi. Ora se noi li sottoponiamo ad un esame critico, ci verrà fatto di riconoscere in essi elementi buoni, costanti, universali, comuni, frammisti con elementi difettosi, mutabili, particolari, instabili. Lasciamo da parte questi ultimi, atteniamoci ai primi, raccogliamoli insieme in ordine logico e per mezzo della generalizzazione eleviamoli alla dignità di principii universali, e noi avremo in essi il sistema della scienza e dell'arte educativa. Così l'indirizzo storico apparisce il fondamento e la fonte della pedagogia.

Questa osservazione, ha molta apparenza di verità, ma non regge. Anzi tutto voi mi parlate di generalizzare i fatti educativi, ma con ciò stesso venite ad ammettere, che lo studio storico non è esso solo tutta la scienza e l'arte educativa, ma solamente il punto di mossa, e che il punto di arrivo sta nelle verità generali. Così con una evidente contraddizione voi uscite fuori dal terreno dei fatti dove avevate ristretta tutta la scienza. Ancora, io vi dimando: chi vi ha fornito l'ideale, il tipo, il criterio per sincerare nei fatti educativi il buono dal viziato, il costante e l'immutabile, dall'incostante e dal mutabile, l'universale dal particolare? Nessun fatto potrà presentarvi questo ideale. Un sistema educativo, ottimo per un dato secolo e per una data nazione, può diventar pessimo mutando tempo e luogo. Voi mi parlate di generalizzazione, ma chi vi dà il diritto di farla, mentre voi rigettate i principii immutabili, assoluti, universali, senza di cui essa torna impossibile? Eppoi ripugna che un fatto assuma il carattere di un principio generale, poichè

riguardando esso un dato punto del tempo e dello spazio è essenzialmente particolare; e quantunque si voglia supporre, che esso si ripeta in tempi e luoghi innumerevoli, non perciò lo possiamo appellare universale essendochè i punti del tempo e dello spazio, in cui esso si rinnova, non sono i medesimi, e non adeguano tutto il tempo e lo spazio.

Che se le verità universali e costanti, su cui si fonda la scienza pedagogica, non ci possono essere date da nessun fatto educativo, donde le attingeremo noi? Ricordiamo che l'educazione umana si fonda tutta quanta sulla natura medesima dell'uomo: quindi ne viene che i principii supremi direttivi dell'educazione vanno derivati dal concetto della natura umana considerata in ciò che essa ha di essenziale, di universale, di immutabile. Essa ci fornirà l'ideale tipico per giudicare della bontà e giustezza di un sistema di educazione a qualunque secolo o nazione si riferisca: un fatto educativo va approvato o riprovato secondochè si conforma o no alla natura costitutiva dell'umano soggetto. Questo criterio già ci è dato dalla considerazione medesima della natura umana, mentre i fatti educativi non ce lo possono dare in modo fermo e definitivo, perchè la loro evoluzione proseguirà sempre anche nei secoli avvenire, mentre la storia non registra che i fatti passati.

I seguaci dell'indirizzo storico esclusivo separano due cose che quantunque distinte sono tuttavia intimamente connesse, voglio dire il fatto educativo e l'idea dell'educazione. Essi vanno sempre ripetendo l'espressione *il fatto educativo*, per significare che esso è la quintessenza, il punto centrale di tutta la scienza e l'arte educativa, e non avvertono che ogni fatto germina dall'idea, è l'incarnazione di un concetto, epperò il fatto educativo presuppone come sua ragione l'idea dell'educazione. L'educazione non potrebb'essere un fatto esteriore positivo, se prima non fosse un'idea interiore della mente. Ora cerchiamo l'idea interiore del fatto educativo, il suo intimo significato, e si troverà che esso importa un soggetto educando, un soggetto educatore ed un rapporto tra l'uno e l'altro. L'idea dell'educazione è tutta lì: studiate questi tre termini prima di discendere ai fatti, fatene una vera e soda teoria, ed essa vi spiegherà il fatto educativo; senz'essa vi rimarrà assolutamente inesplicabile: voi invece accusate la scienza pedagogica di perdersi dietro

a generalità astratte ed inconcludenti. Poniamo ad esempio che io non abbia attinto dalla scienza pedagogica la teoria dell'educazione intellettuale, che io non abbia da prima meditato intorno al modo, con cui debb'essere coltivata l'intelligenza considerata nelle sue leggi, nel suo processo, nel suo fine, ne' suoi rapporti colle altre potenze, qual giudizio potrò io portare intorno al modo, con cui esse vanno coltivate di fatto nei diversi istituti scolastici, od intorno le diverse teorie de' pedagogisti su questo punto?

Lo studio storico esagerato ed esclusivo, di cui facciamo parola, conduce ad alcune conseguenze, che meritano di essere avvertite. Quando si rimane inchiodati al fatto educativo senza un ideale superiore che lo illumini, senza un criterio per sincerarne i pregi ed i difetti, facilmente si incorre in una cieca imitazione, la quale ci porta a trasportare di sana pianta in modo affatto meccanico una forma di educazione od un sistema scolastico da un popolo ad un altro, da un secolo ad un altro. Nulla di più contrario alla scienza ed all'arte educativa. Ogni foggia di educazione, ogni ordinamento scolastico è figlio del secolo in cui nacque, della nazione, che l'ha prodotto, si inspira al suo ambiente, ne ritrae i pregi ed i difetti. Trasportarlo in un terreno, che non è il suo, è un violentarne la natura facendo opera insana. Dicasi il somigliante di una dottrina pedagogica registrata nella storia della scienza educativa. Quella dottrina sorse dalla mente di un pensatore, che meditò e discusse i problemi pedagogici in un modo tutto suo personale e visse in un mondo domestico, civile, sociale, religioso affatto speciale, sentendo o dominando l'ambiente esteriore. Chi si argomenta di riprodurre o trasportare quella dottrina, fa opera vana come quella di risuscitare un cadavere: essa ha fatto il suo tempo. Occorre però evitare l'estremo opposto. Se è cosa riprovevole e dannosa la cieca imitazione, che senza verun criterio riproduce e trasporta da un secolo all'altro un intiero sistema di educazione od una intiera dottrina pedagogica, sarebbe affatto irragionevole il non tener conto di quanto vi può essere di buono e di pregevole nel passato, innestandolo col nuovo e col presente. Che anzi il vero progresso in fatto di educazione e di scienza pedagogica non si ottiene che a questa condizione. Se tutto si distrugge a mano a mano che si viene edificando, non si verrà mai a capo di nulla.

Lo studio storico esclusivo, mancando di un ideale superiore ai fatti conduce all'immobilità, al meccanismo, alla ripetizione sterile ed infeconda dei medesimi fatti. Chi si abbandona senza modo e senza misura a quest'indirizzo, assiste passivamente alla continuata successione dei fatti educativi, che la storia gli presenta attraverso i tempi ed i luoghi, non li domina, non li ricrea, non li feconda coll'attività del suo pensiero, non sa dove ed a qual punto finale vadano a terminare. Egli non medita colla propria testa, ma ripensa ciò che hanno pensato gli altri: non aggiunge un sassolino al grande edificio dell'educazione umana. La storia non si fa; è già fatta; non rimane che contemplarla nel suo passato. Certamente se noi la studieremo con serietà, con illuminata intelligenza, potremo attingere grandi e preziosi ammaestramenti; ma ricordiamo che la sapienza e l'opera educativa non si chiude tutta quanta nel passato, ma si estende senza fine nell'avvenire, e che se l'avvenire pedagogico fosse una morta ripetizione del passato e niente più, non avrebbe nessuna ragione di essere.

L'indirizzo sociologico.

La scienza e l'arte pedagogica sta tutta quanta nella sua storia: una teoria speculativa dell'educazione, che trascenda la cerchia dei fatti educativi, non ha ragione di esistere. Così sentenziano i seguaci esclusivi dell'indirizzo storico. La pedagogia è scienza essenzialmente ed esclusivamente sociologica; l'educazione è opera essenzialmente ed esclusivamente sociale: tale è il pronunziato dei seguaci esclusivi dell'indirizzo sociologico. Nel secol nostro le scienze sociali (1) hanno spiegato un amplissimo sviluppo pari al meraviglioso incremento, che raggiunsero le scienze fisiche e naturali nel secolo decimottavo; quindi non è da stupire, se attrassero nella loro orbita anche la pedagogia falsandone il carattere. Le scienze sociali contemporanee rispecchiano idealmente lo stato della società attuale, che va sempre più complicando il suo organismo, ampliando la sfera

(1) Nel mio opuscolo *Saggio di una introduzione alle scienze sociali*, a pag. 24 io ho tentato una classificazione sistematica delle medesime, fondata sul concetto della società umana.

della sua attività, stringendo più forti i vincoli del civile consorzio. Quanta disparità tra i tempi medioevali, in cui le genti umane vivevano qua e là disperse e pressochè solitarie, e le affollate città del mondo moderno, in cui la vita intima e privata rimane pressochè assorbita dalla vita pubblica e sociale!

È noto che nell'antica Grecia l'educazione essendo riguardata come un diritto esclusivo dello Stato, mirava a coltivare nel fanciullo il cittadino e non la personalità individua dell'uomo, e perciò la pedagogia veniva confusa colla scienza sociale della politica Infatti Platone ed Aristotele esposero le loro dottrine pedagogiche l'uno nella sua opera *Lo Stato*, l'altro nel suo volume *La Politica*. Ma a poco a poco la pedagogia svincolandosi dalla politica e dalle altre scienze eterogenee venne sempre più affermandosi come scienza distinta e fornita di uno stampo tutto suo proprio (1). Ora stiamo ritornando all'antico errore: non solo si vuole da alcuni confusa la pedagogia colla politica, ma la si pretende una scienza essenzialmente e supremamente sociale. Nessuno vorrà mai negare che l'educazione debba avere altresì un còmpito sociale, coltivando nel fanciullo non solo la sua personalità individuale, ma altresì l'uomo sociale, che vive in comunanza di vita co' proprii simili; ma il ridurla ad un còmpito supremamente sociale è uno snaturare il carattere della pedagogia e dell'educazione ad un tempo.

I promotori dell'indirizzo sociologico, di cui parliamo, esordiscono intentando un processo alla pedagogia quale venne fin qui professata e la accusano senza più di essere una scienza astratta, tradizionale, frammentaria, esclusiva e unilaterale, priva di un oggetto suo proprio, che le conferisca un organismo suo particolare. Formolati questi capi di accusa, essi ne arguiscono la necessità, che essa risorga a nuova vita ponendosi a contatto colle scienze sociali per trasformarsi anch'essa in una

(1) In tempi a noi più vicini, Gaetano Filangieri ha esposto la sua dottrina pedagogica nella *Scienza della Legislazione*, che è scienza sociale; ma egli contempla l'educazione soltanto come pubblica e sociale, diretta da leggi civili, lasciando al pedagogista il còmpito di contemplarla nella integrità sua, epperò non si potrebbe asserire che ne faccia una scienza essenzialmente sociale.

scienza sociale, poichè solo a tal condizione può ritrovare l'obbietto suo proprio, e quindi costrursi un organismo scientifico, conquistare un posto tutto suo nel campo dello scibile umano. Il suo carattere scientifico debb'essere essenzialmente sociologico. Essa debbe avere per argomento perpetuo delle sue investigazioni e de' suoi studi il fatto educativo quale si mostra e si svolge attraverso le forme successive, che presenta l'evoluzione progressiva della società. soltanto una educazione siffatta può preparare gli animi e le menti a ben comprendere e rettamente risolvere la questione sociale, che agita la coscienza del mondo contemporaneo e salvarci da quel gretto ed esclusivo individualismo, a cui ci ha condotti l'educazione, la quale fa dell'alunno un uomo indipendente dagli altri suoi simili, sciolto da ogni vincolo sociale, mentre l'individuo umano non esiste e non vive che nella società e per la società, e fuori di essa si riduce ad una mera astrazione. Così ragionano i nostri novatori, o dirò meglio rinnovatori dell'antico errore, che spogliava l'educando della sua individualità personale per farne un mancipio dello Stato o della società, riducendo appunto la pedagogia ad una scienza essenzialmente sociale.

Passando all'esame di quest'indirizzo sociologico, domandiamo anzitutto: sono vere le accuse, sono fondate le censure, che i suoi fautori rivolgono alla pedagogia filosofica? Essi la accusano di non avere un oggetto reale e concreto, su cui lavori, quale è la società, ma di speculare intorno l'uomo astratto ed insussistente, e quindi perdersi in concetti empirici ed astratti, che non fanno scienza. Ma qual'è mai la scienza che studii il tale o tal altro oggetto individuale realmente esistente qua o là, o non piuttosto l'essenza astratta, comune ad una data specie di esseri? Il botanico, il zoologo non studiano questo o quell'altro fiore, questo o quell'altro bruto in particolare, ma i varii generi, le varie specie di fiori o di bruti, ossia il fiore ed il bruto in astratto. Così la pedagogia non ha per oggetto l'educazione di Cajo, di Tizio, di Pietro, ma dell'uomo in astratto. I nostri stessi sociologi, quando trattano dell'educazione sociale, non intendono certo di parlare di questa o quell'altra società particolare, di quest'altra o di quell'altra famiglia privata, di questo o quell'altro Stato determinato, bensì della società, della famiglia, dello Stato in astratto.

La pedagogia filosofica non forma una unità scientifica tale, che le varie sue parti siano insieme congiunte tutte quante da un vincolo logico, che le componga in un tutto organico e concorde, ma un centone di frammenti e di pezzi scelti qua e là e raccostati meccanicamente insieme senza intime congiunture. Ecco una seconda accusa, più insussistente ancora della prima. A sventarla basta consultare un trattato più o meno compiuto di pedagogia, ad esempio la *Pedagogica* del Rayneri, in cui tutta quanta la scienza dell'educazione si appunta in un concetto unico supremo, da cui si veggono fluire a filo di logica tutte quante le sue parti e specie, ciascuna delle quali viene discorsa sia in se stessa, sia nelle sue relazioni colle altre. L'ordine logico, che governa tutto quanto il trattato, gli imprime quello stampo organico, che è proprio della scienza.

La pedagogia filosofica è schiava della tradizione, che la ridusse ad un impasto di vecchiumi: è la pedagogia del passato, priva di ogni soffio di novità e di progresso. Intorno a quest'altra grave censura occorre intenderci per bene. Se per tradizione s'intende un cieco e smodato amore del passato, che ci inchioda ad un tempo che non ha più ragione di esistere, e ci rende sdegnosi ed intolleranti di ogni novità e progresso, niente vi ha di più riprovevole e di più contrario alla ragione; ma la pedagogia filosofica, anzichè rimanere immobile ed attaccata al passato fuor di ragione, ha sempre fatto tesoro delle scoperte della scienza. Ma la tradizione ben intesa è un filo di continuità che rannoda insieme il passato col presente e coll'avvenire, che congiunge in un tutto vitale le varie fasi di una istituzione, di un'arte, di una scienza, ed è quindi condizione necessaria di sviluppo e di progresso, poichè non si progredisce nè rimanendo immobilmente attaccati al passato, nè distruggendolo tutto quanto per edificare dal nulla sulle sue ruine. Ora la pedagogia nostra è certamente tradizionale in questo senso, ma per ciò appunto è progressiva.

Viene l'ultima censura: la pedagogia da noi professata è esclusiva, non abbraccia l'educazione in tutto il suo perfetto insieme, ma la riguarda sotto un aspetto parziale ed incompiuto. Essa trascura affatto il vastissimo argomento dell'educazione sociale e si ristringe tutta quanta all'educazione individuale dell'uomo astratto. Anche questa è un'osservazione gratuita, nè

dimostrata, nè dimostrabile. Non vi è trattato scientifico pedagogico, in cui non si discorra dell'educazione propria della famiglia o società domestica, della privata e della pubblica o sociale, dell'educazione morale sociale, ed in generale dell'educazione delle classi popolari, dei diversi stati sociali professionali e via via. Nella sua *Pedagogia* il RAYNERI traccia tutto l'amplissimo ambito della scienza educativa, la quale deve studiare l'educazione sotto il rispetto scientifico, amministrativo, legislativo, economico, statistico e storico.

Io mi sono argomentato di dimostrare l'insussistenza delle accuse, di cui fu fatta segno la pedagogia filosofica; ma non mi arresto a questo punto, vado più oltre e ritorco le accuse contro gli stessi seguaci dell'indirizzo sociologico, che le hanno mosse. La pedagogia da loro ideata è primamente astratta anch'essa, come ogni scienza in generale. Poichè la società, che le assegnano ad oggetto, non è una società particolare determinata dal tal tempo o dal tal luogo, la società antica, o la medievale, o la moderna, la società italiana, o la francese, o la tedesca, o la inglese, bensì è la società in genere, presa in astratto, ossia la essenza specifica della società, gli elementi, che la costituiscono, e che si trovano in fondo ad ogni società umana. Secondamente la loro pedagogia non è una scienza organica, che, componga un tutto unico e concorde nella varietà e moltiplicità delle sue parti, bensì un'accozzaglia frammentaria di parti eterogenee, meccanicamente sovrapposte le une alle altre. Infatti le parti, di cui è formata, sono tratte dall'antropologia, dalla psicologia, dalla fisiologia, dalla biologia, dalla sociologia, dalla storia, ed in mezzo a tutte queste parti appartenenti a diversissime scienze la pedagogia vi si trova talmente rimescolata, che non costituisce un tutto distinto e fornito di uno stampo suo caratteristico. Costoro hanno confuso colla pedagogia altre discipline, che sono meramente sue ausiliarie e che quantunque abbiano con essa punti di contatto più o meno intimi, rimangono tuttavia essenzialmente distinte. I pedagogisti sociologi rigettano la tradizione siccome contraria alla scienza; ma con ciò mentre pretendono di creare dal nulla la nuova pedagogia, le tolgono ogni fondamento e la campano in aria, perchè senza il filo tradizionale della continuità, che stringe insieme i successivi progressi della scienza nel suo storico svi-

luppo, il lavoro del pensiero si sciupa nel nulla, pari alla tela di Penelope, sempre ricominciata da capo e non finita mai.

Viene un ultimo punto assai notevole, che rivela la deficienza, l'esclusivismo e la profonda lacuna dell'indirizzo sociologico. Esso non vede altra educazione se non quella della società, come se l'educazione tutta propria della individualità personale non contasse nulla. Ma allora bisognerebbe bandire dal campo pedagogico la coltura del carattere, siccome quello, che è essenzialmente individuale, la coltura propria delle successive età dell'alunno, infantile, puerile, giovanile, le quali non si riscontrano nella società; la coltura delle molteplici potenze umane, fisica, intellettuale, artistica, morale, perchè queste sono proprie dell'individuo, e non della società. La pedagogia filosofica non può certo essere appuntata di siffatto esclusivismo: essa non si restringe all'educazione sociale, od alla individuale, ma insieme le comprende come parti indisgiungibili di un medesimo tutto.

Dacchè sono chiarite insussistenti le accuse fatte alla pedagogia filosofica, parrebbe che i promotori dell'indirizzo sociologico non avrebbero più ragione di rigettarla per crearne un'altra affatto nuova. Ma essi mettono in campo la questione sociale e risolutamente sentenziano che a rettamente comprenderla e felicemente risolverla non soccorre altra via se non quella sola di un'educazione essenzialmente sociale. Vediamo se questa loro sentenza regge alla prova.

Ci torna anzi tutto necessario aver presente al pensiero il giusto e comprensivo concetto della questione sociale a fine di rilevare se l'educazione dettata dalla pedagogia sociologica valga a risolverla (1). Ai tempi nostri la questione sociale assunse una forma più complicata e varia che nei secoli passati e si estese a tutte le funzioni della vita pubblica e civile. Essa non è più semplicemente politica, qual'era nell'antica Roma, nè semplicemente economica, come nel feudalismo del medio evo, nè democratica, come nella Francia del '89; bensì mira al dissolvimento di tutta la vita pubblica e privata mediante il comunismo dei beni, l'anarchia, l'eguaglianza illimitata, l'adorazione

(1) Qui mi richiamo a quanto ho pubblicato nel *Saggio di una introduzione alle scienze sociali.*

di se stesso. Nella questione sociale contemporanea si contiene altresì una questione pedagogica scolastica, che dovrebb'essere risolta da prima. Un disordine universale agita e sconvolge tutto il campo dell'educazione contemporanea: tutti i principii pedagogici, tutti i metodi didattici, tutti gli ordinamenti scolastici sono messi in discussione: tutto si muta dall'oggi al dimani, niente permane: non si sa più a quale principio stabile e fermo affidare l'opera educativa, a qual fine supremo debba essere rivolta.

I nostri sociologi fondano la loro nuova dottrina pedagogica su questo pronunciato: la società è essa sola una realtà vera, operosa, vivente, l'individuo esiste e vive nella società e per la società; fuori di essa è una pura astrazione, non ha diritti da esercitare, doveri da adempiere, non ha un fine suo proprio, a cui sia ordinato. Or bene questo pronunciato sociologico, che fra breve esamineremo più di proposito, svolto nelle sue conseguenze pedagogiche non solo non risolve la questione sociale, ma conduce al dissolvimento della società medesima. Infatti l'individuo umano ha diritti, che non gli sono conferiti dalla società, ma che possiede per la stessa sua natura personale, quali sono il diritto alla verità, alla felicità, alla libertà morale; ha doveri verso i suoi simili, ma ne ha altresì verso se stesso. La violazione di questi diritti e di questi doveri per parte della società offende la dignità della persona umana, costituisce un attentato della società contro l'individuo, e l'individuo insorge per la sua difesa personale: di qui una delle varie forme della questione sociale, la questione giuridica. Or bene l'educazione chiamata a risolvere questa questione sociale giuridica deve ammaestrare gli animi e le menti giovanili al rispetto di tutti i diritti individuali. Ma è evidente che se l'educazione sociologica si facesse ad adempiere questo còmpito richiamando la società al rispetto dell'individuo, rinnegherebbe il proprio principio, che cioè la società è la realtà vera e viva, e che l'individuo per sè è un'astrazione insussistente. Similmente l'individuo ha diritto di scegliersi quello stato sociale, a cui si sente da natura chiamato, di provvedere onestamente alla propria sussistenza il meglio che può, di possedere quanto ha lecitamente acquistato, di vivere libero cittadino in libero Stato, di avere una coscienza morale e religiosa tutta sua propria

ed inviolabile. Tutti questi diritti non li deve alla società, ma li possiede in virtù della sua individualità personale; se la società li calpesta, egli insorge e li difende. Ecco qui ancora la questione sociale sotto tutte le sue forme; giuridica, economica, politica, morale e religiosa; ed anche qui l'educazione sociologica dovrebbe rinnegare il suo principio fondamentale e riconoscere che l'individuo non vive e non esiste solamente nella società e per la società, ma vive una vita tutta sua propria ed incomunicabile. In conclusione senza l'io personale ed individuo non si spiega nè la società nè la questione sociale: quella e questa hanno origine dall'individuo considerato nella sua natura, od offeso nella sua personalità o trascendente i suoi naturali confini. Ogni riforma sociale deve prender le mosse dal riformar l'individuo, come ogni corruzione sociale esordisce dalla corruzione individuale.

Se raffrontiamo fra di loro l'individuo umano e la società, tosto si scorge che sono così intimamente congiunti che non possono essere concepiti, nè esistere l'uno senza l'altra. Infatti non ci è dato concepire la società senza gli umani individui, che sono i suoi componenti, essendo essa una riunione di persone individue, che insieme cospirano scientemente e liberamente ad un medesimo fine preconcepito. Togliete i singoli individui e la società scompare. Alla sua volta non si può concepire l'uomo individuo senza concepirlo naturalmente socievole, ossia essenzialmente fornito della virtù della socialità. Infatti la persona essendo intelligente e libera aspira ad un ideale infinito, e per conseguirlo sentesi portata a stringersi in comunanza di vita con altre persone individue. Così la società è una necessaria espansione della persona individua, origina spontaneamente dalla natura umana, e non già da un patto arbitrario fatto dagli uomini da prima isolati e dispersi. Così i due concetti di individuo umano e di società sono correlativi ed inesistono l'uno nell'altro.

Che se l'individuo umano in virtù della sua personalità è fornito della virtù della socialità, se è il generatore della società, in cui si espande, ne consegue che l'io individuo è esso l'uomo vivente e reale, e che la società non si regge se non sulla viva personalità degli individui, che la compongono. Un'altra conseguenza, la quale conferma la realtà vivente del-

l'individuo umano, sta in ciò, che esso crea la società collo scopo di raggiungere la massima perfezione possibile di se medesimo. Quindi la società non è fine a se stessa, ma è rivolta a fornire ai singoli individui la maggior copia possibile di mezzi per conseguire que' beni supremi, che sono proprii della persona umana, la verità, la virtù, la felicità. Cosa singolare! Questa verità è confermata dal fatto medesimo del socialismo contemporaneo, il quale a tutta prima sembrerebbe l'assorbimento assoluto dell' individuo umano nel grande organismo sociale. Poichè a che mai aspirano i più ardenti tra gli agitatori socialisti? Non certo a sacrificare il loro interesse personale al bene comune, bensì al trionfo del proprio io, ossia a rendere più prospera e più agiata possibile la loro sussistenza individuale.

La vostra dottrina (ci si dirà) conduce all' individualismo più esclusivo e dissolvente, essendochè se la realtà viva e concreta appartiene non alla comunanza sociale, ma all' individuo personale, ne consegue che l' io umano non vedrà in tutto l'universo altro che se stesso, non mirerà ad altro che a se medesimo, sacrificando l'intiera società al suo sconfinato egoismo. Qui ci troviamo di fronte ad uno dei più gravi problemi, che le scienze sociali siano chiamate a risolvere. Poichè si tratta di segnare il punto preciso in cui terminano i diritti dell'individuo e cominciano quelli della società. A dissipare la difficoltà proposta necessita por mente al vero e giusto concetto dell'individuo umano, e dell'individualismo. L'individuo umano è persona, ma persona finita. Come persona, possiede diritti assoluti, che deve conservare sacri ed inviolabili di fronte alla società insieme colla sua esistenza personale. Come persona finita, dipende dalla personalità infinita divina, la quale gli impone doveri da adempiere verso i proprii simili che sono anch'essi persone, e condanna l'egoismo siccome contrario alla legge del dovere. Convivendo coi proprii simili, egli ha diritto di conservare il sentimento ed il possesso della sua dignità personale e l'indipendenza della sua vita intima; e se il dovere della benevolenza e dell'amore sociale gli impone di sacrificare il suo utile temporaneo a pro dei suoi fratelli, non può e non deve spingere il suo sacrificio sino a rinunciare alla sua dignità personale e diventare mancipio della società, strumento dei voleri

altrui. Quindi si scorge, che l'individualismo conseguente dalla nostra dottrina non è sconfinato, nè egoistico, perchè temperato dalla legge divina del dovere, la quale mentre da una parte tutela la dignità personale di ciascuno, dall'altra proscrive ogni atto, che offenda l'ordine ed il buon essere della convivenza sociale. Così la dottrina da noi professata intorno la realtà dell'individuo umano riconosce in ciascun uomo due forme di vita, l'una propria od interiore, l'altra comune o sociale.

Queste due guise di vita umana vorrebbe natura che si mantenessero in armonico accordo fra di loro, ma nel fatto non sempre avviene così. Sonvi di tali, che hanno dalla natura medesima sortito un'indole solitaria, la quale li trae a vivere raccolti in sè e con sè, appartandosi il più che possono dalla convivenza comune. Talvolta questa prevalenza della vita intima sulla vita esterna non origina dalla tempra individuale dell'anima, bensì è conseguenza di dolorose vicende, di strazianti sciagure, per cui il cuore, non trovando più in tutto l'universo oggetto che lo conforti, si abbandona ad una illimitata mestizia, come se il mondo più non contasse nulla per lui. Quando quest'isolamento dal consorzio umano tocca il suo estremo, allora abbiamo la misantropia, forma morbosa dell'anima, che vede in ogni creatura umana un nemico, ed all'isolamento dalla società aggiunge il disprezzo e l'odio del proprio simile. Un estremo diametralmente opposto si manifesta, allorquando la nostra vita propria e personale rimane assorbita e confusa colla vita sociale a segno, che il nostro io non è più lui, che pensa, sente e vuole in modo tutto suo proprio, ma diventa un pallido riverbero della persona altrui, un mancipio del volere sociale. Nulla di più ignobile, di più contrario alla dignità personale dell'uomo quanto il vivere continuamente distratti in mezzo al vortice delle faccende esteriori, senza mai raccogliersi nell'interiorità dello spirito, interrogare la nostra coscienza, dimandarci dove andiamo, che cosa vogliamo, perchè viviamo. Il raccoglimento interiore sta bene, ma non cadiamo in una solitudine assoluta, in un misantropico isolamento; come pure giova ritemprare l'anima nelle fervide correnti della vita sociale, non però fino a naufragare nel gran mare della società.

Raffrontando fra di loro la vita propria individuale e la vita comune sociale, si rileva che l'intensità e l'estensione

stanno fra di loro in ragione inversa, cioè il nostro io personale tanto più vive in sè e con sè, quanto meno si espande nella convivenza sociale, e che per contro la sua vita psichica perde in intensità quanto guadagna in estensione. Così in quel piccolo mondo sociale, che è la famiglia, specchio e suggello di tutta la società umana, la nostra vita individuale si svolge intensa e potente, mentre i nostri vincoli sociali si vanno sempre più rallentando passando dalla famiglia al paese natìo, al comune, alla patria, alla nazione, all'immensa società del genere umano dispersa per l'universo. Nella misantropia e nell'egoismo assoluto tutti i vincoli sociali sono infranti e l'intensità della vita individua è somma: per contro nell'eroismo del sacrificio la vita dell'io scompare immolata all'amore dei proprii simili.

Sorge qui una questione gravissima ed affatto nuova. Noi abbiamo proclamato la dignità pressochè infinita, propria della persona umana, la quale è fornita di diritti assolutamente inviolabili, per cui non può essere sacrificata come mezzo o strumento al bene altrui. Come adunque si concilia il sacrificio della propria vita colla dignità sacrosanta propria della persona umana? Come si scorge, qui il problema dei rapporti tra l'individuo umano e la società assume una forma del tutto originale e va a collegarsi col principio della vita futura. Poichè se l'io umano scomparendo dalla presente società terrena andasse a finire nel nulla, non vi sarebbe ragione per cui egli sacrificasse al bene altrui non solo il suo interesse materiale, ma la stessa sua esistenza, perchè la stessa sua dignità personale verrebbe meno. Ma se lo spirito umano sopravvive alla tomba, allora l'eroico sacrificio della propria vita presente è giustificato, perchè è continuata da una seconda vita; allora si viene a comprendere, che l'individuo umano non solo non è una mera astrazione di fronte alla società, ma a questa immensamente sovrasta, perchè la società terrena sorge quaggiù e tramonta quaggiù, mentre lo spirito umano diventa cittadino di un altro mondo sociale, di cui la ragione non giungerà a ritrarre la forma particolare e l'organamento interiore, ma non perciò ha motivo di impugnarne l'esistenza.

Queste considerazioni intorno il rapporto tra la società e l'individuo umano mi parvero necessarie a compiere la critica dell'indirizzo sociologico pedagogico.

Gli indirizzi della Pedagogia contemporanea secondo N. Fornelli.

Io reputo conveniente chiudere questo mio lavoro chiamando a breve disamina un opuscolo recentissimo dell' illustre pedagogista Nicola Fornelli, che discorse il medesimo argomento. Egli avverte che la pedagogia contemporanea postasi a contatto colle altre scienze assunse indirizzi molteplici e contrarii, i quali accennano ad un suo rinnovamento più o meno compiuto, e che perciò occorre allo studioso ricercare le loro origini e le loro ragioni per orientarsi nella scelta di essi. Giustamente avvisa l'autore che la pedagogia dei giorni nostri non si troverebbe distratta fra indirizzi svariati e discordi, se si fosse mantenuta isolata e scissa dalle altre scienze; ed a compiere il suo concetto parmi necessario far distinzione tra la scienza propriamente detta ed i loro sistemi. La scienza per se stessa è sempre vera, oggettiva, concorde in tutte le sue diramazioni; i sistemi sono di loro natura soggettivi, e quindi possono essere erronei, incerti, discordi fra di loro. Quindi è che gli indirizzi della pedagogia saranno veri o sbagliati, sicuri o malfermi, concordi o contrarii, secondochè traggono origine dalle scienze o dai sistemi.

Il nostro autore segnala due principali indirizzi pedagogici, che oggidì si contrastano il campo, e che egli appella di *formazione* l'uno, di *sviluppo* l'altro. L'indirizzo di formazione fondandosi sulla psicologia studia l'evoluzione naturale della mente del fanciullo e conformandosi alla medesima si propone di formare l'animo del futuro uomo per un fine morale e sociale. L'indirizzo di sviluppo esige che l'opera dell'educatore sia più cosciente e più compiuta. Questo secondo indirizzo presenta due caratteri suoi proprii: la necessità che l'educatore conosca il più che si può ciascun soggetto educando, e quindi, la necessità che il fanciullo diventi soggetto di osservazione non solo interna, ma altresì esterna. Accanto a questi due segnalati indirizzi si venne manifestando un terzo, che l'autore appella indirizzo storico, perchè ha per oggetto suo proprio lo studio dei fatti educativi contemplati nella loro successione e coesistenza storica. Questo terzo indirizzo attinse dal recente evolu-

zionismo biologico il concetto, che le leggi del processo educativo vanno desunte dalle leggi dell'evoluzione mentale della specie umana, sicchè la mente dell'individuo, nell'assimilarsi ogni ordine di cognizioni, percorre i medesimi gradi generali di sviluppo, per cui è passata la mente dell'umanità per costituirle. Per siffatta ragione l'indirizzo storico potrebbe appellarsi altresì sociologico. Qui l'autore a viemeglio chiarire, che ogni questione pedagogica in rapporto con l'esistenza e col miglioramento sociale è sempre una questione storica, prende a dimostrare, che il miglioramento sociale torna impossibile senza la educazione.

A questo proposito l'autore nota il grande divario che intercede fra l'indirizzo storico ed il *senso storico*, e pone in chiaro quanto il secondo contribuisca a rendere fecondo l'indirizzo sociologico, e come la maggiore o minor presenza od assenza del senso storico informi diversamente i capolavori dei grandi pensatori di ogni epoca, quali ad esempio Platone ed Aristotele presso gli antichi, il Leibniz, il Kant ed il Comte fra i moderni. Sono molto assennate e vere le osservazioni critiche, che egli fa intorno Augusto Comte, notando in lui un'assoluta deficienza di senso storico e chiamandolo un poeta della storia dell'umanità, anzichè il creatore della scienza della storia, come vorrebbe il Littré.

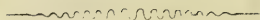
In mente dell'autore, oggi più che mai occorre che lo studioso di pedagogia sia fornito di questo senso storico, sia perchè ogni questione fondamentale di educazione è in necessario rapporto con l'esistenza sociale, epperò la pedagogia è disciplina sopratutto di natura sociologica, e sia perchè ogni questione di pedagogia sociale ha un fondamento storico. Il nostro autore ci consentirà che su questo punto noi dissentiamo da lui: giacchè pur riconoscendo i segnalati servizi, che la storia e la sociologia prestano alla pedagogia, teniamo per fermo che questa ha sua natura tutta speciale, che la differenzia dalla scienza storica e dalla scienza sociologica, le quali sono discipline meramente sussidiarie della pedagogia, come lo è la psicologia. È questa l'opinione, che mi sono argomentato di porre in sodo nel presente lavoro.

L'autore chiude il suo studio additando nel concetto sociologico il punto centrale di tutta l'enciclopedia pedagogica

contemporanea, nell'interesse ed utilità della vita comune, la finalità suprema della scienza e dell'arte pedagogica ed il criterio per giudicare di quanto si pensa e si opera nel campo educativo.

Noi abbiamo letto con vivo interesse l'importantissimo opuscolo dell'illustre pedagogista di Napoli, come apprezziamo assai l'altro suo secondo volume: *Questioni pedagogiche e scolastiche*; e ci lusinghiamo, che quando egli abbia fermata la sua attenzione sul presente lavoro, forse riconoscerà che ha esteso oltre i suoi limiti il còmpito pedagogico del principio sociologico e non ha tenuto nel debito conto la coltura della vita intima e tutta personale, senza di cui l'educazione esterna sociale perde il suo vero carattere e manca di ogni valore.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

Torino — VINCENZO BONA, Tipografo delle LL. MM. e RR. Principi.

CLASSI UNITE

Adunanza del 14 Giugno 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Direttore della Classe, Camerano, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Morera. — Scusano l'assenza i Soci Salvadori, Spezia e Fusari;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Chironi, Ruffini, Stampini, Sforza e Renier che funge da Segretario. — È scusata l'assenza di Boselli, Vice-presidente dell'Accademia, Manno, Direttore della Classe, Carutti, De Sanctis e D'Ercole.

Si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente a Classi Unite, 8 marzo 1908.

Invitato dal Presidente, il Socio Tesoriere espone il rendiconto finanziario dell'anno 1907, sia del fondo accademico, sia dei fondi particolari per i premi Vallauri, Bressa, Gautieri, Pollini. Legge poi il bilancio preventivo per l'anno 1908. L'Accademia approva tanto il resoconto consuntivo quanto il bilancio preventivo.

Ai Soci Chironi e Foà, recentemente nominati Senatori, il Presidente esprime congratulazioni, in nome proprio e dei colleghi. I due nuovi Senatori ringraziano.

Il Presidente fa noto quanto sinora ha fatto la Classe di scienze fisiche per celebrare solennemente nel 1911 il centenario della pubblicazione della classica Memoria di Amedeo Avogadro *Sulla costituzione molecolare dei gas*, che è considerata a giusto titolo come il fondamento della chimica moderna. Fu costituito un Comitato, che ha già stabilito in linea generale il modo migliore per onorare l'illustre scienziato ed accademico. Ora il Presidente propone che in quel Comitato sia rappresentata anche la Classe di scienze morali e ritiene opportuno che tale rappresentanza sia tenuta dal Vice-presidente dell'Accademia, dal Direttore e dal Segretario di quella Classe. — La proposta è accolta ad unanimità dai presenti.

Gli Accademici Segretari
LORENZO CAMERANO.
GAETANO DE SANCTIS.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Giugno 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SEGRE, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, MORERA, GRASSI e CAMERANO, Segretario. — Scusano la loro assenza i Soci FUSARI e SALVADORI.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Vengono presentate dal Presidente in omaggio alla Classe le pubblicazioni seguenti: *Trigonometrische Höhenmessung und Refraktionskoeffizienten in der Nähe des Meerespiegel*, del Socio straniero F. R. HELMERT; *Europa. L'origine dei popoli europei e loro relazioni coi popoli d'Africa, d'Asia e d'Oceania.* Torino, Bocca, 1908, di G. SERGI. Il Socio Segretario mette in evidenza i pregi dell'opera del Sergi che ha rinnovato i metodi di studi craniologici e antropologici e fa risultare l'importanza del lavoro del Sergi.

Il Socio MATTIROLO presenta in omaggio le sue due note: *Proposte intese a promuovere la coltivazione dei tartufi in Italia. L'Orto sperimentale della R. Accademia d'Agricoltura di Torino nell'anno 1907. Lavori e Bilanci.*

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le note seguenti:

1° Ing. M. PANETTI: *Sulla deformazione dei solidi elastici prismatici prodotta dallo sforzo di taglio*, dal Socio GUIDI;

2° Prof. Gino FANO: *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, dal Socio SEGRE;

3° *Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti*, del Socio SEGRE;

4° Dr. Luigi COLOMBA: *Note mineralogiche sulla valle del Chisone (Cave del Pomaretto)*, dal Socio PARONA a nome del Socio SPEZIA;

5° Dr. S. SQUINABOL: *Riassunto di uno studio geo-fisico sulle Isole Tremiti*, dal Socio PARONA;

6° Dr. G. NEGRI: *Contributo alla briologia delle Isole Tremiti*, dal Socio PARONA;

7° Dott^a^ Efisia FONTANA: *Sul valore sistematico di alcune specie del genere "Elaphomyces" del gruppo E. anthracinus Vitt.*, dal Socio MATTIROLO;

8° G. SFORZA: *Sopra alcuni punti dell'estensionimetria non euclidea*, dal Socio D'OVIDIO;

9° Dott. E. LAURA: *Sopra le trasformazioni di contatto che vengono trasformate in se stesse dal gruppo delle rotazioni attorno ad un punto*, dal Socio MORERA;

10° Dr. Vittorio BALBI: *Posizioni apparenti di stelle del Catalogo di Newcomb per il 1909*, dal Socio JADANZA (*);

11° Dr. A. CAMPETTI: *Sulla variazione del grado di dissociazione di alcuni elettroliti colla temperatura*, dal Socio NACCARI;

12° *Nuovi isomeri della conina ed altre idrobasi*, del Socio GUARESCHI;

13° Dr. Giovanni ISSOGLIO: *Nuovo isomero della conina dal ciantrimetilpiperideone*, dal Socio GUARESCHI;

(*) Compariranno in un prossimo fascicolo.

14° Dr. L. Cognetti De Martiis: *I così detti " peni „ dei Criodrilini*, dal Socio Camerano;

15° Dr. E. Zavattari: *Materiali per lo studio dell'osso ioide dei Sauri*, dal Socio Camerano;

16° Prof. C. Burali-Forti: *I quaternioni di Hamilton e il calcolo vettoriale,* dal Socio Peano.

Il Socio Segre, anche a nome del Socio Morera, legge la relazione intorno alla Memoria del Dr. G. Z. Giambelli, intitolata: *Risoluzione del problema generale numerativo per gli spazi plurisecanti di una curva algebrica.* — La relazione favorevole è approvata, così pure, con votazione segreta, la stampa nei volumi delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Jadanza, anche a nome del Socio Naccari, legge la relazione sulla Memoria del Dr. Cesare Aimonetti, intitolata: *Determinazione astronomica della latitudine della Specola Geodetica della R. Università di Torino.* La relazione favorevole è approvata, e così pure con votazione segreta la stampa del lavoro nel volume delle *Memorie* accademiche.

Il Socio Guidi presenta per l'inserzione nel volume delle *Memorie* il suo lavoro, intitolato: *Risultati sperimentali su cavi di acciaio e di canapa.* La Classe con votazione segreta unanime approva la stampa nei volumi delle *Memorie* accademiche.

LETTURE

Sulla deformazione dei solidi elastici prismatici prodotta dallo sforzo di taglio.

Nota del Prof. MODESTO PANETTI.

Questa breve Nota ha essenzialmente lo scopo di porre in evidenza come, fra le deduzioni della teoria matematica dei solidi elastici prismatici, si trovi la conferma sicura di quell'incremento di deformazione del loro asse geometrico inflesso, che nei trattati di Ingegneria si considera separatamente come effetto dello sforzo di taglio.

Sono stati elevati dubbi a questo proposito in una Memoria (*), i cui risultati, intesi nel loro vero significato, non sono invece altro che una geniale conferma in un caso speciale di quanto si fa abitualmente negli studi di applicazione. Valga questo fatto a destare un qualche interesse per le modeste considerazioni che seguono, il cui compito è semplicemente quello di precisare il significato meccanico di deduzioni già note.

*
* *

Anzitutto bisogna tener presente che il problema del De Saint Venant suppone che la superficie laterale del prisma elastico non sia soggetta ad azioni esterne, e che in esso non si sviluppino forze di massa, sicchè la sollecitazione vi è prodotta esclusivamente dalle tensioni applicate alla base estrema B libera.

Le reazioni dei vincoli necessarie a mantenere in equilibrio il solido elastico si intendono applicate alla base A, nel cui baricentro si colloca l'origine degli assi di riferimento, sce-

(*) E. Almansi, *Sulla flessione dei cilindri*, vol. XXI, dei " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ", anno, 1906.

gliendo, per esempio, quello delle x coincidente coll'asse geometrico non deformato dal prisma, e fissando il suo senso positivo da A verso B.

In conclusione il solido del De Saint Venant corrisponde, rispetto ai casi studiati nelle applicazioni, alla mensola incastrata in A e caricata soltanto all'estremità B. Quindi lo sforzo di taglio vi è per tutta la lunghezza costante.

Le deformazioni deducibili coll'analisi dipendono dal modo di definire il vincolamento degli assi alla base A: e ciò si può fare:

1° Obbligando il piano $y\,z$ a rimanere tangente nell'origine alla superficie in cui la base A si deforma, e trattenendo uno degli assi p. e. y, nella direzione iniziale rispetto al prisma, d'ordinario in quella di uno degli assi principali centrali d'inerzia della sua base (Cfr. le opere del CASTIGLIANO e del GRASHOF).

Dette allora $u\;v\;w$ le componenti dello spostamento di un punto del prisma elastico di coordinate $x\;y\;z$, queste condizioni di vincolamento diventano:

$$(1)\qquad \begin{cases} (u)_0 = (v)_0 = (w_0) = 0 \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = 0 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = 0; \end{cases}$$

2° Vincolando l'asse delle x alla tangente iniziale all'asse geometrico, ed il piano $x\,y$ all'elemento piano definito in adiacenza dell'origine da detta tangente e da uno degli assi principali centrali d'inerzia della base (CLEBSCH, LOVE, ecc.).

Allora

$$(2)\qquad \begin{cases} (u)_0 = (v)_0 = (w)_0 = 0 \quad \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = 0 \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = 0. \end{cases}$$

La scelta di una di queste due ipotesi di vincolamento è, dal punto di vista matematico, affatto indifferente. Le diverse posizioni geometriche che vi corrispondono hanno per conse-

guenza soltanto una differenza nei valori degli spostamenti u, v, w, che se ne deducono: e questa differenza corrisponde ad una semplice rotazione rigida del prisma elastico deformato intorno ad un asse passante per il baricentro della base A, in cui coincidono le origini dei due sistemi di assi di riferimento.

Questa rotazione, nel caso specialissimo del problema del De Saint Venant, è l'incremento di deformazione dell'asse geometrico che i trattati di ingegneria attribuiscono all'effetto dello sforzo di taglio. E ciò fanno giustamente; in vero se sforzo di taglio mancasse, cioè, se sulla base B del prisma fossero applicate soltanto tensioni normali (*), le due ipotesi di vincolamento sarebbero perfettamente equivalenti.

Invece le tensioni tangenziali, propagandosi fino al baricentro della base A, vi provocano uno *scorrimento*, pel quale l'asse geometrico deformato nasce obliquamente al piano tangente alla base nell'origine.

Col 1° riferimento tale obliquità si rivela in modo diretto, e gli angoli piccolissimi che la misurano (o le loro tangenti) si esprimono grazie alle (1) nel modo seguente:

$$(3) \qquad (\gamma_{xy})_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 \qquad (\gamma_{zx})_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0.$$

Col 2° riferimento essa non risulta che in modo indiretto, e gli scorrimenti sono dati da

$$(4) \qquad (\gamma_{xy})_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \qquad (\gamma_{zx})_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0.$$

Alle ordinate (v) e (w) della linea elastica, deducibili col 2° riferimento dalle espressioni generiche di v e w, facendovi $y = z = 0$, si devono dunque aggiungere, per ottenere i valori ricavati col 1°, i termini

$$x(\gamma_{xy})_0 \qquad x(\gamma_{zx})_0;$$

sicchè, nel caso particolare in cui il piano $x\,y$ sia piano di simmetria del prisma nonchè della ripartizione delle tensioni tan-

(*) Qui non si tiene conto delle tensioni che producono il momento di torsione, poichè non hanno rapporto col presente quesito.

genziali applicate alla sua base B, detta R_y la risultante di esse ed M_z la coppia risultante, presa l'origine come centro di riduzione, si ha (*)

$$EJ_z(v) = R_y \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 x + M_z \frac{x^2}{2} - R_y \frac{x^3}{6}. \tag{5}$$

La ψ è una funzione che, agli scopi della presente Nota, basta determinare nella sua derivata rispetto ad y colla relazione seguente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{1}{2}\left[\eta y^2 + (2-\eta) z^2\right], \tag{5'}$$

dove η è il coefficiente di Poisson per solidi isotropi e B è una delle funzioni armoniche delle variabili y e z alle quali si riduce il problema del prisma elastico. Essa è definita dalla condizione di annullarsi per $y = z = 0$, e di soddisfare lungo il contorno della sezione all'equazione

$$\frac{\partial B}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial B}{\partial z}\operatorname{sen}\beta = \frac{\eta y^2 + (2-\eta)z^2}{2}\cos\beta + (2+\eta)\, yz \operatorname{sen}\beta, \tag{6}$$

detto β è l'angolo che la normale al contorno diretta verso l'esterno fa coll'asse delle y.

***

Dal punto di vista meccanico, interessando determinare le deformazioni del prisma elastico rispetto al sistema di assi che dà migliore affidamento di rappresentare la parete indeformabile, alla quale il prisma si suppone rigidamente legato, si deve indubbiamente preferire il 1° riferimento che conduce alla formola (5).

(*) Cfr. GRASHOF, *Theorie der Elastizität*, e CASTIGLIANO, *Théorie de l'équilibre des Systèmes élastiques*; salvo che in questi trattati si trova il termine $\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0$ in vece di $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0$, che gli è uguale, come risulta dalla (5'), in cui per $y = z = 0$ l'ultimo termine si annulla; ma è qui preferibile per dedurre con maggiore semplicità le interpretazioni meccaniche che seguono.

Invero, risultando secondo tale riferimento tangente al piano $y\,z$ la superficie in cui si deforma la base A del prisma, è lecito presumere che, nel caso limite in cui le dimensioni trasversali fossero infinitamente piccole, esso condurrebbe alle medesime conclusioni a cui si giungerebbe coll'ipotesi della assoluta indeformabilità della sezione di incastro.

Invece col 2° riferimento, supposta la parete di incastro solidale al piano $y\,z$, si arriverebbe all'assurdo di attribuirle l'attitudine a deformarsi in senso opposto alle tensioni normali colle quali il prisma agisce su di essa. Così sull'elemento adiacente al baricentro nella direzione $+y$ le tensioni normali applicate alla parete di incastro, nell' ipotesi di carico ammessa, sarebbero rivolte verso $-x$; e l'elemento dovrebbe invece spostarsi verso $+x$ perchè $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ è positivo se R_y è positivo.

I trattati di scienze applicate non fanno uso della formola (5) tal quale, ma al termine $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0$, che si conosce soltanto per alcune figure geometriche molto semplici, sostituiscono una delle due grandezze seguenti:

1ª Il *valor medio* di $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ per i punti della figura allineati sull'asse z, che si deduce calcolando per mezzo di considerazioni puramente meccaniche la risultante delle tensioni tangenziali distribuite lungo i vari elementi della sezione, di base $2z$ e di altezza dy.

Tale valor medio è uguale a

$$2(1+\eta)\frac{\mathfrak{M}_0}{2z_0}, \tag{7}$$

detto $\mathfrak{M}_0$ il momento statico rispetto all'asse z di una delle 2 parti in cui la figura è divisa dall'asse stesso, e $2z_0$ la corrispondente larghezza, poichè si è supposto il caso di un solido simmetrico rispetto al piano $x\,y$.

2° La quantità

$$2(1+\eta)\frac{1}{J_z}\int\left(\frac{\mathfrak{M}}{2z}\right)^2 dF \tag{8}$$

detta F l'area della sezione del prisma ed $\mathfrak{M}$ il momento sta-

tico rispetto all'asse z della porzione di sezione situata al di sopra della corda di ordinata y e di lunghezza $2z$.

A questo 2° valore approssimato conduce il teorema delle derivate del lavoro di deformazione, applicato al calcolo della curva elastica (CASTIGLIANO), trascurando la parte di esso corrispondente alle tensioni tangenziali τ_{xz} normali allo sforzo di taglio R, che le provoca, e sostituendo alle altre tensioni τ_{xy} ripartite lungo ciascuna corda parallela all'asse z, il loro valore medio.

La (8) è dunque sempre approssimata *per difetto*, poichè entrambe le cause di errore influiscono in questo senso. Non occorre provarlo per quanto riguarda la soppressione del termine $\int \tau_{xz}^2 dF$ nella espressione del lavoro di deformazione. Per l'altro termine

$$\int \tau_{xy}^2 dF = \int dy \int \tau_{xy}^2 dz$$

basta osservare che, sostituendovi a τ_{xy} il suo valore medio, si viene a porre questo in luogo del valore efficace, che è notoriamente maggiore del valor medio.

Nulla invece si può dire in generale circa il segno dell'errore commesso ricorrendo alla (7). Vi sono sezioni per le quali le tensioni tangenziali parallele allo sforzo di taglio e quindi gli scorrimenti relativi, decrescono andando dai lembi verso la mediana. Tale è il caso della sezione rettangolare ed allora la (7) è approssimata per eccesso.

Per altre sezioni succede l'opposto.

Così per una sezione circolare di raggio r, essendo in genere per $\eta = 1/4$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{20} \frac{R_y}{GJ_z} [7(r^2 - y^2) - z^2],$$

sarebbe in corrispondenza del baricentro

$$(\gamma_{xy})_0 = \frac{7}{5} \frac{R_y}{GF};$$

al qual valore si sostituisce: col 1° metodo $\frac{4}{5} \frac{R_y}{GF}$, col 2° metodo $\frac{10}{9} \frac{R_y}{GF}$ entrambi minori del valore esatto.

***

Si può dimostrare direttamente che la quantità (7) non è altro che la media dei valori assunti da $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ nei punti della sezione appartenenti all'asse z, e anzi più in generale che, presa una corda HK parallela a z, di ordinata y_1 e lunga $2z$, si ha rispetto ad essa

$$\int_{-z}^{+z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 dz = 2(1+\eta)\mathfrak{M}. \tag{9}$$

Ricorriamo alla funzione $\frac{\partial B}{\partial y}$ per mezzo della quale si esprime secondo la (5') $\frac{d\psi}{dy}$, e consideriamo l' $\int\frac{\partial B}{\partial y}\,dF$ esteso a tutta la porzione di area compresa fra la corda HK ed il contorno c della sezione dalla parte delle y positive. Eseguendo una delle solite trasformazioni di un integrale esteso ad un'area in un altro eseguito lungo il contorno, si può scrivere colla regola della integrazione per parti rispetto ad y fra i limiti y_1 ed y_c

$$\int\frac{\partial B}{\partial y}\,dF = \int dz\int\frac{\partial B}{\partial y}\,dy = \int_{HK}\left(y\frac{\partial B}{\partial y}\right)_1^c dz - \iint y\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\,dydz.$$

L'ultimo termine, essendo B una funzione armonica delle variabili y e z, si può sostituire con quest'altro:

$$+\iint y\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\,dz\,.\,dy = \int_{HK} y\,dy\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)_{c'}^{c''}$$

se c' e c'' sono le due regioni del contorno c, alle quali appartengono rispettivamente i due punti situati su di una stessa parallela all'asse z.

Ora lungo la porzione di contorno c limitata dai punti H e K si ha

$$dz = ds\cos\beta \qquad dy = \pm\, ds\,\mathrm{sen}\,\beta,$$

conservando all'angolo β il significato che ha nella (6) e intendendo che il segno $+$ si deve attribuire alla regione c'' $(z>0)$, il segno — alla regione c' $(z<0)$.

Si può dunque porre

$$\int_{HK}\left(y\frac{\partial B}{\partial y}\right)_c dz=\int_s y\frac{\partial B}{\partial y}\cos\beta\, ds,$$

$$\int_{HK}\left(y\frac{\partial B}{\partial z}\right)_{c'}^{c''} dy=\int_s y\frac{\partial B}{\partial z}\operatorname{sen}\beta\, ds;$$

e per conseguenza

$$(10)\quad \int\frac{\partial B}{\partial y}dF+y_1\int_{HK}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_1 dz=\int_s y\left(\frac{\partial B}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial B}{\partial z}\operatorname{sen}\beta\right)ds.$$

Se si ricorre alla condizione al contorno (6) il 2° membro diventa

$$\int_s y\left[\frac{\eta y^2+(2-\eta)z^2}{2}\cos\beta+(2+\eta)yz\operatorname{sen}\beta\right]ds=$$

$$=\int_{HK}\left(\frac{\eta y^3+(2-\eta)yz^2}{2}\right)_c dz+(2+\eta)\int_{HK}(y^2z)_{c'}^{c''}dy=$$

$$(11)\quad =\int_{HK}\left(\frac{\eta y^3+(2-\eta)yz^2}{2}\right)_1^c dz+\frac{1}{2}\int_{HK}[\eta y_1^3+(2-\eta)y_1z^2]dz+$$
$$+(2+\eta)\int_{HK}(y^2z)_{c'}^{c''}dy.$$

Il 1° ed il 3° termine, seguendo il cammino inverso a quello fatto nel precedente ragionamento, si trasformano subito in integrali estesi all'area presa in esame al principio; in fatti

$$\int_{HK}\left(\frac{\eta y^3+(2-\eta)yz^2}{2}\right)_1^c dz=\iint\left[\frac{3}{2}\eta y^2+(2-\eta)\frac{z^2}{2}\right]dF$$

$$\int_{HK}(y^2z)_{c'}^{c''}dy=\iint y^2dF.$$

Il 2° termine della (11) è uguale a

$$\eta y_1^3z+(2-\eta)y_1\frac{z^3}{3};$$

quindi la (10) si trasforma nella seguente equazione:

$$(12)\quad \int\frac{\partial B}{\partial y}dF+y_1\int_{HK}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_1 dz=\eta y_1^3z+(2-\eta)y_1\frac{z^3}{3}+\left(2+\frac{5}{2}\eta\right)\int y^2dF\,\cdot$$
$$+\frac{(2-\eta)}{2}\int z^2dF.$$

Ricorriamo ora alla (5′) per sostituire nella (12) la ψ alla B. Notando che, in corrispondenza della corda HK,

$$\frac{1}{2}\int_{-z}^{+z}[\eta y^2 + (2-\eta)z^2]dz = \eta y_1^2 z + (2-\eta)\frac{z^3}{3},$$

risulta come i 2 primi termini del 2° membro della (12), messo in evidenza y_1, e trasportati nel 1° membro, si riuniscano al 2° termine e lo trasformano in $y_1\int_{HK}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 dz.$

Così pure, trasportando nel 1° membro

$$\frac{1}{2}\eta\int y^2 dF + \frac{2-\eta}{2}\int z^2 dF$$

e riunendolo al 1° termine, questo diventa $\int\frac{\partial\psi}{\partial y}dF.$

Sicchè la (12) si può scrivere così:

$$\int\frac{\partial\psi}{\partial y}dF + y_1\int_{HK}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 dz = 2(1+\eta)\int y^2 dF. \tag{12'}$$

Il 1° membro della (12′) contiene esplicitamente nel secondo suo termine l'$\int_{HK}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 dz$, di cui cerchiamo l'espressione. Il primo termine poi, separandovi la doppia integrazione e ponendovi i limiti, si può scrivere così:

$$\int_{y_1}^{y_c} dy\int_{-z}^{+z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dz.$$

La sua derivata rispetto ad y_1 è dunque $-\int_{HK}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 dz.$

Perciò, se deriviamo ambi i membri della (12′) rispetto ad y_1 risulta

$$y_1\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{HK}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 dz = 2(1+\eta)\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{y_1}^{y_c} y^2 dy\int_{-z}^{+z}dz = -2(1+\eta)y_1^2.2z.$$

Alla quale si soddisfa ponendo

$$\int_{HK}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 dz = 2(1+\eta)\int_{y_1}^{y_c}2z.y.dy.$$

Questo valore soddisfa pure alle condizioni al limite deducibili dalla (12′), e conferma identicamente la (9), che si voleva dimostrare.

***

Dove si rivela meglio ancora il significato delle deformazioni supplementari dovute allo sforzo di taglio è nei casi di forze applicate anche alla superficie laterale del prisma, dei quali le scienze applicate devono correntemente occuparsi.

Se tali forze sono concentrate in corrispondenza di un certo numero di sezioni distribuite a distanze determinate l'una dall'altra, le deduzioni del problema di De Saint Venant si possono ancora applicare a patto di suddividere il prisma in altrettanti tronchi quanti sono gli intervalli fra le sezioni suddette. Ciascuno di detti tronchi sarà soggetto a forze applicate esclusivamente alle sue basi, e, passando dall'uno all'altro per studiarne la deformazione, si dovrà porre la condizione di continuità per la quale la base estrema di ognuno di essi è saldata alla iniziale del successivo.

Non vi può essere allora il minimo dubbio sul fatto che, ammesso questo modo di studiare il problema del prisma elastico inflesso, in corrispondenza delle sezioni S alle quali le forze P sono applicate, devono risultare altrettanti punti angolosi nella curva elastica.

L'angolo delle tangenti contigue vi dev'essere uguale alla variazione dello scorrimento, che è conseguenza della variazione dello sforzo di taglio nel passaggio da un tronco al successivo.

Se per esempio tutte le forze P sono dirette parallelamente ad y, sicchè $R_y = \Sigma P$, percorrendo i tronchi nel senso delle x positive, si ha in ciascun passaggio attraverso ad una delle sezioni S

$$\Delta R_y = -P \quad \text{e quindi} \quad \delta(\gamma_{xy})_0 = -\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0 \frac{P}{EJ_z},$$

facendo uso per maggior semplicità della funzione B in vece che della ψ, secondo quanto fu osservato nella nota a pag. 6.

Onde l'equazione della curva elastica per il tronco che segue la sezione S si potrà scrivere così:

$$(13) \quad v = v_S + \left(\frac{dv}{dx}\right)_S x - \frac{P}{EJ_z}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0 x + \frac{M}{EJ_z}\frac{x^2}{2} - \frac{R}{EJ_z}\frac{x^3}{6},$$

indicando con M ed R rispettivamente i valori di M_z e di R_y in corrispondenza della sezione S.

È notevole la conclusione a cui si giunge ammettendo che questo risultato si possa estendere ad una distribuzione continua di forze lungo il prisma, come dal punto di vista matematico è lecito fare riducendo indefinitamente la lunghezza dei successivi tronchi, ed aumentandoli di numero.

Cominciamo dal dedurre dalla (10), per il tronco che segue la sezione S, l'inclinazione della curva elastica

$$\frac{dv}{dx} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_S - \frac{P}{EJ_z}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0 + \frac{M}{EJ_z}x - \frac{R}{EJ_z}\frac{x^2}{2}.$$

Immaginiamola specializzata per la sezione estrema del tronco (quella che viene dopo S); poi rendiamone piccolissima la lunghezza indicandola con Δx, e sostituendo a P il termine $p\,\Delta\,x$, se p è l'intensità della forza ripartita.

Si ha allora, trascurando il termine che contiene Δx a grado superiore al 1°,

$$\Delta\left(\frac{dv}{dx}\right) = -\frac{p}{EJ_z}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0 \Delta x + \frac{M}{EJ_z}\Delta x.$$

Facendo tendere Δx a zero, risulta finalmente

$$(14) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EJ_z}\left[M - p\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0\right].$$

È questa la formola adoperata correntemente nelle applicazioni, salvo la sostituzione già discussa dei valori approssimati (7) od (8) al termine $\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0$.

Le ordinate della curva elastica del prisma inflesso risultano quindi effettivamente come somma di quelle dovute al mo-

mento M e di quelle prodotte dallo sforzo di taglio $R=\int_x^l p dx + R_B$ se l è la lunghezza del prisma, cioè la distanza dall'origine degli assi collocata nel baricentro di A della base estrema B, alla quale si suppone applicata la forza R_B. Invero soltanto all'effetto degli scorrimenti si deve attribuire il 2° termine entro la parentesi della formola (14).

Ma ciò che vi ha di notevole è l'analogia della formola (14) con quella dedotta dal prof. Almansi nella Memoria citata, la quale conchiude precisamente colla necessità di dare al momento M un termine additivo m per il calcolo della esatta deformazione dell'asse geometrico.

Il prof. Almansi si serve con vantaggio per la semplicità della sua geniale ricerca di un'altra funzione armonica φ che, come è facile verificare, è legata alla B del Clebsch, usata in questa Nota, dalla relazione

$$\varphi = \frac{1}{1+\eta} B + \frac{2+\eta}{2(1+\eta)} \left(\frac{y^3}{3} - z^2 y \right). \tag{15}$$

Allora, nel caso in cui le forze applicate dall'esterno alla superficie laterale del prisma, si riducessero ad un carico p diretto nel senso di $+y$, uniformemente ripartito lungo la generatrice contenuta nel piano di sollecitazione, che è anche piano di simmetria, e distante b dall'asse geometrico, risulterebbe

$$m = +p \left\{ \frac{1}{2} \eta b^2 - \frac{1}{J} \int y \left[(1+\eta)\varphi + \eta z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{3} y^3 \right] dF \right\}.$$

Facendone una applicazione alla figura che dà luogo alla più semplice legge di distribuzione delle tensioni tangenziali (è quella limitata da 2 lati paralleli all'asse y di sollecitazione e da 2 archi simmetrici di una iperbole che ha y per asse reale) (*) essendo per essa $\varphi = b^2 y$, il prof. Almansi trova il 2° termine della espressione di m uguale a

$$(1+\eta) b^2 - \frac{1}{5} b^2$$

per piccoli valori di a.

(*) Cfr. Grashof, Opera citata, ed Almansi, *Introduzione alla scienza delle costruzioni*, Clausen, 1901.

In questo caso dunque il termine additivo m sarebbe

$$-p\left\{(1+\eta)b^2-\frac{1}{5}b^2\left(1+\frac{5}{2}\eta\right)\right\}.$$

Ricorrendo invece alla (14) e notando che per il valore speciale di $\varphi=b^2y$ si ha

$$\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_0=(1+\eta)b^2,$$

si vede che risulta per l'appunto la 1ª parte del termine additivo m. L'altra, assai minore (circa la quarta parte), sarebbe dunque la sola da attribuire in modo diretto all'influenza del carico in quanto è ripartito sulla superficie laterale del prisma.

Qualunque sia del resto il significato meccanico della lieve differenza numerica fra i due procedimenti, resta dimostrato quanto si disse in principio, che cioè l'importante ricerca del prof. Almansi è una nuova conferma dei metodi di calcolazione seguiti nei trattati delle Scienze applicate, i quali tengono già conto correntemente della parte più importante del termine di correzione da lui proposto, e lo attribuiscono agli scorrimenti che la fibra media subisce per effetto dello sforzo di taglio.

Ben inteso però, quando nel calcolo di solidi prismatici ad incastri perfetti si introduce questo termine, si tiene conto al tempo stesso della inclinazione colla quale la curva elastica si spicca dagli incastri.

A questa inclinazione si deve anzi l'aumento delle ordinate della curva elastica rispetto all'effetto della sola flessione. E tale inclinazione va diminuendo coll'allontanarsi dall'estremità vincolata, pel fatto che lo sforzo di taglio decresce, e si genera quindi uno scorrimento relativo in senso opposto, come risulta dal segno del termine additivo della (14).

Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli.

Nota di GINO FANO.

1. — È noto da tempo (Clebsch) che le curve algebriche di genere zero sono tutte razionali (e viceversa). E per una superficie algebrica è stato dimostrato dal Sig. Castelnuovo [1] che condizione necessaria e sufficiente perchè essa sia razionale, cioè rappresentabile sul piano, è che siano nulli il suo genere numerico (p_a) e il bigenere (P_2); nel qual caso sono pure nulli, in conseguenza, il genere geometrico (p_g) e tutti gli altri plurigeneri.

Invece per le varietà algebriche a tre dimensioni l'annullarsi di tutti i generi (analoghi ai precedenti) non è ancora condizione sufficiente perchè esse possano rappresentarsi biunivocamente sullo spazio S_3; e scopo di questa breve Nota è appunto di assodare l'esistenza — che si presenta per la prima volta nel caso di varietà a tre dimensioni — di *tipi birazionalmente distinti di varietà aventi tutti i generi nulli.* Hanno infatti tutti i generi nulli tanto la varietà generale del 4° ordine (V^4) dello spazio S_4, quanto la varietà M_3^6 di S_5 intersezione generale di una quadrica e di una varietà cubica di quest'ultimo spazio; poichè sono entrambe varietà regolari (aventi nulle tutte due le irregolarità [2]), e su ciascuna di esse il sistema lineare di superficie (F^{4n} o rispett. F^{6n}) segato dalle varietà di un ordine qualunque $n(\geq 2)$ ha per sistema i-aggiunto quello segato dalle

(1) *Le superficie di genere zero*, " Mem. della Soc. It. delle Scienze ", (3), vol. 10 (1896).

(2) F. Severi, *Alcune proprietà fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche*, " Rend. Acc. dei Lincei ", (5), vol. 16, 2° sem. (1907), p. 337.

varietà di ordine $i(n-1)$, il quale non contiene mai il sistema i^{ple} del precedente (ma anzi vi è parzialmente contenuto). Con tutto ciò queste due varietà (V^4 di S_4, e M_3^6 di S_5), che noi supporremo prive di punti doppi, non si possono rappresentare (come faremo vedere) sullo spazio S_3; e di qui risulterà la prova di quanto sopra abbiamo affermato.

Le stesse considerazioni si potrebbero estendere facilmente alla varietà di 8° ordine intersezione generale di tre quadriche dello spazio S_6, e, probabilmente, alle eventuali varietà analoghe di spazi superiori (corrispondenti al tipo generale M_3^{2p-2} di S_{p+1}, con curve canoniche di genere p come sezioni).

Si osservi infine che la varietà M_3^6 di S_5 della quale ci occuperemo, se contenuta in una quadrica non degenere, è immagine del *complesso di rette generale del 3° ordine* dello spazio ordinario; risulterà perciò anche stabilita l'impossibilità di rappresentare questo complesso sullo spazio S_3.

2. — Si abbia, se possibile, sopra una V^4 di S_4 priva di punti doppi un sistema omaloidico di superficie (Γ). Queste superficie saranno necessariamente intersezioni complete (F^{4n}) di V^4 con altre varietà a tre dimensioni, di un certo ordine n [1].

Il sistema omaloidico Γ determinerà una rappresentazione di V^4 sullo spazio S_3, nella quale alle sezioni iperpiane di V^4 corrisponderanno superficie di un sistema lineare ∞^4 (Σ). A ogni curva base C di quest'ultimo sistema corrisponderà generalmente sopra V^4 una superficie luogo di ∞^1 curve γ, fondamentali per il sistema omaloidico Γ; e una tal superficie si può supporre esistente senza scapito di generalità, perchè, se non vi fosse, basterebbe prendere in S_3 un sistema omaloidico Δ che sia esso stesso dotato di una ∞^1 di curve fondamentali δ non aventi posizioni particolari rispetto agli elementi basi di Σ [2], e sostituire a Γ quell'altro sistema omaloidico sopra V^4 che corrisponde a Δ nella stessa rappresentazione spaziale di V^4 già stabilita.

---

[1] F. Severi, *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli*, " Rend. Acc. dei Lincei ", (5), vol. 15, 2° sem. (1906), p. 691.

[2] Per es., il sistema delle quadriche aventi a comune una conica e un punto fuori di questa conica.

Se una δ generica è irriducibile e non passa per nessun punto base di Σ, anche la γ ad essa omologa sarà irriducibile.

Possiamo anche supporre che una δ generica non abbia punti multipli, non si appoggi in più di un punto a nessuna curva fondamentale di Σ, e incontri quelle superficie fondamentali e luoghi di linee fondamentali di Σ, che sono fra loro distinte, in punti complessivamente anche tutti distinti. Allora una γ generica non potrà avere punti multipli che nei punti basi isolati del sistema omaloidico Γ (ai quali corrispondono le superficie fondamentali di Σ) [1]: ciò non sarebbe necessario per quanto segue, ma può servire a render più chiaro il ragionamento.

3. — Le ∞^3 superficie F^{4n} del sistema omaloidico Γ incontreranno una qualunque delle ∞^1 curve fondamentali γ in punti, che saranno tutti punti basi del sistema Γ medesimo. Alcuni di questi punti potranno essere comuni a tutte le curve γ, e saranno punti basi isolati del sistema Γ; gli altri, variabili da una γ all'altra, costituiranno linee basi di quello stesso sistema. E noi possiamo supporre che soltanto fra i primi si trovino gli eventuali punti multipli delle γ.

Se uno qualunque di questi punti è k^{plo} per le superficie F^{4n} costituenti il sistema Γ, le V^n seganti queste F^{4n} (per effetto di loro multiplicità o di contatti con V^4) avranno ivi con ogni ramo lineare di curva tracciato sopra V^4 e passante per questo punto almeno k intersezioni coincidenti, e con ogni ramo di ordine μ ne avranno almeno μk. Ciò avverrà in particolare per ogni ramo di una curva γ; e se per uno di questi rami venisse a coincidere col punto considerato un maggior numero di intersezioni con tutte (le V^n, ossia) le F^{4n} del sistema Γ, si potrà dire che queste F^{4n} hanno un ulteriore punto base, di una certa multiplicità, consecutivo al primo sopra quel ramo di curva.

---

[1] E se nessuna di queste superficie fondamentali contiene parti multiple (il che non si può tuttavia escludere *a priori*), le γ passeranno per i loro punti multipli soltanto con rami lineari. Non possono invece contenere parti multiple le curve fondamentali di Σ e quindi le superficie luoghi di tali curve, perchè se no una superficie generica di Σ verrebbe a contenere punti multipli variabili fuori degli elementi basi del sistema.

Per ogni punto base isolato (k^{plo}) del sistema Γ si indichi con h la multiplicità (≥ 0) ch'esso ha per una γ generica. Di più, questa γ incontrerà le curve basi del sistema Γ in un numero complessivo i di punti, semplici per essa, e che per la F^{4n} avranno certe multiplicità k' (saranno cioè punti di linee k'^{ple}). Dovendo da tali punti (che potranno in parte essere infinitamente vicini tra loro) risultare assorbite tutte le intersezioni delle V^n seganti le F^{4n} colle curve γ, delle quali indicheremo con ν l'ordine, si avrà la relazione:

$$\Sigma hk + \Sigma k' = \nu \, . \, n \tag{1}$$

dove la seconda somma si compone di i termini.

4. — Faremo vedere ora che, nella relazione precedente, le k sono certamente tutte $\leq 2n$, e le k' sono tutte $\leq n$; ossia che il sistema omaloidico Γ di superficie F^{4n}, supposto esistente, non può avere nè punti di multiplicità $> 2n$, nè linee di multiplicità $> n$.

Infatti la superficie di ordine $4n$ intersezione generale di V^4 con una varietà V^n è di genere (geom° = num°) eguale al numero delle $F^{4(n-1)}$ linearmente indipendenti contenute in V^4 (le quali sono le sue " aggiunte „); onde:

$$p = \binom{n+3}{4} - \binom{n-1}{4} = 4\binom{n}{3} + n(n+1) - 1.$$

Ora un punto $(2n+1)^{\text{plo}}$ isolato abbasserebbe il genere numerico della F^{4n} di $\binom{2n+1}{3}$ unità [1]; e questo numero, come immediatamente si verifica, è eguale al precedente per $n = 1$, ma lo supera per $n > 1$. Il genere numerico della F^{4n} diventerebbe dunque negativo, rendendo così impossibile l'esistenza di sistemi omaloidici.

---

[1] Infatti questo punto dovrebbe essere $(2n-1)^{\text{plo}}$ per le $F^{4(n-1)}$ aggiunte; e le varietà di ordine $n-1$ che segnano sopra V^4 queste aggiunte dovrebbero perciò avere ivi con V^4 un contatto per il quale si richiedono appunto $\binom{2n+1}{3}$ condizioni.

Quanto al caso $n=1$, è evidente che con sezioni iperpiane di V^4 si potrebbe formare un sistema omaloidico soltanto se V^4 avesse un punto triplo.

Veniamo alle linee multiple. Una linea base k'^{pla} del sistema Γ, la quale sia di ordine ξ, conta nell' intersezione di due F^{4n}, che è di ordine $4n^2$, come parte di multiplicità k'^2, e perciò di ordine $\xi \,.\, k'^2$. Perciò, se una k' fosse $> n$, l'ordine ξ della relativa linea sarebbe < 4, ossia ≤ 3; non potrebbe dunque trattarsi che di una retta, di una conica, oppure di una cubica piana o sghemba.

Questa linea multipla (almeno $(n+1)^{\text{pla}}$) non può essere una retta; perchè gli ∞^2 piani di S_4 passanti per questa retta incontrerebbero ulteriormente V^4 secondo cubiche, ognuna delle quali nei tre punti che ha a comune con quella retta avrebbe già raccolte, complessivamente, almeno $3(n+1)$ delle sue intersezioni colle V^n seganti le superficie del sistema Γ; sicchè queste V^n dovrebbero contenere per intero tutte quelle cubiche, e quindi la V^4.

La linea multipla non può nemmeno essere una conica, perchè le quadriche di S_3 passanti per questa conica segherebbero ulteriormente V^4 secondo sestiche di genere 4 aventi colla conica 6 punti a comune; e per queste sestiche varrebbero considerazioni analoghe alle precedenti.

La linea multipla non può essere una cubica sghemba, perchè le ∞^2 quadriche del suo S_3 che passano per essa (e che non hanno altri punti fissi a comune) incontrerebbero ulteriormente V^4, ossia la superficie, certo irriducibile [1], sua sezione con quello stesso S_3, secondo curve del 5° ordine e genere 2 aventi colla cubica 8 punti a comune: sicchè le F^{4n} del sistema Γ dovrebbero contenere tutte queste ultime curve, e perciò anche la superficie anzidetta, sezione iperpiana di V^4.

Infine la linea multipla non può nemmeno essere una cubica piana, perchè una qualsiasi sezione iperpiana F^4 passante per quella cubica verrebbe incontrata dalle solite V^n secondo curve di ordine $4n$ contenenti la cubica come parte $(n+1)^{\text{pla}}$; e ciò

---

[1] Una varietà V^4 con una sezione iperpiana riducibile, e perciò o spezzata in due quadriche, oppure contenente un piano, ha certo qualche punto doppio sulla linea intersezione delle due quadriche o rispett. sul piano.

è manifestamente impossibile, perchè una tal curva di ordine $4n$, quando contenesse la cubica contata n volte, dovrebbe avere come parte residua la retta di F^4 situata nel medesimo piano, contata pure n volte.

Tutte queste curve di ordine ≤ 3 si sono supposte irriducibili, perchè se no si sarebbe potuto ragionare analogamente sopra una qualunque loro parte.

Essendo pertanto nella relazione (1) ogni $k \leq 2n$, e ogni $k' \leq n$, sarà pure:

$$\Sigma hk + \Sigma h' = \nu \, . \, n \leq 2n \, . \, \Sigma h + n \, . \, i$$

e quindi:

$$2\Sigma h + i \geq \nu. \tag{2}$$

5. — D'altra parte, nella rappresentazione di V^4 sullo spazio S_3 determinata dal sistema omaloidico Γ, alle sezioni iperpiane di V^4 devono corrispondere in S_3 superficie φ regolari di genere uno; alle ∞^1 curve fondamentali γ di ordine ν corrisponderanno i punti di una curva C, che sarà curva base ν^{pla} per il sistema lineare ∞^4 delle φ; ai punti basi isolati del sistema omaloidico Γ, h^{pli} per le curve γ, corrisponderanno in S_3 superficie fondamentali del sistema $|\varphi|$ passanti per C colla multiplicità h; e ad ogni linea base del sistema Γ la quale si appoggi alle γ in α punti ($\Sigma\alpha = i$; cfr. N° 3) — che saranno tutti semplici per queste ultime curve — corrisponderà una superficie luogo di linee fondamentali e avente C come linea α^{pla}. Queste due categorie di superficie, le prime contate due volte, le seconde semplicemente, devono formare insieme l'unica superficie aggiunta del sistema lineare $|\varphi|$ [1]; e poichè questa superficie complessiva deve avere C come curva multipla di ordine $\nu - 1$ [2], così sarà:

$$2\Sigma h + \Sigma\alpha \equiv 2\Sigma h + i = \nu - 1. \tag{3}$$

---

[1] M. Pannelli, *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni...*, " Rend. Acc. dei Lincei ", (5), vol. 15, 1° sem. (1906), p. 620-21). Per la proprietà analoga delle superficie cfr.: Enriques, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, " Atti della R. Acc. di Torino ", vol. 37 (1901); n° 21.

[2] E non maggiore. La multiplicità di C per le φ sarebbe maggiore soltanto quando la curva C fosse eccezionale per le φ; il che qui non può avvenire, perchè alle superficie φ corrispondono le F^4, sezioni iperpiane di V^4, e alla curva C comune alle φ corrisponde una curva sopra ognuna di queste F^4, le quali sono notoriamente prive di curve eccezionali.

Questa relazione sussiste anche se fra i punti basi del nostro sistema omaloidico appartenenti a una linea γ ve ne sono di infinitamente vicini. In tal caso alcune fra le superficie fondamentali o luoghi di linee fondamentali del sistema $|\varphi|$ in S_3 diventano infinitamente vicine ad altre, oppure a parti di queste altre; ma esse entrano egualmente come componenti autonome nell'unica superficie aggiunta.

Essendo la relazione (3) manifestamente incompatibile colla (2), sarà assurda l'ipotesi fatta dell'esistenza sopra V^4 di un sistema omaloidico di superficie; il che appunto si voleva dimostrare.

La relazione $2\Sigma h + i = \nu - 1$ è, più generalmente, una condizione necessaria perchè le curve γ di ordine ν da noi considerate possano mutarsi, per trasformazione birazionale, in punti semplici di un'altra varietà. E mi riservo di mostrarlo in altro lavoro, con un ragionamento più lungo, ma che si addentra maggiormente nella questione. Da queste considerazioni ulteriori risulterà provato altresì che la V^4 priva di punti doppi e la M_3^6 di S_5, della quale passiamo adesso ad occuparci, sono birazionalmente distinte anche tra loro.

6. — La varietà M_3^6 di S_5, intersezione generale di una quadrica (Q) con una varietà cubica (V_4^3), contiene anch' essa soltanto superficie (di ordine $6n$) sue intersezioni complete con varietà di ordine n.

Cominciamo col dimostrare, mediante un'opportuna enumerazione di costanti, che la superficie F^6, sezione iperpiana generica della M_3^6 anzidetta e perciò intersezione generale di una quadrica e di una V_3^3 di S_4, non contiene altre curve all'infuori di quelle di ordine $6n$, sue intersezioni complete con varietà V_3^n di S_4.

Si abbia infatti sopra una tale F^6 una curva irriducibile C_p^n. Possiamo supporre che il sistema lineare $|C|$ individuato da questa curva non contenga (parzialmente) il sistema $|\eta|$ delle sezioni iperpiane di F^6; perchè se no si potrebbe sostituire a C_p^n la curva generica del sistema lineare ottenuto sottraendo da $|C|$ il sistema $|\eta|$ il maggior numero di volte possibile. (E se C_p^n non è intersezione completa, queste operazioni condurranno certo a un sistema, o almeno a una curva effet-

tiva ultima residua). La dimensione del sistema $|C|$, che è $= p$ (perchè la sua serie caratteristica non è altro che la serie canonica delle C, di dimensione $p-1$), sarà dunque eguale alla dimensione della serie lineare g_n che $|C|$ stesso sega sulle sezioni iperpiane η_4^6. Ora questa g_n sulle η_4^6 è certo non speciale se le C_p^n appartengono allo spazio S_4 (perchè i suoi gruppi non staranno in piani); la sua dimensione sarà allora $< n-4$, e sarà perciò anche $p < n-4$. Si tratterà dunque di curve C_p^n di S_4 dipendenti *precisamente* da $5n-p+1$ costanti [1]. Che se poi le C_p^n stessero in spazi S_3 (e vi fossero perciò spazi S_3 incontranti F^6 secondo curve riducibili), la F^6 dovrebbe certo contenere o una retta, o una conica, oppure una cubica sghemba [2], tutte linee le quali dipendono pure, in S_4, da $5n-p+1$ parametri; e allora s'intenderà presa come C_p^n una di queste ultime linee.

Per una tale C_p^n di S_4 il dover star sopra una data quadrica (Q_3^2) equivale a $2n-p+1$ condizioni distinte; e sopra ogni quadrica se ne trovano perciò ∞^{3n} [3]. Similmente il dover stare sopra una data varietà cubica V_3^3 equivale per la C_p^n a $3n-p+1$ condizioni; e sopra una tale varietà ve ne sono perciò ∞^{2n}. E poichè le quadriche di S_4 sono ∞^{14}, così fra le ∞^{2n} curve C_p^n contenute in una data V_3^3 quelle che sono pure contenute in una qualsiasi quadrica e perciò anche nella F^6 intersezione di quella V_3^3 con questa quadrica dipenderanno da $2n-(2n-p+1)+14 = p+13$ parametri. D'altra parte una F^6 generica la quale contenga una tale C_p^n deve contenerne ∞^p (essendo appunto $= p$, come già si è detto, la dimensione del sistema completo $|C|$); saranno dunque soltanto ∞^{13} le F^6 che

---

(1) C. Segre, *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques*, " Math. Ann. ", vol. 30 (1887), p. 207.

(2) Si può prescindere dal caso che F^6 contenga delle cubiche piane, perchè essa sarebbe allora contenuta in un cono quadrico di S_4, e dipenderebbe perciò certo da una costante di meno che non la F^6 generale.

(3) Ciò risulta anche confermato dal fatto che, nella proiezione stereografica della quadrica sopra S_3, a queste C_p^n devono corrispondere curve C_p^n di S_3 appoggiate in n punti alla conica fondamentale, e si può verificare anche direttamente che queste ultime curve dipendono proprio da $3n$ parametri.

contengono curve così fatte, e una F^6 generica non potrà perciò contenerne, come appunto si voleva dimostrare.

Consideriamo ora sulla $M_3^6 \equiv Q \,.\, V_4^3$ generale di S_5 una superficie qualunque Φ. La curva sezione iperpiana generica di questa superficie, dovendo stare sulla F^6 intersezione dello stesso iperpiano (S_4) colla M_3^6, sarà intersezione completa di questa F^6 con una V_3^n (o V_4^n di S_5). La superficie Φ e le superficie $F^{6n} \equiv M_3^6 \,.\, V_4^n$ segneranno dunque sopra una F^6 sezione iperpiana generica di M_3^6 curve equivalenti. Riferendoci pertanto a un fascio di tali F^6 nel quale non sia contenuta nessuna superficie riducibile (fascio certo esistente, perchè se no fra le ∞^5 sezioni iperpiane della M_3^6 ve ne dovrebbero essere ∞^4 riducibili), potremo concludere, per un teorema del Sig. Severi (¹), che la Φ è equivalente alle F^{6n} anzidette. E poichè infine il sistema lineare formato da queste F^{6n} sulla M_3^6 è completo (²), così la Φ sarà essa stessa intersezione di M_3^6 con una V_4^n, c. s. v. d.

7. — La varietà M_3^6 considerata contiene ∞^1 rette (³), e da una qualunque di queste (a) essa si proietta in un S_3 doppio con superficie limite del 6° ordine: infatti gli spazi S_3 passanti per a incontrano ulteriormente la varietà secondo curve di 5° ordine e genere 2, aventi a come trisecante, e alle quali si possono condurre per a sei piani tangenti.

I singoli piani passanti per a segano pertanto sopra M_3^6 le coppie di un'involuzione razionale I_2, sulla quale dobbiamo fare qualche osservazione.

Gli spazi S_3 tangenti a M_3^6 nei punti di a formano un cono cubico μ, generato dalla corrispondenza proiettiva tra il fascio degli S_4 tangenti in quei punti alla quadrica Q e il cono qua-

---

(¹) *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà* (" Atti Ist. Veneto ", vol. 65; 1905-06; p. 625); teorema IV.

(²) Perchè è certamente completo il suo sistema lineare caratteristico. Cfr. F. Severi, *Su alcune questioni di postulazione*, " Rend. di Palermo ", vol. 17 (1903); n° 13.

(³) Corrispondenti agli ∞^1 fasci di rette contenuti nel complesso cubico generale, e già considerati da Voss (*Ueber Complexen und Congruenzen*, " Math. Ann. ", IX; 1876) e Veneroni (*Sopra certe congruenze di rette e sopra alcune proprietà dei fasci di un complesso cubico generale*, " Rend. Istituto Lomb. ", (2), vol. 31; 1898).

drico-inviluppo degli S_4 tangenti a V_4^3. Ognuno di quegli S_3 sega M_3^6 (oltre che in a) secondo una C^5 avente nel suo punto di contatto un punto triplo, e che è la curva fondamentale corrispondente a questo punto di contatto nella I_2. Luogo di queste ∞^1 curve C^5 è la superficie F^{18}, intersezione di M_3^6 col cono cubico μ; e la retta a, essendo tripla per il cono μ e per di più linea di contatto di esso con M_3^6, sarà quadrupla per F^{18}.

Alle ∞^1 rette di M_3^6 corrispondono nella I_2 quartiche razionali; perciò alle sezioni iperpiane F^6 (che incontrano queste quartiche in 4 punti) corrisponderanno superficie F^{24}, segate da varietà V_4^4, aventi a come retta quintupla e la F^{18} suddetta come (unica) superficie aggiunta.

Più generalmente, alle superficie $F^{6n} \equiv M_3^6 . V^n$ corrisponderanno superficie di ordine $24n$, segate da varietà V^{4n} e aventi a come retta $(5n)^{\text{pla}}$. Quando però la F^{6n} abbia essa stessa a come retta k^{pla}, dalla superficie corrispondente si staccherà la F^{18} contata k volte, e rimarrà soltanto una superficie di ordine $6(4n - 3k)$ con a come multipla di ordine $5n - 4k$. E pertanto, se $k > n$, questa nuova superficie sarà di ordine $6n' < 6n$, e avrà a come multipla di ordine $< n'$.

Sulla M_3^6 esistono dunque sistemi lineari di superficie F^{6n} aventi rette multiple di ordine $> n$; ma le involuzioni I_2 esistenti sulla varietà permettono sempre di trasformare birazionalmente ogni sistema così fatto in un altro di ordine inferiore e pel quale nessuna retta abbia multiplicità superiore al nuovo valore di n.

8. — L'impossibilità dell'esistenza sulla M_3^6 di un sistema omaloidico di superficie (F^{6n}) si può stabilire colle stesse considerazioni già svolte ai N[i] 2-5 per la V^4 di S_4, fra le quali soltanto quelle del N° 4 vanno leggermente modificate.

Il genere (geom° = num°) della F^{6n} intersezione generale di M_3^6 con una varietà V^n è dato dal numero delle $F^{6(n-1)}$ linearmente indipendenti esistenti sulla M_3^6, e perciò dalla stessa postulazione di quest'ultima varietà rispetto alle V^{n-1}. Si ha quindi [1]:

$$p = \binom{n+4}{5} - \binom{n+2}{5} - \binom{n+1}{5} + \binom{n-1}{5}.$$

[1] F. Severi, *Su alcune questioni di postulazione*, n° 1.

E anche questo numero $\left(\text{che si riduce a } n^3 - \frac{3}{2} n^2 + \frac{5}{2} n - 1\right)$ è superiore, per $n > 1$, alla diminuzione $\binom{2n+1}{3}$ che sarebbe portata nel genere da un punto $(2n+1)^{\text{plo}}$; e la eguaglia per $n = 1$. D'altra parte, se la M_3^6 è priva di punti multipli, con sue sezioni iperpiane non si possono certo formare sistemi omaloidici.

L'eventuale sistema omaloidico non può dunque avere punti basi di multiplicità $> 2n$.

Dico, similmente, che le eventuali curve multiple di questo sistema si possono ritenere tutte di multiplicità $\geq n$. Infatti una curva di multiplicità $< n$ dovrebbe essere (cfr. N° 4) di ordine certo inferiore a 6, dunque < 5; e si può anche supporre (cfr. N° 7) che non sia una retta. L'ordine dovrebbe dunque essere eguale a uno dei numeri 2, 3, 4, 5.

Non vi può essere una conica $(n+1)^{\text{pla}}$, perchè gli spazi S_3 passanti per il suo piano incontrerebbero ulteriormente M_3^6 secondo quartiche aventi colla conica 4 punti a comune, e che avrebbero perciò in questi punti colle V^n seganti le F^{6n} già più intersezioni di quanto comportano i loro ordini.

Se ci fosse una cubica piana $(n+1)^{\text{pla}}$, si potrebbe applicare questo stesso ragionamento alle altre cubiche segate dagli spazi S_3 passanti per la prima.

Supponiamo adesso che vi sia una curva $(n+1)^{\text{pla}}$ irriducibile di ordine 3, 4 o 5 appartenente a uno spazio S_3. Per questo S_3 passa un fascio di S_4 incontranti M_3^6 secondo superficie F^6; e sopra queste F^6 le F^{6n} devono segare curve appartenenti al sistema n^{plo} delle sezioni iperpiane. Ora, sopra una di queste F^6, una curva di ordine < 6 e appartenente a S_3 ha certo per residua rispetto al sistema delle sezioni iperpiane una curva unica, isolata (di ordine 3, 2, 1); perciò, rispetto al sistema lineare n^{plo} del precedente, la prima contata n volte non può avere per residua che la seconda contata pure n volte; e nessuna curva del sistema n^{plo} può quindi contenere la prima parte contata $n+1$ volta.

Una curva $(n+1)^{\text{pla}}$ irriducibile appartenente a uno spazio S_4 non potrebbe essere che una quartica razionale normale, oppure una quintica, ellittica o razionale. Per questa curva pas-

serebbero in ogni caso, nello stesso spazio S_4, delle quadriche non contenenti la F^6 intersezione di M_3^6 collo spazio medesimo; e queste quadriche incontrerebbero ulteriormente la F^6 suddetta secondo curve di ordine 8 o 7 (e di genere rispettivamente 4, 3, 2) aventi colla prima curva rispettivamente 10, 10 e 12 punti a comune. Queste ultime curve avrebbero pertanto colle V^n seganti le F^{im} un numero di intersezioni superiore al prodotto dei loro ordini.

Infine una curva razionale normale di 5° ordine esistente sulla M_3^6 appartiene a ∞^9 quadriche di S_5: perciò a un sistema lineare ∞^8 di quadriche delle quali nessuna contiene la M_3^6. L'intersezione ulteriore della M_3^6 con due di queste quadriche è una curva di ordine 19 (e genere 21) avente colla quintica 17 punti a comune. Le due quadriche si possono però obbligare a passare ancora, p. es., per una conica della M_3^6 (certo esistente) che non incontri affatto la quintica; e l'intersezione residua è allora una curva di ordine 17 avente colla quintica pure 17 punti a comune. Così si vede che una V^n la quale segasse M_3^6 secondo superficie aventi la quintica come curva $(n+1)^{pla}$ dovrebbe contenere tutte queste ultime curve (di ordine 17), e perciò l'intera M_3^6.

Queste osservazioni permettono di concludere, analogamente a quanto si è fatto per la V^4, che anche sulla M_3^6 non esistono sistemi omaloidici di superficie, e che perciò la M_3^6 stessa non è rappresentabile sullo spazio S_3.

Torino, maggio 1908.

Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti.

Nota di C. SEGRE.

1. Le superficie dello spazio ordinario, i cui punti han le coordinate omogenee (projettive) rappresentabili parametricamente così:

$$(1) \qquad x_i = f_i(u) + g_i(v) \qquad (i = 1, \dots 4)$$

costituiscono una ben nota estensione delle *superficie di traslazione*. Una loro proprietà *caratteristica* è quella di contenere due sistemi coniugati (costituiti dalle linee parametriche $u =$ cost., $v =$ cost.) tali che le sviluppabili circoscritte alla superficie lungo quelle linee sono coni.

Ciò è stato rilevato, a quanto pare, per la prima volta, da K. PETERSON (*); e fu poi dimostrato più completamente dal sig. DARBOUX (**) sotto la forma duale (cioè: le superficie che posseggono un doppio sistema coniugato di linee piane hanno le coordinate omogenee dei loro piani tangenti rappresentabili colle (1), e viceversa).

Il sig. VOSS (***) aggiunse alcune ulteriori proprietà di queste *superficie* ***P***, com'egli le chiama (****). Noi qui le ritro-

---

(*) In una memoria in lingua russa, del 1866-1867 (pubblicata nel 2° vol. della Società matematica di Mosca), che fu poi tradotta in francese col titolo: *Sur les courbes tracées sur les surfaces*, negli " Annales de la Faculté des sciences de Toulouse " (2) 7, 1905.

Il PETERSON chiama *linee coniche* di una superficie le linee di contatto di questa coi coni circoscritti. Userò anch'io qualche volta, per brevità, questa denominazione; adoperando però caratteri corsivi, per evitare ogni pericolo di confusione colle coniche ordinarie, cioè curve piane di 2° ordine.

(**) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, 1887, pag. 123-126.

(***) *Zur Theorie der Krümmung der Flächen*. Math. Annalen, t. 39, 1891, V. pag. 205-207.

(****) La denominazione è accolta anche dal sig. MLODZIEJOWSKI: *Ueber aufeinander abwickelbare P-Flächen*. Math. Annalen, t. 63, 1907.

veremo, insieme con altre che ci daranno delle semplici costruzioni per le superficie stesse, sia nel caso generale, sia in certi casi particolari notevoli (*).

2. Conviene premettere qualche considerazione su certi interessanti *sistemi* ∞^4 *di curve nello spazio.*

Prendiamo le equazioni

$$x_i = f_i(u) + \lambda_i, \qquad (i = 1, \dots 4) \tag{2}$$

in cui le $f_i(u)$ indicano (e indicheranno anche in seguito) date funzioni, monodrome continue e finite, colle loro prime derivate, in un dato campo di variabilità per u; colla condizione che ad un gruppo di valori dei rapporti delle $f_i(u)$ non corrisponda in generale più di un valore di u in quel campo.

Per un dato gruppo di valori delle 4 quantità λ_i, le (2) rappresentano una determinata curva descritta dal punto x al variare di u. Mutando poi quei valori λ_i, questa curva varierà in un certo sistema Σ di curve, riferite fra loro biunivocamente, se chiamiamo *omologhi* quei punti di esse che corrispondono allo stesso valor di u.

Le tangenti alle curve di Σ in punti omologhi u concorrono tutte in un punto della linea fissa

$$x_i' = f_i'(u). \tag{3}$$

La corrispondenza tra i punti di due curve qualunque di Σ ha carattere geometrico molto elementare. Siano le curve

$$x_i = f_i(u) + \alpha_i$$
$$y_i = f_i(u) + \beta_i.$$

Si ha, per punti omologhi x, y:

$$x_i - y_i = \alpha_i - \beta_i;$$

sicchè le coppie di punti omologhi sono allineate con un punto fisso. Le due curve sono su uno stesso cono. Diremo per brevità che sono *prospettive* (in senso lato).

(*) Veggasi pure la costruzione data dal DARBOUX (loc. cit., pag. 126) delle superficie duali: cioè come inviluppi dei piani radicali di due sfere tolte ad arbitrio entro due dati sistemi semplicemente infiniti.

Viceversa ogni cono che projetta una curva di Σ ne contiene infinite. Se la curva data è la (2) e il punto ha le coordinate p_i, quelle infinite curve di Σ saranno rappresentate da

$$f_i(u) + \lambda_i + \rho p_i,$$

ove ρ si faccia variare (*). —

È facile vedere che *il sistema* Σ *è* ∞^4, cioè che le 4 quantità λ_i rappresentano per esso dei parametri *essenziali, se si toglie il caso che tutte le linee di* Σ *siano rette* (**). E noi nel seguito escluderemo appunto questo caso, che non presenta interesse pel nostro scopo.

3. Per determinare un sistema Σ siffatto di curve si possono dare ad arbitrio, come appartenenti ad esso, *due* curve

---

(*) Le equazioni

$$x_i = \varphi_i(u) + \lambda_i\psi(u),$$

ove $\varphi_i(u)$ e $\psi(u)$ sono polinomi di grado n, rappresentano un particolare sistema Σ, le cui curve sono algebriche, d'ordine n (in generale), e passan tutte per certi n punti corrispondenti a quei valori di u che annullano $\psi(u)$.

(**) Possiamo dimostrare ciò, ad esempio, ricorrendo per un istante allo spazio a 4 dimensioni, in cui $x_1, \ldots x_4$ s'interpretino come coordinate cartesiane *non omogenee* di punto, e si consideri come projezione di questo punto dall'origine O, sullo spazio ordinario, il punto che ha in questo come coordinate projettive *omogenee* le x_i. Allora le (2), al variar delle λ, rappresentano in S_4 un sistema di curve deducibili da una qualunque di esse coll'applicarle tutte le ∞^4 traslazioni di questo spazio. Esse saranno ∞^4, se non avviene che quella curva ammetta una infinità continua di traslazioni in sè, ossia se non è una retta. Ne deriva che anche le curve projezioni di quelle ∞^4 sullo S_3 saranno ∞^4, se non sono rette. Perchè allora ognuna di esse è projettata da O mediante un cono, che non è un piano, nè un cilindro; e un tal cono non può contenere un'infinità continua di curve del sistema ∞^4 di S_4, cioè non può essere una superficie di traslazione. —

Per determinare quale forma devon avere le funzioni $f_i(u)$ perchè tutte le linee (2) di Σ siano rette, cominciamo a osservare che la curva particolare $x_i = f_i(u)$ sarà una retta (quella dei due punti α, β) solo quando sia $f_i(u) = \alpha_i\varphi(u) + \beta_i\psi(u)$. Dopo ciò, una curva qualunque (2) starà nel piano dei punti $\alpha\,\beta\,\lambda$, ed i suoi punti avranno *entro* quel piano le coordinate: $\varphi(u)$, $\psi(u)$ e 1. Affinchè si riduca ad una retta si dovrà avere fra queste un'equazione lineare. Risulta così:

$$f_i(u) = \gamma_i\varphi(u) + \epsilon_i.$$

Il sistema Σ che in tal modo si ottiene è in fatti una *stella di rette.*

prospettive: per esempio una linea $\varphi_i(u)$, e sul cono che la projetta dal punto (p_i) un'altra curva arbitraria $\varphi_i(u) + \psi(u) \, . \, p_i$. Dopo ciò, ponendo $f_i = \varphi_i : \psi$, le formole (2) rappresenteranno un sistema Σ contenente le due linee date.

La costruzione geometrica di Σ si potrà fare così. Siano C e D le due curve date *prospettive* (n. 2) rispetto al punto p. Ogni altra curva X di Σ dovrà essere con C in un certo cono (a), e con D in un certo cono (b). I vertici $p\ a\ b$, dovendo stare su tutti i piani delle terne di punti omologhi delle tre curve, saranno allineati. Dunque: si prendano ad arbitrio due punti a, b allineati con p; e per ogni coppia di punti omologhi c, d di C, D si determini il punto x d'intersezione delle rette $a\,c$, $b\,d$. Il luogo di x sarà una curva del sistema Σ. E tutte le curve di questo si otterranno mutando in tutti i modi possibili la coppia di punti $a\,b$ (*).

Se due curve di Σ sono piane, ma in piani diversi, tutte le curve di Σ staranno nei piani di un fascio. Ciò risulta subito analiticamente; od anche dalla precedente costruzione geome-

(*) Ne segue facilmente la costruzione di quelle curve di Σ che soddisfano a certe condizioni: per esempio *che passano per due punti dati ad arbitrio.* Si consideri la curva in cui si segano ulteriormente i coni che da questi due punti projettano C, e poi la curva dedotta analogamente da D. I punti a, b dovranno stare sulle due nuove curve, ed essere allineati con p.

Si avverta però che la costruzione evidentemente sarà impossibile in generale, se le curve di Σ sono nei piani di un fascio, com'è detto alla fine di questo n. 3: in fatti allora i due punti dati dovrebbero stare in un piano di quel fascio.

In generale diciamo m_i, n_i le coordinate dei due punti dati; e poniamo che per essi passi la curva (2) di Σ. Avremo:

$$\rho m_i = f_i(u) + \lambda_i, \quad \sigma n_i = f_i(v) + \lambda_i,$$

donde:

$$\rho m_i - \sigma n_i = f_i(u) - f_i(v).$$

Se, al variare di u e v, il luogo F dei punti $f_i(u) - f_i(v)$ è una superficie, esisterà in generale una linea di Σ passante pei punti dati m, n: giacchè quella superficie sarà incontrata dalla retta di questi in qualche punto, le cui coordinate ci permetteranno di scrivere l'ultima uguaglianza; e questa rende possibili le precedenti per uno stesso sistema di valori delle λ_i. — Invece non esisterà in generale una linea di Σ passante per m, n, se il detto luogo F si riduce ad una linea: il che accade, come vedremo (n. 9), solo quando le curve di Σ sono piane.

trica, perchè se C, D sono su due piani distinti, questi risultan prospettivi rispetto al centro p, e quindi prospettive (cioè visuali di uno stesso piano) risultano le stelle che li projettano rispettivamente da a, b; ecc.

4. Se dentro al sistema Σ si prende una ∞^1 di curve, vale a dire se le costanti λ_i delle (2) si assumono uguali a funzioni date $g_i(v)$ di un parametro (*), il luogo di quelle curve sarà la *superficie* $\boldsymbol{P}$ del n. 1

$$(1) \qquad x_i = f_i(u) + g_i(v).$$

Otteniamo così un modo molto semplice per generare una tal superficie. Basterà nella costruzione di Σ esposta poc'anzi, far prendere ∞^1 posizioni alla coppia di punti a b allineati con p. Con ciò quei due punti descriveranno due curve A, B di un cono col vertice p. E si ha la costruzione seguente:

Si fissino su un cono due curve A, B (**), *e su un altro cono collo stesso vertice due curve* C, D. *Per ogni coppia di punti omologhi* a, b *di* A, B, *e per ogni coppia di punti omologhi* c, d *delle* C, D *si prenda il punto* x *d'intersezione delle rette* a c, b d. *Il luogo di questo punto sarà una superficie* $\boldsymbol{P}$.

Le linee (di Σ) descritte da x quando la coppia a, b sta fissa, e varia solo la coppia c, d, costituiscono sulla superficie il sistema $v =$ cost., cioè uno dei due sistemi coniugati a cui si riferisce la proprietà *caratteristica* del n. 1. Similmente l'altro sistema ($u =$ cost.) si costruisce tenendo fissa la coppia c, d.

Il *piano tangente* alla superficie $\boldsymbol{P}$ nel punto x, dovendo contenere le tangenti in x alle linee dei due detti sistemi, risulta in generale determinato dal passaggio pel punto d'incontro delle tangenti in c, d a C, D, e pel punto comune alle tangenti in a, b ad A, B (***).

(*) Per queste funzioni si supporranno verificate condizioni analoghe a quelle poste per le $f_i(u)$ al n. 2.

(**) Qui e in seguito, parlando di *curve di un cono*, s'intende sempre di escludere le generatrici rettilinee del cono: anzi, si pensa sempre a tratti di curva che non siano incontrati in più d'un punto variabile dalle generatrici generiche.

(***) Ciò concorda col fatto che quei due punti hanno risp. per coordinate $f_i'(u)$ (cfr. il n. 2) e $g_i'(v)$.

5. Come si vede, quei due sistemi ∞^1 di curve, che possiamo chiamare *caratteristici* per la superficie $\boldsymbol{P}$, fan parte risp. del sistema Σ di curve

$$f_i(u) + \lambda_i, \tag{4}$$

e di un analogo sistema Σ_1 rappresentato da

$$g_i(v) + \mu_i. \tag{5}$$

Diremo *direttrici* della superficie (1) le linee di questi due sistemi Σ, Σ_1. E chiameremo *associate* due particolari direttrici, (4) e (5), quando per esse si ha

$$\lambda_i + \mu_i = 0. \qquad (i = 1, \ldots 4) \tag{6}$$

Rileviamo allora due proprietà di questa corrispondenza: 1° A due direttrici ($\lambda_i = \alpha_i, \beta_i$) di Σ sono sempre associate due direttrici di Σ_1 tali che il cono su cui stanno queste (n. 2) ed il cono di quelle hanno lo stesso vertice ($\alpha_i - \beta_i$). — 2° La retta che unisce i punti u, v di due direttrici associate passa pel punto (u, v) della superficie (1).

Allora si ritrova la costruzione delle superficie $\boldsymbol{P}$ data precedentemente. Si prendono in Σ due curve qualunque C, D, in Σ_1 le loro associate A, B; ogni retta appoggiata ad A, C in due punti, e la retta che unisce i punti di B, D *omologhi* a questi s'incontreranno in un punto della superficie $\boldsymbol{P}$.

6. Dai n[i] 3 e 4 segue che: *Esiste in generale una superficie* $\boldsymbol{P}$*, la quale passa per cinque linee, di cui tre* L, M, N *sono assegnate ad arbitrio, mentre le altre due* C, D *(non rette) giacciono in uno stesso cono, e si appoggiano alle prime tre. Anzi, si può imporre alla superficie di avere* C *e* D *per linee caratteristiche di uno stesso sistema.*

In fatti, dando questo significato alle curve C, D, riesce determinato da esse (n. 3) il sistema ∞^1 Σ, entro cui stanno quelle ∞^1 caratteristiche. E appunto per fissare questa ∞^1 di curve, che genera la superficie $\boldsymbol{P}$, si prenderanno quelle curve di Σ che incontrano L, M, N.

Facendo coincidere due di queste ultime linee, o tutte tre,

si ottengono per la superficie ***P*** condizioni di contatto od osculazione lungo una data linea, quali si presentano nell' integrazione delle equazioni alle derivate parziali.

7. Ad una *superficie* ***P***, rappresentata dalle (1), sono legate in generale due *superficie* ***P*** *speciali* (*), cioè i luoghi dei vertici dei coni congiungenti a due a due le curve caratteristiche di uno stesso sistema.

Così le due curve della data superficie, corrispondenti a valori fissati u, u_1, del 1° parametro, stanno nel cono di vertice

$$f_i(u) - f_i(u_1). \tag{7}$$

Questo punto, al variar di quelle due curve, cioè di u e u_1, genera un luogo F, che sarà *in generale* una superficie della nostra classe ***P*** (**).

Analogamente dalle curve $v =$ cost. nasce l'altro luogo G dei punti

$$g_i(v) - g_i(v_1), \tag{8}$$

che sarà pure in generale una *superficie* ***P***.

Prendendo u_1 vicinissima ad u si vede che F conterrà la curva $f_i'(u)$ luogo dei vertici dei coni circoscritti alla superficie data lungo le linee u. Similmente per G.

8. Quando una *superficie* F appartiene al tipo speciale (7) od (8) di *superficie* ***P***, ossia si può rappresentare così

$$y_i = f_i(u) - f_i(v), \tag{9}$$

(*) Di esse ha già fatto parola il Voss, loc. cit.

(**) Citiamo subito un caso in cui F *non è una superficie*: quando le $f_i(u)$ son polinomi di 1° o 2° grado

$$f_i(u) = a_i u^2 + b_i u + c_i.$$

Allora le espressioni (7), tolto il divisor comune $u - u_1$, diventano

$$a_i(u + u_1) + b_i;$$

sicchè son le coordinate di un punto mobile su *una retta*. V. una proposizione generale al n. 9.

avvengono per essa alcuni fatti speciali, che meritano di venir rilevati (*).

I due sistemi di *direttrici* (4) e (5) vengono a coincidere. Anzi, le (6) provano che due direttrici *associate* son sempre coincidenti.

Due curve qualunque di Σ essendo (n. 2) riferite fra loro biunivocamente, si capisce senz'altro che cosa intenderemo per *corde omologhe* di quelle curve. Orbene la superficie F sarà *il luogo dei punti d'incontro delle corde omologhe di tutte le* ∞^1 *curve di* Σ.

Sicchè la generazione del n. 4 per le *superficie* $\boldsymbol{P}$, nel caso delle F si riduce così:

Si scelgano ad arbitrio due curve C, D di un cono. Le generatrici di questo segnano una corrispondenza fra i punti di quelle curve; donde segue una corrispondenza tra le corde di C, D. La superficie F è il luogo dei punti d'incontro di tali corde omologhe.

Sulla F il punto (u, v) coincide con (v, u). Le linee caratteristiche formano un solo sistema, tale che per ogni punto di F ne passan due (in direzioni coniugate). La linea $f_i'(u)$ inviluppata da questo sistema (**) sarà un'asintotica.

Due linee caratteristiche qualunque

$$f_i(u) - f_i(\alpha), \quad f_i(u) - f_i(\beta)$$

sono *prospettive* (in senso lato) rispetto al punto $f_i(\alpha) - f_i(\beta)$, che è il loro punto comune.

Fissata una linea caratteristica C di F, il cono che la projetta da un suo punto p sega F secondo l'altra linea caratteristica passante per p. E variando p su C, si ottiene così tutto il sistema delle caratteristiche.

In particolare il cono circoscritto ad F lungo una carat-

(*) Per le *superficie di traslazione* non vi è il caso analogo: o meglio, si ottiene solo il piano all'infinito.

Invece le particolari *superficie* $\boldsymbol{P}$ rappresentabili con $f_i(u)+f_i(v)$ dànno, nel caso delle superficie di traslazione, le così dette *superficie doppie*. Ma su quelle non credo necessario trattenermi.

(**) E luogo dei punti d'incontro delle *tangenti omologhe* alle curve di Σ: cfr. n. 2.

teristica ha sempre il vertice su questa, cioè nel punto di contatto coll'asintotica suddetta (*).

9. Se il luogo F rappresentato dalle (9) si riduce a una *linea*, questa dovrà pur essere incontrata da tutte le corde di una qualunque curva di Σ. Ne segue subito che questa curva sarà *piana* (**) e che F starà nel suo piano. Quindi F, giacendo nei piani di tutte le curve di Σ, sarà la *retta* asse di questo fascio di piani (cfr. la fine del n. 3).

Viceversa se le curve di Σ sono piane, il luogo F (componendosi di punti comuni alle corde di quelle due curve) si ridurrà ad una retta.

Possiamo facilmente determinare la forma che devono avere le funzioni $f_i(u)$ perchè si presenti questo caso. Se α_i, β_i son le coordinate (ben fissate) di due punti della retta F, il punto $f_i'(u)$ dovendo stare su questa (n. 7), si avrà:

$$f_i'(u) = \alpha_i \, . \, \lambda(u) + \beta_i \, . \, \mu(u) \, ,$$

(*) Come esempio di superficie F, consideriamo quella che si ottiene prendendo per le $f_i(u)$ dei *polinomi di 4° grado* (il 3° grado darebbe una superficie *piana*; per un grado minore veggasi la 2ª nota al n. 7). Dividendo allora le (9) per $u - v$, si riconosce che quelle formole rappresentano una *rigata cubica* generale.

Effettivamente, se s'indica con F una rigata cubica generale, i coni circoscritti ad F dai punti della superficie la toccano secondo cubiche sghembe (passanti pei due punti uniplanari) costituenti un sistema ∞^2. Fissata una di queste cubiche C, i coni che la projettano dai suoi vari punti segano ulteriormente F secondo cubiche di quel sistema: e se ne ottengono così ∞^1 formanti un doppio sistema coniugato, che si può riguardare come il nostro sistema delle caratteristiche.

Se F si rappresenta sul piano, sì che le sue sezioni piane corrispondano al sistema lineare delle iperboli equilatere passanti per un punto fisso O, le ∞^2 cubiche sghembe suddette hanno per imagini i cerchi passanti per O; il sistema delle caratteristiche corrisponde ad un sistema arbitrario di cerchi *uguali* passanti per O; l'inviluppo di questi è un cerchio di centro O, imagine di un'asintotica di F. Ecc.

(**) Perchè una congruenza di rette tale che ogni sua retta abbia tre fochi, e quindi infiniti, si compone sempre delle rette di un piano. — Oppure, senza invocare la teoria delle congruenze di rette, si può applicare a questo caso un noto ragionamento (del sig. Castelnuovo), che fa subito vedere come le tangenti alla curva di Σ in due punti qualunque saranno sempre in un piano (tangente a un cono di corde di quella curva); onde ecc.

donde integrando:

$$f_i(u) = \alpha_i \cdot \varphi(u) + \beta_i \cdot \psi(u) + \epsilon_i . \tag{10}$$

Viceversa, se le $f_i(u)$ si possono esprimere in questo modo, le α_i β_i ϵ_i essendo costanti, il luogo F rappresentato dalle (9) sarà una retta (*).

10. Ritornando ora alle *superficie* $\boldsymbol{P}$, cioè alle superficie con due sistemi coniugati di *curve coniche*, stabiliamo *quali sono quelle per cui le curve di uno di quei sistemi, o di entrambi, sono in pari tempo curve piane.*

Se due curve dell' un sistema sono piane, ma in piani diversi, tutte saranno piane (n. 3), e i loro piani formeranno un fascio, il cui asse F sarà il luogo dei vertici dei coni circoscritti alla superficie lungo le linee del 2° sistema (**). Anzi, due qualunque linee di questo 2° sistema staranno sempre in uno stesso cono avente il vertice su F.

Per generare una superficie $\boldsymbol{P}$ così fatta basterà che nella costruzione del n. 4 si assumano per C, D due curve piane. — Per rappresentarla analiticamente colle formole (1), basterà assumere le $f_i(u)$ della forma (10). —

Se invece vogliamo che entrambi i sistemi coniugati siano di *linee coniche e piane* nello stesso tempo, basterà nella costruzione del n. 4 prendere per A, B, C, D quattro curve piane. Allora i piani di quei due sistemi di linee caratteristiche passeranno risp. per due rette F, G. E in pari tempo, sarà G (o F) il luogo dei vertici dei coni circoscritti alla superficie lungo le linee del 1° (o risp. 2°) sistema.

(*) Il lettore vedrà subito perchè ci è bastato scrivere che la linea (3) del n. 2, cioè il luogo del punto $f_i'(u)$, è una retta, per ottenere che si verifichino le altre proprietà relative al caso attuale.

(**) Si ricordi, a questo proposito, la proposizione nota, e quasi evidente, che al sistema delle sezioni di una superficie coi piani passanti per una data retta è coniugato il sistema delle curve di contatto della superficie coi coni circoscritti dai punti di quella retta (Cfr. Koenigs, *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, Thèse, Paris 1882, pag. 63).

Viceversa, se su una superficie si hanno due sistemi mutuamente coniugati, l'uno di linee piane, l'altro di *linee coniche*, i piani di quelle formeranno un fascio; perchè ognuno di essi conterrà (delle generatrici e quindi) i vertici di tutti i coni circoscritti alla superficie lungo le linee del 2° sistema.

Dalle formole (10) ed analoghe per $y_i(v)$ si trae che una tal superficie, riferita a quelle linee caratteristiche, può rappresentarsi così:

$$(11) \qquad x_i = \alpha_i \, . \, \varphi(u) + \beta_i \, . \, \psi(u) + \gamma_i \, . \, \Phi(v) + \delta_i \, . \, \Psi(v) + \epsilon_i,$$

ove le $\alpha \, \beta \, \gamma \, \delta \, \epsilon$ sono costanti. Risolvendo queste equazioni rispetto alle 4 funzioni che figurano nei secondi membri (quando la risoluzione sia possibile), e poi facendo una conveniente trasformazione delle coordinate projettive (vale a dire, prendendo $\alpha \, \beta \, \gamma \, \delta$ come punti fondamentali delle nuove coordinate), si potranno *in generale* (non sempre) rappresentare le superficie particolari di cui ora si tratta, così:

$$(12) \qquad x_1 = \Theta_1(u), \; x_2 = \Theta_2(u), \; x_3 = \Theta_3(v), \; x_4 = \Theta_4(v),$$

od anche, eliminando u e v, colle due equazioni

$$(13) \qquad \eta(x_1, x_2) = 0, \quad \zeta(x_3, x_4) = 0 \quad (*).$$

Viceversa si riconosce subito che un sistema di equazioni di questi tipi rappresenta in generale una superficie con due sistemi coniugati di *curve piane e coniche.*

Rientrano evidentemente in questa categoria tutte *le superficie di rotazione*; e così pure *la ciclide di* Dupin, *la superficie romana di* Steiner, ecc. (**).

(*) Si rifletta che, quando non s'impone la condizione dell'omogeneità alle equazioni che si danno per le coordinate di punto $x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4$, occorrono *due* equazioni per rappresentare una superficie.

Sostituendo a quelle quattro coordinate di punto le tre non omogenee $x \, y \, z$, si avrà, invece delle due equazioni (13), una sola equazione della forma $F[x . \omega(z), \; y . \omega(z)] = 0$. Le linee caratteristiche sono allora nei piani $z = \text{cost.}$, e in quelli che passano per l'asse delle z.

(**) Per le superficie di rotazione e per la ciclide il doppio sistema caratteristico è dato dalle linee di curvatura. — La superficie di Steiner si ottiene prendendo per le $f_i(u)$ e $g_i(v)$ dei polinomi di 2° grado in u, v (sicchè i luoghi F e G si riducono a rette, per la 2ª nota al n. 7). Dalla rappresentazione della superficie sul piano $(u \, v)$ si trae che i due sistemi caratteristici sono i due sistemi di coniche situate nei piani che passano risp.^e per due spigoli opposti del tetraedro costituito coi 4 piani tangenti lungo coniche alla superficie di Steiner (quei due spigoli son le rette singolari dei due punti uniplanari di una retta doppia della superficie). A due a due le coniche di uno stesso sistema sono in un cono quadrico avente il vertice sull'asse dell'altro. Cfr., ad esempio, le pag. 433-434 della mia Memoria nel t. 24 (1884) dei Math. Annalen.

11. Una costruzione delle *superficie* $\boldsymbol{P}$ alquanto diversa da quella del n. 4 ci sarà data da una certa specie di *trasformazioni dello spazio.*

Sopra le due curve qualunque

$$x_i = f_i(u), \quad y_i = g_i(v) \tag{14}$$

distendiamo risp. due variabili U, V, uniformi sulle curve stesse (per esempio i parametri u, v, o delle funzioni uniformi di essi). Poi, consideriamo quella corrispondenza T tra punti dello spazio (generalizzazione dell'*omografia rigata*, o *biassiale*), per la quale sono corrispondenti due punti z, z' quando la loro retta incontra le curve f, g (14) in punti x, y con tali valori di U, V, che il birapporto $(x\,y\,z\,z')$ sia uguale a $U:V$; ossia quando si possa porre

$$z_i = \lambda f_i(u) + \mu\, g_i(v) \tag{15}$$

$$z_i' = \lambda\, U f_i(u) + \mu\, V g_i(v). \tag{16}$$

Si osservi che, se nelle (15) si assumono per λ e μ delle date funzioni rispettivamente di u e v, il punto z al variar di questi parametri, descrive una *superficie* $\boldsymbol{P}$ avente le curve f, g per *direttrici* associate nel senso del n. 5. E anzi, in questo modo si rappresentano *tutte* queste superficie $\boldsymbol{P}$. Passando allora alle (16) concludiamo subito:

Se si considera l'insieme di tutte le *superficie* $\boldsymbol{P}$ aventi le curve fissate f, g per direttrici associate, ogni trasformazione T basata su queste direttrici muta quell' insieme in sè stesso. Il gruppo di quelle T è transitivo: vale a dire due qualunque delle dette superficie si corrispondono sempre rispetto ad una T. Basta scegliere convenientemente le U e V.

Ne deriva la costruzione che volevamo per le superficie $\boldsymbol{P}$. *Basterà applicare una trasformazione* T *ad un piano.* In fatti un piano si può sempre riguardare come *superficie* $\boldsymbol{P}$ relativa alle direttrici associate f, g: per esempio il piano $z_1 = 0$ è rappresentato dalle (15), ove si prenda

$$\lambda = \frac{1}{f_1(u)}, \quad \mu = -\frac{1}{g_1(v)}.$$

La trasformazione T ha l'aspetto analitico, in causa delle variabili U, V che occorre distendere sulle curve f, g. Ma si

posson definire geometricamente quelle quantità in più modi. Per esempio, si fissino due linee ulteriori f_1, g_1, ed inoltre una corrispondenza biunivoca tra f e f_1; ed una tra g e g_1. Quindi, nella costruzione della T, si assuma sempre il birapporto $(x\, y\, z\, z')$ (che prima ponevamo $= U : V$) uguale al birapporto che due piani fissi determinano con quei due punti di f_1, g_1, che corrispondono ai punti x, y di f, g.

Note mineralogiche sulla Valle del Chisone (Cave del Pomaretto).

Osservazioni del Dr. LUIGI COLOMBA
Libero docente di Mineralogia.

(Con una Tavola).

Risalendo la valle del Chisone si osservano, poco a monte di Perosa Argentina e lungo il fianco destro della valle, alcune piccole cave intermittentemente coltivate in una roccia che è comunemente indicata col nome di *gneiss del Pomaretto*, essendo esse nel territorio di questo comune.

La roccia in cui sono aperte le dette cave appartiene al gruppo di quelle che secondo le ricerche di Novarese (1) costituiscono il termine inferiore della serie litologica da lui specialmente determinata e studiata nella valle della Germagnasca, ma che si prolunga anche nella valle principale, gruppo che è essenzialmente formato da gneiss minuti e da micaschisti spesso molto ricchi in grafite.

Nei punti in cui si hanno le cave del Pomaretto, la roccia presenta una schistosità molto regolare; osservata al microscopio ha una costituzione oscillante fra quella di un micaschisto feldispatico e quella di un gneiss minuto, ed il dubbio che si tratti dell'una piuttosto che dell'altra roccia è tanto più legittimo in quanto manca una linea di distinzione ben netta fra

---

(1) *Appunti geologici sulla valle della Germagnasca*, " Boll. Com. Geol. Ital. „ (1895), p. 252.

i due tipi di rocce, trattandosi in ambedue i casi di tipi litologici che si possono considerare come micaschisti più o meno ricchi in feldispato e che formano dei termini di passaggio fra i veri gneiss a grana fina ed i veri micaschisti.

Se però si volesse considerare come carattere distintivo quello derivante dal fatto che il feldispato sia più o meno omogeneamente diffuso nella roccia a seconda che questa rappresenti un vero gneiss minuto oppure un micaschisto, la roccia del Pomaretto dovrebbe molto più logicamente ascriversi ai micaschisti essendo in essa molto scarso il feldispato ed anche essendo esso in individui di dimensioni molto piccole ed irregolarmente disseminati nella massa della roccia.

Inoltre negli gneiss minuti anche la mica si presenta generalmente in lamine molto piccole. per modo che la schistosità della roccia non risulta in generale molto visibile; tale fatto invece manca del tutto nella roccia del Pomaretto, la quale anzi, come già dissi, presenta una perfetta schistosità dovuta al fatto che le lamine di mica hanno grandi dimensioni e sono disposte molto regolarmente.

La mica è costituita quasi esclusivamente da biotite, osservandosi solo raramente piccole quantità di muscovite; un minerale degno di nota per la sua frequenza e per la sua abbondanza è la sillimannite, la quale apparisce in lunghi aghi incolori disposti in letti che seguono con grande regolarità l'andamento dei piani di schistosità; si osservano pure cristalli microscopici di zircone spesso con abito fusiforme e meno frequentemente individui allungati di epidoto.

La roccia presenta in vari punti una struttura cataclastica molto distinta assumendo allora l'aspetto di una breccia schistosa a cemento siliceo; invero si osserva in tal caso la presenza di frammenti angolosi di quarzo, ortosio e sillimannite disseminati senza ordine in una sostanza bianchiccia senza tracce apparenti di differenziazione, ma che però, osservata a nicols incrociati, apparisce formata da un intreccio finissimo di granuli di quarzo aventi dimensioni molto più microscopiche di quelli sparsi nella massa della roccia.

Questa struttura cataclastica si mostra localizzata in alcune zone più o meno grandi disseminate in taluni strati della roccia intercalati con altri in cui essa manca affatto, per cui io credo

che non la si possa attribuire ad una formazione speciale, ma bensì che dipenda da cause le quali avrebbero influito localmente sulla struttura preesistente della roccia e specialmente da spostamenti, contorsioni, ecc.

Novarese (1) inclina ad ammettere che gli gneiss minuti che si trovano nella parte inferiore della serie litologica nella valle della Germagnasca, fossero in origine rocce clastiche e precisamente arenarie, le quali, in seguito ad azioni metamorfiche, avrebbero assunto la costituzione litologica e la struttura che attualmente posseggono, e fonda questa sua ipotesi sul fatto che i detti gneiss minuti e micaschisti passano gradatamente a rocce nelle quali la struttura è nettamente clastica, potendosi esse riferire a veri conglomerati.

Anche ammettendo una tale origine per la roccia del Pomaretto io non credo che la parziale sua apparenza cataclastica possa dipendere dal fatto che in alcuni punti la roccia stessa abbia conservato l'antica struttura clastica, poichè in tal caso non si potrebbe spiegare come nelle zone a struttura cataclastica si trovino diffusi allo stato di frammento minerali che, come la biotite, il quarzo, l'ortosio e la sillimannite, presentano caratteri identici a quelli che attualmente mostrano nella roccia, nella quale evidentemente avrebbero dovuto in parte formarsi ed in parte assumere l'attuale loro modo di presentarsi, appunto in seguito ai fenomeni di metamorfismo che avrebbero determinata precisamente la scomparsa della iniziale struttura clastica della roccia in questione.

Grandi paraclasi attraversano questi micaschisti con andamento quasi normale alla direzione della schistosità; le superfici di queste paraclasi e quelle di numerose litoclasi che le accompagnano sono generalmente tappezzate da una grande quantità di piccoli cristallini di quarzo e di ortosio associati ad abbondante clorite e da lamine di calcite: in alcuni punti poi, dove le pareti delle litoclasi appariscono meno vicine, si osservano alcune druse, nelle quali i predetti minerali, ai quali si uniscono pure l'epidoto e l'anfibolo, si presentano con caratteri non privi di interesse mineralogico, onde credo bene di riassumere i risultati delle osservazioni da me fatte su di essi.

---

(1) Loc. cit.

Ortosio. — L'ortosio che si osserva nelle litoclasi è sempre riferibile all'adularia; considerato dal lato chimico esso presenta una grande purezza, come si deduce dai seguenti risultati analitici da me ottenuti:

	Comp. cent.	Rapporti molecolari	
SiO_2	64,75	1,079	6,03
Al_2O_3	18,61	0,182	1,01
K_2O	16,82	0,179	1
	100,18		

oltre a tracce del tutto indeterminabili di soda.

Le dimensioni dei cristalli sono generalmente piccole, essendo quasi eccezionale il caso di cristalli voluminosi; cito però a questo proposito un esemplare che porta un cristallo di ortosio allungato parallelamente all'asse *oz* e che presenta in questa direzione un'altezza di 12 centimetri. A seconda dei punti da cui provengono si osserva che i detti cristalli appariscono o no ricoperti da patine di clorite; queste però sono sempre superficiali.

In generale essi sono piuttosto poveri di forme; invero ho in essi solamente osservato la presenza delle seguenti:

$P(001)$; $M(010)$;
$T(110)$; $z(130)$;
$q(\bar{2}03)$; $x(\bar{1}01)$; $t(201)$.

Il tipo dei cristalli ed anche la relativa frequenza delle predette forme varia assai a seconda che si tratti di cristalli ricoperti da clorite o non; nei primi invero si nota quasi costantemente un sensibile allungamento parallelamente all'asse *ox*, mentre invece i secondi appariscono sempre allungati secondo l'asse *oz*.

Inoltre, mentre in questi ultimi si hanno pressochè solamente presenti le 001, 110 e $\bar{1}01$, essendo molto raro il caso in cui si associ ad esse la 010 e sempre sotto forma di facce lineari, invece in quelli ricoperti da clorite sono presenti tutte le forme sopra accennate, essendo da considerarsi però come poco frequente la 130.

In quanto alle $\bar{2}03$, $\bar{1}01$ e 201 si nota che in generale non sono presenti contemporaneamente per modo che si possono stabilire i seguenti tipi di combinazione:

$001 . 010 . 110 . \bar{1}01$

$001 . 010 . 110 . \bar{2}03$

$001 . 010 . 110 . 201$

alle quali più o meno raramente si aggiunge la 130.

I cristalli ricoperti da clorite non si prestano assolutamente a determinazioni goniometriche esatte; gli altri presentano maggior nitidezza di facce, ma malgrado ciò anche da essi si possono ottenere misure puramente approssimative; per il che dovetti limitarmi a compiere quelle misure strettamente necessarie per determinare i simboli delle forme presenti, ricorrendo in alcuni casi al semplice goniometro di applicazione.

Interessanti appariscono invece i detti cristalli di ortosio se si considerano dal lato delle geminazioni che si osservano in essi; infatti ebbi modo di notare alcuni tipi speciali di geminati che non credo indegni di menzione.

I cristalli possono essere geminati secondo le leggi di Baveno e di Manebach; sono molto frequenti i geminati multipli ed a questo proposito si osserva che si hanno sensibili differenze nel modo di presentarsi di questi gruppi geminati a seconda che si tratti di cristalli coperti da clorite o non.

Nei cristalli coperti da clorite si osservano raramente gruppi bigemini corrispondenti ad una delle suddette leggi, mentre invece sono estremamente frequenti i gruppi poligeminati ed il caso più comune è quello rappresentato dalla figura 1ª, il quale costituisce un tipo già noto e che si può considerare come dipendente da una doppia geminazione secondo la legge di Baveno, essendo il cristallo fondamentale quello a cui appartengono le facce indicate con P_3 ed x_3, oppure come derivante da due individui ($P_1 x_1$) e ($P_2 x_2$) geminati secondo le leggi di Manebach ed ai quali sia unito un terzo individuo ($P_3 x_3$) geminato secondo Baveno.

Se si esaminano però attentamente questi gruppi trigemini, si nota come nella massima parte dei casi rappresentino solo le parti terminali di gruppi molto più complessi e che si pos-

sono considerare come costituiti da un numero variabile di individui elementari formatisi in fasi successive di deposito e di accrescimento e che si presentano geminati gli uni rispetto agli altri secondo l'una o l'altra delle due sopracitate leggi di geminazione.

La straordinaria quantità di tipi differenti che si osservano nei cristalli del Pomaretto esclude assolutamente la possibilità di descriverli tutti; mi limiterò quindi alla descrizione di alcuni fra i più caratteristici, potendosi da essi ricavare la legge che in modo pressochè costante ha regolato le associazioni e gli accrescimenti degli individui elementari nei gruppi complessi di cristalli poligeminati.

Nelle figure 2ª, 3ª e 4ª sono appunto rappresentati tre di questi gruppi poligeminati che constano rispettivamente di cinque, sette e nove individui elementari.

Abbiasi invero un gruppo trigemino come quello rappresentato nella figura 1ª e suppongasi che in esso, in seguito ad ulteriori depositi, mentre l'individuo (P_3x_3) continua a crescere, questo accrescimento manchi invece del tutto per quanto si riferisce ai due individui (P_1x_1), e (P_2x_2) e che invece si manifesti una tendenza alla comparsa di due nuovi individui (P_4x_4) e (P_5x_5) geminati il primo rispetto a (P_3x_3) secondo la legge di Manebach, ed il secondo rispetto allo stesso individuo secondo la legge di Baveno.

Ne risulterà un secondo gruppo trigemino (P_3x_3), (P_4x_4), (P_5x_5) analogo a quello della figura 1ª ma girato rispetto ad esso di circa 90° e sovrapposto al primo per modo che si otterrà un complesso di cinque individui che appunto corrisponderà al gruppo pentageminato della figura 2ª.

Suppongasi ora che il cristallo (P_5x_5) continui a crescere in modo analogo a quanto avvenne prima per il cristallo (P_3x_3) e che si formino due nuovi individui (P_6x_6), (P_7x_7) rispettivamente geminati con (P_5x_5) rispetto alle leggi di Manebach e Baveno; verrà così a formarsi, sovrapposto sul gruppo pentageminato prima visto, un nuovo gruppo trigemino disposto come il gruppo iniziale (P_1x_1), (P_2x_2), (P_3x_3) e che porterà ad un poligeminato settuplo analogo a quello rappresentato nella fig. 3ª.

Allo stesso modo supponendo un ulteriore accrescimento dello stesso tipo rispetto all'individuo (P_7x_7) del terzo gruppo,

si avrà la comparsa di un nuovo gruppo trigemino disposto come quello costituito dagli individui (P_3x_3), (P_4x_4), (P_5x_5) e che porterà ad un gruppo più complesso corrispondente a quello nonuplo della figura 4ª.

Ne è da affermarsi che a questo punto debba arrestarsi la la produzione di nuovi geminati ed invero da quanto potei osservare non mancano accenni nell'ortosio del Pomaretto a gruppi più complessi ancora.

Questo speciale modo di accrescimento dipenderebbe quindi dal fatto che nei cristalli di ortosio in questione abbia tendenza speciale a prodursi la legge di Manebach e subordinatamente quella di Baveno, per cui quando si forma un cristallo la cui comparsa dipenda da questa seconda legge, tende tosto a formarsi un altro individuo geminato rispetto ad esso secondo la legge di Manebach e posteriormente un terzo dovuto alla legge di Baveno, e così di seguito.

Oltre a questi geminati così complessi se ne osservano alcuni altri pure degni di nota, ma sui quali non credo necessario di insistere trattandosi di casi già noti; il più caratteristico, e che specialmente si osserva nei cristalli privi di clorite, è rappresentato da gruppi tetrageminati nei quali i quattro individui elementari sono disposti a croce. Questi gruppi, come è noto, si possono considerare come risultanti da una doppia geminazione secondo le leggi di Manebach e di Baveno rispetto a quattro individui elementari cresciuti contemporaneamente, e già stata figurata da varî autori e fra questi da Dana (1).

Nei gruppi poligeminati complessi da me descritti spesso i confini dei singoli individui componenti si manifestano solamente sulle facce che limitano i gruppi stessi mediante suture di geminazione; in ogni caso però è sempre possibile constatare quando una determinata area appartenga ad una coppia di facce complanari M di due individui geminati secondo la legge di Manebach, oppure ad una faccia P, per il fatto che mentre queste si presentano, come appunto si vede nelle sopra riportate figure, striate parallelamente agli spigoli $P.x$, invece quelle appariscono più o meno fortemente punteggiate e scabre.

---

(1) *System of Mineralogy*, 1891, p. 317.

Quarzo. — I cristalli di quarzo che accompagnano l'ortosio nelle litoclasi delle cave del Pomaretto non sono mai molto grossi, raggiungendo al massimo un'altezza di 4 o 5 centimetri; sebbene essi non siano molto ricchi di forme, tuttavia presentano una certa importanza non solo per la presenza in essi di alcune forme molto rare per il quarzo, ma pur anche per la grande frequenza con la quale le dette forme si manifestano.

Le forme da me determinate con sicurezza sono le seguenti, assumendo l'orientamento di Goldschmidt (1):

$b(2\bar{1}\bar{1} = 10\bar{1}0)$; $F:(4\bar{1}\bar{3} = 52\bar{7}0)$;

$r(100 = 10\bar{1}1)$; $i(13\bar{2}\bar{2} = 50\bar{5}3)$; $\omega_1(12\bar{3}\bar{3} = 50\bar{5}2)$;

$\pi(110 = \bar{1}012)$; $\rho(22\bar{1} = \bar{1}011)$; $\varphi(8\,8\,\overline{13} = \bar{7}071)$;

$\mu:(210 = 11\bar{2}3)$; $s(41\bar{2} = 11\bar{2}1)$;

$x(4\bar{1}\bar{2} = 51\bar{6}1)$; $r(8\,5\,\overline{10} = \bar{5}161)$; $y(10\,\bar{2}\,\bar{5} = 41\bar{5}1)$;

$z:(970 = \bar{7}\,\bar{2}\,9\,16)$.

Inoltre si osservano in prossimità dei vertici dei cristalli delle faccettine lineari generalmente molto scabre e che quindi non si possono determinare con sicurezza.

La combinazione che si può considerare come fondamentale è quella rappresentata dalla figura 5ª, e comprende le seguenti forme:

$10\bar{1}0$, $52\bar{7}0$, $10\overline{11}$, $\bar{1}011$, $\bar{1}012$, $11\bar{2}1$, $11\bar{2}3$, $\bar{7}\,\bar{2}\,9\,16$.

Essa poi si complica in molti casi per la comparsa più o meno frequente delle altre forme ed in ciò appunto sta l'importanza di questi cristalli, poichè, come si vede, sono appunto le forme più rare quelle che sempre sono presenti.

Per quanto riguarda le $10\bar{1}0$, $10\bar{1}1$, $\bar{1}011$, $11\bar{2}1$, $\bar{5}161$, $51\bar{6}1$, $41\bar{5}1$, non credo necessario di arrestarmi su di esse, trattandosi, nel caso dei cristalli del Pomaretto, di forme che non presentano nulla di speciale.

Mi limiterò quindi a descrivere brevemente le altre forme.

---

(1) *Index der Krystallformen des Mineralien*, 1891, vol. 3°, p. 1.

L'emiprisma dodecagono $52\bar{7}0$ si presenta in generale sotto forma di facce anche dotate di larghezza non trascurabile talvolta, ma che in generale hanno una superficie molto scabra; in alcuni cristalli però ne osservai di quelle abbastanza nitide.

Nella zona dei romboedri diretti si osserva che la $50\bar{5}3$ è molto frequente e sempre si presenta sotto forma di faccettine lineari in generale però nitide; lo stesso si può dire della $50\bar{5}2$ la quale anzi ha sempre facce di dimensioni maggiori della precedente.

Degno di nota è per questa forma il fatto che sino ad ora era soltanto nota nel quarzo la sua inversa $\bar{5}052$, mentre nel caso dei cristalli da me esaminati non si può mettere in dubbio la presenza della 5052 non solo per il fatto che le facce della bipiramide che sono nella sua zona sono quelle più sviluppate, ma anche perchè sulle facce della $50\bar{5}2$ manca quell'aspetto che secondo Des Cloizeaux (1) è caratteristico delle forme inverse, cioè mancano le striature parallele agli spigoli d'intersezione con la $\bar{1}010$.

Nella zona dei romboedri inversi è degna di nota la $\bar{1}012$ in causa della sua costanza; in generale le sue facce sono striate, ma talvolta potei ottenere delle buone misure, essendo d'altra parte possibile la sua determinazione anche indipendentemente dalle misure per il fatto che le sue facce sono nelle due zone $\bar{1}011 . 10\bar{1}0$ e $10\bar{1}1\ 01\bar{1}1$.

Nulla d'interessante offre l'altro romboedro $\bar{7}071$ contenuto nella stessa zona.

Meritevoli in modo speciale di essere ricordate sono la $\bar{7}\bar{2}916$ e la $1\bar{1}23$.

La prima di queste forme è certamente una delle più rare che si abbiano nel quarzo, essendo stata fino ad ora solo osservata, per quanto mi consta, da Lincio (2) nel quarzo di Herkimer; nei cristalli del Pomaretto è sempre in facce lineari talvolta nitide e talvolta striate parallelamente alle intersezioni con la $\bar{1}012$.

---

(1) *Manuel de Minéralogie*, tomo 1°, p. 12.

(2) *Beiträge zur Krystallographischen Kenntniss des Quarzes*, " Neu Jahrb. für Miner. ecc. ", Beil. Bd. XVIII, p. 155.

La 1123 è pure sotto forma di faccettine lineari che talvolta presentano una discreta lucentezza, essendo però frequente il caso in cui presentano delle striature analoghe a quella della forma precedente.

Nella seguente tabella sono riportate le migliori misure da me ottenute:

	Valori ottenuti	Valori medi	Valori teorici (c=1,09997)
$52\bar{7}0 \,.\, 10\bar{1}0$	16°12′-16°20′	16°16′	16°6′
$50\bar{5}3 \,.\, 10\bar{1}0$	25°11′	25°11′	25°17′
$50\bar{5}2 \,.\, 10\bar{1}0$	17°27′-17°40′	17°33′30″	17°29′
$\bar{1}012 \,.\, \bar{1}011$	19°11′-19°20′	19°15′30″	19°22′
$\bar{7}071 \,.\, 10\bar{1}0$	31°55′	31°55′	31°48′
$\bar{7}\,\bar{2}\,9\,16 \,.\, 10\bar{1}1$	36°25′	36°25′	36°15′
$11\bar{2}3 \,.\, 10\bar{1}1$ (adiac.)	25°30′	25°30′	25°41′

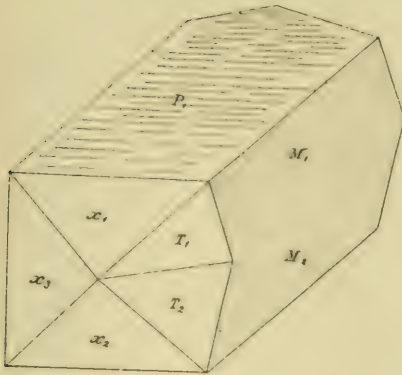
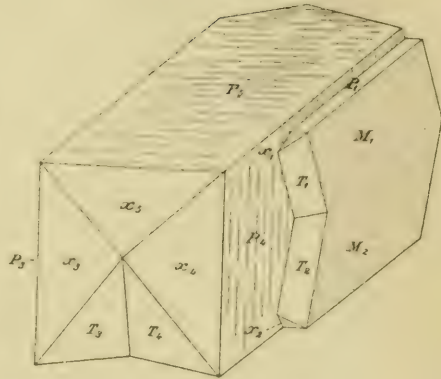
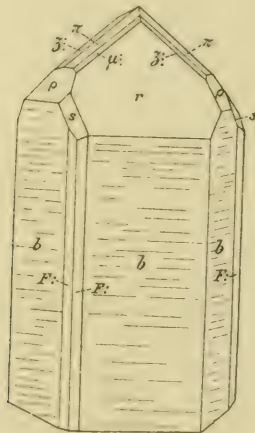
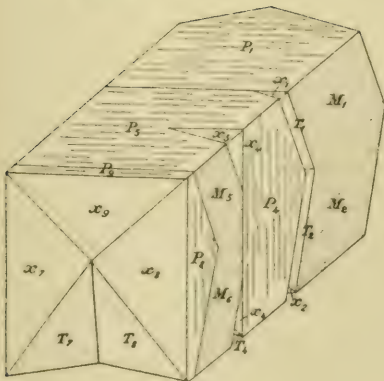
In quanto alle faccettine che in molti casi smussano i vertici dei cristalli sembrano doversi riferire alle $\bar{1}013$ ed alle $10\bar{1}5$, quest'ultima forma ammessa fino ad ora solo da Lincio (1), pure nei cristalli di Herkimer, ma da lui però considerata come incerta.

Debbo però considerare queste determinazioni come molto incerte, poichè ebbi solo modo di osservare alcune misure a bagliori.

Gli angoli da me ottenuti rispettivamente dalle due forme con le facce $\bar{1}011$ e $10\bar{1}1$ oscillano fra 29° e 30° in un caso e fra 36° e 38° nell'altro; ora i valori teorici degli angoli $\bar{1}013 \,.\, \bar{1}011$ e $10\bar{1}5 \,.\, \bar{1}011$ sono rispettivamente pari a 28°41′ ed a 37°32′. È degno però di nota il fatto che nei cristalli del Pomaretto, oltre alla $\bar{1}013$ sarebbe pure presente la $10\bar{1}3$.

Epidoto. — L'epidoto presenta importanza minima sia per il fatto che è sempre poco frequente, sia perchè i suoi cristalli hanno generalmente dimensioni molto piccole ed una grande

(1) Loc. cit.

Soc. An. It. Industrie Grafiche - Torino

povertà di forme; in essi constatai invero solo la presenza delle seguenti forme:

$$c(001),\ t(100),\ r(\bar{1}01),\ i(\bar{1}02),\ o(011).$$

Tutte queste forme sono costantemente presenti nei cristalli i quali sempre sono allungati parallelamente all'asse di simmetria; talvolta osservai pure dei cristalli geminati secondo 100.

Le facce di questi cristalli sono molto nitide e mi diedero risultati molto buoni:

	Valori ottenuti	Valori medii	Valori teorici (1)
$100 . 001$	64°32′-64°38′	64°35′	64°36′50″
$100 . \bar{1}01$	51°38′-51°40′	51°39′	51°41′
$001 . \bar{1}02$	34°13′	34°13′	34°21′
$011 . 0\bar{1}\bar{1}$	63°5′	63°5′	63°5′30″
$001 . 011$	58°29′	58°29′	58°27′15″

Stante le piccole quantità di epidoto che potei avere a mia disposizione non potei compiere alcun saggio analitico.

Calcite. — Si presenta frequentemente in cristalli tabulari associati all'ortosio; meno frequentemente è in cristalli ad abito prismatico; in generale i suoi cristalli sono ricoperti da clorite per modo che non potei ottenere che misure approssimative, le quali però mi permisero di constatare la presenza delle seguenti forme (orientamento secondo Goldschmidt (2)):

$$\varrho(111 = 0001);\ b(2\bar{1}\bar{1} = 10\bar{1}0);\ p(100 = 10\bar{1}1);$$
$$t.(11\bar{5}\bar{5} = 16\,0\,\overline{16}\,1);\ \delta.(110 = \bar{1}01\,2);\ \pi.(33\bar{5} = \bar{8}081)$$

essendo presenti le seguenti combinazioni:

$$0001 . 10\bar{1}0;$$
$$0001 . 10\bar{1}0 . 10\bar{1}1 . \bar{8}081;$$
$$0001 . \bar{1}012 . 16\,0\,\overline{16}\,1.$$

Anfibolo. — Molto raramente si osserva, specialmente dove si ha la calcite, la presenza di piccole quantità di anfibolo, riferibile a sughero di monte.

Torino, Istituto Mineralogico della R. Università,
14 Giugno 1908.

---

(1) *System of Mineralogy*, 1872, pag. 516.

(2) *Index der Krystallformen der Mineralien*, 1886, p. 371.

Riassunto di uno studio geo-fisico sulle isole Tremiti

del prof. SENOFONTE SQUINABOL.

Avendo dovuto recarmi nel 1895 alle Isole Tremiti per un sopraluogo geologico affine di ricercare se la stabilità delle rocce su cui è fondata la casa penale fosse minacciata da alcune spaccature che si erano formate, ebbi fin d'allora agio di fare alcune osservazioni che non coincidevano totalmente con quelle che il Tellini aveva pubblicate nella sua memoria uscita cinque anni prima (1).

Vi ritornai in seguito due altre volte nel 1900 e nel 1906 estendendo lo studio anche alla geofisica delle isole stesse ed alla preistoria delle medesime, essendo stato fortunato di trovare, per il primo, tracce dell'uomo neolitico in detto gruppo insulare.

Sperando di poter pubblicare in seguito, *in extenso*, i risultati di tale studio, con carte, tavole di sezioni, fotografie e quanto altro occorre per la completa illustrazione, mi permetto intanto di comunicare a questa R. Accademia un breve riassunto delle mie osservazioni.

La Memoria sarà divisa in diversi capitoli.

Il 1° abbraccia tutta la parte di geografia fisica.

In questo 1° cap. si rettificano in primo luogo le superficie delle varie isole che sono state misurate con gran cura sopra le nuove carte marine del 1899 aggiornate al 17 luglio 1906.

Le superficie vengono ad essere:

S. Domino	m. q.	1.980.750	invece di	m. q.	2.325.500
Capperara	„	448.425	„	„	599.100
S. Nicola	„	441.000	„	„	484.100
Cretaccio	„	37.450	„	„	1.000
Totale	m. q.	2.907.625	„	„	3.409.700

(1) Tellini A., *Osservazioni geologiche sulle isole Tremiti e sull'isola di Pianosa*, “ Boll. R. Com. Geol. „, n. 11-12. Roma, 1890.

Quindi si passa a rassegna la plastica di ciascuna di esse, la proporzionalità tra lo sviluppo costiero e la superficie, la forma delle coste, la ipsometria e la batometria. Notevoli sotto questo rapporto sono le grandi profondità costiere che si trovano principalmente a N. della Capperara, dove il mare si inabissa a poca distanza dalle coste e lungo la costa S-O di S. Nicola.

Questo fatto messo in rapporto coi fatti geologici, di cui più innanzi, autorizza a credere ad uno sprofondamento abbastanza potente lungo due direttrici, una E-O (Capperara) ed una SO-NE (S. Nicola).

Ricercata quale sarebbe la isobata che collegherebbe tutte le isole, ho trovato essere quella di m. 11, la quale stabilirebbe anche fra Capperara e S. Nicola un ponte che verrebbe però in gran parte sommerso nelle alte maree.

È fatto poi uno studio se non completo, essendo mancato il tempo, certo abbastanza ampio della natura del fondo del mare, sia dietro le indicazioni degli studi idrografici della R. Marina, sia in seguito a scandagli e ricerche proprie. Così pure sulla trasparenza dell'acqua, sulle correnti locali, sulla temperatura, sulla salsedine, sulla densità.

Proseguendo lo studio di geografia fisica si prendono in esame e si descrivono i vari fenomeni di erosione marina, fra i quali un ponte naturale, un magnifico *puffing-hole* (pozzo cannone) dell'isola S. Domino, le varie grotte di S. Domino e della Capperara. Fra tutte queste importante quella del Bue Marino, perchè di doppia origine, o meglio fatta in due epoche, primitivamente da acque d'infiltrazione e poi ingrandita dal mare.

Infine si prende in esame il fenomeno curioso e nuovo di marmitte marine scavate ad altezze superiori a 6-10 metri sul livello del mare, durante le tempeste, dalle onde che assumono un moto vorticoso per la conformazione della costa, sia nel battere sopra le rocce, sia nel ritorno dell'acqua al mare.

Finalmente un fatto importante viene messo in luce, di doline antiche fattesi tra la fine del nummulitico e la deposizione dell'elveziano, riempite dall'elveziano stesso e poi svuotate nuovamente dall'erosione, in gran parte sventrate ed ora trasformate in piccole calette ad imbuto.

Geologicamente lo studio ha condotto ai seguenti risultati:

1° *Inesistenza* del Cretaceo nell'isola di S. Domino, dove

i calcari dolomitici creduti tali dal Tellini sono invece in parte calcari ad *Alveolina ellipsoidalis* Schwag ed *Alv. ovulum* Stache, in parte a coralli eocenici.

2° Il *Cretaceo* è ridotto ad una strettissima striscia nell'isola Capperara, dove sotto al nummulitico affiorano per pochi metri dei calcari selciosi a interstrati di selce e suddivisi in parallelepipedi, come nei calcari del Quader. Essi sono però *Senoniani*, com' è risultato dallo studio delle *Radiolarie*, in gran parte identiche a quelle della scaglia euganea.

3° *Ampliato* quindi il nummulitico nelle isole S. Domino e nella Capperara.

4° *Fase di emersione* dopo il nummulitico e di corrosione potente con fenomeni carsici, attestata da doline riempite, come dissi, dall'elveziano e dalla chiara discordanza fra gli strati nummulitici ed elveziani, nonchè dalla mancanza degli orizzonti di mezzo.

5° *Elveziano* circa come nel Tellini, ma ritrovato qua e là in altri punti. L'arenaria elveziana a grana piccola e quasi pulverulenta a S. Domino, più sabbiosa al Cretaccio, diventa quasi puddinga alla Capperara (lato N-O) e ricca di denti di pesci, fra i quali una specie non trovata dal Tellini (1).

In alcuni punti l'Elveziano è stato posteriormente assai frantumato e ricementato in breccia ad elementi grossi, e ciò in rapporto a movimenti posteriori, di cui parlerò in seguito.

6° *Tortoniano*, rappresentato dalle marne a marcassite. Questo separato nella carta geologica dall'elveziano in tutte e tre le isole che lo contengono.

7° *Langhiano*: ritrovamento del Langhiano con marne bianche ad *Ostrea langhiana* a S. Domino e nel Cretaccio. Quivi (Cretaccio) il Langhiano è incuneato nel Tortoniano.

8° *Pliocene inferiore*. Come nel Tellini.

9° *Pliocene superiore in discordanza* col precedente e rappresentato da una stretta zona ad Ostree e Pecten con interstrati qua e là di salgemma.

---

(1) Bassani F., *Su alcuni avanzi di pesci nell'arenaria glauconiosa delle isole Tremiti*, " Rendic. R. Accad. delle Scienze di Napoli ", fasc. 5° e 7°. Napoli, 1907.

10° *Quaternario marino* rappresentato da un calcare ricco di foraminifere e in basso con strati a Lithotamni, in alto rossiccio per ossidazione, impoverito di $CaCO_3$ per azione delle acque meteoriche e più argilloso. Questo a S. Nicola. Al Cretaccio non esiste, invece torna ad esservi alla Capperara. A S. Domino il quaternario marino è rappresentato da una puddinga a *Turbo rugosus* e ad ostree (contenente inoltre Truncatelle e Planorbis, quindi fatta allo sbocco di qualche corso di acqua).

È a circa 60 m. sul mare quasi nel centro dell'isola e messo a nudo da uno scavo, inoltre esiste alla Casa Rossa sopra un lembo elveziano, e quivi è sormontato da un calcare ad Helix.

11° *Quaternario terrestre*. Rappresentato da calcari ad Helix, non quindi di acqua dolce, ma formati semplicemente da argille contenenti spoglie di Helicidi e cementate da $CaCO_3$. Ascrivo inoltre al quaternario terrestre una grande massa di sabbioni che ricopre il Cretaccio e una porzione di S. Domino, che sono, a parer mio, dune antiche.

12° *Attuale*. Comprendo sotto questo titolo tutto il prodotto di disfacimento dei terreni sottostanti, a seconda del loro affioramento nelle varie parti delle isole. Sulla carta sarà segnato solo dove raggiunge una certa potenza, e principalmente ove si mescola al detrito roccioso di falda accumulato fra le argille. In alcuni punti, come a S. Domino, racchiude resti neolitici (cocci ed armi). In altri luoghi passa insensibilmente ad un deposito più antico e fa testimonianza di una erosione molto più potente di quella che non si faccia ora.

Movimenti orogenici. Resta così stabilito:

1° una fase di emersione dopo il Nummulitico ed un *hiatus* fra questo e l'Elveziano;

2° l'esame principalmente del *Cretaccio* ha condotto a queste risultanze: *a*) il Cretaccio principalmente è stato il centro di una serie di movimenti orogenici importanti, che hanno condotto a far scivolare la parte N. sulla parte S. pressochè ora divise. Il Nummulitico del centro dell'isola è a contatto col Tortoniano. Inoltre vi è stato un incuneamento del Langhiano nel Tortoniano nella parte N. dell'isola. Infine una serie di dislo-

cazioni secondarie hanno avuto sede nell'ultima porzione N. del Cretaccio e tutto ciò dopo il Quaternario;

b) a S. Nicola è facile anche ad un osservatore superficiale lo stabilire: 1° che fra il Pliocene inferiore ed il superiore vi è discordanza, quindi fase di emersione dopo il Pliocene inferiore; 2° che dopo la deposizione del Pliocene sup. e del Quaternario vi sono state delle fratture con rigetto in tutta l'isola e queste sono allineate in un' unica direzione con quelle del Cretaccio.

c) La formazione marina quaternaria indica un sollevamento di non meno di 60 m. dal livello attuale di tutta la massa delle isole dal Quaternario a questa parte; d'altra parte certe grotte, come quella del Bue marino, che ha avuto origine per acque d'infiltrazione e poi fu ingrandita dal mare, indica un nuovo abbassamento, come indica pure ciò l' affioramento a mare e a picco di sabbie e argille contenenti resti dell'industria umana.

d) L'appicco sottomarino della Capperara con residui di Elveziano, Tortoniano e Quaternario sospesi a diverse altezze sta ad indicare una frattura con forte rigetto diretta NE-SO. Così pure credo sia dovuto a frattura seguita da sprofondamento il Canale interposto fra Cretaccio e Capperara da una parte e S. Nicola dall'altra.

Un'altra linea di sprofondamento dev'essere la spiaggia a picco S-E di S. Nicola, la quale in parte è sprofondata e in parte ha semplicemente ceduto, come sotto l'abitato.

Altra linea di cedimento è la costa N-E di S. Domino, dove l'Elveziano è portato a livello del mare.

e) In conclusione:

1° Emersione dopo il Nummulitico e regime aereo fino all'Elveziano.

2° Sommersione durante l'Elveziano fino al Pliocene inferiore compreso.

3° Emersione dopo il Pliocene inferiore.

4° Sommersione che ha durato tutto il Pliocene sup. e parte del Quaternario.

5° Emersione durante l'ultima fase del Quaternario.

6° Durante quest'ultima fase e probabilmente sul finire, grandi movimenti violenti che hanno spezzata la terra, formando

4 isole, cioè: 1° abbassamento di oltre 150 m. della parte N-O e N. di Capperara; 2° formazione del canale fra Capperara-Cretaccio e S. Nicola, ingrandito poi dall'erosione; 3° cedimento nell'isola di S. Nicola dalla parte S-E, anche con rotture, e nel tempo stesso rigetti trasversali rispetto alle grandi linee di cedimento; 4° cedimento che ha aperto il canale fra S. Domino e Cretaccio e fra Cretaccio e Capperara.

Preistoria. — Furono pure da me rinvenute, come già dissi, testimonianze dell'uomo preistorico, finora non mai accennate da alcuno. I cocci trovati a Prato S. Michele (isola S. Domino) durante uno scasso per impianto di vigneti, sono tutti dell'epoca neolitica, ed hanno una fisonomia identica a quelli delle stazioni primitive di Molfetta, illustrate da Massimiliano Mayer (1). Sono pure neolitiche gran parte delle armi di selce trovate in parte nel detto scasso (ascie), in parte a fior di terra (Casa Inglesi), frammiste a cocci di epoca greca e romana.

Anche neolitiche sono altre armi di selce, ma essendo lavorate con scheggiatura non minuta, quale si nota pure in molte armi consimili del Gargano, le credo fabbricate dai discendenti delle famiglie paleolitiche (2).

---

(1) M. Mayer, *Stazioni preistoriche di Molfetta*. Bari, 1904.

(2) S. Squinabol, *Ritrovamenti preistorici alle isole Tremiti*, " Boll. di Paletnologia ital. ", anno XXXIII, nn. 1-5. Parma, 1907.

Contributo alla briologia delle Isole Tremiti.

Nota del Dott. GIOVANNI NEGRI.

La florula briologica delle Isole Tremiti è ancora assai scarsamente nota. Il dott. A. Gurgo nel 1886 ed U. Martelli nel 1903 vi raccolsero alcune specie di muschi determinati e pubblicati dal Bottini (1); in tutto nove. Ritengo quindi non privo d'interesse l'elenco della raccolta fattavi da me, in una visita al piccolo arcipelago compiuta nella scorsa primavera (5-21 aprile 1907), in quanto esso aumenta notevolmente il numero delle specie conosciutevi, e, data la piccola estensione delle quattro isolette di cui il gruppo consta, le speciali condizioni di ambiente e la stagione particolarmente favorevole della quale ho potuto usufruire, mi sembra porga una nozione abbastanza esatta della vegetazione briologica locale. Le stesse condizioni climatiche favorevoli ad un eccezionale sviluppo dei muschi, resero impossibile, nelle due settimane della mia permanenza, un'escursione sino all'isola di Pianosa, la quale non deve del resto, per la natura sua, essere molto propizia al briologo: per le altre isole invece, ho goduto di ogni agevolezza grazie alla cortese ospitalità ed assistenza delle Autorità Governative locali, alle quali mi è grato porgere i più sentiti ringraziamenti, estendendoli anche al Direttore del R. Vigneto di Osservazione sig. B. Antoci, che ebbe a favorirmi in ogni modo.

Il gruppo delle Tremiti è stato studiato nelle sue origini e nella sua costituzione dal Tellini ed affatto recentemente dallo Squinabol (2). A chi si occupa della sua vegetazione, interessa di

---

(1) Bottini A., *Sulla briologia delle isole italiane* (*Webbia* di U. Martelli, vol. II, p. 400. Firenze, 1907).

(2) Tellini A., *Osservazioni geologiche sulle isole Tremiti e sull'isola Pianosa nell'Adriatico*, " Boll. del R. Comit. Geologico ", a. 1890, n. 11 e 12, Roma, 1890. — Quanto alle ricerche dello Squinabol sono in via di pubblicazione: per quanto può interessare il briologo vedansi i cenni che ne dà il dott. G. Cecconi, in *Contributo alla Fauna delle Isole Tremiti*, " Boll. dei Musei di Zool. ed Anat. Comp. della R. Univ. di Torino ", vol. XXIII, n. 583, 20, v. 1908.

ricordare, fra le conclusioni tratte da tali ricerche, che l'emersione definitiva dell' arcipelago non risale oltre il quaternario. Esso è costituito da un'impalcatura cretacea calcareo-dolomitica ($Mg(CO_3)^2$ 40.64 E. Mattirolo in Tellini, op. cit.) sulla quale riposano altri calcari, eocenici, pure magnesiaci ($Mg(CO_3)^2$ 23.58 cfr. *id.*) più o meno farinosi; inoltre, depositi posteriori di arenarie glauconitiche, di finissime arenarie prettamente calcari, di marne farinose o sabbiose. Infine una crosta calcare, attribuibile al quaternario e di origine terrestre, di compattezza, tenacità e friabilità varie, riveste, con spessore assai variabile, le località pianeggianti delle isole. Il Tellini ha dato anche, nel lavoro citato, una carta di queste formazioni, che può essere utilmente consultata. E da essa come da quanto s'è detto emerge una seconda conclusione di alto interesse: l'uniformità calcare, cioè, del substrato offerto alla vegetazione.

Le Tremiti sono quattro: S. Domino (Kl.^{2} 2.3255; alt. m. 116), S. Nicola (Kl.^{2} 0,4841; alt. m. 75); Capperara o Caprara (Kl.^{2} 0.5991; alt. m. 53); e Cretaccio (Kl.^{2} 0.037,460; alt. ca. 30 m.). Assai ravvicinate, lasciano pensare facilmente ad un'epoca relativamente recente in cui dovevano formare un'isola sola allungata secondo l'asse NE-SW; i canali che le dividono, infatti, presentano una massima larghezza di m. 300 (fra S. Nicola e Capperara) ed una massima profondità di m. 28 (fra Capperara ed il Cretaccio). L'intero gruppo dista dal continente (Capo Mileto, Gargano) circa 22 kl. ed il canale che ne lo separa raggiunge m. 87 di profondità. Quanto alla configurazione delle singole isolette, S. Domino presenta una forma irregolarmente romboidale, a coste dirupate ed assai frastagliate: consta di un altipiano alto mediamente m. 50, estendentesi dal lato che fronteggia le altre isole ed elevantesi verso occidente sino a costituire un colle rotondeggiante (colle dell'Eremita m. 116) che forma il culmine dell'isola e col versante opposto degrada direttamente sino al mare. È coltivata a grano e vigneti nella parte pianeggiante e pel resto occupata da una estesa Pineta (*P. halepensis Mill*) alternata da chiazze di macchia mediterranea. — S. Nicola è un altipiano roccioso, oblungo, ad estremità arrotondate, quasi uniformemente elevato ed appena ondulato, precipitante verso il mare con ripidissimi pendii: è rivestito da macchia mediterranea molto depressa causa la continua ed intensa azione del vento ed è in piccola

parte coltivato a grano. Capperara consta di due distinti colli, uno settentrionale (M. Grosso) e maggiore, l'altro meridionale, minore ed un po' più basso, collegati da una insellatura alla quale corrisponde la così detta Cala dei Turchi, che intacca profondamente il contorno ovale allungato dell'isola. La costa precipita ripidissima verso l'alto mare ed offre invece un pendio quasi uniformemente dolce dalla parte prospicente a S. Nicola: il suolo è rivestito da macchia mediterranea in alcuni punti assai fitta, ma sempre bassa ed in piccola parte è coltivato a grano. Infine il Cretaccio, situato fra le tre isole maggiori, non è che uno scoglio quasi del tutto nudo.

All'esposizione delle mie osservazioni credo opportuno far precedere senz'altro l'elenco delle specie raccolte:

I. — **Cleistocarpae.**

1. ***Phascum cuspidatum***, Schreb., 1770 (fr.).

S. Domino: campi in riposo e luoghi calpesti presso Casa Baronessa — S. Nicola: terreno erboso presso il Cimitero.

2. ***Ph. piliferum***, Schreb., 1770 (fr.).

S. Domino: terreni incolti presso Casa Baronessa.

3. ***Ph. curvicollum***, Ehrh., 1791 (fr.).

S. Domino: campi in riposo e luoghi incolti presso Casa Baronessa.

4. ***Ph. rectum***, With, 1796 (fr.).

Colla specie precedente e più abbondante.

II. — **Stegocarpae.**

a) Acrocarpae.

5. ***Weisia viridula*** (L.) Hedw., 1791 (fr.).

S. Domino, S. Nicola e Capperara sul terreno coperto dalla macchia bassa.

v. ***amblyodon***, Br. Eur., (fr.).

Colla specie precedente e più abbondante. Indicata da Bottini (l. c.) per S. Domino.

6. ***Dicranella varia*** (Hedw.) Schpr., 1885 (fr.).

S. Domino: campi in riposo presso Casa Baronessa. Id. sul margine orientale del bosco nei luoghi ombrosi riparati.

v. ***callistoma*** (Diks) Schpr. (fr.).

Colla specie

7. ***Ceratodon chloropus***, Brid., 1826 (fr.).

S. Domino: margine sud-orientale del bosco.

8. ***Pottia minutula*** (Schleich), Br. Eur., 1843 (fr.).

S. Domino: campi in riposo e luoghi calpesti presso Casa Baronessa. — S. Nicola: terreni erbosi presso il Cimitero.

9. ***P. intermedia*** (Turn) Fürnr, 1829 (fr.).

S. Domino: terreno dei campi presso Casa Baronessa.

10. ***P. Starkeana*** (Hedw.), C. Mull., 1849 (fr.).

S. Domino: terreni dei campi presso Casa Baronessa.

11. ***Didymodon luridus***, Hornsch, 1826 (ster.).

S. Domino: sul terriccio lungo la strada dallo sbarco a Casa Baronessa. Id. scoscendimenti sabbioso-marnosi sulla costa meridionale, suolo nudo. — S. Nicola: suolo calcareo-marnoso nudo presso il forte. — Capperara: suolo nudo qua e là nelle macchie. — Cretaccio: suolo nudo. Raccolto sporificato a S. Domino da U. Martelli.

12. ***Trichostomum crispulum***, Bruch., 1829 (ster.).

S. Domino: macchia bassa a destra dello sbarco.

13. ***Tr. mutabile***, Bruch., 1838 (ster.).

Non ho raccolta quest' unica fra le specie indicate dal Bottini come trovate alle Tremiti dal Gurgo. S. Domino.

14. ***Tr. nitidum*** (Lindb.), Schpr., 1876 (ster.).

S. Domino: macchia bassa a destra dello sbarco.

15. ***Tr. flavovirens***, Bruch., 1829 (fr.).

In tutte le isole, nella macchia, sul suolo, meno frequente a S. Domino nel bosco. Indicata da Bottini per S. Domino e S. Nicola.

16. ***Aloina ambigua*** (Br. Eur.), Limpr., 1890 (fr.).

S. Domino: sul terriccio lungo la strada dallo sbarco a Casa Baronessa; alla Cala degli Inglesi, e sul terreno degli scoscendimenti sabbiosi-marnosi della costa meridionale — S. Nicola e Capperara su terreni calcareo-marnosi scoperti.

17. ***Crossidium squamigerum*** (Viv.), Iur., 1882 (fr.).

S. Domino: sul territorio lungo la strada dallo sbarco a Casa Baronessa.

18. ***Barbula unguiculata*** (Huds.), Hedw., 1782 (fr.).

S. Domino: macchia bassa alla Cala degli Inglesi. Id. alla sommità del Colle dell'Eremita, radura. — S. Nicola: sull'altipiano nella macchia bassa.

19. ***B. fallax***, Hedw., 1782 (fr.).

S. Domino: margine sud-orientale del bosco; macchia a destra dello sbarco ed alla Cala degli Inglesi.

20. ***B. revoluta*** (Schrad.), Brid., 1801 (fr.).

S. Domino: terreno del bosco presso il faro.

21. ***B. convoluta***, Hedw., 1787 (fr.).

S. Domino: radura nel bosco sul versante sinistro del Colle dell'Eremita — Capperara: macchia bassa sul M. Grosso. — S. Nicola: Id. sull'altipiano.

22. ***Tortella squarrosa*** (Brid.), Limpr., 1890 (ster.).

S. Domino: terreno erboso sul margine sud-orientale del bosco; alla Cala degli Inglesi ed in una radura presso il Faro.

23. ***Tortula muralis*** (L.), Hedw., 1782 (fr.).

S. Nicola: sulle mura dei cortili interni del forte.

v. ***incana***, Schwaegr. (fr.).

S. Domino: sul terriccio lungo la strada dallo sbarco a Casa Baronessa.

v. ***obcordata***, Schpr. (fr.).

S. Nicola: sui massi calcarei al disotto del Castello, versante meridionale.

24. ***Fissidens bryoides*** (L.), Hedw., 1782 (fr.).

S. Domino: margine meridionale ed orientale del bosco nel terriccio fresco.

25. ***F. taxifolius*** (L.), Hedw., 1782 (ster.).

S. Domino: terriccio nudo ed ombreggiato nel bosco presso il Faro.

26. ***Funaria mediterranea***, Lindb., 1863 (fr.).

S. Domino: campi in riposo presso Casa Baronessa. Id. alla Cala degli Inglesi. Id. alla sommità del Colle dell'Eremita. Capperara: campi in riposo.

27. ***F. hygrometrica*** (L.), Sibth., 1894 (fr.).

In tutte le isole, sul terreno dovunque.

28. ***Bryum atropurpureum*** (haud. Wahl.), Br. Eur. (fr.).

S. Domino: nei campi in riposo presso la Casa Baronessa. Id. macchia bassa alla Cala degli Inglesi. Id. sommità del Colle dell'Eremita — Capperara: margine dei coltivati, e macchia bassa — S. Nicola: macchia bassa. Indicato da Bottini a S. Domino e S. Nicola.

v. ***dolioloides***, Solms-Laub (fr.).

S. Domino: col tipo

29. ***Br. murale***, Wils., 1879 (fr.).

S. Domino: margine del bosco presso Casa Baronessa.

30. ***Br. capillare*** (L.), 1771.

v. ***meridionale***, Schpr., 1856 (fr.).

Nelle tre isole maggiori sul terreno della macchia. Campi in riposo a S. Domino, dove è anche indicata dal Bottini.

b) Pleurocarpae.

31. ***Homalothecium sericeum*** (L.), Br. Eur. (ster.).

S. Domino: sulle roccie dolomitiche in un valloncello del fianco meridionale dell' isola — S. Nicola: roccie dolomitiche all'estremità meridionale presso il Cimitero: anche il Bottini l'indica per quest'isola.

32. ***Scleropodium illecebrum*** (Schwaegr), Br. Eur., 1853 (ster.).

Indicato da A. Bottini per S. Domino (l. c.).

v. ***decipiens***, Bottini, 1903 (ster.).

S. Domino: in un valloncello boscoso e riparato sul fianco meridionale dell'isola.

33. ***Eurhynchium circinatum*** (Brid.) Br. Eur., 1864 (fr.).

S. Domino: valloncello sul versante meridionale dell'isola. S. Nicola: roccie all'estremità meridionale. Il Bottini l'indica (sterile) per S. Domino.

34. ***Rhynchostegium megapolitanum*** (Brid.), Br. Eur., 1852.

v. ***meridionale***, Schpr. (fr.).

S. Domino: alla Cala degli Inglesi; sulla vetta del Colle dell'Eremita, sul margine della radura e qua e là nelle macchie. Capperara: macchie in vetta di M. Grosso.

35. ***Rhynchostegiella tenella*** (Dicks), Limpr., 1887 (fr.).

S. Domino: sulle roccie qua e là nel bosco — S. Nicola: presso il Cimitero.

Queste specie si associano non solo in dipendenza dei vari fattori fisici dell'ambiente, ma anche delle disposizioni che assume la vegetazione fanerogamica.

Ora, limitatamente a quanto può interessare la vegetazione briologica, debbono essere distinti nell'arcipelago cinque tipi di associazioni, corrispondenti a stazioni essenzialmente diverse:

1. **Stazione rupestre** a vegetazione necessariamente discontinua e non accompagnata da briofite che nelle posizioni più fresche e più protette. Notevoli sotto questo rapporto le roccie dolomitiche dell'estremo meridionale di S. Nicola (*Homatothecium sericeum*, *Eurhynchium circinatum*, *Rhynchostegiella tenella*) e più ancora quelle di un piccolo vallone che, dalla sommità di S. Domino, scende verso la grotta Menichello (oltre le specie citate *Scleropodium illecebrum* v. *decipiens*, *Rhynchostegium megapolitanum* v. *meridionale*, *Bryum capillare* v. *meridionale*, *Trichostomum flavovirens*, es. molto sviluppati). Sugli spuntoni rocciosi e sui massi sparsi nel bosco compare costantemente la *Rhynchostegiella tenella*: sulle pietre protette da cespugli nelle radure, s'incontrano frequentemente e più o meno abbondanti e sviluppate tutte le specie citate.

2. **Stazione del terreno scoperto** a vegetazione pure discontinua, ma in differente grado, onde un facies diverso pre-

sentano: *a*) Le marne arenose che formano parte del versante meridionale di S. Domino, o le marne calcari qua e là scoperte in vari punti dell'arcipelago, sulle quali troviamo intimamente commiste alla crosta fangosa superficiale e disseccata, *Pottia minutula, P. Starkeana, Didymodon luridus, Aloina ambigua, Crossidium squamigerum, Tortula muralis* v. *incana*; *b*) I terreni calpesti, nonchè gli spazi nudi dei campi in riposo, affettanti un certo carattere ruderale ed una minore secchezza, sui quali si possono raccogliere le varie specie di *Phascum, Pottia intermedia, Funaria mediterranea, F. hygrometrica, Bryum atropurpureum, Br. murale, Br. capillare* v. *meridionale.*

3. **Stazione dei pascoli e luoghi erbosi** sempre assai poco estesi ed intercalati a chiazze nella macchia, della quale rappresentano la massima degradazione specialmente nei punti esposti al vento. Poverissimi, come si comprende, di muschi, non offrono al raccoglitore pressochè altro che *Weisia viridula* typ. *Didymodon luridus, Trichostomum flavovirens*, assai disseminati.

4. **Stazione della macchia**. Presenta, per rapporto alla vegetazione briologica due facies: *a*) Macchia piuttosto elevata (*Cistus*) e densa, propria dei luoghi protetti ed a rivestimento erbaceo del terreno discontinuo con pochi muschi (*Trichostomum flavovirens, Bryum capillare* v. *meridionale*) molto rigogliosi nel loro sviluppo; *b*) Macchia bassa (*Rosmarinus, Pistacia, Olea*) prostrata dai forti e continui venti e con rivestimento erbaceo del suolo continuo ed a tipo assai più xerofilo. Qui la vegetazione tanto delle fanerogame quanto delle briofite, assume la maggior ricchezza di forme, con predominio di alcune famiglie caratteristiche: *Weisia viridula* typ. e var. *amblyodon*; *Didymodon luridus, Trichostomum crispulum, nitidum, flavovirens*; *Barbula unguiculata, fallax, revoluta, convoluta*; *Funaria hygrometrica*; *Bryum atropurpureum* var. *dolioloides, Br. capillare* v. *meridionale.*

5. **Stazione del Bosco**. Limitata a S. Domino e costituita essenzialmente, per quanto riguarda le essenze arboree, del *Pinus halepensis* Mill. Rispettivamente alle briofite, essa presenta tre facies distinti: *a*) Essenza arborea molto fitta, sottobosco nullo e mancanza quasi totale anche del rivestimento erbaceo del

terreno: muschi ridotti alla *Rhynchostegiella tenella* già accennata, diffusa sulle pietre sporgenti dal suolo ed alla base di qualche albero, a piccole colonie sparse di *Trichostomum flavovirens*, al *Fissidens taxifolius* (una sola località sul terreno nudo del bosco presso il faro) e probabilmente al *Trichostomum mutabile* accennato dal Bottini, in quanto questo è specie sciafila; *b*) Essenza arborea più rada, sottobosco più o meno ricco, vegetazione briologica molto prospera in taluni punti per la discreta illuminazione associata ad una protezione relativamente notevole del suolo contro l'evaporazione: le specie sono meno prospere, ma le stesse che nel facies seguente; *c*) Margini del bosco e delle radure con vegetazione erbacea ed arbustacea rigogliosa e *Weisia viridula* v. *amblyodon*, *Dicranella varia* typ. e v. *callistoma*, *Ceratodon chloropus*, *Trichostomum flavovirens, Barbula unguiculata*, *B. fallax*, *Tortella squarrosa*, *Fissidens bryoides*, *Bryum atropurpureum* v. *dolioloides*, *Br. murale*, *Bryum capillare* v. *meridionale*, *Rhynchostegium megapolitanum* v. *meridionale.* Stazioni caratteristiche di quest'ultimo tipo offrono i margini del bosco di S. Domino presso Casa Baronessa, alla vetta del Colle dell'Eremita ed alla Cala degli Inglesi. Tutte queste formazioni briologiche poi sono ben caratteristiche delle zone mediterranee basse ed asciutte e si ripetono, per esempio, nelle più aride isole dell'arcipelago Toscano, come si può vedere nel lavoro del Béguinot ad esso dedicato (1).

Volendo ora esaminare un po' più in dettaglio i fattori d'ambiente concorrenti a determinare la vegetazione briologica dell'arcipelago deve anzitutto venir discusso il valore della natura esclusivamente calcare del suolo. È conosciuta infatti la sensibilità di questi minuti vegetali alla presenza dei sali disciolti nell'acqua del terreno: ma è pure nota la facilità colla quale i muschi costituiscono colonie eterotopiche per riguardo alla natura del suolo, dato il piccolissimo spazio ed il tenue spessore che essi ne accaparrano. D'altra parte pei muschi, come pei vegetali superiori, piuttosto che la natura dei sali circolanti nel terreno, sembra interessare la concentrazione molecolare dei li-

---

(1) Béguinot A., *Contribuzione alla briologia dell'Arcipelago Toscano*, " Nuovo Giorn. Bot. Ital. ", N. S., vol. X, nn. 3, 4. Firenze, 1801, passim.

quidi dai quali il substrato è pervaso (1): testimonio lo scambio frequente delle specie più schiettamente alicole fra le varie stazioni da esse occupate — per citare un esempio notissimo, fra le creste dei muri e le carbonaie. — Tralasciando ogni apprezzamento sulle specie idrofile per le quali l'acqua stessa, indipendentemente dal substrato d'impianto, può operare un apporto continuo di materiale salino, utilizzato in circostanze ed in proporzioni che non ci sono ancora ben note, tutto induce a considerare i muschi come organismi gelicoli che possono in qualche caso assumere un adattamento alicolo anche molto spiccato (2), ma che, per lo più, appaiono indifferenti, bastando circostanze strettamente locali, magari limitate alla piccola porzione di substrato occupata dall'individuo, a favorirne lo sviluppo, neutralizzando in modo presso a poco completo l'azione dei sali liberi nelle soluzioni circolantivi in una proporzione che sta in rapporto col grado di assorbenza di quel dato punto del substrato, e colle oscillazioni che tale grado può presentare in funzione degli agenti climatici. Con ciò non si viene a dire che una particolare resistenza di fronte al grado di concentrazione molecolare dei liquidi circolanti nel substrato, non determini una selezione a favore di certe specie vegetali in genere o di muschi in particolare: la flora briologica delle Tremiti è spiegabile, nei suoi adattamenti edafici, soltanto quando si tenga presente questo principio. Infatti, scorrendo l'elenco sopra riferito, su 35 specie, un buon numero appartiene a quelle per le quali gli autori hanno riconosciuto una tolleranza pel calcare spesso molto pronunciata. Sono:

---

(1) Cfr. Gola G., *Studii sui rapporti tra la distribuzione delle piante e la costituzione fisico-chimica del suolo*, " Annali di Botanica ", vol. III. — Negri G., *Sulla flora briologica della penisola Sorrentina*, " Atti R. Acc. Sc. di Torino ", vol. XLI, 1906.

(2) Adattamento che in qualche caso può essere affatto apparente, perchè nella breve ed umida stagione in cui è possibile uno sviluppo rigoglioso di muschi su substrati calcari secchi e scoperti, naturali od artificiali, possono entrare in azione disposizioni secondarie, tali da ridurre pressochè a nulla l'azione del substrato stesso — dilavamento per le pioggie, apporto di pulviscolo organico e sua umificazione, insieme con quella dei residui della vegetazione briofitica dell'anno precedente. Del resto si deve ritenere che quando, per esempio, un muro rivestito di malta diventa atto ad una vegetazione briofitica, l'asportazione di quella parte di calcare, che non è stata combinata allo stato di silicato, è presso a che completa.

Phascum curvicollum, *Ph. rectum**, *Pottia starkeana**, *P. intermedia*, *Didymodon luridus*, *Trichostomum mutabile*, *Tr. crispulum**, *Aloina ambigua* *, *Crossidium squamigerum*, *Barbula fallax**, *Tortella squarrosa*, *Tortula muralis* var. *incana*, *Funaria mediterranea*, *Bryum atropurpureum*, *Br. murale*, *Eurynchium circinatum*, *Rhynchostegiella tenella*, per non citare che quelle sulle quali l'accordo è maggiore. Si osservi però che, se, data l'interpretazione dell'alicolismo come un fatto di tolleranza, non di elezione, non deve recar meraviglia che il più gran numero di queste, come già del resto il Béguinot osservava per un fatto analogo a proposito dell'isola di Giannutri, s'incontri in molte stazioni a suolo non calcare, alcune (contrassegnate con *) non sembrano sopportare la calcareità del substrato che in grazia alla sua natura argillaceo-marnosa; mercè la quale è reso possibile il prosperare alle Tremiti anche ad altre specie marnicole, ma poco tolleranti della calce, quali *Phascum cuspidatum*, *Dicranella varia*, *Pottia minutula*, *Fissidens bryoides* e *F. taxifolius* (quest'ultimo considerato dal Brizi come saprofita, ma raccolto da me a S. Domino stesso su terreno prettamente argilloso). E parimenti è più facile osservare sopra terreni marnosi-calcari che sopra qualsiasi altro substrato calcarifero la presenza di muschi prettamente gelicoli in mezzo ad una vegetazione fanerogamica alicola, perchè, come ho già accennato, bastando che la superficie del substrato sia per pochi millimetri decalcificata, il terreno può ospitare le anzidette specie gelicole di muschi molto prima che qualsiasi altra forma gelicola, il cui sistema assorbente penetri profondamente nel suolo. Per ben comprendere questo fatto, è necessario tener presente che la decalcificazione dell'argilla deve essere molto avanzata, perchè essa possa esplicare il suo potere assorbente (già tutti gli antichi edafisti (Contejean, p. es.) erano concordi nel ritenere il 4 $^0/_0$ di calcare nel suolo come limite massimo tollerato dalle specie calcifughe); e che bastano quantità minime di un elettrolito perchè un corpo colloidale perda tale sua natura. Ma, sempre limitatamente ai muschi, la decalcificazione è facilmente possibile date le condizioni edafiche delle Tremiti, nelle quali l'unica acqua che pervade il suolo è proveniente da precipi-

(1) Béguinot A.; *Br. Arc. tosc.*, l. c., pagg. 6-7.

tazione atmosferica, cosicchè, parte per dilavamento, parte per la accennata azione del materiale argilloso contenuto nel terreno, vengono a determinarsi aree, che possono essere anche molto circoscritte, ma che, non raggiunte da acque di infiltrazione, o di scorrimento che si sieno caricate di sali attraversando i terreni circonvicini, vengono in un tempo relativamente breve a trovarsi nelle condizioni volute per l'attecchimento delle specie in questione. Circostanze speciali vengono ad accrescere valore a queste condizioni. Delle tre specie più spiccatamente gelicole della flora tremitese, il *Phascum cuspidatum* cioè, il *Ceratodon chloropus* e lo *Scleropodium illecebrum*, infatti, il primo ha la affinità per suoli argillosi caratteristica della maggior parte delle specie del genere, e gli altri due crescono in stazioni assai protette ed ombrose, il secondo specialmente, che è noto, nella generalità della sua distribuzione, come specie a facile adattamento xerofilo.

I venti stessi dominanti alle Tremiti, così violenti e frequenti, attraversando un'ampia distesa di mare possono asportare, ma non importare pulviscolo calcare ed è quindi da escludersi anche questa via di possibile regressione da un substrato superficialmente decalcificato e quindi gelicolo ad uno alicolo (1). Invece è al vento che si deve se alle specie più intolleranti del calcare manca alle Tremiti il rifugio della stazione arboricola, il quale in genere permette l'intrusione di forme spiccatamente gelicole nelle florule dei distretti calcari. I tronchi d'albero infatti si presentano costantemente nudi, fatto del resto osservato da tempo per le stazioni scoperte della regione mediterranea ed attribuito dal Boulay (2) all'azione eolica, la quale, determinando una evaporazione rapidissima dei veli acquei diffusi sulle superficie compatte di corteccie o di roccie non protette, impedisce la formazione di straterelli di *humus* permanentemente umido e toglie così alle spore che vi pervengono un substrato di sviluppo molto acconcio. Ho ricordato questo fatto, oltrechè a titolo di caratteristica circostanza edafica locale, che determina

---

(1) Amann J., *Étude sur la flore bryologique du Valais*, " Bull. de la Murithienne ", fasc. XXVII-XXVIII, pag. 107, Sion, 1898-99.

(2) Boulay N., *Étude sur la distribution géographique des Mousses en France*, Paris, 1877, pag. 34.

da sola l'esclusione di intere famiglie (*Ortotricacee*, *Grimmiacee*) anche perchè esso mi dà occasione di dire che l'azione dei venti impetuosissimi ai quali la vegetazione è esposta, si manifesta al briologo anche con una serie di alterazioni morfologiche nelle specie delle quali si occupa, e le più spiccate delle quali sono presentate dalla *Tortella squarrosa* con adattamenti analoghi a quelli già citati, a suo proposito, dal Brizi (1).

La rapidissima evaporazione dell'acqua di precipitazione atmosferica è tanto più sensibile alle Tremiti in quanto esse non hanno nè sorgenti, nè stillicidi, nè tanto meno ruscelli o stagni permanenti. Gli abitanti raccolgono l'acqua piovana in apposite cisterne, ma spesso, durante i mesi estivi è indispensabile provvedere l'acqua sul continente. Quanto al clima, mancando osservazioni locali, è necessario limitarsi ad induzioni delle quali riferisco qui quanto può interessare la briogeografia (2). Nella regione mediterranea infatti i muschi, ed alle Tremiti in particolare, svolgono il loro ciclo vitale quasi esclusivamente nei mesi meno caldi e secchi dell'anno — da ottobre ad aprile — poi le specie annue scompaiono, le vivaci permangono soltanto grazie a quelle parti dei loro organi capaci di mantenersi sotto terra al riparo della stagione avversa. Ora è noto come il littorale Italiano dell'Adriatico si presenti mediamente assai più freddo di quello Dalmata, sia per la distribuzione delle aree di minima pressione durante il semestre invernale la quale determina per la costa Dalmata venti caldi ed umidi di S. E. e per l'Italiana venti freddi di terra di N. e di N. W.; sia perchè la costa Dalmata è protetta mediante la catena delle Alpi Dinariche, dall'invasione del clima invernale, assai freddo nelle regioni che le stanno a tergo. L'abbassamento della media annuale sul nostro littorale è quindi determinato dalla media invernale: infatti, mentre pressochè sino alle Tremiti risale l'isoterma di luglio 27° che è quella della Sicilia meridionale, per quanto

---

(1) Brizi U., *Studii sulla flora briologica del Lazio*, " Malpighia ", a. XI, pag. 376, Genova, 1897.

(2) Cfr. Hann J., *Handb. d. Klim.*, Bd. III, pagg. 54-60 e 92-94, Stuttgard, 1897. — De Marchi L. in Marinelli G., *La Terra*, vol. III, *L'Italia, Clima*, pag. 385 e segg. — Fischer T., *La penisola italiana*, trad. Torino, 1902, p. 343.

riguarda la temperatura invernale, le stesse Tremiti sono situate fra l'isoterma 6° e la 7°. Ora la isoterma 7° che discende lungo la costa italiana sino alla estremità meridionale delle Puglie, s'innalza al N. sino alle isole del Quarnero, poi si riabbassa lungo il littorale Dalmata, che segue tuttavia soltanto sino a Zara, internandosi, in corrispondenza di questo punto, nella penisola Balcanica. Per quanto riguarda il clima invernale quindi, Lissa che è l'isola più prossima alle Tremiti della quale si posseggano buone osservazioni climatologiche, in quanto sta fra l'isoterma 9° e la 10° del gennaio, è molto meno paragonabile ad esse di quanto non lo siano le isole del Quarnero, quella di Lussino, per esempio, della quale pure sono, per osservazioni prolungate, assai note le condizioni di clima. Riporto i dati di queste due stazioni:

	Latit.	Long.	Altit.	Ottobre	Nov.	Dic.	Genn.	Febbr.	Marzo
Lussin Piccolo	44.32	14.28	14	16.1	11.6	8.1	7.2	7.5	9.6
Lissa	43.5	16.14	24	18.6	14.0	10.7	9.8	9.9	11.1

Abbastanza paragonabili sono del resto anche i risultati delle osservazioni quinquennali 1891-1895 fatte nell'Osservatorio annesso al R. Istituto Tecnico e Nautico di Bari (1): gli strumenti in esso stanno a m. 28 s. l. m.

	Primavera	Estate	Autunno	Inverno
Temper. media	13.52	23.03	17.79	8.07
Media umid. relativa %	66.4	62.3	69.8	73.1
Pioggie e neve fusa in mm.	127.8	49.1	155.8	590.4

Nelle singole annate la media della temperatura invernale è stata rispettivamente 7.11; 9.49; 7.33; 8.33; 8.14, cifre che si avvicinano sensibilmente all'isoterma di 7° computata sulla sola temperatura di gennaio. Per quanto riguarda la precipitazione atmosferica, una cartina pubblicata dal Gherardelli nell'opera citata del Fischer mostra che sul littorale che fronteggia le Tremiti la quantità di acqua di precipitazione atmosferica oscilla fra i 650 e gli 800 mm.; quella del littorale Garganico pure prospiciente all'arcipelago è alquanto più bassa (fra 600 a 650 mm.), concordando abbastanza con quella annua di Bari

(1) Cfr. " Annuario del R. Istit. tecnico e nautico di Bari ", vol. X-XIV. Dati riportati anche da N. Massari, *Briologia Pugliese e Sarda*, " Nuovo Giorn. Bot. ital. ", N. S., vol. IV, 1897, pagg. 324-325.

che fu, nel periodo accennato, di mm. 590.4; 563 mm. secondo il Gherardelli, che, nella carta sopracitata, indica appunto Bari e le coste Garganiche colla medesima tinta. Invece sul Quarnero la quota della precipitazione atmosferica sale ad 800-1000 mm. Ho insistito sopra questi dettagli non perchè io creda che, in genere, nell'ambito della regione mediterranea la vegetazione briologica possa risentirsi, nel suo complesso, di oscillazioni climatiche non molto pronunciate e venga a disporsi strettamente a seconda della distribuzione delle medie di tali oscillazioni; e ciò tanto più in quanto non può essere mai abbastanza affermata la relatività del valore di una media climatica in fatto di distribuzione di vegetali; ma perchè è ancora tanto rudimentale la conoscenza nostra delle condizioni di ambiente in rapporto alle quali la vita di ogni singola specie può essere favorita o contrastata in confronto a quella delle specie concorrenti, che io ritengo non essere superfluo, in caso di confronti, il computo, quanto più esatto è possibile, delle analogie ecologiche. Così, per le nostre isole minori, condizioni analoghe a quelle delle Tremiti potrebbero dirsi offerte alla vegetazione briologica dell'isola di Giannutri, come le Tremiti situata fra il 42° ed il 43° parallelo, e di dimensioni (Km^2 2,3151) ed altezza (85 m.) analoghe. Anche Giannutri ha il suolo di costituzione calcarea, è rivestita dalla macchia mediterranea depressa per azione dei venti, priva di acque sorgive e di scorrimento superficiale; ma è soggetta ad una precipitazione atmosferica annua oscillante fra 400 e 500 mm. (Gherardelli, l. c.), e, per quanto riguarda la temperatura di gennaio, sta fra le isoterme del 9° e 10° (Hann, l. c.), e ciò, a parità di condizioni, è probabile abbia contribuito a determinare la ricchezza notevolmente minore della sua florula briologica, quale ci appare nello specchio che ne ha dato il Béguinot (1): 24 specie in confronto alle 35 delle Tremiti. Delle quali 24 specie, sia detto di passaggio, raccolte a Giannutri su suolo calcareo, 22 secondo l'Autore furono trovate su suolo siliceo in altre isole dell'Arcipelago e debbono quindi considerarsi come indifferenti alla natura del terreno nella regione stessa, anche se da altri autori ed in altri punti

(1) Béguinot A., l. cit., pagg. 288-293.

della regione Mediterranea hanno potuto essere considerate come calcicole.

Partendo da criteri analoghi si spiega la vegetazione briologica alquanto più ricca dell'isola di Lussino situata nell'Adriatico come le Tremiti e soggetta ad un clima invernale molto simile per quanto riguarda la temperatura ed un poco più umido, le precipitazioni atmosferiche essendovi alquanto superiori. I muschi raccolti a Lussino (1) sommano a 51, ma è da tener conto della superficie maggiore dell'isola, della sua superiore ricchezza di acqua e dell'elevazione raggiunta dal suo punto culminante (m. 588). Opinione confermata anche dallo spoglio dell'elenco dei muschi di Lussino, che il Tommasini dice di poter ritenere quasi completo, e che appare arricchito dalla presenza di specie, che nelle condizioni di ambiente prettamente littoraneo delle Tremiti e di Giannutri non si potrebbero mantenere: numerosi pleurocarpi (14 su 51 = 27.4 %; a Tremiti invece 14.3 %) e specie delle famiglie delle Mniacee, Ortotricacee e Grimmiacee.

Ma ritornando alla florula briologica tremitese, dato che la disseminazione delle Muscinee è possibile su larghissima scala, per le specie sporificanti, in quanto sta in rapporto coll'azione del vento, non deve recar meraviglia che, difficilmente nei singoli distretti minori di cui una regione fitogeografica si compone, specialmente quando essi sieno di costituzione recente, compaiano razze locali, espressione di modificazioni organiche che non durano spesso se non in quanto le forme si mantengono nelle stazioni che le hanno determinate. Ciò deporrebbe per una certa plasticità nei caratteri specifici dei muschi poco spiegabile, dato che i tipi specifici delle Briofite sono fissati da tempi molto antichi. Specie neogeniche, nel senso in cui questo termine vien proposto dal Briquet (2) per le fanerogame, non credo possano nel caso dei muschi venire ammesse; ed è tuttora molto impreciso e probabilmente disuguale il valore sistematico delle varietà ben definite, ma circoscritte ad una regione a

---

(1) Tommasini (de Muzio), *Flora dell'Isola di Lussino*, con agg. e corr. di C. Marchesetti, " Atti del Mus. Civ. di St. nat. di Trieste ", vol. IX, pp. 88-91 (estr.). Trieste, 1895.

(2) Briquet J., *Recherches sur la flore des montagnes de la Corse et ses origines* (" Ann. du Cons. du Jard. Bot. de Genève ", vol. V, p. 82-83, 1901).

caratteri ecologici molto particolari, quali sarebbero, ad esempio, per la regione mediterranea, l'*Eurhynchium striatum* v. *meridionale*, il *Rhynchostegium megapolitanum* v. *meridionale*, e molte altre simili.

Ora, questa particolare rigidità che i caratteri specifici presentano nei muschi in confronto a quanto avviene nelle fanerogame, se per una parte va considerata tenendo conto della maggiore facilità colla quale essi trovano, anche su di una estensione molto limitata, le condizioni di stazione loro indispensabili, giustifica d'altronde la maggiore probabilità consentita alle previsioni che possono farsi sulla flora briologica di una regione di cui si conoscano le possibili stazioni vegetali; e, fatta astrazione per qualche caso eccezionalissimo di specie disgiunte, quali ne sono state anche recentemente osservate nelle piccole isole mediterranee (1), rende naturale che in un piccolo distretto botanico quale è quello delle Tremiti, così caratteristico per le sue condizioni ambientali, si sia operata una vera selezione a favore di quelle fra le specie più diffuse nella regione botanica a cui esso appartiene, che sono fornite dagli adattamenti del caso. Nei muschi delle Tremiti, infatti, noi ci troviamo sempre di fronte ad un adattamento xerofito, esplicato secondo l'uno o l'altro dei tipi seguenti (2):

1) Specie efemere svolgenti la loro vita nel periodo più umido del semestre invernale. Esse presentano una tessitura cellulare molto delicata e dimensioni molto piccole. Ma sono protette dalla rapidità colla quale possono compiere il loro ciclo vitale, in una stagione in cui l'umidità non fa loro difetto. Sono, nella florula Tremitese, le specie dei generi *Phascum*, *Pottia*, la *Dicranella varia* ed il *Fissidens bryoides*.

2) Specie di maggior durata ed a foglie ancora composte di elementi grandi, delicati e poco clorofillosi. Tali foglie tuttavia stanno raccolte su caulicini molto accorciati più o meno

(1) Bottini A., l. cit., pp. 355, 360, 387.

(2) Il Podpera, *Einige Bermerk. z. geogr. Verbr. der Laubm. im Mittel Europa* (“ Engl. Bot. Jahrb. für Syst. Pflanzgesch. und Pflanzengeogr. „, Bd. XXXI, pag. 587. Leipzig, 1902), ha proposto una classificazione analoga degli adattamenti termofili dei muschi dell'Europa centrale, della quale conservo qui alcuni tratti.

coperti dal terriccio od almeno appressati al suolo e ripiegate a formare una specie di gemma. Specie del genere *Funaria*.

3) Specie costituenti cespuglietti densi, frammisti a terriccio con foglie ancora composte di elementi piuttosto grandi e lassi, ma raccolte specialmente alla sommità dei ramuscoli e capaci di torcersi durante la siccità onde ridurre al minimo la superficie evaporante. Specie del genere *Bryum*.

4) Specie costituenti cespuglietti densi, frammisti a terriccio con foglie ad elementi ancora larghi, ma che hanno perduto tutta la clorofilla che viene a raccogliersi in un complesso di cellule stipate ricoprenti la superficie interna della porzione superiore della nervatura fogliare. Le foglie inoltre possono essere terminate da lunghi peli ialini che nel loro complesso proteggono l'intera colonia dagli effetti di una insolazione eccessiva: hanno margini arrotolati ed apice talora ripiegato a cappuccio: o stanno raccolte alla sommità dei caulicini o dei ramuli, costituendo un complesso gemmiforme. Genere *Aloina* e *Crossidium*.

5) Specie raccolte in densi cespugli, con foglie più o meno stipate, contorte o crispate, con peli terminali, margini arrotolati, apice ricurvo a cappuccio, e con tessuto cellulare (nella porzione non aderente al fusticino, decorrente o guainante) composto di elementi stretti ed allungati, più o meno riccamente papillosi. Generi *Weisia*, *Didymodon*, *Trichostomum*, *Tortella*, *Barbula* e *Tortula*.

6) Specie pleurocarpe con foglie fitte, rigide, di color giallo splendente nelle stazioni esposte ad una forte insolazione, talora embricate su rami amentiformi o cirrati (*Scleropodium illecebrum*, *Eurhynchium circinatum*), talaltra solcate da profonde pieghe (*Homalothecium sericeum*). I pochi pleurocarpi delle Tremiti rivestono tutti un abito xerofilo.

Non meno dimostrative del resto sono le esclusioni che si riscontrano nella florula briologica in studio, concordemente a quanto avviene nelle stazioni mediterranee analoghe. Come ho già accennato, sono affatto assenti le *Grimmiacee* ed *Ortotricacee*, sia perchè l'azione del vento le caccia anche dalle più protette fra le stazioni che potrebbero occupare, sia perchè qualcuna delle loro specie adattate alle condizioni di maggiore xerofilia, appartiene alle forme più esclusivamente intolleranti del calcare (*Racomitrium*). Similmente, o perchè perennanti, o perchè sciafile ed igrofile, o perchè calcifughe, mancano le *Politricacee*.

Ho accennato più addietro alla recentissima pubblicazione del Cecconi sulla zoogeografia delle Tremiti, lavoro interessante anche in quanto alcune delle sue conclusioni generali coincidono coi risultati dello studio dei muschi. Anche per rispetto ad essi le Tremiti, per le loro condizioni particolari, sono molto povere di specie e la maggior parte di esse sono diffuse e comuni a tutta l'Europa Mediterranea. La posizione geografica dell'Arcipelago e l'estrema facilità di disseminazione dei muschi per via aerea escludono la opportunità di indagini quali furono fatte dal Cecconi pazientemente, per ogni specie di animali, onde stabilire la possibilità più o meno grande della loro diffusione per via terrestre e portare un contributo di documenti pro o contro l'ipotesi dell'Adria, ipotesi che non è in nessun modo suscettibile di venir discussa in base a documenti briogeografici (1). L'unico fatto che può essere affermato, non ostante la nostra conoscenza affatto incompleta della flora briologica pugliese (2), è la grande analogia di quest'ultima con quella delle Tremiti. Delle 34 specie raccolte nell'Arcipelago 9 sole infatti non sono state raccolte in Puglia, e fra queste stanno le 4 specie del genere *Phascum*, che è inammissibile non debbano trovarvisi almeno in parte quando sieno state praticate ricerche più minute ed in stagione più opportuna. Del resto di tutte le specie tremitesi il solo *Ceratodon chloropus* può vantare una distribuzione sporadica. Unico rappresentante fra noi di una sezione (Cheilotela) che comprende due sole altre specie, antartiche entrambe, ed estremamente disgiunte, esso è, allo stato delle nostre attuali conoscenze, una forma mediterranea occidentale, dioica, sporadicamente fertile, raccolta in due stazioni atlantiche, una algerina, parecchie della Provenza; in Italia, sul continente a Serravezza (Toscana), M. Argentaro, Roma, Caserta, Otranto e nelle isole in Corsica, Sardegna, Capraia, Pianosa, Capri e Tremiti. Con Otranto citata e due località Istriane, scoperte da Tommasini, abbiamo quindi tre punti disgiunti dell'Adriatico nei quali si sono fissate spore di *Ceratodon*, giuntevi, secondo ogni

---

(1) Cecconi G., l. c., pp. 52, 53 (estr.).

(2) Bottini A., *Note di briologia italiana*, IV. *Puglie*, " Nuovo Giorn. Bot. Ital. ", N. S., I, pp. 255-258, 1894. — Massari M., *Contribuzione alla briologia pugliese e sarda*. I. *Puglie*, " Nuovo Giorn. Bot. Ital. ", N. S., IV, pp. 317, 352. 1897.

probabilità, per via eolica. Si tratta probabilmente di una forma assai antica, mantenutasi in qualche punto di antica emersione e diffusasi poi anche a terre di più recente emersione, quale l'Arcipelago nostro e molte altre stazioni che senza dubbio si scopriranno ancora, grazie alla sua adattabilità abbastanza facile. Ciò è tanto più probabile in quanto la pianta è stata incontrata molte volte fertile non ostante la sua dioicità.

La facile fertilità è del resto caratteristica dei muschi Tremitesi, dei quali sporifica l'80 %. Il Boulay (1) a questo proposito ha giudiziosamente osservato che la fertilità relativa è un eccellente carattere per giudicare se una specie di musco sia nelle sue naturali condizioni di esistenza, tutte le volte che si tratta di muschi monoici o sinoici, ma che perde molto del suo valore quando lo si voglia applicare alle specie dioiche. Le 35 specie della flora briologica Tremitese si ripartiscono in 16 monoiche e 19 dioiche. Delle prime, 15 sono fertili ed una sola sterile, il *Fissidens taxifolius*, specie igrofila, sciafila, considerata da alcuni autori come saprofita, da altri come propria dei terreni marnosi contenenti un po' di calcare, ed in ogni caso poco adattabile alle condizioni ecologiche delle Tremiti nelle quali non l'ho raccolta che in una sola località in pochissimi esemplari. Si tratta in ogni modo di forma comunissima, già osservata sporificata in Puglia, d'onde possono essere giunte le spore che diedero origine ai pochi esemplari raccolti. Anche per le specie dioiche sterili, del resto, l'immigrazione attuale è la più facilmente ammissibile. Esse sono infatti i *Trichostomum crispulum*, *mutabile* e *nitidum*, la *Tortella squarrosa*, l'*Homalothecium sericeum* e lo *Scleropodium illecebrum*. Di questi l'*Homalothecium* sporifica dovunque colla massima facilità; è stato raccolto in tale stato al Gargano; secondo ogni probabilità se ne troveranno gli sporogoni anche nelle Tremiti quando si cerchino nell'inverno, stagione di sporificazione delle specie nella zona littoranea, tanto più che esso, quantunque si presenti facilmente arboricolo, è affatto indifferente alla natura del substrato. A S. Domino e S. Nicola cresce su roccie dolomitiche. Pel *Trichostomum mutabile*, forma sciafila e mesofita, già indicata in Puglia, quivi pure però sterile, si può ripetere quanto è stato

(1) Boulay N., l. cit., p. 9.

detto pel *Fissidens taxifolius*. Non ho, per parte mia, raccolta questa specie, determinata dal Bottini nella collezione fatta dal Gurgo. Il *Trichostomum crispulum*, il *Tr. nitidum*, la *Tortella squarrosa* e lo *Scleropodium illecebrum* si trovano poi nelle stesse condizioni di specie che, non raccolte sinora sporificate in Puglia, dove, ad eccezione della seconda, risultano come comuni, sono però largamente diffuse a tutte le regioni mediterranee e vi sporificano. E non trattandosi di una stazione sui confini di distribuzione delle loro spore, non è il caso di parlare di disgiunzione nell'area e di specie conservate allo stato sterile nelle stazioni, da un tempo relativamente antico in cui poteva esistere una continuità col continente vicino e verificarsi quindi una diffusione per via terrestre. Indipendentemente dal fatto che ricerche più accurate, condotte nell'epoca più propizia della sporificazione, che per esempio nel *Trichostomum crispulum* e nello *Scleropodium* è molto precoce, permetteranno probabilmente di raccogliere le piante fertili in Puglia e alle Tremiti stesse.

In accordo colle considerazioni fatte per le specie sterili, sta il significato dell'alta proporzione di specie fertili a testimoniare la facilità di una immigrazione attuale e continua. Per quanto riguarda i muschi, un tal fatto modifica la previsione di uno scadimento progressivo della florula briologica Tremitese, che potrebbe avvenire, analogamente a quanto, secondo il Cecconi, si osserva relativamente alla fauna, pel ridursi progressivo e sensibile della superficie dell'Arcipelago e nel caso nostro anche pel sostituirsi delle culture alle associazioni naturali. È da augurarsi perciò che una stazione così caratteristica venga ancora ed in differenti stagioni visitata da briologi, poichè l'elenco delle specie raccoltevi, non ostante la minuzia delle ricerche, è lungi dal rappresentare nella sua completezza la serie delle forme mediterranee universalmente diffuse e ad adattamento strettamente xerofilo ed alicolo: solo mediante una indagine proseguita per un tempo assai lungo sarà possibile l'accertamento delle eventuali ed in ogni caso interessanti esclusioni fra le entità specifiche, le spore delle quali hanno tutta la probabilità di raggiungere per via eolica le isole Tremiti.

Torino. R. Istituto Botanico. Giugno 1908.

Sul valore sistematico di alcune specie del genere Elaphomyces del gruppo dell'E. anthracinus Vitt.

Nota della Dottª EFISIA FONTANA.

(Con una tavola).

Tra le specie di Elafomiceti a peridio esterno di consistenza carboniosa e di struttura pseudoparenchimatica descritte dal Vittadini, due in special modo, l'*E. anthracinus* (*Mon. Tub.*, 1831) e l'*E. pyriformis* (*Mon. Lycop.*, 1842), sono notevoli, non tanto per la semplicità della loro struttura, quanto per la concordanza dei loro caratteri la quale ingenera facile confusione.

Allo scopo di chiarire i dubbi e le incertezze che regnano a questo riguardo il Ch^mo^ Prof. Mattirolo mi suggerì il presente studio, dal quale io tolgo pure l'occasione per accennare all'*E. septatus*, specie molto affine alle precedenti, pochissimo conosciuta e non più ritrovata dopo Vittadini, che per primo la descrisse.

Prima di procedere all'esame dell'*E. anthracinus* e dell'*E. pyriformis* sarà utile riassumere quanto è stato fatto finora.

Vittadini, descrivendo l'*E. pyriformis* fa notare la sua affinità coll'*anthracinus*: " Cum sequente (*E. anthracinus*) unice " confondendus, distinguitur statura longe minore, uteri forma. " peridii tenuitate, odore debili et ab illo *E. anthracini* plane " diverso. Sporidia etiam aliquantulum maiora „. I Tulasne, nei *Fungi Hypogaei*, 1862, pag. 106-107, Tab. III e XIX, ripetono pel *pyriformis* la diagnosi Vittadiniana con pochissime modificazioni e coll'aggiunta delle località francesi; per l'*E. anthracinus* se ne scostano invece in qualche punto come: nella dimensione delle spore uguale a quella data per l'*anthracinus*, nell'odore: " Odor fungi maturi debilis nobis visus est, illi raphani a " cl. Vittadini aequiparatur „, nel micelio: " sous ce dernier " rapport, il est voisin de l'*E. pyriformis*, que sa forme parti- " culière, jointe à d'autres caractères, suffiront *presque toujours* " à faire reconnaître „.

Saccardo (1) e Fischer (2) poco aggiunsero alle diagnosi degli Autori sopra ricordati; Hesse (*Deut. Hyp.*, 1891) non ricorda tra gli ipogei della Germania nè il *pyriformis*, nè *l'anthracinus*, ma descrive invece una nuova specie, l'*E. plumbeus*, che, dalla diagnosi e dalle figure, parrebbe presentare molti caratteri di affinità colle due specie che sto studiando.

Risulta dunque: 1° che i caratteri distintivi secondo Vittadini dovrebbero essere: la forma diversa, la grossezza del corpo fruttifero, lo spessore del peridio, il diametro delle spore, l'odore; 2° che i Tulasne esclusero una parte di questi caratteri come la diversità del diametro delle spore e dell'intensità dell'odore, ecc.; 3° che molta incertezza regna intorno al confine di questi caratteri, tanto da rendere dubbio il loro valore nell'esatta determinazione degli esemplari delle due specie, specialmente se raccolti in differente grado di sviluppo.

Procedendo allo studio delle parti del corpo fruttifero io esaminai: 1° la forma; 2° la grossezza; 3° la crosta; 4° il peridio, propriamente detto, nei suoi due strati; 5° la gleba e 6° l'odore.

Forma. — Secondo Vittadini è nell'*anthracinus* " uterus " interdum compressus, submarginatus ac supra profunde exca- " vatus vel umbilicatus „ e nel *pyriformis* " uterus superne in " mucronem plus minusve elavatum productus, formam pyri vel " lagenae ut plurimum referens „. Secondo Tulasne nell'*anthra-* " *cinus* " globosus est et regularis aut frequenter depressus et " alte in medio, more Leveillei, umbilicatus „ nel *pyriformis* " in mucronem crassi obtusissimi sortem ut plurimum productus " quapropter obovatus seu pyriformis „.

Su questo carattere, appunto perchè considerato come di maggior rilievo dagli Autori, io volli fermare in special modo la mia attenzione.

La grande quantità di esemplari delle varie specie del genere *Elaphomyces* che io potei osservare, esaminando la ricca

(1) Saccardo, *Sylloge fungorum*, 1889, vol. VIII, pag. 867.

(2) Fischer, *Rab. Krypt. Fl.*, pag. 90, 1897, aggiunge: " Aus Vittadini's und Tulasne's Beschreibungen geht hervor dass E. pyriformis durch die Form des Fruchtkörpers von beiden vorausgehenden Arten (*E. anthracinus*, *E. septatus*) verschieden ist „.

collezione Mattirolo, mi induce ad ammettere un fatto estensibile a tutto il genere: che in tutte le specie si trovano sempre frammiste, in numero maggiore o minore, a forme normali forme irregolari.

Nei due *Elaphomyces* in questione il corpo fruttifero è difficilmente di forma regolare, globosa, od ovale; ma nell'*anthracinus* sarebbe per lo più depresso ed ombelicato; nel *pyriformis* allungato e mucronato.

Io ho osservato, e la tavola annessa me ne fa fede, che in numerosi esemplari raccolti dal Prof. Mattirolo presso Rodero (1) contemporaneamente, in uno stesso luogo, in egual grado di sviluppo e che per l'odore ed i caratteri del peridio e della gleba dovrebbero classificarsi per *E. anthracinus*, si notano poche forme regolari, altre depresse ed ombelicate, altre in fine piriformi; in altri individui raccolti sui monti dell'Appennino dal Dott. Macchi Claudio di Moncalieri, medico a Palazzuolo di Romagna, nelle stesse condizioni dei precedenti, ma in uno stadio più avanzato di maturazione, e presentanti caratteri quali quelli descritti dal Vittadini pel *pyriformis*, si notano pure, frammiste a poche forme regolari, individui depressi ed ombelicati ed individui piriformi.

Lo stesso fatto ho avuto agio di osservare in una colonia di una trentina di individui raccolti da me stessa sotto ad una quercia presso Giaveno (2); e ciò pure, in grado minore, ho notato negli autoptici Vittadiniani di *anthracinus* della collezione di Brera e della collezione Mattirolo.

Ora, sia nell'uno che nell'altro caso, testè ricordati, non si poteva parlare di individui appartenenti a specie diverse, facendo essi parte di una stessa colonia e presentando gli identici caratteri, eccezione fatta della forma.

È da notare che in queste due specie i cambiamenti di forma non implicano modificazioni nella struttura, mentre in altri Elafomiceti (*cyanosporus*, *Persoonii*, *foetidus*) la deformazione del corpo fruttifero genera pure una modificazione nella struttura peridiale, costituendo in tal caso un importante carattere diagnostico.

---

(1) Provincia di Como (Lombardia).

(2) Provincia di Torino (Piemonte).

Si può quindi concludere che il carattere della forma non ha, per le specie in questione, valore diagnostico *indiscutibile*, dovendosi le modificazioni che in essa si osservano attribuire ad una irregolarità affatto esterna e del resto comune a tutte le altre specie del genere.

Grossezza. — Secondo Vittadini è nell'*anthracinus* " nucis " avellanae vel juglandis „ e nel *pyriformis* " pisi vel nucis " avellanae „; secondo Tulasne nel primo " fungus crassitudine " *E. maculatum* aequat, plerumque nucis juglandis minoris ma- " gnitudine „ e nel secondo " mediocris „.

Io ho trovato, sia nell'una che nell'altra forma individui molto piccoli, raggiungenti appena la grossezza di un pisello, altri maggiori fino a raggiungere la grossezza di una piccola noce.

Nell'*E. pyriformis* gli individui che hanno forma molto irregolare sono in generale assai piccoli e presentano quasi sempre un anormale sviluppo del peridio e della gleba.

Data la grande variabilità che si osserva sempre in tutte le specie del genere nella grossezza del corpo fruttifero e la poca diversità ammessa, per le due sopra accennate, dagli Autori, posso concludere che questo carattere non deve avere notevole valore per la loro sistemazione.

Crosta. — Secondo Vittadini è nell'*anthracinus* " floccoso- " terrosa, crassa, intus venulis reticulatis medio sulcatis coloris " fusco-olivacei elegantissime percursa „ e nel *pyriformis* " tenue- " floccoso-terrosa „; Tulasne nel primo " micelio e filis spissis " implicatis fibroso-tomentoso, ricco, semper brunneo obscuro " instructus et in terra parce diffuso „ e pel *pyriformis* ripete ciò che scrisse Vittadini.

Gli esemplari, sia dell'uno che dell'altro, se maturi, sono per lo più liberi da crosta, se giovani, presentano una crosta poco aderente al peridio, in generale non molto sviluppata formata da scarsi fili miceliari bruni, frammisti a terriccio e radichette.

Anche riguardo alla crosta si può concludere che non si notano tra le due specie differenze sensibili, questo è pure quanto accennano i Tulasne, come più sopra ho fatto osservare.

Peridio. — Il peridio presenta, tanto nell'*anthracinus*, che nel *pyriformis*, due strati ben distinti, sia per colore, che per consistenza e struttura.

L'esterno (*cortex* Vitt.) è pseudoparenchimatico, di consistenza quasi carbonacea, fragile, di color bruno-nero, dello spessore medio di 1/3 di mm., quasi liscio od appena minutamente verrucoso. In sezione presenta le ife raggianti poco visibili per la loro colorazione bruna, ma che si possono mettere in evidenza trattandole a lungo con acqua di Javelle.

Anche gli autori concordano nell'ammettere questo strato pressochè uguale nelle due specie (1).

Lo strato interno (*peridium* o *caro* Vitt.) per il suo diverso spessore è da Vittadini, Tulasne, ecc., ritenuto ottimo carattere diagnostico.

Vittadini nell'*anthracinus* " peridium crassum, subalbidum, " similare molle humidum, zonula obscuriore circa medio notatum „ e nel *pyriformis* " tenue, intus similare, molle humidum „ Tulasne nel primo " peridio crasso subalbido „ mentre pel secondo si riferisce a Vittadini.

Lo spessore di questo strato, come è noto, e come del resto ho avuto già occasione di far osservare per altre specie (2), non deve ritenersi come carattere importante nelle diagnosi, perchè soggetto a troppe modificazioni, durante lo sviluppo del corpo fruttifero.

Numerose osservazioni fatte su individui delle due specie, in egual grado di maturazione, mi hanno permesso di studiare accuratamente le modificazioni di struttura e spessore che questo strato subisce colla maturazione e di dedurne che, a parità di sviluppo, non si riscontra alcuna differenza sostanziale fra la sua struttura e la sua dimensione nei due *Elaphomyces* di cui mi occupo.

A conferma di ciò sta la figura data dai Tulasne, Tav. III, *Fungi Hypogaei*, rappresentante la sezione del peridio dell'*E. pyriformis* con lo strato interno molto sviluppato. Del resto è per-

---

(1) Vittadini nell'*anthracinus* " cortex durus, crassus, fragilis, nudo oculo inspectus levis, vitro autem auctus irregulariter verrucosus „ e nel *pyriformis* " cortex durus, levis, sub lente hinc inde minutissime verrucosus „ e Tulasne nel primo " cortex nigro-brunneo, immaculato, sublevi, rigido, crustaceo „ e nel secondo " levi, rigido, nigro-brunneo, immaculato „.

(2) E. Fontana, *Ricerche intorno ad alcune specie del genere* Elaphomyces *Nees*. " Memoria della Reale Accademia delle Scienze di Torino „, 1907-08, serie II, tom. LIX.

fettamente spiegabile l'accordo degli Autori nell'ammettere questo strato sottile; essi, come ho potuto rilevare dagli autoptici, ebbero sottomano individui assai maturi in cui lo strato interno era molto ridotto.

Negli esemplari giovani di ambedue le forme lo strato interno è costituito da un intreccio poco regolare di fasci di ife, decorrenti quasi concentrici alla gleba nella parte superiore e tendenti a divenire normali alla stessa in basso. Le ife sono diafane, sottili, rigonfie, contenenti grassi ed albuminoidi che facilmente si mettono in evidenza con Sudan III o iodio. Il suo spessore è di mm. 1 $^{1}/_{2}$ a 2, ma appare assai minore negli esemplari secchi, onde conviene inumidirli per averne una misura esatta; esso si mantiene pressochè costante o aumenta di poco durante la maturazione del corpo fruttifero; raggiunta questa, lo strato si riduce a poco a poco in spessore, imbrunisce verso la gleba dando origine a quella " zonula obscurior „ notata da Vittadini. Se si osserva una sezione fatta in questo punto, si nota che l'intreccio dei fasci di ife è quasi disaggregato, mentre queste si presentano come nastriformi, vuote, a parete imbrunita e non si colorano più nè con Sudan, nè con iodio. In seguito lo strato interno va sempre più riducendosi in spessore, imbrunisce quasi totalmente restando aderente al peridio esterno, o se ne stacca avvolgendo la gleba e finisce poi per scomparire quasi del tutto, mentre i suoi residui si mescolano alla massa pulverulenta delle spore. In quest'ultimo stadio il peridio diventa molto fragile, ad una minima pressione si rompe, mentre le spore si frammischiano al terreno circostante.

Le osservazioni fatte mi portano a concludere che, nè lo spessore del peridio, nè la struttura dello stesso, possono avere valore come caratteri distintivi fra le due forme di cui sto occupandomi.

Gleba. — I sepimenti ed il capillizio, come ho già accennato a proposito degli *Elaphomyces granulatus* e *variegatus* (1), presentano caratteri poco costanti per le profonde modificazioni a cui vanno soggetti durante la maturazione e perchè scompaiono del tutto negli individui ipermaturi; importanti invece sono i caratteri della forma, struttura e diametro delle spore.

---

(1) E. Fontana, Loc. cit., pag. 106.

Io non ho trovato per le due specie differenze sensibili, tanto per il capillizio ed i sepimenti, quanto per le spore.

La gleba negli individui giovani è cotonosa e grigiastra, maturando imbrunisce e si riduce in una massa pulverulenta bruno-nera attraversata da scarsi sepimenti ed abbondante capillizio; negli esemplari ipermaturi sepimenti e capillizio scompaiono.

Gli aschi sono incolori sferici con 4 od 8 spore. Le spore mature sono bruno-nere, opache, sferiche, a superficie quasi liscia, del diametro di 17-21 mm. (1); con acqua di Javelle si scioglie lentissimamente la parte più esterna del perinio e si mettono in evidenza i minutissimi bastoncini che ne ornano la superficie, di modo che questa appare come punteggiata.

Secondo Vittadini e Tulasne il colore delle spore mature è per l'*anthracinus* bruno-nero e bruno-rossastro nel *pyriformis*.

Io ho osservato che negli individui appena maturi la colorazione è bruno-nera, negli ipermaturi, in cui la massa delle spore resta coinvolta dai residui del peridio e frammista a quelli del capillizio e dei sepimenti, diventa bruno-rossastra.

Concludendo, anche per la gleba non esistono fra le due forme predette caratteri differenziali.

Odore. — Circa l'intensità dell'odore non sono gli autori concordi; infatti Vittadini nella *Mon. Tub.* dice l'odore dell'*anthracinus* " debilis ", più tardi nella *Mon. Lycop.* dice dello stesso " veluti raphani " e del *pyriformis* " subnullus "; Tulasne dell'*anthracinus* " odor fungi maturi debilis nobis visus est ".

Negli ipogei in genere, i caratteri riguardanti l'odore possono riescire di un certo interesse solo se utilizzati come complemento ad altri caratteri più salienti, il loro valore esclusivo è però sempre molto limitato.

È noto infatti come negli ipogei l'odore, pur così caratteristico, sia soggetto a variazioni estesissime col progredire della

---

(1) Vittadini nell'*anthracinus* dice: " Sporidia rotunda, nitida, mediae magnitudinis " e nel *pyriformis* parlando delle sue affinità coll'*anthracinus* " sporidia etiam aliquantulum maiora ". I Tulasne danno invece il diametro delle spore uguale per le due specie, cioè: nell'*anthracinus* " Sporae sphaericae, maturae nigro-brunneae, opacae, leves, plerumque 0,02 mm. crassae "; nel *pyriformis*. " Ses spores ont en diamètre $^{2}/_{100}$ mm. ou un peu moins ".

maturazione e dell'età del corpo fruttifero. Debole prima, raggiunge la sua massima esplicazione durante la perfetta maturità delle spore.

Per notare le piccole differenze di odore date da Vittadini occorrerebbero esemplari freschi, ben maturi; ora gli esemplari da me osservati erano per la maggior parte essiccati o conservati in alcool.

Negli esemplari da me raccolti e dei quali ho già fatto cenno, l'odore prima quasi nullo, divenne più sensibile coll'essiccazione.

Io ho notato che negli esemplari giovani, tanto di *anthracinus* che di *pyriformis*, l'odore è quasi nullo o molto debole, nei maturi si accentua e diventa come dice Vittadini quasi " veluti raphani "; nei vecchi esemplari, in cui lo strato interno è quasi del tutto disaggregato, si frammischia come ad una specie di odore di muffa; negli ipermaturi essiccati e ridotti al solo strato esterno in parte rotto ed alle spore frammiste a terriccio scompare quasi del tutto.

Da quanto ho sopra osservato concludo che non risultano, per individui ugualmente maturi, quelle differenze di odore notate da Vittadini nelle due specie.

L'esame fatto e le osservazioni sopra riportate dimostrano come non siano sicuri e costanti i caratteri distintivi dati da Vittadini e dagli autori per l'*E. anthracinus* e l'*E. pyriformis*; venendo adunque a mancare le basi su cui è stata finora fondata la loro sistemazione e non risultando altri caratteri che li possano meglio differenziare, io sarei d'avviso di ammettere per essi l'esistenza di una sola specie a cui spetta, come denominazione *princeps*, quella data prima da Vittadini di *E. anthracinus.*

Nell'ambito di tale specie si osservano spesso delle variazioni che possono venire indicate come *formae* ed a cui sono riferibili quegli individui a corpo bitorzoluto ed allungato a forma di pera, che corrispondono all'*E. pyriformis* Vitt.

La sinonimia e la diagnosi sarebbero le seguenti:

E. anthracinus = *E. anthracinus* Vittadini, *Mon. Tub.* e *Mon. Lycop.*, p. p.
= „ „ „ Tulasne, *Fungi Hypogaei*, p. p.
= „ „ „ auct. plur., p. p.
= *E. pyriformis* Vittadini, *Mon. Lycop.*
= „ „ „ Tulasne, *Fungi Hypog.*
= „ „ „ auct. plur.

Esemplari studiati.

E. anthracinus Vitt.

Vittadini, ex collect. Vitt. Mattirolo et ex coll. Brera.
Spegazzini, Conegliano, Bosco Giustinian 1878. — “ In terra calcareo sabulosa detritis quercinis immixta subsuperficialis in sylvula comitis Giustiniani prope Conegliano, vere 1879 rarius „ (in herb. Sacc.).
O. Mattirolo, Rodero (Como).
Ménier, Forêt du Cellier RR., Loire Inférieure, 1894.
Mattirolo, Valle d'Aposa, Bologna.
E. Fontana. Boschi di S. Luigi presso Giaveno ai piedi di una quercia, 3 luglio 1908.

E. pyriformis Vitt.

Vittadini (ex coll. aut. Vitt. Mattirolo).
Hollos L., In quercetis Kecskemet 1899, sept. 27 (coll. Matt.).
O. Mattirolo, Rodero (Como), ottobre 1900.
Dott. Macchi Claudio, Palazzuolo (Appennino), giugno 1898. Raccolti sotto a una quercia vicino ad un ginepro nel Campatello Acquadalto (coll. Matt.).
Bresadola, Trento, 17 marzo e maggio 1898 in Quercetis (coll. Matt.).
Gola, Castiglione (Ossola), boschi 1903 (coll. Matt.).
Id., Val Anzasca (coll. Matt.).

“ Odor varians secundum aetate, subnullus, veluti raphani.
“ Fungus magnitudini pisi vel nucis juglandis minoris. Uterus

" rare globosus et regularis, plerumque depressus et umbilicatus,
" vel superne in mucronem plus minusve elevatum productum.
" Crusta flocсoso-terrosa e micelio brunneo et in terra parce
" diffuso instructa. Cortex durus, fragilis, atro-fuligineus et car-
" bonaceus, nunc admodum levis, nunc minutissime verrucosus,
" pseudoparenchymaticus, $^1/_2$ mm. crassus.

" Stratum corticis suppositum, in prima aetate 1 $^1/_2$ ad
" 2 mm. crassum, carnosum, albidum, hyphenchymaticum simi-
" lare; in fungo maturo tenue, zonula obscuriore versus glebam
" notatum, in exoleto peridium extenuatum una cum massa in-
" teriore sporidifera in glebulam fusco rufam contracta a cortice
" ex integro separatur.

" Dissepimenta parum visibilia.

" Capillitium cinereum, in fungo exoleto nullum.

" Sporangia sphaerica tetra vel octospora.

" Sporidia rotunda, opaca, nigrobrunnea levia 17-21 μ.
" crassa.

" Ludit inter formam sphaericam plus minusve umbelicatam
" et pyriformem, cui referendum est E. pyriformis Vitt. et auct.
" plurimorum „.

Una specie molto affine a quelle di cui ho trattato è, secondo lo stesso Vittadini, l'*E. septatus* di cui nulla si conosce all'infuori della descrizione e della figura, entrambe incomplete, che ne dà l'illustre idnologo milanese; gli Autori posteriori che se ne sono occupati si riferiscono tutti esclusivamente alla diagnosi Vittadiniana.

Esaminando gli autoptici Vittadiniani della collezione di Brera e della collezione Mattirolo, ebbi l'avventura di trovare, tra i numerosi *E. maculatus*, 3 esemplari che certamente andavano separati da quello, sia per la tinta uniforme del peridio, sia per la struttura dello stesso, che per la colorazione e la struttura delle spore.

Dall'esame che feci di questi tre esemplari e dal confronto colle diagnosi delle altre specie, io posso concludere che essi corrispondono per i loro caratteri alla diagnosi data dal Vittadini per l'*E. septatus* ed alla figura dello stesso che si trova nella *Mon. Tub.*, Tab. IV, fig. XIII *c*.

Il loro corpo fruttifero è arrotondato, non superante la grossezza di una nocciuola, o è libero da crosta, o presenta qualche residuo di crosta facilmente staccabile, formata da terriccio, radichette ed ife miceliari brune, mancanti di quella specie di incrostazione giallo-verdiccia caratteristica del micelio del *maculatus* e del *Leveillei.*

Il peridio è di color bruno-nero, quasi liscio o minutissimamente granuloso, con i due strati poco distinti l'uno dall'altro tanto per colore, quanto per struttura; dello spessore complessivo di 1 $^{1}/_{2}$ mm. L'esterno è bruno, pseudoparenchimatico, con pseudoparenchima a cellule più grandi di quelle dell'*anthracinus*, *maculatus*, ecc., lucente al taglio, mai fortemente carbonioso, ma tale che si può con non grande difficoltà sezionare. L'interno è poco sviluppato, bruno, a struttura pure evidentemente pseudoparenchimatica come nel *leucosporus* Vitt., poco distinto dallo strato esterno.

I dissepimenti sono abbondati, nascenti come da una lamina chiara aderente al peridio, disposti a guisa di setti che attraversano la gleba.

Il capillizio è quasi nullo.

Le spore sono *pallide fuscescentia*, cioè di colore uguale a quello che Vittadini dà nella figura sopra ricordata; esse sono sferiche, a superficie come papillata, rivestite da una specie di crosta ocracea che si stacca facilmente, del diametro di μ 28-32.

Gli aschi sono sferici, incolori, contenenti 8 spore.

Non deve stupire che tre di questi esemplari si sieno trovati frammisti agli autoptici Vittadiniani di *maculatus* perchè lo stesso Vittadini notò come le due specie si potessero facilmente confondere (1).

Naturalmente la mancanza assoluta di esemplari autoptici non mi permette un'autenticazione inoppugnabile, tuttavia io sono convinta dell'identità di questi esemplari col non mai più ritrovato *E. septatus* Vittadini, e nutro speranza che gli idnologi

---

(1) È da notare che Vittadini non distinse sempre l'*E. maculatus* dalle altre specie affini; infatti tra gli autoptici di *E. anthracinus* della collezione Brera vi è un esemplare di *E. maculatus* e nell'Erbario Saccardo si trova pure un autoptico Vittadiniano classificato come *E. anthracinus*, che è invece un *E. maculatus*.

possano coll'esame e col confronto di altri esemplari avvalorare questi risultati.

Rispondendo all'appello fatto dal Ch^mo^ Prof. O. Mattirolo (1) mi reputo fortunata di aver ritrovate due delle 14 specie Vittadiniane di Ipogei, indicate dal Prof. Mattirolo, di cui mancavano gli esemplari autoptici; esse sono: l'*E. reticulatus* (2) e l'*E. septatus* di cui ho fatto cenno precedentemente. Gli autoptici dell'*E. atropurpureus* vennero ritrovati dallo stesso Professore a Parigi nel 1907, dimodochè esisterebbero ora gli esemplari di tutte le specie del genere *Elaphomyces* descritte dal Vittadini.

Prima di terminare queste righe sento il gradito dovere di esprimere al Ch^mo^ prof. Mattirolo i sensi della mia più viva gratitudine per i consigli ed aiuti di cui mi fu largo e, che mi furono di valida guida nel corso di queste ricerche.

Torino, R. Istituto Botanico, giugno 1908.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — Esemplari di *E. anthracinus* provenienti da Palazzuolo presentanti i caratteri dell'*E. pyriformis* Vitt. — *a, b, c, d* individui globosi ombelicati — *e, f* individui piriformi.

„ 2. — Esemplari provenienti da Rodero presentanti i caratteri dell'*E. anthracinus* Vitt. *a, b* individui globosi ombelicati — *c* individui piriformi.

„ 3. — Esemplari provenienti da Giaveno — *a, b, c* individui globosi ombelicati — *d, e, f* individui piriformi.

„ 4. — Sezione longitudinale del peridio di *E. anthracinus* ingr. 40 volte.

„ 5. — Spore mature di *E. anthracinus* ingr. 400 volte.

„ 6. — Pezzo di perinio di una spora di *E. anthracinus*, id.

„ 7. — Sezione del perinio.

„ 8. — Spora giovane.

„ 9. — Asco con giovani spore.

„ 10. — Sezione del peridio di *E. septatus* Vitt., ingr. 50 volte.

„ 11. — Spore mature del medesimo, ingr. 300 volte.

„ 12. — Sezione di spora „ „ „

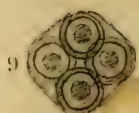
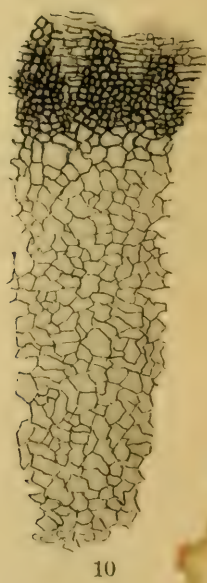
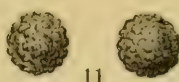
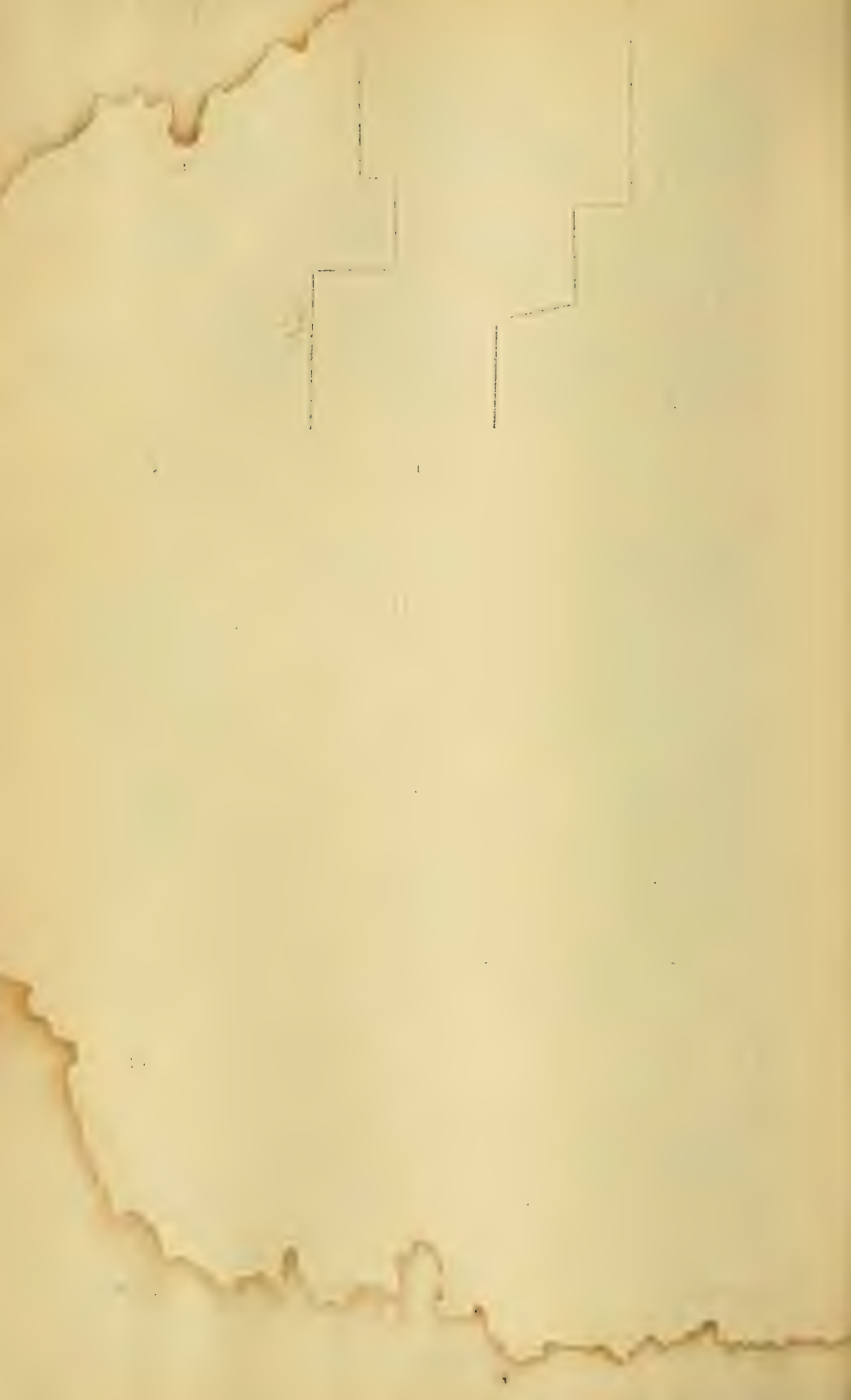
„ 13. — Asco con giovani spore „ „ „

---

(1) O. Mattirolo, *Gli autoptici di Carlo Vittadini e la loro importanza nello studio dell'Idnologia*. Estratto dagli “ Atti del Congresso dei Naturalisti Italiani „. Milano, 1906.

(2) E. Fontana, loc. cit., pag. 97.

Auto disegno

Officina Fototecnica Ing. G. Molfese - Torino

Sopra alcuni punti dell'estensionimetria non euclidea.

Nota di G. SFORZA.

Nelle mie recenti " *Ricerche di estensionimetria negli spazi metrico-projettivi* „ (*) mi è sfuggita l' importante Nota del chiar.^{mo} prof. D'Ovidio (Atti della R. Accad. di Torino, 1893) " *Su varie questioni di metrica-projettiva* „, nella quale è tracciato un interessantissimo quadro storico-critico dei tentativi fatti fino a quei giorni per dare un fondamento alla estensionimetria non euclidea. La critica dell'A. pone in evidenza che ben quattro esimi cultori delle matematiche, e cioè Stahl, Loria, Study, Hoppe, hanno attribuito all' *ampiezza doridiana* (**) carattere estensionimetrico, il che non è poi compatibile colla mancanza, facilmente rilevabile, del carattere distributivo. Nei *Cenni-riassuntivi* che precedono le mie " *Ricerche* „, volendo porre in chiaro la differenza essenziale fra l'*ampiezza doridiana* e la mia *ampiezza estensiva*, mossi appunto la stessa critica al prof.^{r} Loria (non sapevo allora di altri), ma non potei dire, come sono ben lieto di poter dire ora, che lo stesso prof. D'Ovidio mi aveva di ben 14 anni preceduto, negando esplicitamente (pag. 5-7 della predetta Nota) ogni carattere estensionimetrico alla sua *ampiezza*.

Lo stesso chiar.^{mo} A. pone poi in evidenza i metodi di Story e di Lindemann, consistenti sostanzialmente nel seguire l'uso comune, vale a dire nell' assumere le aree dei parallelogrammi o i volumi dei parallelepipedi infinitesimi nella nota forma intrinseca euclidea. Il prof.^{r} D'Ovidio osserva che con tali dati la determinazione dell'area del triangolo, ad esempio,

(*) Memoria in due Note, comunicate il 20 dicembre 1906 e il 5 febbraio 1907 alla R. Acc. di Modena dal Socio prof. Ugo Amaldi.

(**) Definita nella Memoria del prof. D'Ovidio: *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* (Mem. " Lincei „, I_3, 1877); e richiamata nella Nota, di cui qui si parla, a pag. 6.

a mezzo dei suoi angoli riesce laboriosa, mentre dai padri della Geometria non euclidea è stata ottenuta senza integrazione alcuna e rapidamente. Inoltre l'A. è giustamente preoccupato della nessuna connessione visibile *a priori* fra i concetti metrico-projettivi e le formule intrinseche predette, cosicchè queste ultime hanno del gratuito nè assicurano *a priori* che da esse derivi l'area del triangolo proporzionale al suo eccesso. Perciò l'A. si accinge dal canto proprio a invertire il procedimento comunemente usato per la determinazione delle aree piane non euclidee, cercando ingegnosamente di assimilarlo a quello che si usa in Geometria euclidea; vale a dire: supposta assodata una teoria dell' equivalenza dei poligoni piani non euclidei, dalla quale risulti che l'area di un poligono è proporzionale al suo eccesso (e ciò non presenta difficoltà alcuna), calcolare l'area del parallelogrammo infinitesimo in funzione dei lati e dell'angolo compreso, oppure in funzione delle coordinate projettive dei vertici. A quest'ultimo risultato giunge l'A. dimostrando che l'ampiezza (dovidiana) del triangolo infinitesimo formato da tre vertici del parallelogramma infinitesimo coincide coll'area di questo parallelogramma; e così stabilisce la formula metrico-projettiva per l'elemento d'area, utilizzando nel senso desiderato dai suoi interpreti, ma in modo ineccepibile, quell'ampiezza che egli con mirabile intuito aveva introdotta fin dal 1876.

Naturalmente non era possibile seguire un tale metodo per i volumi e gli ipervolumi; ma il chiar.mo A., giovandosi dell'analogia, intuisce le corrispondenti formule estensionimetriche projettive differenziali.

Dal che risulta che, contrariamente all'opinione da me replicatamente espressa alle pagine 1 e 6 delle mie " *Ricerche* " precitate, le *formule predette sono state poste in evidenza fin dal 1893 dal chiar.mo prof. D'Ovidio.*

Nello spazio ordinario di curvatura costante $K - = 0$ il volume P_z del tetraedro normale due volte asintotico, di diedro laterale z è dato (mie " Ricerche ", pag. 43) dall'integrale

$$(1) \qquad P_z = \frac{1}{2iK^{\frac{3}{2}}} \int_z^{\frac{\pi}{2}} \log 2 \operatorname{sen} z \, dz ,$$

di cui, per z reale e compreso fra 0 e π, si conosce (mie " Ricerche ", pag. 43 in nota) il seguente elegantissimo sviluppo in serie

$$P_z = \frac{1}{4iK^{\frac{3}{2}}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\operatorname{sen} 2nz}{n^2}, \tag{2}$$

dovuto sostanzialmente a Lobatschewski ed esumato recentemente dal D^r^ Dannmayer (*).

Siccome ogni tetraedro è un aggregato di tetraedri normali diasintotici (**), i quali, se il tetraedro è reale, nel caso iperbolico possono essere presi tutti reali, ma nel caso ellittico sono necessariamente tutti immaginari, così importa conoscere anche uno sviluppo in serie di P_z per valori complessi di z. Io credo che si possa giungere a tale sviluppo nel seguente modo:

Quando sia $z = x + iy$ con x ed y reali, si ponga

$$\text{per } y > 0 : t = e^{2iz} = e^{-2y+2ix},$$
$$\text{per } y < 0 : t = e^{-2iz} = e^{2y-2ix}.$$

Allora poi si ha in ogni caso

$$\operatorname{mod} t < 1,$$

(*) Anche la (1), leggermente modificata nella forma, è di Lobatschewski. Essa però non trovasi in LIEBMANN, *Nichteuklidische Geometrie* (Sammlung Schubert, 1905). Io l'ho trovata per mio conto, poi l'ho letta (come riproduzione dell'opera di Lobatschewski) nella tesi di laurea del sig. Dannmayer (da me ampiamente citata e commentata nelle dette *Ricerche*).

(**) Non so se anche in questo io sia stato preceduto; so che io ho tratta la certezza di ciò da una formula (che leggesi a pag. 42 delle mie *Ricerche*) che ho trovata 5 o 6 anni addietro per via geometrica e che ho in dette *Ricerche* dimostrata analiticamente. Questa stessa formula fu da me comunicata anche alla Società dei Naturalisti e Matematici di Modena il 12 marzo 1907 colla mia Nota (uscita nel maggio 1907) *Sul volume dei poliedri nella ipotesi non euclidea*, ma senza svilupparne la dimostrazione, perchè avevo il solo intento di ovviare ai danni che potevano derivarmi dal ritardo che subiva la pubblicazione delle predette mie " Ricerche ". Difatti queste non furono poi pubblicate che nel Natale 1907; e il ritardo, debbo convenirne, mi fu benefico, perchè mi permise di aggiornare maggiormente e di rimaneggiare profondamente il mio lavoro.

e perciò vale il noto sviluppo

$$\log(1-t) = -\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{t^n}{n}, \tag{3}$$

ove ragioni di continuità dimostrano che

a) *La parte immaginaria del primo membro deve essere in valore assoluto compresa fra* 0 *e* $\frac{\pi}{2}$ (*).

Ora per ogni z si ha

$$2\,\mathrm{sen}\,z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i},$$

onde

$$\text{per } y \geqq 0 : 2\,\mathrm{sen}\,z = \frac{-e^{-iz}}{i}(1-t),$$

$$\text{per } y \leqq 0 : 2\,\mathrm{sen}\,z = \frac{e^{iz}}{i}(1-t).$$

Di qui, operando per $\frac{1}{2i}$ log e determinando coll'osservazione (a) $\frac{1}{2i}\log 2\,\mathrm{sen}\,z$ in modo che sia appunto per $z = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{1}{2i}\log 2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2i}\log 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2i}\log 1 = 0,$$

si ottiene per la (3)

$$(3') \quad \begin{cases} \text{per } y>0 : \frac{1}{2i}\log 2\,\mathrm{sen}\,z = \frac{\pi}{4} - \frac{z}{2} - \frac{1}{2i}\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{e^{2inz}}{n}, \\ \text{per } y<0 : \frac{1}{2i}\log 2\,\mathrm{sen}\,z = -\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} - \frac{1}{2i}\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{e^{-2inz}}{n}. \end{cases}$$

(*) Infatti il punto $1-t$ varia entro il cerchio di raggio 1 e col centro $z=1$, onde

$$\text{anomalia } (1-t) = \theta + 2n\pi,$$

essendo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ed n intero arbitrario; si ha perciò:

$$\text{parte immaginaria } \log(1-t) = i\theta + 2ni\pi.$$

Ora a valori complessi coniugati di t corrispondono per la (3) valori complessi coniugati di $\log(1-t)$, dunque per la continuità deve essere $n=0$.

Queste serie si possono integrare termine a termine lungo un cammino compreso entro i rispettivi semipiani. Tale integrale, riferendosi a una funzione non solo monodroma (entro il rispettivo semipiano) ma altresì senza punti critici nello stesso semipiano, è monodromo, cioè ha un valore dipendente dai soli estremi z, z_0 del cammino d'integrazione, e sarà dato da

$$\frac{1}{2i}\int_z^{z_0}\log 2\,\mathrm{sen}\,z\,dz = \frac{\pi}{4}(z_0 - z) - \frac{1}{4}(z_0^2 - z^2) + \frac{1}{4}\sum_1^\infty {}_n \frac{e^{2inz_0} - e^{2inz}}{n^2},\ \text{per } y > 0,$$

$$\frac{1}{2i}\int_z^{z_0}\log 2\,\mathrm{sen}\,z\,dz = -\frac{\pi}{4}(z_0 - z) + \frac{1}{4}(z_0^2 - z^2) - \frac{1}{4}\sum_1^\infty {}_n \frac{e^{-2inz_0} - e^{-2inz}}{n^2},\ \text{per } y < 0.$$

Ora, poichè $\sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n^2}$ è convergente, gli sviluppi precedenti valgono anche al limite per $y = 0$; e perciò si potrà prendere $z_0 = \frac{\pi}{2}$ (*); così si ottiene infine (facendo ${}^\bullet P_z = K^{\frac{3}{2}} P_z$)

$$(4)\ \begin{cases} \text{per } y \geq 0:\ {}^\bullet P_z = \frac{1}{4}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sum_1^\infty {}_n \frac{(-1)^n - e^{2inz}}{n^2}, \\ \text{per } y \leq 0:\ {}^\bullet P_z = -\frac{1}{4}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_1^\infty {}_n \frac{(-1)^n - e^{-2inz}}{n^2}. \end{cases}$$

(*) La divergenza della serie (3) si ha veramente soltanto per $t = 1$, mentre per mod $t = 1$ e $t - = 1$ la serie (3) è ancora convergente (Bianchi, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, pag. 23). Dunque i due sviluppi in serie (3') sono validi anche per $y = 0$; e così resta provato anche *a priori* che il cammino d'integrazione in uno dei due semipiani può contenere dei punti dell'asse reale, eccettuati tutt'al più quelli che cadono in multipli di π.

Ponendo

$$G_z = \frac{1}{4}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n - \cos 2nz}{n^2}, \tag{5}$$

$$H_z = \frac{1}{4i}\sum_1^\infty{}_n \frac{\operatorname{sen} 2nz}{n^2}, \tag{6}$$

le serie G_z ed H_z sono convergenti o divergenti secondochè z è reale o complessa. Dunque per z reale le (4) si possono scrivere

$$\begin{aligned} &\text{per } y \geq 0: \quad {}^\bullet P_z = G_z + H_z \\ &\text{per } y \leq 0: \quad {}^\bullet P_z = -G_z + H_z. \end{aligned} \tag{7}$$

D'altronde, se z è reale e compresa fra 0 e π, un cammino d'integrazione di $\log 2 \operatorname{sen} z dz$ da $\frac{\pi}{2}$ a z, fatto nel semipiano positivo, è equivalente ad un altro fatto nel semipiano negativo, perchè tali due cammini presi insieme non includono nessun punto singolare per $\log 2 \operatorname{sen} z$; dunque per

$$0 < z < \pi \tag{8}$$

i due valori (7) di P_z debbono coincidere, cioè per z reale e sodisfacente alla (8) deve aversi identicamente

$$G_z = 0 \ (*). \tag{9}$$

In tal modo le (7) ci danno nell'ipotesi (8)

$${}^\bullet P_z = H_z$$

che è conforme alla (2); questa poi vale per ragioni di continuità anche pei due valori estremi $z = 0$, $z = \pi$.

Se si pone

$$z = z' + m\pi$$

(*) A pag. 273-274 degli *Elementi di calcolo infinitesimale,* del compianto Cesàro, si trovano dati sufficienti per una facile dimostrazione diretta della (9).

(m intero), si avrà da (4)

$$
(10)\ (*) \quad \begin{cases} \text{per } y \geq 0 : \ {}^\bullet P_z = {}^\bullet P_{z'} + \frac{1}{2}\left(z' - \frac{\pi}{2}\right) m\pi + \frac{1}{4} m^2\pi^2, \\ \text{per } y \leq 0 : \ {}^\bullet P_z = {}^\bullet P_{z'} - \frac{1}{2}\left(z' - \frac{\pi}{2}\right) m\pi - \frac{1}{4} m^2\pi^2, \end{cases}
$$

le quali riducono P_z ai valori che tale funzione assume nella striscia compresa fra le rette $x = 0$, $x = \pi$.

Da esse appare che i valori di P_z sull'asse reale e fuori di detta striscia sono diversi secondo che si considerano come appartenenti al semipiano positivo o al negativo, com'era da aspettarsi.

Sopra le trasformazioni di contatto che vengono trasformate in sè stesse dal gruppo delle rotazioni attorno ad un punto.

Nota del Dr. ERNESTO LAURA.

La generazione, data dal Poinsot, del moto di un sistema rigido girevole attorno ad un punto non sollecitato da forze, condusse alla ricerca di coppie di superficie S, T di cui la seconda fissa e la prima girevole attorno ad un punto, in modo tale, che, col suo rotolamento e strisciamento sopra la superficie T, generasse egualmente il suddetto moto. Così il Clebsch [1] osservò che il reciproco dell'ellissoide di Poinsot, rispetto ad una sfera di centro il punto fisso, striscia su di un punto ossia sul polo del piano fisso rispetto alla suddetta sfera [2]. Il Siacci

(*) Poichè $-z' = (\pi - z') - \pi$, dalle (10) si ottiene ${}^\bullet P_{-z'} = {}^\bullet P_{\pi - z'} \pm \frac{\pi z'}{2}$. Ma quando $0 \leq z' \leq \pi$ vale la (2) e perciò si ha allora $P_{\pi - z'} = - P_{z'}$; sicchè in tal caso si ha ${}^\bullet P_{-z'} + {}^\bullet P_{z'} = \pm \frac{\pi z'}{2}$ (Cfr. la mia Nota precitata: *Sul volume*, *ecc.* formule (11)).

[1] " Crelle ,, 1860, B. 57, pag. 75.

[2] Lo stesso risultato è dovuto al Mac Cullagh. Cfr. *Routh Advanced Rigid Dynamiks.* 6ª ediz., pag. 98.

diede pure una generazione di questo moto in " Collectanea Mathematica In memoriam Dominici Chelini „. Il Gebbia [1] infine generalizzando i risultati del Siacci ed applicando la trasformazione per polarità dimostrò: che le quadriche omocicliche dell'ellissoide di Poinsot rotolano senza strisciare sopra quadriche fisse di rivoluzione, e le quadriche omofocali dell'ellissoide di girazione (ellissoide reciproco di quello del Poinsot rispetto ad una sfera di centro il punto fisso) strisciano sopra quadriche fisse di rivoluzione.

Il Siacci in una nota posteriore [2] osserva come i precedenti risultati provengano dal fatto che le trasformazioni per raggi vettori, e per reciprocità rispetto ad una sfera godono della proprietà che se mediante esse vengono trasformate due superficie S e T, di cui la S girevole attorno ad un punto in modo da essere sempre tangente alla T fissa, in altre due superficie S', T'; la S' ruota attorno al punto stesso rimanendo ancora a contatto della T'. In fine della stessa nota il Siacci pare voglia indicare altre trasformazioni che godono di questa proprietà. Soggiunge però: " ma sarebbe difficile stabilire a priori le condizioni generali a cui (le suddette trasformazioni) dovrebbero soddisfare, affinchè le nuove superficie riuscissero tangenti in un punto come le prime „.

Questa difficoltà, a cui allude il Siacci, scompare, o riesce di molto diminuita se si osserva che queste trasformazioni, quando vogliamo restare nel caso generale di due superficie S, T arbitrarie, formano *quel particolare gruppo di trasformazioni di contatto indicato nel titolo del presente lavoro*, e che quindi la loro ricerca può essere condotta seguendo i classici procedimenti di Lie.

È oggetto della presente nota indicare appunto un metodo atto a trovare tutte le suddette trasformazioni. Devesi però osservare che tra le trasformazioni che così si otterranno potranno dare effettive nuove generazioni del moto spontaneo di un corpo rigido girevole attorno ad un punto, solo quelle per le quali le

---

[1] *Su due proprietà della rotazione spontanea dei corpi*, " Memorie della Classe di Scienze fisiche „, serie 4ª, vol. I, pag. 326.

[2] *Sulla rotazione di un corpo intorno ad un punto*, " Atti della R. Acc. di Torino „, vol. XXI.

superficie S, T trasformate dell'ellissoide di Poinsot e del piano fisso si toccano senza intersecarsi.

Noteremo infine che le trasformazioni indicate dal Siacci alla fine della sua nota sono particolari per il caso di un ellissoide che rotola sopra di un piano posto alla distanza h dal suo centro — esse non sono trasformazioni di contatto e quindi non rientrano nel gruppo di quelle di cui ci stiamo occupando.

I. La caratteristica δ indichi le variazioni prodotte da una rotazione infinitesima, attorno al punto fisso, simultaneamente data ai due spazi. Le trasformazioni di contatto che noi ricerchiamo soddisfano allora alla condizione: se $x, y, z, p, q\left(\text{in cui } p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, x', y', z', p', q' $\left(\text{in cui si è posto } p' = \frac{\partial z'}{\partial x'},\ q' = \frac{\partial z'}{\partial y'}\right)$ sono due elementi corrispondenti dei due spazi, allora gli elementi

$$x + \delta x,\quad y + \delta y,\quad z + \delta z,\quad p + \delta p,\quad q + \delta q$$
$$x' + \delta x',\ y' + \delta y',\ z' + \delta z',\ p' + \delta p',\ q' + \delta q'$$

sono ancora corrispondenti nella stessa trasformazione. Le trasformazioni di contatto che ricerchiamo sono dunque trasformate in sè stesse dal gruppo delle rotazioni attorno di un punto.

Diremo nel seguito (Γ) queste trasformazioni: è manifesto che le trasformazioni (Γ) formano un gruppo — e cioè il prodotto di due trasformazioni (Γ) è ancora una trasformazione (Γ).

Dalla definizione di queste trasformazioni consegue poi: Il sistema delle equazioni generatrici di ogni trasformazione (Γ) è invariante per il gruppo delle rotazioni attorno ad un punto, applicato a coppie di elementi corrispondenti.

Ossia se:

$$\varphi_i(x, y, z; x', y', z') = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots h \tag{1}$$

sono le equazioni generatrici di una trasformazione (Γ), e se X, Y, Z sono gli operatori delle trasformazioni infinitesime del gruppo delle rotazioni attorno ad un punto, e X', Y', Z' gli operatori stessi in cui le variabili sono accentate, allora le funzioni:

$$(X + X')\,\varphi_i,\quad (Y + Y')\,\varphi_i,\quad Z + Z')\,\varphi_i$$

si annullano assieme alle φ_i.

Reciprocamente: *se le* (1) *costituiscono un sistema invariante per il gruppo delle rotazioni attorno ad un punto — la trasformazione di contatto derivata dalle* (1) *appartiene al gruppo* (Γ).

La dimostrazione di questo teorema consisterà nel mostrare che se:

$$(2) \qquad \psi_k(x, y, z, p, q; x', y', z', p', q') = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, 5 - h$$

sono le equazioni che bisogna aggiungere alle (1) perchè risolvendo il sistema che così si ottiene rispetto alle x', y', z', p', q' la trasformazione che ne risulta sia di contatto, allora le (1) e le (2) formano un sistema invariante per il gruppo prolungato delle rotazioni attorno ad un punto.

Considererò separatamente i tre casi possibili:

$$h = 1, \quad h = 2, \quad h = 3$$

Indicherò con la caratteristica d l'accrescimento che una funzione subisce quando le x, y, z, x', y', z' subiscono accrescimenti legati dalle relazioni:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$
$$dz' = p'\,dx' + q'\,dy'$$

e con la caratteristica δ, come precedentemente, una rotazione infinitesima di componenti π, χ, ρ simultaneamente data ai due spazî [1].

Facciamo inoltre le posizioni:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{dx} + p\frac{\partial'}{\partial z} \qquad \frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}$$
$$\frac{d}{dx'} = \frac{\partial}{\partial x'} + p'\frac{\partial}{\partial z'} \qquad \frac{d}{dy'} = \frac{\partial}{\partial y'} + q'\frac{\partial}{\partial z'}.$$

1° Caso.

Sia data una sola equazione generatrice:

$$(3) \qquad \varphi(x, y, z; x', y', z') = 0$$

---

[1] Si avrà perciò

$$\delta x = \chi z - \rho y, \ldots, \quad \delta q = \pi(1 + q^2) - \chi pq + \rho p$$
$$\delta x' = \chi z' - \rho y', \ldots, \quad \delta q' = \pi(1 + q'^2) - \chi p'q' + \rho p'.$$

e si abbia:

$$\delta\varphi = k\varphi \tag{3bis}$$

essendo k infinitesimo o nullo ([1]).

Per ricavare la trasformazione di contatto che essa genera dobbiamo scrivere che

$$d\varphi$$

coincide a meno di un fattore di proporzionalità coll'espressione differenziale:

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy' - \mu(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Si ottengono per tal modo, indicando λ un fattore di proporzionalità, le equazioni:

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial z'} = -1 & \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = -\mu \\[2ex] \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial x'} = -p' & \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \mu p \\[2ex] \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} = -q' & \lambda \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \mu q. \end{array}\right. \tag{4}$$

Da cui eliminando λ, μ avremo le equazioni:

$$\frac{d\varphi}{dx'} = \frac{d\varphi}{dy'} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dy}. \tag{5}$$

Da queste e dalla (3) potremo, generalmente parlando, ricavare le x', y', z', p', q' espresse mediante le x, y, z, p, q.

Si ha ora:

$$\delta d\varphi = d\delta\varphi.$$

E per la (3bis)

$$\delta d\varphi = d(k\varphi).$$

Ossia

$$d\,.\,k\varphi = \delta\left[\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy + \frac{d\varphi}{dx'}\,dx' + \frac{d\varphi}{dy'}\,dy'\right].$$

([1]) In realtà, come si osserverà in seguito, si ha

$$k = 0.$$

Sviluppando ed eguagliando nei due membri i coefficienti di $dx \dots dy'$, otterremo le equazioni:

$$(6) \quad \begin{cases} \delta \dfrac{d\varphi}{dx} = \varphi \dfrac{dk}{dx} + (k - p\chi) \dfrac{d\varphi}{dx} + (\pi p - \rho) \dfrac{d\varphi}{dy} \\ \delta \dfrac{d\varphi}{dy} = \varphi \dfrac{dk}{dy} + (\rho - q\chi) \dfrac{d\varphi}{dx} + (k + \pi q) \dfrac{d\varphi}{dy} \end{cases}$$

e due relazioni analoghe accentando le variabili x, y, p, q.

Le (6) dicono che le equazioni (6) e la (3) formano un sistema invariante rispetto al gruppo prolungato delle rotazioni attorno ad un punto — la trasformazione di contatto che da queste equazioni ricavasi appartiene al gruppo (Γ).

2° Caso.

Sieno date due equazioni generatrici:

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z;\; x', y', z') = 0 \\ \varphi_2(x, y, z;\; x', y', z') = 0 \end{cases}$$

e si abbia:

$$(7^{bis}) \qquad \delta\varphi_i = k_{i1}\, \varphi_1 + k_{i2}\, \varphi_2 \qquad i = 1, 2$$

essendo le k_{ik} infinitesime o nulle.

Per trovare la trasformazione di contatto che esse generano, scriveremo che esistono due fattori di proporzionalità λ_1, λ_2 tali che la espressione differenziale

$$\lambda_1 d\varphi_1 + \lambda_2 d\varphi_2$$

coincida coll'espressione differenziale:

$$dz' - p'dx' - q'dy' - \mu(dz - pdx - qdy).$$

Otterremo le equazioni:

$$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z'} + \lambda_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z'} = 1 \\ \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x'} + \lambda_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x'} = -p' \\ \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y'} + \lambda_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y'} = -q' \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -\mu \\ \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \mu p \\ \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \mu q. \end{cases}$$

Dalle quali:

$$
(8) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + \lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dx} = 0 \\
&\lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dy} + \lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dy} = 0 \\
&\lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dx'} + \lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dx'} = 0 \\
&\lambda_1 \frac{d\varphi_1}{dy'} + \lambda_2 \frac{d\varphi_2}{dy'} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ed eliminando tra queste le λ_1, λ_2 otterremo tre equazioni dalle quali e dalle (7) generalmente parlando potremo ricavare le $x' \dots q'$ in funzione delle $x \dots q$.

Si applichi la caratteristica δ ai due membri delle equazioni:

$$
d\varphi_i = \frac{d\varphi_i}{dx}\, dx + \frac{d\varphi_i}{dy}\, dy + \frac{d\varphi_i}{dx'}\, dx' + \frac{d\varphi_i}{dy'}\, dy' \qquad i = 1,\, 2.
$$

Tenendo presenti le (7^{bis}) si avranno le relazioni:

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta \frac{d\varphi_i}{dx} &= \varphi_1 \frac{dk_{i1}}{dx} + \varphi_2 \frac{dk_{i2}}{dx} - p\chi \frac{d\varphi_i}{dx} + (\pi p - \rho) \frac{d\varphi_i}{dy} \\
\delta \frac{d\varphi_i}{dy} &= \varphi_1 \frac{dk_{i1}}{dy} + \varphi_2 \frac{dk_{i2}}{dy} + (\rho - q\chi) \frac{d\varphi_i}{dx} + \pi q \frac{d\varphi_i}{dy}
\end{aligned}
\right\} \quad i = 1,\, 2
$$

e due relazioni da queste ottenute accentando le variabili. Conseguono allora le relazioni:

$$
\delta \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x, y)} = \varphi_1 \left\{ \frac{d(k_{11}, \varphi_2)}{d(x, y)} + \frac{d(\varphi_1, k_{21})}{d(x, y)} \right\} + \varphi_2 \left\{ \frac{d(k_{12}, \varphi_2)}{d(x, y)} + \frac{d(\varphi_1, k_{22})}{d(x, y)} \right\} +
$$

$$
+ (k_{11} + k_{22} - p\chi + q\pi) \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x, y)} ,
$$

$$
\delta \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x, x')} = \varphi_1 \left\{ \frac{d(k_{11}, \varphi_2)}{d(x, x')} + \frac{d(\varphi_1, k_{21})}{d(x, x')} \right\} + \varphi_2 \left\{ \frac{d(k_{12}, \varphi_2)}{d(x, x')} + \frac{d(\varphi_1, k_{22})}{d(x, x')} \right\} +
$$

$$
(k_{11} + k_{22} - p\chi - p'\chi) \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x, x')} + (\pi p - \rho) \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(y, x')} + (\pi p' - \rho) \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x, y')}.
$$

Da queste formole e da altre analoghe, da queste ottenute

accentando le variabili, o cambiando le x nelle y, discende che le funzioni:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x, y)} = \dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx} \\[2ex] \dfrac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x, x')} = \dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dx'} - \dfrac{d\varphi_1}{dx'}\dfrac{d\varphi_2}{dx} \\[2ex] \dfrac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(y, x')} = \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx'} - \dfrac{d\varphi_1}{dx'}\dfrac{d\varphi_2}{dy}; \ \& \end{cases}$$

si annullano assieme alle (7), ossia le (9) eguagliate a zero e le (7) formeranno un sistema invariante — e la trasformazione di contatto che da queste equazioni si ricava apparterrà al gruppo delle (Γ).

3° Caso.

Sieno date tre equazioni generatrici:

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z;\ x', y', z') = 0 \\ \varphi_2(x, y, z;\ x', y', z') = 0 \\ \varphi_3(x, y, z;\ x', y', z') = 0 \end{cases}$$

costituenti un sistema invariante per il gruppo delle rotazioni, ecc. La trasformazione che esse generano è una trasformazione puntuale; è allora pressocchè ovvio che essa appartiene al gruppo delle (Γ) [1].

---

[1] Per esprimere pure le $p'q'$ in funzione delle x, y, z, p, q, devesi aggiungere alle (10) le due equazioni seguenti

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{d(x, y, x')} = 0 \qquad \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{d(x, y, y')} = 0$$

e quindi risolvere il sistema ottenuto rispetto alle x', y', z', p', q'.

Le (10) e queste ultime costituiscono un sistema invariante per il gruppo ecc.

Si verifica invero facilmente la relazione (ed analoghe):

$$\delta \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{d(x, y, x')} = \varphi_1 \left\{ \frac{d(k_{11}, \varphi_2, \varphi_3)}{d(x, y, x')} + \frac{d(\varphi_1, k_{21}, \varphi_3)}{d(x, y, x')} + \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, k_{31})}{d(x, y, x')} \right\} +$$
$$+ \varphi_2 \left\{ \frac{d(k_{12}, \varphi_2, \varphi_3)}{d(x, y, x')} + \frac{d(\varphi_1, k_{22}, \varphi_3)}{d(x, y, x')} + \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, k_{32})}{d(x, y, x')} \right\} +$$
$$+ \varphi_3 \left\{ \frac{d(k_{13}, \varphi_2, \varphi_3)}{d(x, y, x')} + \frac{d(\varphi_1, k_{23}, \varphi_3)}{d(x, y, x')} + \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, k_{33})}{d(x, y, x')} \right\} +$$
$$+ (k_{11} + k_{22} + k_{33} - p\chi - p'\chi - q\pi) \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}{d(x, y, x')} + (\pi p' - p) \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{d(x, y, y')}.$$

II. Dal N° precedente discende quindi che per la ricerca di tutte le trasformazioni (Γ) occorre conoscere gli invarianti (ed i sistemi invarianti) del gruppo delle rotazioni attorno ad un punto applicato alle due terne di variabili. Questi invarianti, come è noto sono:

$$\begin{aligned} \rho &\equiv x^2 + y^2 + z^2 \\ \rho' &\equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ \theta &\equiv xx' + yy' + zz'. \end{aligned}$$

Costituiscono poi un sistema invariante per il gruppo stesso le equazioni seguenti [1]:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}.$$

Le trasformazioni di contatto (Γ) hanno dunque equazioni generatrici del tipo:

$$f(\rho, \rho', \theta) = 0$$

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \left[\frac{\rho}{\theta} = \frac{\theta}{\rho'}\right].$$

Potremo dunque con sole operazioni algebriche ricavare tutte le trasformazioni di contatto (Γ).

III. Ricerchiamo dapprima le trasformazioni (Γ) ad una sola equazione generatrice. Questa dovrà essere della forma:

$$\varphi\ (\rho, \rho', \theta) = 0 \tag{11}$$

essendo φ una funzione arbitraria.

---

[1] Queste equazioni rientrano in realtà negli invarianti dati. Invero dall'identità:

$$\rho\rho' - \theta^2 = (xy' - x'y)^2 + (yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2$$

discende che è invariante l'equazione:

$$(xy' - x'y)^2 + (yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2 = 0.$$

E poichè le trasformazioni che consideriamo, a punti reali fanno corrispondere punti reali, quest'ultima si scinde nel sistema:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

il quale sarà dunque invariante.

Nella (11) manchi una delle variabili ρ, ρ' θ. La funzione generatrice abbia allora dapprima la forma:

$$\varphi(\rho, \rho') = 0. \tag{12}$$

Procedendo come solitamente otteniamo che all'equazione (12) debbonsi aggiungere le quattro equazioni seguenti:

$$x' + p'z' = y' + q'z' = x + pz = y + qz = 0$$

E poichè queste costituiscono relazioni tra le sole $x', y' ..., q'$ e tra le sole $x, y, ..., q$, dedurremo che dalla (12) non deriva alcuna trasformazione di contatto.

La equazione generatrice abbia invece la forma:

$$\theta = f(\rho'). \tag{13}$$

Procedendo come solitamente si hanno le equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} &\theta = f(\rho') \\ &x' = -pz' \\ &y' = -qz' \\ &p' = -\frac{x - 2\frac{df}{d\rho'}z'}{z - 2\frac{df}{d\rho'}z} \\ &q' = -\frac{y - 2\frac{df}{d\rho'}z'}{z - 2\frac{df}{d\rho'}z'}. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Dalla 2ª e 3ª di queste equazioni si ricava:

$$\theta = -z'(px + qy - z)$$
$$\rho' = z'^2(1 + p^2 + q^2).$$

La 1ª diviene allora:

$$-z'(px + qy - z) = f[z'^2(1 + p^2 + q^2)],$$

ossia posto:

$$\lambda = \frac{px + qy - z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

si ha pure:

$$-\sqrt{z'^2(1+p^2+q^2)}\,.\,\lambda = f[z'^2(1+p^2+q^2)].$$

Risolvendo questa equazione avremo:

$$z'\sqrt{1+p^2+q^2} = \varphi(\lambda)$$

nella quale φ è ancora il simbolo di una funzione arbitraria.

Le (14) divengono allora:

$$(15)\qquad \begin{cases} x' = -\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\varphi(\lambda) \\[2ex] y' = -\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\varphi(\lambda) \\[2ex] z' = .\ \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\varphi(\lambda). \end{cases}$$

Le due equazioni che completano questa trasformazione sono:

$$(16)\qquad \begin{cases} p' = \dfrac{p(\varphi+\lambda\varphi') - \sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,x\varphi'}{\varphi+\lambda\varphi' + \sqrt{1+p^2+q^2}\,z\varphi'} \\[2ex] q' = \dfrac{q(\varphi+\lambda\varphi') - \sqrt{1+p^2+q^2}\,y\varphi'}{\varphi+\lambda\varphi' + \sqrt{1+p^2+q^2}\,z\varphi'} \end{cases}$$

e si ricavano, come è ben noto, risolvendo un sistema lineare di equazioni.

Le (16) si interpretano agevolmente. Si ha invero:

$$\frac{x'}{p} = \frac{y'}{q} = \frac{z'}{-1}$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \psi(\lambda)$$

ove λ indica la distanza dell'origine dal piano tangente alla superficie che si vuole trasformare.

La suddetta trasformazione è dunque il prodotto di una trasformazione per polarità rispetto alla sfera

$$x^2+y^2+z^2 = 1$$

per una trasformazione per raggi vettori.

Ponendo

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

si ottiene una delle trasformazioni date dal Siacci (l. c.).

L'equazione generatrice abbia la forma:

$$\theta = f(\rho) \tag{17}$$

Poichè mutando in essa le x, y, z nelle x', y', z' si ottiene la (13) — la trasformazione di contatto che da essa si genera è la trasformazione inversa delle (15) e quindi sarà il prodotto di una trasformazione per raggi vettori per una polarità rispetto ad una sfera di centro l'origine.

Consideriamo infine il caso generale

$$\varphi(\rho, \rho', \theta) = h$$

e suppongasi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \neq 0.$$

L'equazione generatrice assume allora la forma:

$$\theta = F(\rho, \rho'). \tag{18}$$

Procedendo come solitamente otterremo le equazioni:

$$\begin{cases} p\left(z' - 2\dfrac{\partial F}{\partial \rho} z\right) + x' - 2\dfrac{\partial F}{\partial \rho} x = 0 \\ q\left(z' - 2\dfrac{\partial F}{\partial \rho} z\right) + y' - 2\dfrac{\partial F}{\partial \rho} y = 0 \\ p'\left(z - 2\dfrac{\partial F}{\partial \rho'} z'\right) - \left(x - 2\dfrac{\partial F}{\partial \rho} x'\right) = 0 \\ q'\left(z - 2\dfrac{\partial F}{\partial \rho'} z'\right) - \left(y - 2\dfrac{\partial F}{\partial \rho} y'\right) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

che con la (18) costituiscono un sistema generalmente risolubile rispetto alle x', y', z', p', q'.

Le due prime equazioni (19) possono pure porsi sotto la forma:

$$\frac{x' + pz'}{x + pz} = \frac{y' + qz'}{y + qz} = 2\frac{\partial F}{\partial \rho}. \tag{20}$$

Da queste due equazioni e dalla (18) si ricaveranno le x', y', z'

in funzione delle x, y, z, p, q. Questa eliminazione non si può eseguire nel caso generale e quindi non si possono scrivere sotto forma esplicita queste trasformazioni, è facile però trovare la particolare forma che loro compete. Basta prendere perciò come variabile ausiliaria:

$$\zeta = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\left(2 \frac{\partial F}{\partial \rho} z - z'\right).$$

Un semplice calcolo porta allora a stabilire che la forma delle trasformazioni richieste è:

$$(21) \quad \begin{cases} x' = x f_1(\rho, \lambda) - \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} f_2(\rho, \lambda) \\ y' = y f_1(\rho, \lambda) - \dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} f_2(\rho, \lambda) \\ z' = z f_1(\rho, \lambda) + \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} f_2(\rho, \lambda), \end{cases}$$

nelle quali è stato posto, come precedentemente,

$$\lambda = \frac{px + qy - z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Le funzioni $f_1(\rho, \lambda), f_2(\rho, \lambda)$ che qui compaiono, non sono tra loro indipendenti — devesi imporre a queste funzioni la condizione che le (21) definiscano una trasformazione di contatto. Dovranno perciò le x', y', z', considerate come funzioni di x, y, z, p, q, verificare le equazioni:

$$(22) \qquad [z', x'] = [z', y'] = [x', y'] = 0$$

nelle quali il simbolo $[\ ,\ ]$ ha il significato solito, cioè si ha, ad esempio,

$$(22) \qquad [z', x'] \equiv \frac{dz'}{dx}\frac{\partial x'}{\partial p} - \frac{dx'}{dx}\frac{\partial z'}{\partial p} + \frac{dz'}{dy}\frac{\partial x'}{\partial q} - \frac{dx'}{dy}\frac{\partial z'}{\partial q}.$$

Sviluppiamo le (22) avremo:

$$[z', x'] \equiv \frac{x + pz}{1 + p^2 + q^2} F$$

$$[x', y'] \equiv \frac{qx - py}{1 + p^2 + q^2} F$$

$$[z', y'] \equiv \frac{y + qz}{1 + p^2 + q^2} F$$

nelle quali si è posto:

$$F \equiv f_1(\lambda, \rho)\left(\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right) + 2 f_2(\lambda, \rho)\left(\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \rho} - \frac{\partial f_2}{\partial \rho}\right) + 2 \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\lambda, \rho)}(\rho - \lambda^2). \tag{23}$$

Sicchè le (21) sono le equazioni di una trasformazione di contatto qualora le $f_1(\lambda, \rho)$, $f_2(\lambda, \rho)$ costituiscano una coppia di funzioni soddisfacenti alla equazione alle derivate parziali

$$F = 0. \tag{24}$$

Le equazioni (21) convengono alla più generale trasformazione di contatto (Γ), come discende dal seguito di questo lavoro.

Tra le trasformazioni (Γ) derivate da una unica funzione generatrice, citeremo la trasformazione per superficie parallele.

Essa ha per equazione generatrice:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = h^2$$

e le sue equazioni finite sono:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x - h\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ y' &= y - h\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ z' &= z + h\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ p' &= p \\ q' &= q. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

L'applicazione di questa trasformazione ai teoremi di Poinsot e di Clebsch dà luogo alle proposizioni:

Nel moto di un sistema rigido non sollecitato da forze esterne, girevole intorno ad un punto: 1° le superficie parallele all'ellissoide di inerzia rotolano e strisciano sopra piani perpendicolari al vettore momento delle quantità di moto, preso rispetto al punto fisso; 2° le superficie parallele dell'ellissoide di girazione strisciano sopra sfere concentriche, i cui centri sono i poli di piani paralleli rispetto ad una sfera, che ha per centro il punto fisso.

IV. Le trasformazioni del gruppo (Γ) a due equazioni generatrici si ricavano in modo analogo. Un semplice calcolo porta a concludere che non esistono trasformazioni di contatto dotate delle *sole* due equazioni generatrici:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

Dovremo perciò assumere equazioni del tipo:

$$(26)\qquad \begin{cases} F_1(\rho, \rho', \theta) = \Upsilon_1 \\ F_2(\rho, \rho', \theta) = \Upsilon_2. \end{cases}$$

Le funzioni $F_1(\rho, \rho', \theta)$, $F_2(\rho, \rho', \theta)$ sono indipendenti nelle ρ, ρ', θ — saranno quindi risolubili rispetto a due di queste variabili. — Poichè, d'altronde, non si possono dare a priori equazioni tra le sole x, y, z o tra le sole x', y', z', potremo, senza ledere la generalità, assumere come equazioni generatrici le seguenti:

$$(27)\qquad \begin{cases} \theta = f_2(\rho) \\ \rho' = f_1(\rho). \end{cases}$$

Operando come al N° I perveniamo all'equazione:

$$(28)\qquad \frac{x' + pz'}{x + pz} = \frac{y' + qz'}{y + qz}$$

che con le due equazioni (27) dà un sistema generalmente risolubile nelle x', y', z'.

Dalla (28) facilmente si ricava:

$$(29)\qquad \rho z' = \theta z + \left(\rho \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \lambda z\right) \frac{\sqrt{\rho\rho' - \theta^2}}{\sqrt{\rho - \lambda^2}}.$$

Nella quale si è posto:

$$\lambda = \frac{px + qy - z}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Per le (27) θ e ρ' sono funzioni note di ρ — si ponga:

$$\sqrt{\rho\rho' - \theta^2} = \psi(\rho).$$

La (29) e le (28) daranno allora:

$$(30)\quad \begin{cases} x' = x\left[\dfrac{f_2(\rho)}{\rho} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\rho-\lambda^2}}\dfrac{\psi(\rho)}{\rho}\right] - \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\dfrac{\psi(\rho)}{\sqrt{\rho-\lambda^2}} \\ y' = y\left[\dfrac{f_2(\rho)}{\rho} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\rho-\lambda^2}}\dfrac{\psi(\rho)}{\rho}\right] - \dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\dfrac{\psi(\rho)}{\sqrt{\rho-\lambda^2}} \\ z' = z\left[\dfrac{f_2(\rho)}{\rho} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\rho-\lambda^2}}\dfrac{\psi(\rho)}{\rho}\right] + \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\dfrac{\psi(\rho)}{\sqrt{\rho-\lambda^2}} \end{cases}$$

Le espressioni delle p', q' si ricaveranno poi mediante sole operazioni algebriche.

Le equazioni (30) sono della forma (21); e non è difficile verificare che posto:

$$f_1(\rho, \lambda) \equiv \frac{f_2(\rho)}{\rho} + \frac{\lambda}{\sqrt{\rho-\lambda^2}}\frac{\psi(\rho)}{\rho}$$

$$f_2(\rho, \lambda) \equiv \frac{\psi(\rho)}{\sqrt{\rho-\lambda^2}}$$

riesce verificata l'equazione (24).

Nelle formole (30) sono contenute, oltrecchè le trasformazioni (Γ) a due equazioni generatrici, le trasformazioni per raggi vettori.

Basterà porre perciò:

$$\psi(\rho) = 0.$$

Le trasformazioni di contatto (30) si possono costruire geometricamente. Consideriamo dapprima la trasformazione le cui equazioni generatrici sono:

$$(31)\quad \begin{cases} \theta = h^2 \\ \rho' = f(\rho). \end{cases}$$

Con semplici considerazioni di geometria analitica si dimostra che questa trasformazione si costruisce nel seguente modo: Sia M un punto della superficie data e MN la normale corrispondente. Si conduca il piano polare di M rispetto ad una sfera di centro il punto fisso e di raggio h. Sulla retta di in-

tersezione di questo piano e del piano OMN si prenda il punto M' tale che si abbia

$$\overline{OM'}^2 = f(\overline{OM}^2).$$

Sarà M' il punto trasformato. Diremo (α) queste particolari trasformazioni. Nelle trasformazioni (α) è compresa la trasformazione apsidale [1]. Basta porre:

$$h = 0.$$

Tra le trasformazioni (α) è pure compresa la particolare trasformazione per raggi vettori:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{\alpha^2}{\rho} \qquad (\rho\rho' = 1).$$

È poi ovvio infine che la più generale trasformazione di contatto definita dalle formole (30) è il prodotto di una trasformazione (α) per una trasformazione per raggi vettori.

V. Le trasformazioni di contatto a tre equazioni generatrici sono della forma

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = f(\rho, \rho', \theta), \tag{32}$$

dalle quali:

$$\theta = \rho f(\rho\rho'\theta)$$
$$\rho' = \rho f^2(\rho\rho'\theta),$$

e quindi le (32) divengono:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = F(\rho). \tag{33}$$

Sicchè: *la più generale trasformazione di contatto* (Γ), *a tre equazioni generatrici, è la trasformazione per raggi vettori.*

Le equazioni (33) sono poi ancora del tipo (21).

---

[1] Mac Cullagh, *Geometrical Propositions applied to the wave theory of light*, " Tr. of the Royal Irish Academy ", XVI, 1830, pag. 76. Cfr. pure Mannheim, *Sur les surfaces apsidales*, " C. R. Ac. de Sciences de Paris ", 1896, pag. 1396-8.

VI. Riassumendo i risultati di questa nota possiamo concludere:

1° Le trasformazioni di contatto (Γ) trasformate in sè stesse dal gruppo delle rotazioni attorno ad un punto sono tutte contenute nelle equazioni:

$$\begin{cases} x' = x f_1(\rho, \lambda) - \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} f_2(\rho, \lambda) \\ y' = y f_1(\rho, \lambda) - \dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} f_2(\rho, \lambda) \\ z' = z f_1(\rho, \lambda) + \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} f_2(\rho, \lambda) \end{cases}$$

in cui è stato posto:

$$\lambda = \frac{px+qy-z}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2$$

e le funzioni $f_1(\lambda, \rho)$, $f_2(\lambda, \rho)$ devono soddisfare all'unica equazione alle derivate parziali:

$$f_1(\lambda, \rho)\left(\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} - \frac{\partial f_2}{\partial \lambda}\right) + 2 f_2(\lambda, \rho)\left(\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \rho} - \frac{\partial f_2}{\partial \rho}\right) + 2\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(\lambda, \rho)}(\rho - \lambda^2) = 0.$$

2° Il gruppo delle trasformazioni di contatto (Γ) è costituito dalle trasformazioni per raggi vettori, dalle trasformazioni per polarità rispetto ad una sfera di raggio qualunque e di centro il punto fisso, e dalle trasformazioni di contatto la cui sola equazione generatrice è:

$$xx' + yy' + zz' = F(x^2 + y^2 + z^2, x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

nella quale la funzione F contiene esplicitamente sia $x^2 + y^2 + z^2$, che $x'^2 + y'^2 + z'^2$.

Sulla variazione del grado di dissociazione di alcuni elettroliti colla temperatura.

Nota di ADOLFO CAMPETTI.

(Con una Tavola).

1° Lo studio della variazione della conducibilità molecolare od equivalente delle soluzioni elettrolitiche col variare della temperatura è assai importante per la teoria delle soluzioni stesse, poichè permette di determinare (quando sia noto il valore della conducibilità equivalente alle varie temperature) il grado di dissociazione elettrolitica di una stessa soluzione alle temperature corrispondenti.

A questo proposito conviene ricordare anzitutto le numerose esperienze di Jones e Douglas (1) che determinarono le conducibilità molecolari di numerose soluzioni di elettroliti, come HCl, HNO_3, H_2SO_4, KOH, $NaOH$, KCl, ecc., a varie concentrazioni, ma nel solo intervallo di temperatura da 0° a 35°. La conclusione generale che essi traggono dalle loro esperienze è che il grado di dissociazione varia poco colla temperatura; per quanto i dati numerici riferiti indichino piuttosto che tale variazione è in ogni caso assai piccola e talvolta inapprezzabile per le soluzioni più diluite, mentre per le soluzioni di maggior concentrazione si osserva nella maggior parte dei casi una diminuzione del grado di dissociazione col crescere della temperatura.

Anche il Kahlenberg (2) ha determinato le conducibilità equivalenti di un gran numero di soluzioni elettrolitiche, alle sole temperature però di 0° e 95°; di guisa che tali esperienze non sono sufficienti per determinare le variazioni del grado di dissociazione in quell'intervallo di temperatura.

Delle stesse questioni si occuparono pure Smits e Jones (3) e più tardi Noyes e Coolidge (4) esaminando la conducibilità del

(1) Jones e Douglas, " American Chem. Journ. ", 1901.

(2) Kahlenberg, " Journal of Phys. Chem. ", 1901.

(3) Smits e Jones, " Journal of Phys. Chem. ", 1902.

(4) Noyes e Coolidge, " Zeit. Phys. Chem. ", 1903, 46.

cloruro di sodio e di potassio a temperature molto elevate in apparato chiuso.

In una nota pubblicata negli " Atti „ di cotesta Accademia (Vol. XL, 1905) insieme col Dr. Nozari è stata pure esaminata la variazione del grado di dissociazione elettrolitica delle soluzioni di NaCl e KCl col crescere della temperatura nell'intervallo da 20° a 90°, arrivando a conclusioni analoghe a quelle ottenute da Jones e Douglas nell'intervallo da 0° a 35°. — In questo lavoro mi propongo di estendere le analoghe ricerche a soluzioni di elettroliti con ioni bivalenti, e cioè a soluzioni di solfato di zinco, di magnesio e di acido solforico e di confrontare i resultati sperimentali con quelli teorici ricavati dalla teoria delle soluzioni.

2° Com'è noto, la difficoltà maggiore in queste ricerche consiste specialmente nell'evitare che le sostanze che (specialmente a temperature elevate) possono dalle pareti del recipiente sciogliersi nella soluzione, alterino il valore della conducibilità. A questo inconveniente si può in parte ovviare eseguendo le determinazioni in apparecchio completamente di platino: dico solo in parte, perchè non si deve credere che, specialmente a temperature elevate, si debba escludere ogni azione tra le pareti del recipiente, sia pure di platino, e la soluzione; naturalmente quest'azione si rende manifesta solo per le soluzioni più diluite; ma di questo parleremo poi più diffusamente, discutendo i risultati di alcune esperienze del Whetham relative alla conducibilità delle soluzioni estremamente diluite di acido solforico.

Per evitare poi l'evaporazione della soluzione e al tempo stesso il disciogliersi in essa dell'anidride carbonica dell'ambiente (non completamente eliminata con altri mezzi) si può ricoprire la soluzione con uno strato di paraffina o meglio di olio di vaselina purissimo, che sia stato precedentemente e ripetutamente lavato con acqua distillata, prima a caldo e poi a freddo.

In queste condizioni si potevano eseguire esperienze sicure con soluzioni sino a 0,001 della normale e in qualche caso sino a 0,0005 della normale e sino alla temperatura di 90°, adoperando l'apparecchio che ora brevemente descriverò.

Ad un disco di ottone che serviva di coperchio ad un robusto recipiente cilindrico di rame erano fissate inferiormente tre grosse colonnette di ottone, della lunghezza di circa 21 cen-

timetri, riunite tra loro in basso da un disco di ottone, in guisa da costituire un sistema perfettamente rigido. Tra queste colonne era sostenuta, a circa cinque centimetri dal fondo del recipiente esterno, e mediante tre robuste viti orizzontali, una capsula di platino del diametro di circa 6 centimetri, a fondo piano e rinforzata esternamente mediante un robusto cerchio di rame saldato a forte. La parete interna della capsula e specialmente il suo fondo piano, costituivano uno degli elettrodi dell'apparecchio di misura delle resistenze; l'altro elettrodo era costituito da un disco di platino del diametro di circa tre centimetri, riunito ad un grosso filo pure di platino saldato in un tubo di vetro tenuto fisso nello stesso disco di ottone portante le colonnette di cui sopra si è detto, mantenuto così in posizione ben determinata e a distanza invariabile dal fondo della capsula.

Delle variazioni di questa distanza (del resto assai piccole) col variare della temperatura, si tenne naturalmente conto nel calcolo delle esperienze, facendo uso dei coefficienti di dilatazione dell'ottone, del platino e del vetro; ed analoga correzione si fece per le variazioni di area dell'elettrodo superiore di platino colla temperatura.

Prima di ogni esperienza si lavava il recipiente elettrolitico anzitutto con benzina bollente, poi con alcool bollente e infine con acqua distillata, a 95°! in questo modo l'aria aderente alle pareti (siano o no ricoperte di nero di platino) viene, si può dire completamente, scacciata, di guisa che è perfettamente evitata la formazione di bolle gassose alla superficie degli elettrodi, allorquando si innalza la temperatura della soluzione.

Ciò fatto, si versava nella capsula di platino un determinato volume di soluzione, che veniva immediatamente ricoperta con uno strato di olio di vaselina puro; poi questa parte dell'apparecchio veniva messa a posto nel recipiente esterno di rame, contenente tanta acqua distillata (ricoperta pure di vaselina) quanta era necessaria perchè la capsula fosse immersa sino a circa mezzo centimetro al disotto del suo bordo; nell'interno del recipiente si poneva pure un vasetto con calce sodata e barite per assorbire le traccie di anidride carbonica che, provenendo dall'esterno, potrebbero altrimenti diffondersi nella soluzione attraverso la vaselina. La temperatura veniva indicata da un ter-

mometro situato esternamente ed in vicinanza della capsula e l'acqua attorniante la capsula era mantenuta in agitazione dall'esterno. Tutto l'apparecchio ora descritto era poi immerso in un grande bagno munito di termometro, agitatore, ecc., del quale colle solite disposizioni si poteva elevare la temperatura e mantenerla quindi costante con molta precisione.

Coll'apparato ora descritto si potevano determinare le conducibilità delle soluzioni dalla decinormale alle più diluite: ma per causa della sua piccola capacità di resistenza non era conveniente adoperarlo per quelle più concentrate; per queste ultime si usava invece un comune apparecchio del tipo di Arrhenius (vale a dire con elettrodi circolari affacciati), poichè per le soluzioni più concentrate l'influenza delle sostanze disciolte dalle pareti di vetro è assolutamente trascurabile.

I due apparecchi venivano tarati, il primo con soluzione decinormale, il secondo con soluzione normale di KCl.

Le soluzioni da esaminare erano preparate con acqua due volte distillata, la prima in apparato comune, la seconda in apparecchio con tubo di quarzo; le più diluite tra queste soluzioni erano preparate e conservate in boccie di vetro di Jena, munite di tappo smerigliato e rivestite all'interno di un sottile strato di paraffina pura, fusa ripetutamente in acqua distillata.

Dalle resistenze determinate col solito metodo del ponte e del telefono si deduceva la conducibilità specifica K e da questa la conducibilità equivalente $\Lambda = \frac{k}{\eta}$ (essendo η la concentrazione in grammi-equivalenti per centimetro cubo) riferita alle solite unità (Cm^{-1} Ohm^{-1}) e detraendo in ogni caso la conducibilità dell'acqua, adoperata come solvente, alla stessa temperatura.

3° *Soluzioni di* $MgSO_4$. — Il sale adoperato fornito come puro da Kahlbaum veniva ulteriormente purificato per cristallizzazione e con esso si prepararono nove soluzioni dalla trinormale sino alla 0,001 della normale e se ne determinarono le conducibilità equivalenti da 10° a 90°. Nella tabella che segue t indica la temperatura e $c = 1000\,\eta$ la concentrazione in grammi-equivalenti per litro: la tavola annessa indica più chiaramente dei dati numerici la variazione di conducibilità colla concentrazione e colla temperatura.

TABELLA I.

Conducibilità equivalenti delle soluzioni di $MgSO_4$.

t	c=2,963	c=2	c=1	c=0,5	c=0,1	c=0,05	c=0,01	c=0,005	c=0,001
10°	13,29	17,62	23,78	28,75	40,98	46,24	62,65	69,00	81,49
18°	16,56	21,60	29,03	35,14	49,78	56,58	76,33	84,68	100,5
20°	17,32	22,61	30,39	36,68	52,16	59,34	80,08	88,44	105,6
30°	21,47	27,66	37,20	44,57	63.51	72,64	98,15	109,0	129,5
40°	25,65	32,51	43,87	52,78	74.77	86,72	117,7	131,0	155,6
50°	30,00	37,88	50,55	61,08	86,99	100,4	137,2	154,0	182,2
60°	33,65	42,82	56,60	68,46	98,19	113,6	155,8	177,0	210,0
70°	37,42	47,34	62,05	74,97	107,7	125,7	174,4	198,0	239,0
80°	40,72	51,13	66,97	80,49	115,9	136,2	189,2	217,2	—
90°	43,56	54,00	72,67	85,44	123,7	144,3	202,9	236,6	293,3

Dai dati di questa Tabella I si calcolarono i coefficienti di temperatura riferiti alla conducibilità equivalente a 18° per i varii intervalli di temperatura, servendosi della formula $\lambda = \frac{\Lambda_t - \Lambda_{18}}{t \cdot \Lambda_{18}}$ e i valori trovati sono raccolti nella Tabella II: i valori corrispondenti all'intervallo tra 10° e 18° risultano quindi negativi. Malgrado alcune piccole irregolarità dipendenti da inevitabili inesattezze nei numeri della Tabella I, si può subito osservare che l'influenza della temperatura e della concentrazione sul coefficiente λ è assai piccola, manifestandosi soltanto evidente dopo i 50° una diminuzione di λ col crescere della temperatura per le soluzioni di maggiore concentrazione: dei dati di questa tabella avremo poi bisogno per calcolare il grado di dissociazione elettrolitica delle soluzioni corrispondenti.

Dai dati delle Tabelle I e II si possono dedurre i valori Λ_∞ della conducibilità equivalente limite in due modi distinti. Poichè a 18° le mobilità degli ioni $\overset{++}{Mg}$ e $\overset{=}{SO_4}$ sono note con sufficiente sicurezza e rappresentate dai numeri 46 e 68 all'incirca, possiamo assumere come valore assai probabile di Λ_∞ a 18° la somma 78 + 46 = 114; se d'altra parte, ricorrendo ad una costruzione grafica, si rappresentano le concentrazioni sull'asse delle x e le relative conducibilità equivalenti a 18° sul-

TAABELLA II.

Coefficienti medii di temperatura delle soluzioni di $MgSO_4$.

tra 18° e	c = 2,963	c = 2	c = 1	c = 0,5	c = 0,1	c = 0,05	c = 0,01	c = 0,005	c = 0,001
10°	—0,0247	—0,0230	—0,0228	—0,0227	—0,0222	—0,0229	—0,0224	—0,0232	—0,0237
30°	0,0247	0,0234	0,0235	0,0224	0,0230	0,0236	0,0238	0,0240	0,0240
40°	0,0250	0,0230	0,0232	0,0228	0,0228	0,0242	0,0246	0,0249	0,0249
50°	0,0254	0,0236	0,0232	0,0231	0,0234	0,0241	0,0249	0,0256	0,0254
60°	0,0246	0,0234	0,0226	0,0226	0,0232	0,0240	0,0248	0,0260	0,0254
70°	0,0242	0,0229	0,0214	0,0218	0,0224	0,0235	0,0247	0,0258	0,0264
80°	0,0235	0,0221	0,0211	0,0208	0,0214	0,0227	0,0239	0,0252	—
90°	0,0226	0,0208	0,0209	0,0200	0,0206	0,0215	0,0230	0,0249	0,0266

l'asse delle y e si considera il tratto di curva corrispondente alle soluzioni più diluite (0,001 — 0,005 — 0,01 della normale) si trova che, se lo riguardiamo come un ramo di parabola tangente all'asse delle y, il punto di contatto coll'asse stesso, che si può costruire graficamente, corrisponde quasi esattamente all'ordinata 114, che rappresenta la conducibilità equivalente limite a quella temperatura. Ciò posto, la determinazione delle conducibilità limiti per tutte le altre temperature si fece in modo perfettamente analogo, vale a dire con una costruzione grafica, basandosi sulle conducibilità equivalenti delle soluzioni di concentrazione 0,01 — 0,005 — 0,001 alla temperatura in questione; si prese intanto nota dei risultati ottenuti in questo modo. Ma le stesse conducibilità limiti possono pure ricavarsi per altra via. Se si tien conto del fatto, già prima accennato, che cioè la concentrazione (come appare dalla Tabella II) ha assai piccola influenza sul valore del coefficiente di temperatura, si può approssimativamente assumere che i coefficienti di temperatura di una soluzione di diluizione estrema siano identici a quelli della soluzione millinormale; ammessa tale ipotesi, è evidente come dalla conducibilità equivalente limite a 18° si possano dedurre le conducibilità limiti alle altre temperature.

E poichè i valori ottenuti con questo metodo non differivano che del 1 % al massimo da quelli ottenuti coll'altro, si presero i valori medii come valori assai probabili della conducibilità equivalente limite. Tali valori sono riferiti qui sotto:

TABELLA III.

t	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	18°
Λ_∞	92,5	119,3	147,7	175,5	204,5	234,0	268,5	299,0	329,5	114,0

Si potrebbe domandare per quale ragione non si sono adoperate per la determinazione di Λ_∞ soluzioni ancora più diluite; ma le ragioni sono due, l'una di natura, dirò così relativa, l'altra assoluta. La prima si riferisce all'alterazione, che, specialmente a temperatura un po' elevata, subisce la soluzione in contatto delle pareti del recipiente e degli elettrodi, ancorchè di platino;

la seconda è legata alla natura della soluzione stessa e precisamente al fenomeno ben noto dell'idrolisi. Per quanto nel nostro caso per soluzioni di moderata diluizione l'idrolisi impegni solo una minima parte del sale disciolto e si possa quindi ritenere trascurabile, non si può più dire lo stesso per soluzioni di diluizioni estreme, quando cioè la concentrazione degli ioni del sale sia dello stesso ordine di grandezza di quella degli ioni $\overset{+}{H}$ e $\overset{-}{OH}$ provenienti dalla dissociazione dell'acqua: questa influenza dell'idrolisi deve ancor più prendersi in considerazione per le soluzioni di solfato di zinco che verranno esaminate in appresso. Ad ogni modo, allorquando in questi casi si parla di conducibilità equivalente limite, non si tratta di una conducibilità che effettivamente potrebbe possedere una soluzione di diluizione estrema (a prescindere dalle impurità dovute alle pareti del recipiente, ecc.) ma *della conducibilità equivalente che spetterebbe ad una tal soluzione, qualora si potesse arrivare sino alle più elevate diluizioni senza alterare la costituzione della sostanza disciolta.*

Ciò non pertanto il rapporto $\frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}$ rappresenterà sempre il rapporto fra il numero di ioni presenti nella soluzione e il numero di ioni presenti nel caso di completa dissociazione, vale a dire il grado di dissociazione della soluzione stessa: nella tabella seguente sono raccolti i valori dei gradi di dissociazione per tutte le soluzioni esaminate da 10° a 90°.

TABELLA IV.

Gradi di dissociazione delle soluzioni di $MgSO_4$.

t	$c=2,963$	$c=2$	$c=1$	$c=0,5$	$c=0,1$	$c=0,05$	$c=0,01$	$c=0,005$	$c=0,001$
10°	0,144	0,191	0,257	0,311	0,443	0,500	0,677	0,746	0,881
18°	0,145	0,189	0,255	0,316	0,437	0,497	0,678	0,743	0,884
20°	0,145	0,189	0,255	0,308	0,437	0,498	0,671	0,741	0,885
30°	0,145	0,187	0,252	0,302	0,430	0,492	0,665	0,738	0,877
40°	0,146	0,185	0,250	0,301	0,426	0,493	0,670	0,746	0,886
50°	0,147	0,185	0,247	0,299	0,425	0,491	0,671	0,753	0,890
60°	0,144	0,183	0,242	0,293	0,420	0,486	0,666	0,757	0,897
70°	0,139	0,176	0,231	0,279	0,401	0,468	0,650	0,737	0,890
80°	0,136	0,171	0,223	0,269	0,387	0,455	0,631	0,724	—
90°	0,132	0,164	0,220	0,258	0,367	0,438	0,616	0,718	0,890

Come già si poteva prevedere dall'andamento delle curve che rappresentano la conducibilità equivalente delle soluzioni studiate, il grado di dissociazione elettrolitica diminuisce sensibilmente (specie dopo i 50°) col crescere della temperatura, ad eccezione dell'ultima soluzione più diluita, per la quale, a parte piccole oscillazioni nei valori riferiti, dovute probabilmente a inevitabili errori sperimentali, il grado di dissociazione si mantiene pressochè costante a tutte le temperature.

Come è noto, per rappresentare il grado di dissociazione in funzione delle concentrazioni sono state proposte varie formule, delle quali le più adoperate son quelle di OSTWALD, RUDOLPHI o VAN'T HOFF, e che corrispondono rispettivamente a:

$$K = \frac{c\alpha^2}{1-\alpha} \qquad K = \frac{\alpha^2 c^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha} \qquad K = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}}}{1-\alpha}$$

essendo K una costante (a temperatura costante) differente naturalmente da una formula all'altra: la prima delle tre si deduce dall'applicazione della legge delle masse alla soluzione elettrolitica e come è noto, vale solo per elettroliti deboli; le altre due sono da riguardarsi come formule empiriche. Se al posto di α e c poniamo nelle tre formule precedenti i valori ricavati dalla Tabella IV, non si ottengono affatto dalla prima per K valori costanti, come era da aspettare: mentre soddisfano meglio alla costanza di K la seconda e la terza, quando si escludano le soluzioni di piccolissima concentrazione, come appare dagli esempi qui riportati:

	$c=2$	$c=1$	$c=0,1$	$c=0,05$	$c=0,01$	$c=0,005$	$c=0,001$
K_{18} (Ostwald) =	0,0881	0,0873	0,0339	0,0245	0,0143	0,0107	0,007
K_{18} (Rudolphi) =	0,0622	0,0873	0,106	0,110	0,143	0,153	0,213
K_{18} (Van't Hoff) =	0,163	0,173	0,163	0,155	0,173	0,180	0,226
K_{90} (Vant' Hoff) =	0,112	0,132	0,117	0,115	0,125	0,153	0,240

4° Il fatto che il grado di dissociazione diminùisce col crescere della temperatura e l'altro fatto che la diluizione di una soluzione di solfato di magnesio è accompagnata da uno sviluppo di calore vanno d'accordo colla legge di Van't Hoff, secondo la quale un innalzamento di temperatura sposta l'equi-

librio in quel senso in cui esso spostamento avviene con assorbimento di calore. Nel nostro caso infatti una diluizione della soluzione, cioè un aumento del grado di dissociazione essendo accompagnato da sviluppo di calore, un aumento di temperatura produrrà il processo inverso, cioè una diminuzione nel grado di dissociazione.

La verifica quantitativa della formula di Van't Hoff

$$q = -\frac{RT^2}{K}\frac{dK}{dT}$$

che nell'ipotesi di q costante nell'intervallo di temperatura $T_2 - T_1$ può scriversi (dopo integrazione) nel nostro caso:

$$(1) \qquad \frac{q(T_1 - T_2)}{T_1 T_2} = 4{,}58 \left\{ \log \frac{\alpha_2^2}{1-\alpha_2} - \log \frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_1} \right\}$$

non può essere fatta che in maniera assai grossolana e ciò per varie ragioni. Anzitutto i valori di q sono ricavati dalle esperienze di Thomsen relative al calore di diluizione del solfato di magnesio, le quali (essendo eseguite con scopo differente) non hanno quella precisione che si richiederebbe in questo caso e si riferiscono alla temperatura di circa 20°; d'altra parte il calore q di dissociazione relativo a una grammo-molecola calcolato dalla (1) non si può ricavare se non riferendosi a un intervallo abbastanza grande di temperatura, poichè altrimenti α_1 e α_2 sarebbero tra loro così poco differenti che un piccolo errore nel valore di ciascuno porterebbe un errore troppo grande nel valore di q; e in un intervallo assai grande di temperatura, per esempio da 20° a 80°, non è lecito ammettere che sia q costante ed uguale al valore che avrebbe a 20°; e infine poi la forma del secondo membro della (1) suppone applicabile all'elettrolito la legge di diluizione di Ostwald, il che non può farsi se non per variazioni molto piccole di concentrazione.

Ad ogni modo veniamo al calcolo relativo. Il Thomsen trovò che partendo da una soluzione all'11,67 % di solfato di magnesio (cioè di concentrazione 2,18 in grammi-equivalenti) e diluendola sino alla concentrazione 1,096 si svolgono 45 calorie per grammo-molecola; e riducendo quest'ultima alla concentrazione 0,551, si svolgono per ogni grammo-molecola di sostanza

disciolta 69 piccole calorie: se, facendo uso dei dati della Tabella IV, si osserva che i gradi di dissociazione delle tre soluzioni sono rispettivamente:

$$c = 2{,}18 \qquad c = 1{,}096 \qquad c = 0{,}551$$
$$\alpha_{20} = 0{,}181 \qquad \alpha_{20} = 0{,}249 \qquad \alpha_{20} = 0{,}303$$

si trova con semplici proporzioni che il numero di piccole calorie svolte per la dissociazione di una grammo-molecola di solfato di magnesio verrebbe rappresentata da 953, 808, 1280 rispettivamente, che dànno come media $q = 1008$ piccole calorie; questo, si intende, nell'*ipotesi che la dissociazione elettrolitica sia l'unico processo con sviluppo di calore che ha luogo durante la diluizione*. Se d'altra parte calcoliamo il valore di q dalla (1) Tra $T_1 = 273 + 20^\circ$ e $T_2 = 273 + 90^\circ$ si trovano per le soluzioni binormale, normale e seminormale rispettivamente i valori 946, 1010, 1210, che dànno come media 1055, numero assai prossimo al valore sperimentale dedotto dai dati del Thomsen.

5° Un' ultima questione rimane da esaminare ed è quella della divergenza tra i valori del grado di dissociazione ricavati dalle misure di conducibilità elettrica e quelli che si potrebbero ottenere dalle misure crioscopiche ed ebulliscopiche. Dalle misure del Raoult (1), del Kahlenberg (2) e dell'Hausrath (3) relative all'abbassamento di temperatura di congelamento per le soluzioni di solfato di magnesio abbiamo ricavato i dati del seguente prospetto, in cui m rappresenta il numero di grammi di sostanza per 100 di acqua, c la concentrazione della soluzione in grammi equivalenti, t l'abbassamento di temperatura osservato in gradi e t_0 l'abbassamento calcolato della solita formula

$$t_0 = E \cdot \frac{m}{M} = \frac{18{,}5\, m}{120{,}4}$$

corrispondente all'ipotesi di veruna dissociazione; α sarebbe il grado di dissociazione dato da $\alpha = \frac{t - t_0}{t_0}$.

---

(1) Raoult, " Zeit. Phys. Chem. „, 1888.

(2) Kahlenberg, " Journal of Phys. Chem. „, 1901.

(3) Hausrath, " Ann. der Physik „, 1902.

m	c	t	t_0	α
0,00813	0,00135	0°,002221	0°,001250	0,775
0,02867	0,00476	0°,007382	0°,004412	0,674
0,1520	0,0252	0°,03430	0°,02337	0,469
0,699	0,116	0°,154	0°,1076	0,429
2,534	0,421	0°,469	0°,3899	0,179
5,994	0,993	1°,006	0°,922	0,091
9,768	1,611	1°,629	1°,502	0,085

Se confrontiamo i valori di α qui calcolati e corrispondenti alla temperatura di circa 0° con quelli che si possono dedurre per extrapolazione dai dati della Tabella IV pure per la temperatura di 0°, si osserva subito tra gli uni e gli altri una differenza notevole; ma la divergenza si fa ancora più manifesta quando si esaminino le esperienze ebulliscopiche. Se infatti, riferendoci anche qui alle esperienze del Kahlenberg gia citate, indichiamo con m il numero di grammi di sale aggiunti a 100 di acqua, con c la concentrazione della soluzione, con Θ l'innalzamento di temperatura di ebollizione osservato e con Θ_0 l'innalzamento calcolato colla formula $\Theta_0 = E \cdot \frac{m}{M} = 5,2 \cdot \frac{m}{120,4}$ corrispondente al caso di una soluzione di sostanza non dissociata, si hanno i seguenti dati:

m	c	θ	θ_0
2,733	0,453	0,097	0,118
7,236	1,201	0,281	0,313

vale a dire l'innalzamento osservato risulta minore di quello calcolato nell'ipotesi di dissociazione nulla e in conseguenza in questo caso il grado di dissociazione resulterebbe negativo.

Per dare una spiegazione di questo fatto, supporremo, come si fa generalmente in questi casi, che il grado di dissociazione quale ci vien dato dal rapporto $\frac{\Lambda}{\Lambda_c}$ (Tabella IV) rappresenti ve-

ramente la frazione del numero totale di molecole che si scindono in ioni, ma che le molecole del sale non dissociate elettroliticamente si associno poi tra loro in guisa da formare dei gruppi molecolari complessi. Se in tale ipotesi, che non è l'unica possibile, ma di tutte la più semplice, indichiamo con s *il fattore di associazione*, una soluzione che conterrebbe (in assenza di associazione molecolare e dissociazione elettrolitica) N molecole semplici e darebbe quindi luogo all'innalzamento Θ_0 di temperatura di ebollizione, verrà a contenere tra molecole complesse ed ioni il numero di $2N\alpha + \frac{N(1-\alpha)}{s}$ e darà quindi luogo ad un innalzamento θ tale che:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{2N\alpha + \frac{N(1-\alpha)}{s}}{N} = 2\alpha + \frac{1-\alpha}{s}$$

da cui potremo ricavare

$$(2) \qquad \alpha = \frac{\theta s - \theta_0}{\theta_0(2s-1)} \qquad\qquad (3) \qquad s = \frac{\theta_0(1-\alpha)}{\theta - 2\alpha\theta_0}$$

che nel caso di $s = 1$ si riducono alla solita formula

$$\alpha = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0}.$$

La formula (3) ponendo per α i valori della Tabella IV, permette di avere un' idea dei valori del fattore di associazione s; se per esempio ci riferiamo alle prime esperienze dell'ultima tabella, per cui $\Theta = 0,097$, $\Theta_0 = 0,118$ e per α, tenuto conto della concentrazione e della temperatura, prendiamo il valore $\alpha = 0,25$, si otterrà:

$$s = \frac{0,118(1-0,25)}{0,097 - 2 \,.\, 0,25 \,.\, 0,118} = 2,33$$

ed un calcolo analogo si potrebbe fare riferendoci alle altre esperienze ebullioscopiche e crioscopiche. Non deve far meraviglia che il fattore di associazione abbia valori più elevati alla temperatura di ebollizione che alla temperatura di congelamento della soluzione: anzi questo fatto rientra nella regola generale secondo la quale, diminuendo col crescere della temperatura le associazioni delle molecole del solvente tra di loro, diminuisce

pure il potere dissociante del solvente e quindi si abbassa da una parte la dissociazione elettrolitica della soluzione ed aumenta il fattore di associazione delle molecole non dissociate.

6° *Soluzioni di solfato di zinco.* — Le esperienze per le soluzioni di solfato di zinco furono condotte in modo perfettamente analogo a quelle per il solfato di magnesio; nella tabella che segue sono date le conducibilità equivalenti tra le temperature di 10° e 90° e per le concentrazioni dalla trinormale alla millinormale.

Tabella V.

Conducibilità equivalenti delle soluzioni di Z_4SO_4.

(Vedi Tavola annessa).

t	c=2,917	c=2	c=1	c=0,5	c=0,1	c=0,05	c=0,01	c=0,005	c=0,001
10°	12,90	16,53	21,76	26,10	37,71	43,38	60,43	67,24	79,05
18°	15,86	20,18	26,28	31,56	45,28	52,50	73,00	81,62	98,12
20°	16,63	20,85	27,42	32,98	47,69	55,23	76,65	85,48	103,6
30°	20,49	25,78	33,41	40,10	58,15	66,92	93,92	106,0	128,4
40°	24,48	30,51	39,51	47,16	68,73	79,08	111,8	127,1	154,9
50°	28,62	34,95	45,16	53,76	78,78	91,71	130,4	148,9	183,8
60°	32,30	39,22	50,20	59,76	87,08	102,3	147,4	168,2	210,8
70°	35,62	43,03	54,58	64,86	95,63	111,5	161,9	188,5	230,4
80°	38,11	46,50	58,31	69,02	101,2	119,8	172,6	205,1	260,1
90°	40,47	48,92	60,70	71,64	105,7	124,7	184,7	219,6	287,6

Dai dati di questa tabella si calcolarono (in modo analogo a quello tenuto per le soluzioni di $MgSO_4$) i coefficienti di temperatura riferiti alla conducibilità a 18°: e i loro valori sono qui sotto raccolti.

Ragionando sui dati delle Tabelle V e VI come si è fatto per le soluzioni di solfato di magnesio, assumendo cioè come valore della conducibilità limite a 18° il numero 115, somma delle mobilità 47 e 68 degli ioni $\overset{++}{Zn}$ e $\overset{=}{SO_4}$, si possono calcolare le conducibilità equivalenti limiti alle altre temperature, e si avrà:

TABELLA VI.

Coefficienti medii di temperatura delle soluzioni di $ZnSO_4$.

tra 18° e	$c = 2,97$	$c = 2$	$c = 1$	$c = 0,05$	$c = 0,1$	$c = 0,05$	$c = 0,01$	$c = 0,005$	$c = 0,001$
10°	—0,0239	—0,0226	—0,0215	—0,0216	—0,0210	—0,0217	—0,0215	—0,0221	—0,0243
30°	0,0243	0,0231	0,0226	0,0225	0,0236	0,0229	0,0239	0,0249	0,0257
40°	0,0247	0,0233	0,0229	0,0225	0,0235	0,0230	0,0242	0,0253	0,0263
50°	0,0251	0,0229	0,0224	0,0220	0,0231	0,0233	0,0245	0,0258	0,0273
60°	0,0247	0,0225	0,0212	0,0208	0,0215	0,0226	0,0243	0,0253	0,0274
70°	0,0240	0,0218	0,0207	0,0203	0,0214	0,0216	0,0234	0,0252	0,0259
80°	0,0226	0,0210	0,0197	0,0191	0,0199	0,0206	0,0220	0,0244	0,0266
90°	0,0216	0,0198	0,0182	0,0176	0,0185	0,0191	0,0213	0,0234	0,0268

TABELLA VII.

t	10°	18°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Λ_c	94,5	115,0	121,2	151,2	179,8	213,0	245,0	269,3	301,0	335,5

I valori dei gradi di dissociazione elettrolitica delle soluzioni di solfato di zinco esaminate sono raccolti nella tabella che segue:

TABELLA VIII.

Grado di dissociazione per le soluzioni di $ZnSO_4$.

t	$c=2,97$	$c=2$	$c=1$	$c=0,5$	$c=0,1$	$c=0,05$	$c=0,01$	$c=0,005$	$c=0,001$
10°	0,137	0,175	0,230	0,276	0,399	0,459	0,639	0,712	0,837
18°	0,138	0,176	0,229	0,275	0,394	0,457	0,635	0,710	0,853
20°	0,137	0,172	0,226	0,272	0,394	0,456	0,633	0,705	0,855
30°	0,136	0,171	0,221	0,265	0,385	0,443	0,621	0,701	0,849
40°	0,136	0,170	0,220	0,262	0,382	0,440	0,622	0,707	0,861
50°	0,134	0,164	0,212	0,253	0,370	0,431	0,612	0,699	0,863
60°	0,132	0,160	0,205	0,244	0,356	0,418	0,602	0,687	0,860
70°	0,132	0,160	0,203	0,241	0,355	0,414	0,601	0,699	0,856
80°	0,126	0,155	0,194	0,229	0,336	0,398	0,574	0,681	0,864
90°	0,121	0,146	0,181	0,214	0,315	0,372	0,551	0,655	0,857

Come appare dai dati riferiti il comportamento delle soluzioni di solfato di zinco è analogo a quello delle soluzioni di solfato di magnesio: se si fa eccezione per le soluzioni più diluite, il grado di dissociazione (all'infuori di qualche irregolarità dipendente da piccoli errori sperimentali) va diminuendo, specialmente dopo i 50°, col crescere della temperatura: questo fatto è anche qui in accordo colla regola di Van't Hoff, perchè anche per il solfato di zinco il calore di dissociazione (dedotto dal calore di diluizione secondo Thomsen) appare positivo: ma una verifica quantitativa della formula (1) non dette risultati così concordanti coll'esperienza, come accadeva per il solfato di zinco, probabilmente per le ragioni di cui allora si fece parola.

Anche in questo caso la formula di Ostwald non può servire a rappresentare il grado dissociazione in funzione della concentrazione: meglio soddisfa ai risultati sperimentali la formula di Rudolphi e meglio ancora quella di Van't Hoff, come appare dallo specchietto seguente, in cui sono riportati i valori della quantità K (che dovrebbe essere costante rispetto alla concentrazione) calcolata per la temperatura di 18°, secondo le tre formole accennate.

	$c=2$	$c=1$	$c=0,1$	$c=0,05$	$c=0,01$	$c=0,005$	$c=0,001$
K_{18} (Ostwald)	0,0752	0,0680	0,0256	0,0192	0,0110	0,0087	0,0050
K_{18} (Rudolphi)	0,0532	0,0680	0,0811	0,0860	0,110	0,123	0,157
K_{18} (Van't Hoff)	0,127	0,142	0,129	0,119	0,137	0,146	0,168

Le esperienze crioscopiche ed ebullioscopiche conducono anche per il caso del solfato di zinco a valori del grado di dissociazione generalmente in disaccordo con quelli dedotti dal rapporto $\frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}$. Riportiamo qui alcuni dati relativi alle esperienze crioscopiche eseguite da Raoult (l. c.), Kahlenberg (l. c.) ed Hausrat (l. c.), avendo nella tabella le varie lettere lo stesso significato che nella precedente.

m	c	t_0	t	α
0,00644	0,00080	0°,000740	0°,001387	0,874
0,01746	0,00217	0°,002005	0°,003500	0,745
0,08333	0,0104	0°,00957	0°,01499	0,564
0,2246	0,0278	0°,0258	0°,03701	0,433
2,063	0,255	0°,237	0°,285	0,203
5,026	0,623	0°,577	0°,625	0,083
16,169	2,00	1°,86	1°,87	0,005

Il disaccordo è ancora maggiore quando si consideri il risultato delle esperienze ebullioscopiche, relativamente alle quali riporto solo i seguenti dati (Kahlenberg, l. c.).

m	c	θ	θ_0
2,886	0,355	0,080	0,093
6,647	0,827	0,169	0,215
13,389	1,658	0,372	0,381

Anche in questo caso l'innalzamento di temperatura osservato è minore (come per il solfato di magnesio) di quello calcolato, il che può avvenire, malgrado la dissociazione elettrolitica, per causa delle associazioni molecolari delle molecole indissociate, non potendosi naturalmente escludere neppure le associazioni tra le molecole della sostanza disciolta o quelle del solvente.

In conclusione, le soluzioni di solfato di zinco si comportano in modo perfettamente analogo a quelle di solfato di magnesio.

7° *Soluzioni di acido solforico.* — L'acido solforico adoperato era acido puro di Kahlbaum; le soluzioni furono esaminate sino alla concentrazione 0,0005 e le conducibilità equivalenti sono riportate nella tabella che segue, ove le lettere hanno il medesimo significato delle tabelle precedenti. (Vedi Tavola annessa).

Tabella IX.

Conducibilità equivalenti delle soluzioni di H_2SO_4.

(Vedi Tavola annessa).

t	c=2,917	c=2,013	c=1,003	c=0,5	c=0,1	c=0,01	c=0,005	c=0,001	c=0,0005
10°	149,2	162,8	176,9	183,9	204,6	275,8	291,0	315,8	321,4
18°	167,4	182,5	197,7	204,8	227,1	307,5	329,0	362,0	366,5
20°	172,2	187,1	202,2	210,0	232,0	316,3	337,8	373,2	377,6
30°	193,4	210,4	224,9	233,1	255,6	352,3	379,2	428,2	432,9
40°	213,6	230,9	244,1	252,3	277,1	382,5	416,7	482,4	488,9
50°	232,5	248,8	263,2	268.8	292.6	405,9	444,0	526,7	540,7
60°	248,6	264,5	279,6	283,0	307,0	421,5	463,2	559,0	579,9
70°	262,8	277,5	293,0	295,7	319,4	—	473,7	587,3	614,2
80°	274,5	290,8	304,2	308,5	329,0	448,9	481,1	595,9	633,8
90°	283,7	302,4	312,4	319,8	337.7	458,7	486,0	604,3	651,5

TABELLA X.

Coefficienti di temperatura delle soluzioni di H_2SO_4.

tra 18° e	$c=2,917$	$c=2,013$	$c=1,003$	$c=0,5$	$c=0,1$	$c=0,001$	$c=0,005$	$c=0,001$	$c=0,0005$
10°	—0,0136	—0,0135	—0,0131	—0,0128	—0,0124	—0,0128	—0,0144	—0,0160	—0,0153
30°	0,0129	0,0127	0,0115	0,0115	0,0105	0,0121	0,0127	0,0152	0,0151
40°	0,0126	0,0121	0,0107	0,0105	0,0100	0,0111	0,0121	0,0151	0,0152
50°	0,0122	0,0114	0,0103	0,00972	0,00901	0,0100	0,0109	0,0142	0,0148
60°	0,0116	0,0105	0,00998	0,00905	0,00838	0,00883	0,00971	0,0129	0,0139
70°	0,0110	0,0101	0,00927	0,00850	0,00782	—	0,00846	0,0120	0,0130
80°	0,0101	0,00957	0,00869	0,00863	0,00724	0,00740	0,00746	0,0104	0,0118
90°	0,00965	0,00913	0,00806	0,00776	0,00677	0,00685	0,00664	0,00929	0,0108

mentre nello specchietto (pag. 21) sono riferiti i coefficienti di temperatura, calcolati col solito modo.

I valori delle conducibilità equivalenti limiti sono raccolti nel seguente prospetto:

TABELLA XI.

Conducibilità equivalenti limiti delle soluzioni di H_2SO_4.

t	10°	18°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Λ_∞	338,5	386,0	397,2	453,5	512,0	566,5	613,0	646,5	668,0	686,0

Poichè nel caso di soluzioni di acido solforico non si deve tener conto dell'idrolisi, nemmeno alle più piccole concentrazioni, sembrerebbe che per la determinazione delle conducibilità limiti si potesse ricorrere a soluzioni di diluizione ancora maggiore di quelle qui adoperate; tuttavia ci potremo facilmente convincere che con ciò si arriverebbe a risultati illusori, esaminando i risultati di alcune esperienze del Whetham (1).

Il Whetham determinò le conducibilità di soluzioni di acido solforico in apparecchio completamente di platino e alla temperatura di congelamento delle soluzioni stesse per concentrazioni da 0,03 sino a 0,00005 della normale.

Deducendo poi dalle misure eseguite le conducibilità equivalenti alla temperatura di 0°, egli trovò che si aveva un massimo di conducibilità equivalente all'incirca per la soluzione a 0,0005 della normale e per le soluzioni più diluite la conducibilità equivalente tornava a diminuire.

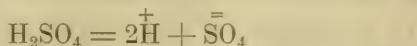
Da questo il Whetham concluse che il grado di dissociazione sia uguale ad uno per la soluzione 0,0005, e in tale ipotesi calcolò i gradi di dissociazione per tutte le altre soluzioni esaminate, trovando così:

c	0,03	0,02	0,015	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005	0,0002	0,0001	0,00005
α	0,784	0,821	0,851	0,883	0,931	0,974	0,992	1,000	0,984	0,944	0,880

(1) WHETHAM, " Zeit. Phys. Chem. „, 1900.

Per quanto però non sia da sollevare alcun dubbio sui risultati numerici delle esperienze, che devono essere state eseguite dal Whetham con ogni cura, specialmente nella preparazione di soluzioni così diluite, è invece molto discutibile la conclusione trattane, che cioè il grado di dissociazione, a partire dalla soluzione a 0,0005 della normale, vada nuovamente diminuendo; nè si comprende come un' ulteriore aggiunta di solvente a una soluzione già così diluita possa spostare l'equilibrio in senso opposto alle aggiunte di acqua precedenti. Secondo ogni probabilità la diminuzione riscontrata di conducibilità equivalente per le soluzioni più diluite di H_2SO_4 deve dipendere dal fatto che la concentrazione calcolata non è in questi casi la concentrazione effettiva e ciò verisimilmente per una di queste due ragioni che qui sono semplicemente accennate. Anzitutto non si può escludere una, per quanto debole, azione chimica tra l'acido solforico disciolto e le pareti del recipiente, per quanto di platino, poichè a rigore tra due sostanze diverse in presenza sempre si deve considerare si stabilisca uno stato di equilibrio; oltre di ciò può aver luogo una specie di assorbimento degli ioni (sia pur di una sola specie) dell'elettrolito disciolto per parte delle pareti metalliche del recipiente, assorbimento che possiamo ritenere proporzionale alla superficie del metallo stesso e che difatti si manifesta in maniera più facilmente riconoscibile quando il metallo sia molto diviso (platino colloidale). La conclusione di tutto questo è che il tentativo di determinare direttamente le conducibilità di soluzioni estremamente diluite anche in recipienti di platino può condurre a risultati falsi ed illusorii: per conseguenza riterremo come valori delle conducibilità equivalenti limiti alle varie temperature quelli dati dalla Tabella XI sopra riferita.

La determinazione del grado di dissociazione elettrolitica delle soluzioni di H_2SO_4 non è un problema completamente determinato se non per le soluzioni di piccole concentrazioni per le quali si possa ritenere la dissociazione aver luogo esclusivamente o quasi esclusivamente secondo l'equazione

$$H_2SO_4 = 2\overset{+}{H} + \overset{=}{SO_4}$$

mentre per le soluzioni di media concentrazione deve prendersi in considerazione anche l'altra dissociazione

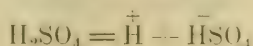
$$H_2SO_4 = \overset{+}{H} + \overset{-}{HSO_4}$$

come in tutti i casi di acidi polibasici. La determinazione della concentrazione degli ioni delle tre specie sarebbe solo possibile (almeno a date temperature) confrontando i valori delle conducibilità coi dati crioscopici od ebullioscopici, qualora si potesse a priori escludere, il che non è per niente probabile, che tra le molecole indissociate si formino associazioni molecolari. Per conseguenza il rapporto $\frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}$ rappresenterà per le soluzioni più diluite soltanto il grado di dissociazione conforme alla comune definizione; tuttavia nella tabella che segue sono dati i valori di quel rapporto anche per le soluzioni di maggior concentrazione.

TABELLA XII.

Valori del rapporto $\frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}$ *per le soluzioni di* H_2SO_4.

t	*c*=2,917	*c*=2,013	*c*=1,003	*c*=0,5	*c*=0,1	*c*=0,01	*c*=0,005	*c*=0,001	*c*=0,0005
10°	0,441	0,481	0,523	0,543	0,605	0,815	0,860	0,933	0,950
18°	0,434	0,473	0,512	0,531	0,588	0,797	0,852	0,937	0,950
20°	0,433	0,471	0,509	0,529	0,584	0,796	0,851	0,939	0,951
30°	0,427	0,464	0,496	0,514	0,564	0,777	0,836	0,944	0,955
40°	0,417	0,451	0,477	0,493	0,541	0,747	0,814	0,942	0,955
50°	0,410	0,439	0,465	0,471	0,517	0,717	0,784	0,930	0,954
60°	0,406	0,432	0,456	0,462	0,501	0,688	0,756	0,912	0,946
70°	0,406	0,429	0,453	0,457	0,494	—	0,733	0,908	0,950
80°	0,410	0,435	0,455	0,462	0,493	0,672	0,720	0,892	0,949
90°	0,413	0,440	0,456	0,466	0,492	0,669	0,709	0,881	0,950

Se, almeno per le soluzioni dalle decinormali in poi, consideriamo che il rapporto $\frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}$ rappresenti il grado di dissociazione elettrolitica, è facile vedere che la regola di Van't Hoff è verificata quanto al senso della variazione del grado di dissociazione col crescere della temperatura; per una verifica della relazione (1) ci riferiremo ai dati del Petersen (1), secondo il quale il calore di dissociazione dell'acido solforico è di 2300 piccole

(1) PETERSEN, " Zeit. Phys. Chem. „, 1893, 11.

calorie per grammo-molecola. Eseguendo il calcolo per la soluzione decinormale tra 20° e 80° si trova $q = 1843$ e tra 20° e 70° $q = 2110$, mentre per la soluzione centinormale risulta tra 20° e 80° $q = 2820$. Si tratta dunque di numeri dello stesso ordine di grandezza di quello stabilito dal Petersen; e del resto una migliore coincidenza non è lecito sperare per le ragioni addotte a proposito della stessa verifica eseguita per il calore di dissociazione del solfato di magnesio.

Sarebbe pur facile riconoscere che delle tre relazioni di Ostwald, Rudolphi e Van't Hoff che dovrebbero servire ad esprimere il grado di dissociazione in funzione della concentrazione, nessuna è adatta a rappresentare i resultati sperimentali in tutto l'intervallo di concentrazione relativo alle soluzioni esaminate: tuttavia tra la concentrazione 0,1 e 0,005 la formula di Van't Hoff dà per K valori non troppo differenti, come si può rilevare dallo specchietto seguente:

	c=2,013	c=1,003	c=0,5	c=0,1	c=0,01	c=0,005	c=0,001
K_{18} (Van't Hoff)	0,876	0,752	0,583	0,346	0,348	0,376	0,454
K_{90} (Vant' Hoff)	0,740	0,565	0,530	0,225	0,166	0,145	0,220

Rimane per ultimo da dire qualche cosa relativamente alle esperienze crioscopiche ed ebullioscopiche: ma ci limiteremo alle prime, perchè sono quelle per le quali, (dato il valore numerico elevato del coefficiente di abbassamento) si sono potute eseguire esperienze anche con soluzioni molto diluite. Ci serviremo perciò dei dati dell'Hausrath (l. c.) e del Pickering (1): queste ultime si riferiscono alle soluzioni di maggior concentrazione e si trovano del resto in sufficiente accordo colle poche esperienze di verifica che io stesso ho voluto ripetere. Le lettere della tabella qui sotto riportata hanno lo stesso significato che nelle analoghe tabelle precedenti.

Se confrontiamo i valori di α così ricavati e relativi alla temperatura di circa 0° con quelli che si possono ottenere dalla Tabella XII per extrapolazione alla temperatura di 0° si vede che per le soluzioni più diluite essi sono in sufficiente accordo:

(1) Pickering, " Zeit. Phys. Chem. ", 1891.

la divergenza va però crescendo mano a mano che si procede verso le soluzioni di maggiore concentrazione.

m	c	t	t_0	$\alpha = \frac{t-t_0}{2t_0}$
0,01313	0,0027	0,007026	0,002476	0,921
0,04095	0,0084	0,02102	0,007722	0,861
0,09239	0,0188	0,04507	0,01742	0,793
0,1614	0,033	0,07569	0,03044	0,743
0,3633	0,074	0,1582	0,06851	0,651
0,8256	0,168	0,333	0,1557	0,568
1,622	0,328	0,630	0,306	0,529

8° *Conclusioni.* — 1° Nel presente lavoro sono state determinate le conducibilità, i coefficienti di temperatura e i gradi di dissociazione elettrolitica delle soluzioni di $ZuSO_4$, $MgSO_4$, H_2SO_4 della temperatura di 10° sino a 90° e per concentrazioni della trinormale sino alla millinormale (esclusi i gradi di dissociazione per l' H_2SO_4 in soluzione concentrata).

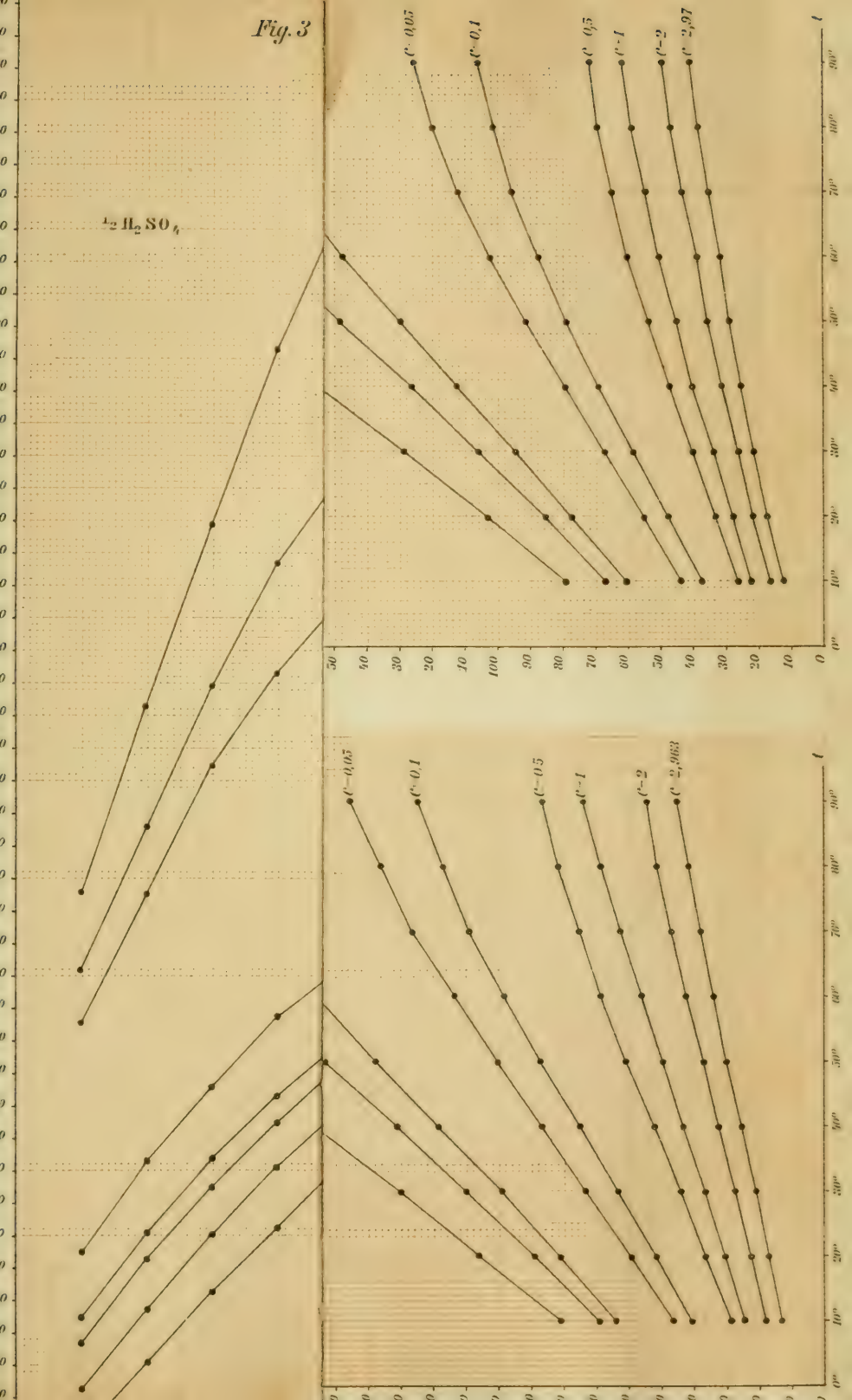
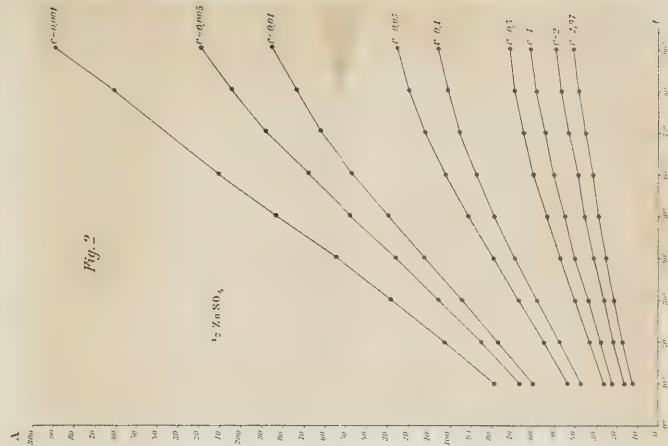
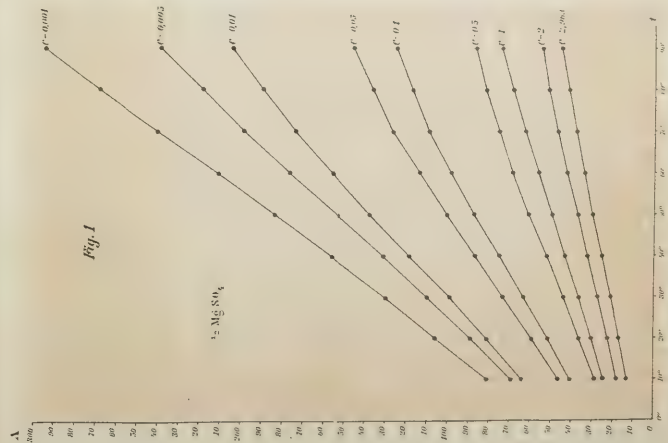
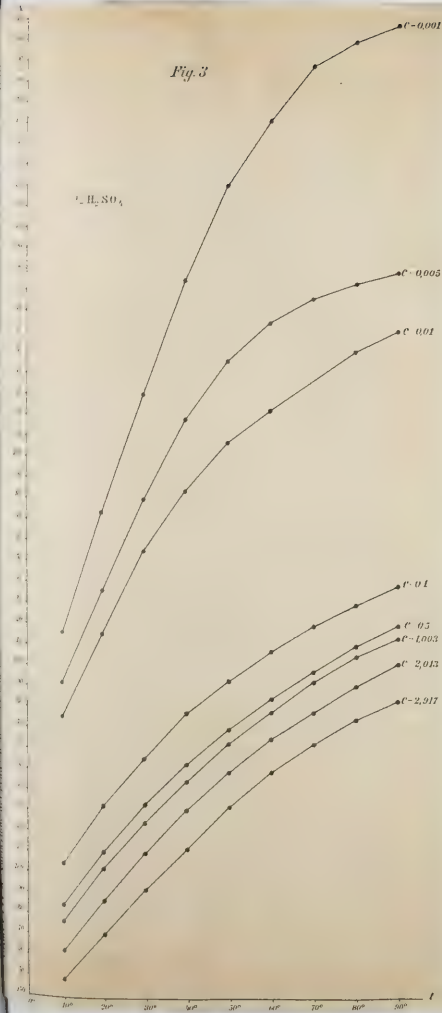
2° La variazione del grado di dissociazione colla temperatura è, quanto al segno, in accordo colla legge di Van't Hoff.

3° Allo scopo di esprimere il grado di dissociazione in funzione della concentrazione serve abbastanza bene, in un intervallo di variazione di concentrazione non troppo grande, la formula di Rudolphi e meglio ancora quella di Van't Hoff.

4° La relazione (1) fondamentale può ritenersi approssimativamente verificata per il solfato di magnesio e l'acido solforico.

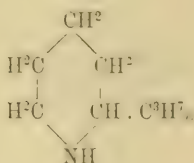
5° Nelle soluzioni di $MgSO_4$ e $ZnSO_4$ le molecole indissociate dànno luogo a molecole complesse.

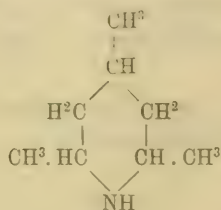
Torino. Laboratorio di Fisica della R. Università.
Giugno 1908.

Fig. 3
½ H_2SO_4
C=0,05
C=0,1
C=0,5
C=1
C=2
C=2,963
C=0,05
C=0,1
C=0,5
C=1
C=2
C=2,97
t
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 10 20 30 40 50
0° 10° 20° 30° 40° 50° 60° 70° 80° 90°

Nuovi isomeri della conina ed altre idrobasi.

Nota del Socio ICILIO GUARESCHI.

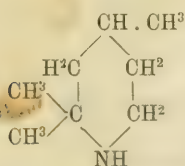
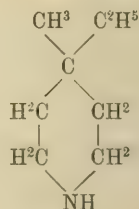
Esistono molti isomeri della conina naturale o α *propilpiperidina*:

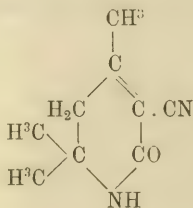
$$
\begin{array}{ccc}
 & CH^2 & \\
 & / \quad \backslash & \\
H^2C & & CH^2 \\
| & & | \\
H^2C & & CH\,.\,C^3H^7 \\
 & \backslash \quad / & \\
 & NH &
\end{array}
$$

quali, ad esempio, le isopropilpiperidine, le metiletilpiperidine e la trimetilpiperidina simmetrica:

$$
\begin{array}{ccc}
 & CH^3 & \\
 & | & \\
 & CH & \\
 & / \quad \backslash & \\
H^2C & & CH^2 \\
| & & | \\
CH^3.\,HC & & CH\,.\,CH^3 \\
 & \backslash \quad / & \\
 & NH &
\end{array}
$$

Tutte queste basi però contengono i gruppi alchilici attaccati ad atomi di carbonio diversi, nessuna di esse contiene due alchili, eguali o diversi, uniti ad un medesimo atomo di carbonio; cioè, nessuna delle piperidine conosciute contiene due gruppi alchilici ad un atomo di carbonio, nella forma di:

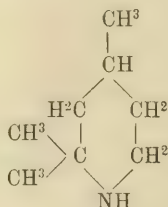
$$
\begin{array}{ccc}
R & & R' \\
 & \backslash \quad / & \\
 & C & \\
 & / \quad \backslash &
\end{array}
$$

quale sarebbero ad esempio la γ metil β′β′ dimetilpiperidina e la γγ metiletilpiperidina:

```
                                                  CH³  C²H⁵
                                                    \  /
            CH . CH³                                 C
             /  \                                   / \
         H²C     CH²              e             H²C    CH²
   CH³\   |       |                              |      |
       >C        CH²                            H²C    CH²
   CH³/   \     /                                 \   /
            NH                                     NH
```

Io già da molti anni, e precisamente nel 1897, insieme al prof. Quenda, tentai di ridurre completamente il mio ciantrimetilpiperideone:

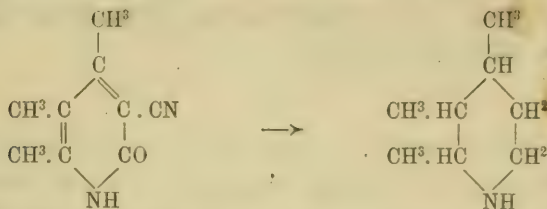
```
              CH³
               |
               C
              / \\
          H₂C     C . CN
   H³C\    |      |
       >C         CO
   H³C/    \     /
             NH
```

mediante il sodio e l'alcool etilico; allora si ottenne una piccola quantità di una base liquida, giallognola, a reazione alcalina, e che lasciata a sè diventava rossa e tendeva a resinificarsi; faceva fumi coll'acido cloridrico, dava le reazioni generali degli alcaloidi, ed aveva un odore speciale, molto analogo all'odore della conina naturale.

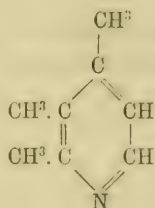
Questa nuova base doveva essere appunto un isomero della conina, e cioè la γα′α′ *trimetilpiperidina*:

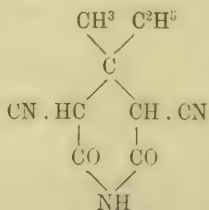
```
              CH³
               |
               CH
              /  \
          H²C     CH²
   CH³\    |       |
       >C         CH²
   CH³/    \     /
             NH
```

ma non se ne proseguì lo studio.

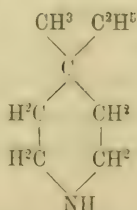
Dall'N-metilcianmetilpiperideone si deve ottenere il corrispondente N-metilderivato. Sarà questo un nuovo modo di ottenere i derivati -NCH^3 di queste basi.

Un altro isomero della conina cioè *trimetilpiperidina contigua* deve ottenersi in modo analogo dal mio composto fusibile a 305°-306°:

```
        CH3                           CH3
         |                             |
         C                             CH
        / \\                          /  \
CH3. C      C . CN          CH3. HC      CH2
     ||     |        --->        |        |
CH3. C      CO              CH3. HC      CH2
      \    /                        \    /
        NH                            NH
```

Già in precedenza, dal medesimo composto fusibile 305°-306° per riduzione con polvere di zinco io ho ottenuto la *trimetilpiridina contigua* $\alpha'\beta'\gamma$ (1):

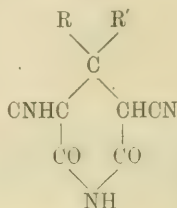
```
          CH3
           |
           C
          / \\
CH3. C         CH
     ||        |
CH3. C         CH
       \     //
          N
```

Riducendo profondamente e completamente l'altro mio composto, $\gamma\gamma$ *metiletil*$\beta\beta$*diciana*$\alpha\alpha$*diossipiridina*, o $\beta\beta$*metiletil*$\alpha\alpha$*diciianglutarimide* (1) ottenuta dal metiletilchetene coll'etere cianacetico, e fusibile a 193°:

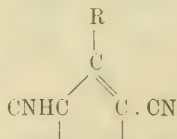
```
        CH3  C2H5
          \  /
           C
          / \
CN . HC       CH . CN
      |       |
      CO      CO
        \    /
          NH
```

si dovrebbe ottenere un altro isomero della conina cioè una $\gamma\gamma$*metiletilpiperidina*:

```
     CH3  C2H5
       \  /
        C
       / \
  H2C      CH2
   |        |
  H2C      CH2
     \    /
       NH
```

(1) “Atti R. Accad. di Torino„, 1900, vol. XXXV.

Questa base avrebbe anche un'altra importanza: in queste condizioni della molecola si staccherà facilmente il gruppo C^2H^5H (*etano*), come accade col composto fusibile 193° da cui deriva?

È così strano, e finora inesplicabile, il fatto da me osservato già da dieci anni che i composti:

```
         R    R'
          \  /
           C
          / \
     CNHC     CHCN
       |       |
       CO     CO
         \   /
          NH
```

sviluppano in determinate condizioni i carburi saturi R'H per dare i composti non saturi contenenti

```
           R
           |
           C
          / \\
     CNHC     C . CN
       |      |
```

che assume sempre un certo interesse lo studio di composti che contengono due gruppi alchilici attaccati ad un medesimo atomo di carbonio:

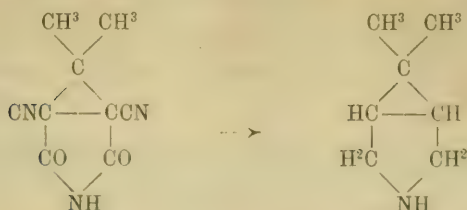
```
     R    R'
      \  /
       C
      / \
```

Ma il composto fusibile a 193° in mezzo alcalino sviluppa facilmente NH^3 e lascia forse aprire la catena, per cui il metodo di riduzione deve essere, molto probabilmente, diverso da quello col sodio in alcool amilico.

Resta anche a vedersi come si comporteranno in questo senso i composti trimetilenpirrolici da me scoperti e descritti nel 1901 (1); alla dimetildiciantrimetilendicarbonimide, ad esempio, deve corrispondere una *dimetiltrimetilenpirrolidina*:

---

(1) *Sintesi di composti piridinici e trimetilenpirrolici*, " Mem. R. Accad. delle Scienze di Torino ", 1901, serie II, vol. L.

```
     CH³ CH³                    CH³ CH³
       \ /                        \ /
        C                          C
       / \                        / \
  CNC-----CCN       --->      HC-----CH
   |       |                   |       |
   CO     CO                  H²C     CH²
     \   /                      \   /
      NH                         NH
```

Composti questi che potrebbero assumere non lieve importanza anche pel fatto che le basi pirrolidiniche sono abbastanza diffuse nel regno vegetale (1).

Come si scorge, è tutta una serie di nuove idrobasi che si otterranno per riduzione totale dei numerosi miei composti che in questi ultimi anni io ho ottenuto per sintesi, ossia per condensazione delle aldeidi, dei chetoni, degli eteri β chetonici ecc. coll'etere cianacetico. Alcuni dei quali composti debbono ancora essere studiati in rapporto anche al potere rotatorio. Il Dr Giovanni Issoglio ha ora studiato, dietro mio invito, la riduzione totale del ciantrimetilpiperideone. Si è trovato utile modificare alquanto il metodo di riduzione prima da me seguito, sostituendo l'alcol amilico all'alcol etilico: metodo già seguito da altri in casi analoghi. In questo modo infatti si è ottenuta una quantità relativamente notevole della nuova base $C^8H^{17}N$, da me sovraccennata, cioè un isomero della conina, insieme ad altri prodotti, descritti nella Nota seguente che ho l'onore di presentare all'Accademia.

Torino, R. Università, maggio 1908.

---

(1) Pictet et Court, *Sur quelques nouveaux alcaloïdes végétaux*, in “ Arch. des sciences phys. et nat. de Genève ”, 1908, (4), XXV, p. 113.

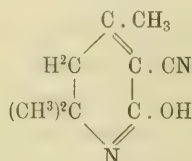
Nuovo isomero della conina dal ciantrimetilpiperideone.

Nota del Dr. GIOVANNI ISSOGLIO.

Guareschi nel 1893 dimostrò che si potevano ridurre i composti, che si ottenevano dalla condensazione dell'etere cianacetico con i chetoni in presenza di ammoniaca, per trasformarli nelle piridine corrispondenti.

Questa riduzione si faceva colla polvere di zinco a caldo in corrente di idrogeno. Così dal β*cian*α'γ*dimetilpiperideone* egli ottenne la αγ*dimetilpiridina* (1).

Seguendo questo esempio Quenda e Benedicenti dalla riduzione del β*ciantrimetilpiperideone* (2)

```
          C . CH3
         /  \\
     H2C      C . CN
      |       |
 (CH3)2C      C . OH
         \  //
           N
```

prepararono tre sostanze diverse:

1) La *trimetildiidrocollidina* $C^8H^{13}N$, base liquida che bolle verso 200°;

2) La αγ*dimetilpiridina* C^7H^9N, bollente a 157°;

3) Il γ*metil*α' *dimetil*α'β' *diidropirideone* $C^8H^{13}NO$ fusibile a 115°-116°.

Analoghe riduzioni si tentarono ancora con buon esito sopra derivati simili, ricorderò la trasformazione della β*cian*γ$\beta_1\alpha_1$*trimetil*α*ossipiridina* nella *trimetilpiridina contigua* 3-4-5 (3), la riduzione delle *metilfenilcianossipiridine isomere* nelle corrispondenti *metilfenilpiridine* (4). Tutte queste riduzioni danno origine a idro-

(1) I. Guareschi, Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. XXVIII, 1893.

(2) Giorn. R. Acc. Med. di Torino, vol. IV, anno LXI.

(3) I. Guareschi, R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXV (1900).

(4) G. Issoglio, Ivi, vol. XL (1905).

piridine, che contengono ancora dei doppi legami senza avere mai la riduzione perfetta del nucleo piridinico nelle corrispondenti piperidine.

Ora ho studiato, dietro consiglio del prof. Guareschi, la riduzione completa e totale del *ciantrimetilpiperideone* adoperando come riduttore il sodio e gli alcooli etilico ed amilico, secondo il metodo di Ladenburg.

G. Piccinini (1) ha dimostrato che il gruppo cianico del ciantrimetilpiperideone si può saponificare soltanto riscaldando in tubi chiusi a 140°-150° con un eccesso di acido cloridrico concentrato; diminuendo la temperatura oppure la concentrazione dell'acido l'idrolisi diventa quasi nulla. Operando poi in condizioni speciali si ottengono gradualmente per idrolizzazione del nitrile —CN tutti i prodotti di saponificazione ossia le amidi, gli acidi e le ossipiridine, che da quelli derivano per eliminazione di anidride carbonica.

Qualche cosa di analogo accade anche per la riduzione del *ciantrimetilpiperideone*, e si può quasi dire che i dati sperimentali sono confrontabili.

Infatti adoperando nella riduzione alcool etilico e sodio metallico si ottengono assai piccole quantità di prodotti di riduzione, mentre sostituendo all'alcool etilico l'amilico, che presenta un punto di ebullizione superiore, la riduzione avviene e si ottengono dei prodotti, che sono degni di studio, sia per la qualità, che per il rendimento della reazione.

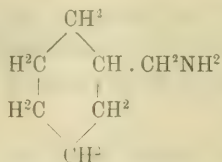
Come nel caso della idrolisi del gruppo cianico si ottengono varii prodotti, così anche nella riduzione da me sperimentata accanto al prodotto principale di riduzione si trovano sostanze provenienti o dalla graduale ed incompleta riduzione del prodotto primitivo, oppure da condensazioni, che hanno luogo in seno ai liquidi riducenti. Durante la riduzione si sviluppa una grande quantità di gas ammonico come dimostrerò in seguito, il quale deriva dalla decomposizione ed idrolizzazione del gruppo —CN. È noto che il Ladenburg (2) ed i suoi allievi avevano dimostrato, che allorquando il —CN subisce la riduzione in presenza dell'alcool e del sodio si trasforma nel gruppo aminico $—CH^2NH^2$; anzi

---

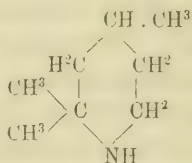
(1) G. Piccinini, Atti R. Accad. delle Scienze, vol. XLII.

(2) Ber., *27*, pag. 78 e 1463.

questo era un modo elegante per ottenere i derivati aminici. Così il Demanioff ha ottenuto in questi ultimi anni dal nitrile dell'acido essaidrobenzoico la *essaidrobenzilamina*:

```
        CH²
       /  \
   H²C      CH . CH²NH²
    |        |
   H²C      CH²
       \  /
        CH²
```

la quale con acido nitroso è trasformata in alcool essaidrobenzilico, che per trasposizione molecolare dà *alcool suberilico* a catena eptagonale.

Nel caso da me studiato, al contrario, non si ha l'idrogenazione del cianogeno, perchè non ho potuto trovare fra i prodotti di riduzione una base contenente il gruppo —CH^2NH^2, ma il gruppo cianico o si stacca tale e quale dando cianuro di sodio, oppure subisce una vera saponificazione trasformandosi nel gruppo carbossilico. Il carbossile in parte rimane alterato e si ottiene in piccola quantità *acido trimetilpiperidinico* ed in massima parte poi si elimina in causa della elevata temperatura (130°-140°) a cui avviene la riduzione. Questo caso è analogo a quello riportato da Besthorn (1), che riducendo l'acido chinolinico con sodio ed alcool amilico ottenne anche acido nipecotinico $C^6H^{11}NO^2$. Forse l'idrolizzazione del cianogeno è influenzata dalla contigua presenza dell'ossigeno. Per riduzione anche questo atomo di ossigeno si elimina e si ottiene, come prodotto principale una nuova *trimetilpiperidina*, isomera della coniina:

```
             CH . CH³
            /   \
        H²C      CH²
 CH³ \   |        |
      >  C       CH²
 CH³ /     \    /
             NH
```

Questa base è diversa da tutti gli altri suoi isomeri, perchè contiene due metili attaccati al medesimo atomo di carbonio.

Adoperando come mezzo riducente il sodio e l'alcool ami-

(1) Ber. deutsch. chem. Gesell., *28*, pag. 3153 (1895).

lico pare che in relazione colla temperatura elevata abbia luogo una condensazione e fra i prodotti di riduzione si ottiene una base che deriva dalla condensazione di due molecole di trimetilpiperidina.

L'azione condensante del sodio metallico sulle piridine e la loro trasformazione in dipiridine è cosa nota già da lungo tempo, si confrontino le esperienze di Anderson (1), di Wagner e Stoehr (2), di Huth (3) e di altri ancora.

L'eccesso di sodio, che si adopera nella riduzione, agisce in questo senso, per cui oltre la base sovrascritta, che bolle a 148° alla pressione ordinaria, ve ne ha un'altra oleosa di odore narcotico, che ricorda la nicotina e che bolle a 745^{mm} a 266°-267° (corr.). Il punto di ebullizione di questa base ci ricorda quello dell'α? *dipiperidile* di Blau (4) (267°-268°), del *dimetildipiperidile* (299°-300°) di Stoehr e Wagner (5) e quello anche della *collidinpiperidina* di Wolffenstein e Kudsen (279°-282°) (6).

Seguendo le classiche esperienze di Planta e Kekulè (7) e di Pictet e Genequand (8) sulla nicotina sono riuscito a provare, che l'alcaloide da me preparato è una base bisecondaria, che cioè contiene due gruppi imidici $>NH$ e che molto probabilmente deve avere la seguente formola:

$$(CH^3)^3C^5H^7N \,.\, C^5H^7(CH^3)^3N.$$

Non ho potuto dimostrare in quale punto si trovi il legamento, che tiene uniti i due gruppi piperidinici fra di loro, ma supponendo che si formi nello stesso istante in cui si elimina il cianogeno nel ciantrimetilpiperideone questo legame dovrebbe essere in β e la sostanza studiata dovrebbe essere la *essametil-ββdipiperidina*.

---

(1) Ann., *154*, p. 274.
(2) Journ. prakt. Chemie, *48*, p. 1.
(3) Ber., *31*, p. 2280.
(4) Monatsh., *13*, p. 383.
(5) Luogo citato.
(6) Ber., (1895), *28*, p. 2275.
(7) Ann., t. 87, p. 2.
(8) Ber., 30, p. 2117.

Non ho potuto sinora ottenere dei prodotti, che derivassero dalla apertura del nucleo piridinico ossia degli aminoacidi ad otto atomi di carbonio. Il nucleo piridinico in questi derivati dell'etere cianacetico è molto stabile e neppure si scinde in quei casi in cui la scissione avviene per i derivati piridinici di Hantzsch.

PARTE SPERIMENTALE

Riduzione del ciantrimetilpiperideone con alcool etilico e sodio.

Preparai il *ciantrimetilpiperideone* (o *tetraidro*β*cian*γ*metil*α'*dimetil*α*piridone*) condensando l'acetone saturo di gas ammonico secco con l'etere cianacetico (1). Aveva i caratteri di purezza richiesti (p. f. 195°).

In un pallone abbastanza ampio tenuto a b. m. si sciolgono 5 gr. di sostanza in 150 gr. di alcool assoluto portando l'alcool all'ebullizione. Si aggiungono allora a piccole riprese 4-5 gr. di sodio metallico, per cui avviene una viva reazione ed il liquido si colora in rosso ranciato con fluorescenza verde. Verso il termine della reazione si aggiungono altri 50 gr. di alcool assoluto e si termina quando la quantità di sodio adoperata raggiunge 40 gr. e quando si osserva che il sodio in eccesso non si scioglie più nell'alcool. Si lascia raffreddare aggiungendo poco a poco 150 cm^3 di acqua distillata.

Raffreddato bene il liquido si sottopone ad una corrente di idrogeno puro (devesi evitare la presenza dell'aria, che imbrunisce ed altera la soluzione) e vi si aggiunge con una chiavetta a goccia a goccia una soluzione di acido solforico al 20 % sino a reazione spiccatamente acida. Notasi sviluppo di acido cianidrico. Quando il liquido alcoolico è diventato freddo si depone cristallizzato il solfato di sodio, che si separa per filtrazione. Il liquido alcoolico filtrato si riduce a piccolo volume in un appa-

---

(1) I. Guareschi, *Sintesi di composti idropiridinici*, Atti R. Acc. Scienze Torino, vol. XXVIII.

recchio a pressione ridotta in corrente di idrogeno. Concentrato il liquido a 50 cm³ circa, si osserva che la massima parte della sostanza primitiva si precipita inalterata (fonde a 194°-195°). Separata la sostanza dal resto del liquido si estrae questo con etere. L'etere porta via dalla soluzione acida un prodotto bianco, che fonde così grezzo a 135° (A).

Si alcalinizza di poi riempiendo però gli apparecchi estrattori di idrogeno e si estrae nuovamente con etere; l'etere disseccato con potassa caustica solida lascia precipitare molta sostanza resinosa; si filtra, si distilla l'etere in corrente di idrogeno e si ottiene come residuo, da 0,3 a 0,4 gr. d'una base liquida a forte odore narcotico. Rendimento 6 %. Ripetendo due o tre volte questa riduzione, si ottiene sempre questo rendimento.

Raccolte insieme queste piccole porzioni si ha un liquido che bolle al disotto di 200°, più leggero dell'acqua, la cui soluzione acquosa satura scaldata intorbida; ha reazione alcalina spiccata, manda fumi con acido cloridrico. La sua soluzione cloridrica precipita con quasi tutti i reattivi generali degli alcaloidi. Con alcuni dà precipitato amorfo solido (ac. fosfomolibdico, cloroplatinico, tannino) in altri casi il precipitato è oleoso; non precipita col cloruro mercurico. Cogli ipocloriti dà abbondante precipitato bianco.

Non ho potuto ottenere pura questa base, perchè era in troppo piccola quantità e perchè si altera facilmente. Molto probabilmente però questa base è identica alla *trimetilpiperidina*, che ho ottenuto per riduzione del sodio coll'alcool amilico e che bolle a 148°:

	trovato	Calcolato per $C^8H^{17}N$
C %	74.92	75.52
H „	13.21	13.37
N „	10.80	11.02

Cloroplatinato $(C^8H^{17}N)^2 . H^2PtCl^6$. — Trattando la soluzione cloridrica della base con acido cloroplatinico ottengo un precipitato in parte polverulento ed in parte oleoso, difficile a purificarsi. Lavando questo precipitato con una miscela etereo-alcoolica, nella quale è poco solubile, riesco ad ottenere una polvere gialla, che fonde al disopra di 200° decomponendosi.

È anidro. Calcinato lascia 28.85 % di Pt. — Calcolando il Pt per $(C^8H^{17}N)^2 . H^2PtCl^6$ si ha 29.34 %.

Noto che il cloroplatinato purissimo, che si ottiene per riduzione dall'alcool amilico cristallizza in mamelloncini aranciati, che fondono a 215°-216°.

Picrato. — È l'unico precipitato cristallino che si formi dalla base coi reattivi generali degli alcaloidi. È sotto forma di aghi gialli poco solubili in acqua a freddo, piuttosto solubili a caldo. Non l'ho analizzato.

Evaporando l'etere di estrazione della soluzione acida (avendolo prima essiccato con un poco di cloruro di calcio) ottengo, come accennai, una sostanza fusibile grezza a 135° (A).

Ricristallizzata dall'acqua si ottiene in mamelloncini incolori, che fondono a 155°. È solubile facilmente nei solventi organici, poco solubile in acqua a freddo. Ha carattere neutro. Distillata in un tubicino si altera alquanto ed il prodotto di sublimazione ha lieve reazione alcalina.

Gr. 0,1154 di sostanza essiccati a 100° diedero cm³ 19.3 di N a $748^{mm},5$ ed a 13°,5.

N % trovato 18,65.

Probabilmente questo prodotto deriva dal ciantrimetilpiperideone per eliminazione dell'ossigeno e per completa idrogenazione del nucleo piridinico; per la β*ciantrimetilpiperidina* si calcola il 18.40 % di N.

Non ho creduto di continuare lo studio di questa sostanza, perchè si forma in piccola quantità, e perchè è difficile da purificare.

Avendo osservato, che erano scarsi i prodotti di riduzione del ciantrimetilpiperideone adoperando il sodio e l'alcool etilico, ho sostituito a quest'alcool, l'alcool amilico ordinario di fermentazione.

Riduzione con alcool amilico e sodio.

In 750 cm^3 di alcool amilico (1) si sciolgono all'ebullizione 25 gr. di ciantrimetilpiperideone ed aggiungo a piccole riprese il sodio (2-3 gr.). La reazione avviene in principio con vivacità ed il liquido si colora in rosso scuro. Il pallone nel quale avviene la riduzione è riscaldato in bagno di sabbia.

Verso la fine della reazione si aggiungono ancora 250 gr. di alcool. Impiegati 180 gr. di sodio notasi che nel liquido appena giallo il sodio si scioglie difficilmente, allora si tralascia il riscaldamento. Durante la reazione si sviluppa molta ammoniaca, che raccolta e dosata costituisce il 30 % dell'azoto del ciantimetilpiperideone. (Nel gas ammoniaco svoltosi non si trova traccia di metilamina).

Raffreddato l'amilato di sodio, si decompone con 1000 cm^3 di acqua. Il liquido si divide in due strati, superiormente vi è l'alcool amilico, inferiormente sta la soluzione alcalina di idrato sodico, che separata si tiene per ulteriori trattamenti.

L'alcool amilico, lavato con un pochino di acqua, è sbattuto ripetutamente con 20 cm^3 di acido solforico al 10 %. La soluzione acida si sottopone ad una corrente di vapor acqueo per togliere ogni traccia di alcool amilico e poi si lava con etere; separato l'etere si aggiungono dei pezzettini di potassa caustica sino a reazione alcalina marcata.

Si separa un olio leggero, poco colorato, meno alterabile all'aria di quello che si ottiene per riduzione dall'alcool etilico; si estrae quest'olio con etere.

La soluzione eterea essiccata con cannelli di potassa caustica è poi distillata sino a piccolo residuo. Il liquido si travasa in una capsulina di vetro e si lascia evaporare lentamente in essiccatore a potassa fusa.

Dopo parecchi giorni non si osserva alcuna cristallizzazione del liquido. Allora si sottopone a distillazione.

Il liquido basico corrisponde al 20-25 % del ciantrimetilpiperideone adoperato.

---

(1) L'alcool amilico adoperato era privo di piridina e bolliva a 130°-131°.

Per la distillazione frazionata il liquido si divide in due parti:

La 1ª parte bolle a 148° alla pressione di 760^{mm}, ed alla pressione di 40^{mm} passa a 120°; questa base (A) costituisce un poco più della metà del liquido alcalino totale, ed è un alcaloide volatile liquido mobile incoloro, di odore viroso che ricorda la coniina.

La 2ª parte bolle a 266°-267° (corr.) alla pressione di 745^{mm} ed a 237° alla pressione di 40^{mm}; è un liquido denso sciropposo leggermente giallo, che si altera all'aria ed il cui odore narcotico ricorda la nicotina (B).

Queste due basi si separano prima per distillazione frazionata, poi per ottenerle allo stato di purezza si fanno cristallizzare frazionatamente i loro sali doppi. Il cloroplatinato ed il cloromercurato della base B sono molto meno solubili di quelli della base A. Ricristallizzando questi sali è facile ottenerli allo stato puro, ed allora decomponendoli si ottengono allo stato di grande purezza le basi corrispondenti.

ALCALOIDE VOLATILE *A* (P. eb. 148°). — Questa base, come ho già accennato è un liquido mobile, incoloro, che all'aria ingiallisce leggermente, più leggero dell'acqua. P. sp. a 15° 0,832. — È abbastanza solubile in acqua fredda e la sua soluzione acquosa satura intorbida per riscaldamento. Basta tenere il tubo d'assaggio fra le mani per vedere il liquido limpido diventare lattiginoso e ritornare poi limpido per raffreddamento. In questo comportamento ricorda molto la coniina.

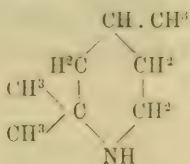
È solubile in alcool ed in etere. Ha reazione fortemente alcalina e manda fumi bianchi coll'acido cloridrico.

I. Gr. 0,1486 di base diedero a 745,5^{mm} ed a 14° cm^3 14.9 di N.

II. Gr. 0,1622 di sost. diedero grammi 0,4482 di CO^2 e gr. 0,1928 di H^2O.

	trovato		calcolato per $C^8H^{17}N$
	I	II	
C	—	75.36	75.59
H	—	13.20	13.38
N	11.29	—	11.02

La base che ho ottenuto ha tutti i caratteri e tutte le proprietà di una trimetilpiperidina e precisamente questa sarebbe la α'α'*dimetil*γ*metilpiperidina:*

```
           CH . CH³
          /  \
       H²C    CH²
 CH³\   |      |
     >C       CH²
 CH³/   \    /
          NH
```

La soluzione eterea di questa sostanza trattata con una soluzione eterea di iodo dà dei cristalli prismatici allungati.

Le soluzioni acquose di questa base precipitano gli ossidrati dei metalli pesanti, così con *solfato di rame* si ottiene un precipitato azzurro insolubile in eccesso di reattivo, con *cloruro ferrico* precipitato rosso-mattone, con *cloruro di cadmio* non precipita, col *reattivo di Nessler* precipita in bianco.

La trimetilpiperidina (2, 2, 4) forma sali cristallizzati coll'acido cloridrico e coll'acido solforico. Allo stato libero assorbe l'anidride carbonica dell'aria. La soluzione acquosa del cloridrato precipita coi reattivi generali degli alcaloidi, come segue:

Coll'*acido fosfomolibdico* precipitato abbondante giallo, che non si riduce tanto facilmente e che per aggiunta di ammoniaca non diventa azzurro.

Coll'*acido fosfotunstico* precipita in bianco.

Col *tannino* fiocchi abbondanti bianchi.

Col *ioduro di potassio iodurato* (Bouchardat) precipitato bruno, che si raccoglie in fondo al recipiente sotto forma di gocciole oleose.

Col *cloruro mercurico* non precipita.

I precipitati solidi esaminati al microscopio non presentano alcuna forma cristallina.

Cloroplatinato $(C^8H^{17}N)^2.H^2PtCl^6$. — Si ottiene aggiungendo alla soluzione acquosa del cloridrato una soluzione anche molto concentrata di acido cloroplatinico. Non si ottiene subito precipitato, perchè il cloroplatinato è piuttosto solubile in acqua. Però lasciando evaporare lentamente all'aria le sue soluzioni si separano a poco a poco dei mamelloncini grossi come chicchi

di frumento, di colore rosso ranciato, che si possono raccogliere, lavare con acqua ed essiccare fra carta. È anidro, riscaldato a 100°-110° non perde di peso, fonde a 215°-216° decomponendosi. Triturato è di colore giallo pallido.

Gr. 0,2622 di cloroplatinato secco a 100°-110° calcinati lasciarono gr. 0,0764 di Pt.

	trovato	calcolato per $(C^8H^{17}N)^2.H^2PtCl^6$
Pt %	29.14	29.35

Cloroaurato $C^8H^{17}N . AuHCl^4$. — Aggiungendo alla soluzione cloridrica della base del cloruro d'oro si deposita allo stato polverulento giallo il cloroaurato, che poi cristallizza a poco a poco in piccoli prismi anidri, che fondono a 135°.

Gr. 0,2428 calcinati lasciarono gr. 0,1022 di oro metallico.

	trovato	calcolato per $C^8H^{17}N.AuHCl^4$
Au %	42.09	42.22

Iodometilato della trimetilpiperidina. — Se alla trimetilpiperidina libera si aggiunge un peso doppio di ioduro di metile si osserva a poco a poco, che la miscela si riscalda e si produce una viva reazione. Rimane un olio denso, che a poco a poco lasciato a sè si trasforma in una massa dura cristallina. La stessa sostanza si può ottenere operando così:

1 parte di trimetilpiperidina distillata di fresco si scioglie in 5 volte il suo peso di alcool metilico ed alla soluzione si aggiungono 2 p. di ioduro di metile. La miscela si riscalda per un'ora in tubo chiuso a 100°. Raccogliendo il prodotto della reazione in un cristallizzatore, si ottengono per evaporazione dell'alcool metilico dei lunghi aghi giallo rossastri, che si lavano con poco etere.

Questa sostanza molto solubile in acqua ed in alcool cristallizza da questi solventi per evaporazione in lunghi prismi incolori.

Si può anche purificare sciogliendola in alcool e precipi-

tandola con etere. Allora si ottiene allo stato polverulento cristallino con colore bianco leggermente tendente all'avana. Ricristallizzata dall'alcool fonde a 266° decomponendosi.

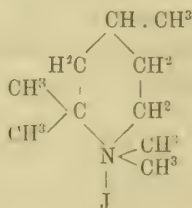
Gr. 0,1512 di sostanza diedero secondo il metodo di Piria gr. 0,1247 di AgI.

Iodo °/₀ trovato 44.57.

La quantità di iodo trovato corrisponde bene al *ioduro di trimetilpiperidindimetilammonio*, per il quale si calcola:

Iodo °/₀ 44.86.

Adunque il ioduro, che ho analizzato dimostrerebbe che la trimetilpiperidina studiata è una base secondaria, perchè adoperando anche un eccesso di ioduro di metile si ottiene sempre il seguente composto fusibile a 266°:

```
              CH . CH³
              /   \
          H²C      CH²
 CH³\      |        |
     >C            CH²
 CH³/    \        /
              N<CH³
              |  CH³
              J
```

Alcaloide volatile *B*. — P. eb.2 66°-267° (corr.) a 745^{mm}. — Questa sostanza ottenni pura per decomposizione del suo sale doppio di mercurio.

Rettificata questa base bolle a 266°-267° (corr.) alla pressione di 745^{mm} ed a 237° a 40^{mm}.

È quasi incolora, lasciata a sè in essiccatore a potassa fusa non cristallizza, neppure cristallizza raffreddandola con ghiaccio. Più leggera dell'acqua, ne ho determinato il peso specifico col picnometro di Sprengel a 15° = 0,869. Ha odore viroso, sapore bruciante, che ricorda la nicotina, è densa ed oleosa. Rende azzurra la carta di tornasole, assorbe l'anidride carbonica dell'aria e coll'acido cloridrico dà densi fumi bianchi.

I. Gr. 0,1638 di sostanza diedero a $742^{mm},7$ ed a 15° cm^3 16.4 di N.

II. Gr. 0,1332 di sostanza diedero a $734^{mm},3$ ed a 15° cm^3 13.00 di N.

III. Gr. 0,1058 di sostanza diedero gr. 0,2936 di CO^2 e gr. 0,1233 di H^2O.

IV. Gr. 0,1346 di sostanza diedero gr. 0,3772 di CO^2 e gr. 0,1492 di H^2O.

	trovato			
	I	II	III	IV
C %	—	—	75.68	76.42
H „	—	—	13.04	13.15
N „	11.40	11.07	—	—

Queste analisi ci dicono che la sostanza studiata ha grande analogia per la composizione colla base, che bolle a 148°. Io non ho determinato il peso molecolare di questo composto, ma però, come ho già riferito più innanzi, sono riuscito a dimostrare che questa sostanza deriva dalla condensazione di due molecole di trimetilpiperidina con eliminazione di due atomi di idrogeno, e più precisamente che questo alcaloide è una base dipiperidinica.

Per il composto:

$$C^{16}H^{32}N^2$$

si calcola:

$$C = 76.19$$
$$H = 12.70$$
$$N = 11.11$$

La base è piuttosto solubile in acqua ed in alcool, solubilissima nell'etere. La sua soluzione eterea trattata con soluzione eterea di iodo a differenza della trimetilpiperidina studiata dà un precipitato oleoso, che si attacca alle pareti del vaso.

La soluzione acquosa reagisce come la trimetilpiperidina colle soluzioni dei metalli pesanti ($CuSO^4$, $FeCl^3$). Il suo cloridrato, che in soluzione diluita facilmente si dissocia dando un liquido opalino, dà coi reattivi generali degli alcaloidi dei precipitati, che ricordano quelli già accennati per la trimetilpipe-

ridina, che ho descritto, senonchè da questa si distingue, perchè precipita col cloruro mercurico.

Cloroplatinato $C^{16}H^{32}N^2.H^2PtCl^6 + 3H^2O$. — Trattando una soluzione concentrata di cloridrato della base, con una soluzione di acido cloroplatinico ottiensi un precipitato giallo cristallino, che per ricristallizzazione dell'acqua si deposita in belle lamelline splendenti giallo ranciate, che già a 230° incominciano ad imbrunire e fondono a 262° con forte schiuma.

Questo cloroplatinato differisce per solubilità e forma da quello della trimetilpiperidina; da questo poi si distingue, perchè cristallizza con tre molecole di acqua di cristallizzazione.

I. Gr. 0.1774 di sale perdettero a 100°-110° gr. 0,0134 di H^2O.

II. Gr. 0,1426 di sostanza perdettero gr. 0,0104 di H^2O.

	trovato		calc. per $C^{16}H^{32}N^2.H^2PtCl^6+3H^2O$
	I	II	
H^2O %	7.54	7.22	7.54

I. Gr. 0,1322 di sale secco a 100°-110° calcinati lasciarono gr. 0,0384 di platino.

II. Gr. 0,1584 di sale seccato a 100°-110° lasciarono dopo calcinazione gr. 0,0462 di Pt.

	trovato		calc. per $C^{16}H^{32}N^2.H^2PtCl^6$
	I	II	
Pt %	29.05	29.23	29.44

Picrato. — Si prepara dalla soluzione del cloridrato della base per aggiunta di una soluzione satura di acido picrico sotto forma di aghetti giallo pallidi, che fondono a 230° in un liquido bruno.

Cloroaurato $C^{16}H^{32}N^2(HAuCl^4)^2$. — Aggiungendo alla soluzione del cloridrato dell'alcaloide un piccolo eccesso di soluzione di cloruro d'oro si precipita una polvere gialla, che si trasforma in belle lamelline per il lungo riposo.

Queste lamelle anidre fondono a 183°-184°.

Gr. 0,1618 di sale calcinati lasciarono gr. 0,0702 di oro metallico.

	trovato	calc. per $C^{16}H^{32}N^2(HAuCl^4)^2$
Au %	42.59	42.21

Cloromercurato $C^{16}H^{32}N^2 . 2HCl . HgCl^2$. — Il sale doppio di mercurio, che può servire bene a purificare questa base è piuttosto solubile a caldo in acqua e si deposita a freddo. Si ottiene per lento raffreddamento della soluzione in piccoli prismi corti incolori brillanti, che a 230° imbruniscono e a 270° fondono decomponendosi. — È anidro.

Gr. 0,3842 di sale doppio diedero gr. 0,1507 di HgS.

	trovato	calcolato per $C^{16}H^{32}N^2 . 2HCl . HgCl^2$
Hg %	33.75	33.55

Le analisi di questo alcaloide liquido, che bolle a 266°-267°, e dei suoi sali, dimostrano la grande analogia che esiste fra questa base e la trimetilpiperidina.

Azione del ioduro di metile. — Per stabilire se l'alcaloide ottenuto è una base primaria o secondaria ho fatto agire su di esso diverse quantità di ioduro di metile per assicurarmi se si potessero ottenere diversi iodometilati.

Monojodometilato. — In un tubo chiuso si mettono a reagire:

Base p. eb. 266°-267°	p. 1	(mol. 1)
Ioduro di metile	„ 1	(mol. 2)

sciolti in 5 p. di alcool metilico e la miscela si riscalda per un'ora a b. m., dopo di che si fa evaporare l'alcool metilico; si ottiene un olio rosso scuro, che si scioglie in cloroformio. La soluzione cloroformica trattata prima con una soluzione al 2 % di bicarbonato sodico, poi con una diluita di acido tartarico, viene lavata con un pochino di acqua, in seguito essiccata con cloruro di calcio. Evaporato il cloroformio si ottiene un olio

denso, sciropposo poco colorato, che non si riesce in nessun modo a far cristallizzare.

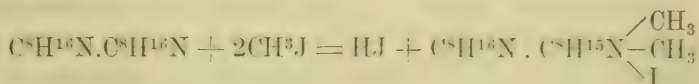
Questa sostanza è solubile in acqua, acetone, alcool metilico ed etilico, cloroformio; dai solventi organici per aggiunta di etere precipita nuovamente l'olio, essendo questo insolubile nell'etere.

Per l'analisi fu essiccata a 100°-110° sino a peso costante.

Gr. 0,1900 di sostanza diedero col metodo di Piria gr. 0,1094 di AgI.

Iodo trovato $^{0}/_{0}$ 31.12.

La quantità di iodo trovata corrispondeva bene per un monoiodo-derivato, il quale avrebbe avuto la sua origine per azione di due molecole di ioduro di metile sopra una molecola di dipiperidina:

$$C^{8}H^{16}N.C^{8}H^{16}N + 2CH^{3}J = HJ + C^{8}H^{16}N \,.\, C^{8}H^{15}N\begin{matrix} \diagup CH_3 \\ -CH_3 \\ \diagdown I \end{matrix}$$

Per questo composto si calcola il 31,12 $^{0}/_{0}$ di Iodo.

Questa analisi però non era sufficiente per dimostrare che esistevano due gruppi metilici attaccati ad un atomo di azoto, perciò ho fatto una determinazione del gruppo metiliminico col metodo Herzig-Meyer (1); ho trovato CH_3 6,38 $^{0}/_{0}$; per il composto sovrascritto si calcola 7.35 $^{0}/_{0}$.

Questi dati analitici pur essendo poco concordanti dànno come probabile la costituzione, che ho accennato; del resto ho anche analizzato il cloroplatinato, che si ottiene dal clorometilato corrispondente e questa analisi conferma pienamente la composizione del monoiododerivato, da cui deriva.

Il monoiododerivato non è decomposto dai bicarbonati e dai carbonati alcalini. Con ossido di argento umido dà luogo al *dimetilidrato*, il quale in soluzione concentrata reagisce fortemente alcalino e presenta odore piperidinico-ammoniacale, dando con acido cloridrico fumi bianchi intensi. La soluzione cloridrica evaporata lascia una massa incolora sciropposa, che col cloruro

(1) Monatsh., *15* (1894), p. 613.

di platino dà il *cloroplatinato* in lamelle giallo-pallide fusibili a 214°.

Gr. 0,1560 di cloroplatinato essiccati a 100° e calcinati lasciarono gr. 0,0438 di platino.

	trovato	calc. per $C^{16}H^{31}N^{2}(CH^{3})^{2}Cl.HCl.PtCl^{4}$
Pt °/₀	28.20	28.22

Diiodotetrametilato. — Si mettono a reagire:

Base p. eb. 266°-267°	p. 1 (1 mol.)
Ioduro di metile	„ 2 (4 mol.)

sciolti in 5 p. di alcool metilico; avvenuta la reazione in tubo chiuso a 100° per un'ora circa, si fa evaporare e si ottiene un olio solubile in cloroformio.

Questo stesso composto si può anche ottenere mescolando a temperatura ordinaria le due sostanze accennate senza sciogierle in alcool metilico; anche operando così si ottiene un olio denso. Finalmente può aversi aggiungendo nuovo ioduro di metile al monoiodometilato.

Ad ogni modo per purificarlo si fa subire alla soluzione cloroformica lo stesso trattamento, che fu descritto per il monoiodometilato.

Per evaporazione del cloroformio si ha una sostanzà solida, che poi viene cristallizzata dall'alcool metilico, da cui si deposita sotto forma di lamelle incolore, monocline, splendenti, che fondono a 236°-237°.

Questa sostanza è solubile negli alcooli etilico e metilico, nell'acqua, nell'acetone, dal quale si deposita per evaporazione sotto forma di polvere bianca, insolubile in etere.

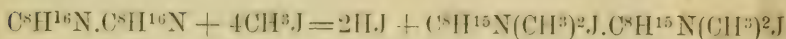
L'etere precipita il iododerivato dalle soluzioni acetoniche, cloroformiche ed alcooliche sotto forma di olio, per cui non si può ottenere il iododerivato allo stato puro.

Per analizzarlo si fanno essiccare le lamelline in stufa a 100°-110°.

Gr. 0,2156 di sostanza diedero col metodo di Piria gr. 0,1548 di AgI.

Iodo trovato °/₀ 44.67.

Per il diiodotetrametilato ottenuto secondo la seguente reazione:

$$C^8H^{16}N.C^8H^{16}N + 4CH^3J = 2HJ + C^8H^{15}N(CH^3)^2J.C^8H^{15}N(CH^3)^2J$$

si calcola 44.82 % di Iodo.

Per assicurarmi che esistevano in questo composto quattro radicali metilici ho anche determinato il gruppo metiliminico col metodo accennato Herzig-Meyer ed ho trovato $-CH^3$ 9.23 % invece del 10.63 % come si calcola.

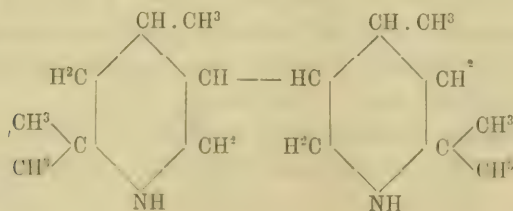
Questa analisi, benchè non coincida col calcolato, dà come molto probabile l'introduzione di quattro radicali metilici nella molecola della dipiperidina studiata; non avrebbe gran valore, se non fosse accompagnata da quella della percentuale nella quantità di iodo e se non avessi anche analizzato per questa sostanza il cloroplatinato, che si ottiene dal cloruro del metilidrato.

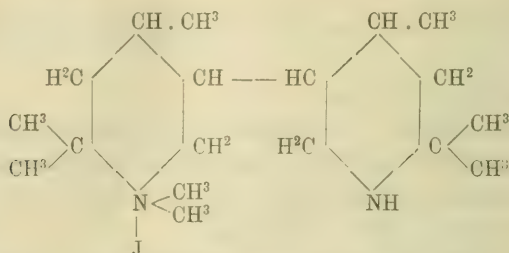
Trattando il dijodometilato con ossido di argento umido si ottiene in soluzione il *tetrametilidrato*, che è una base energica a sapore amaro ed odore ammoniacale-piperidinico spiccato. Il cloridrato, che da questo si ottiene per aggiunta di acido cloridrico diluito, dà col cloruro di platino un *cloroplatinato* in lamine splendenti giallo ranciato, fusibili a 227°-228°.

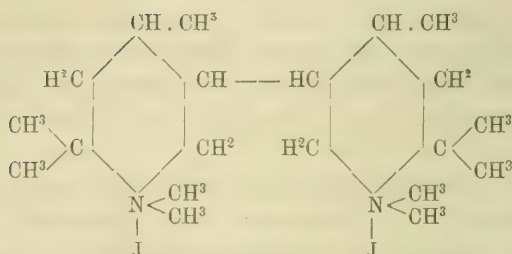
Gr. 0,2945 essiccati a 100° lasciarono gr. 0,0808 di platino

	trovato	calcolato per $C^{16}H^{30}N^2(CH^3)^4Cl^2.PtCl^4$
Pt %	27.46	27.07

Dallo studio di questi iodometilati risulta che la base da me studiata è una base bisecondaria, la quale deriva da una condensazione di due molecole di trimetilpiperidina, ossia che essa è molto probabilmente la α'α' *tetrametil* γγ *dimetil* ββ *dipiperidina*:

```
              CH.CH³                       CH.CH³
             /      \                     /      \
        H²C           CH ——— HC                    CH²
         |             |       |                    |
 CH³\    |             |       |                    |   /CH³
     >C               CH²     H²C                   C<
 CH³/    \            /        \                  /     \CH³
              \    /                  \    /
               NH                      NH
```

ed il *monojododimetil* e *dijodotetrametilderivato* sarebbero rispettivamente i seguenti:

```
              CH . CH³                  CH . CH³
              /    \                    /    \
      H²C /          \ CH —— HC /          \ CH²
          |          |            |          |
CH³\      |          |            |          |   /CH³
     >C                CH²   H²C              C <
CH³/      \          /            \          /   \CH³
            \      /                \      /
              N<CH³                    NH
              |  CH³
              J
```

Monojododimetilderivato oleoso

```
              CH . CH³                  CH . CH³
              /    \                    /    \
      H²C /          \ CH —— HC /          \ CH²
          |          |            |          |
CH³\      |          |            |          |   /CH³
     >C                CH²   H²C              C <
CH³/      \          /            \          /   \CH³
            \      /                \      /
              N<CH³                    N<CH³
              |  CH³                   |  CH³
              J                        J
```

Dijodotetrametilderivato (p. f. 236°-237°).

Come ho già accennato mi fu impossibile determinare la posizione del legame, che unisce i due gruppi piperidinici, però molto probabilmente questo legame si trova in β, come è disposto nella formola della dipiperidina sovrascritta.

Non ho trascurato il liquido alcalino per idrato sodico, che si separa dall'alcool amilico quando si decompone con acqua distillata l'amilato sodico.

Questa soluzione alcalina ho acidulato a poco a poco con acido solforico al 20 %; per raffreddamento si deposita molto sale di Glauber. Separai il liquido dai cristalli ed evaporai a b. m. per scacciare quasi tutta l'acqua.

Il residuo ha reazione acida ed è costituito da una miscela di solfato di sodio con sostanze organiche, che estrassi trattandolo a b. m. con tre volte il suo peso di alcool a 95°.

Filtrando ho distillato l'alcool sino a piccolo volume ed ho lasciato che continuasse ad evaporare in cristallizzatore nel vuoto sopra l'acido solforico.

A poco a poco si depositano dei cristalli bianchi, che raccolti vengono purificati per cristallizzazione dall'acqua. Sono piccoli prismi raggruppati, brillanti, duri, che fondono a 123° con effervescenza. Riscaldati in un tubetto sublimano in una sostanza bianca, che non deve essere più uguale a quella primitiva, perchè presenta un punto di fusione alquanto diverso e poi perchè la sostanza primitiva appena scaldata al punto di fusione sviluppa anidride carbonica.

Purificata la sostanza, la sottopongo ad essiccazione in stufa Gay-Lussac a 90°-100°.

Gr. 0,5508 di sostanza essiccati a 90°-100° perdono gr. 0,0285 di acqua.

	trovato	calcolato per $C^{19}H^{17}NO^2 + \frac{1}{2} H^2O$
H^2O %	5.17	5.00

I. Gr. 0,1130 di sostanza secca a 100° diedero a 738^{mm}.4 ed a 23°.5 cm³ 8.2 di N.

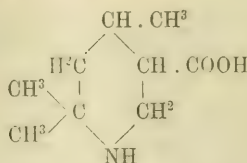
II. Gr. 0,1104 di sost. essiccata a 100° diedero gr. 0,0943 di H^2O e gr. 0,2574 di CO^2.

	trovato		calcolato per $C^9H^{17}NO^2$
	I	II	
C	—	63.47	63.10
H	—	9.52	9.95
N	8.23	—	8.40

Questa sostanza presenta carattere acido spiccato: gr. 0,2874 di sostanza richiesero cm³ 17.10 di NaOH

	trovato	calcolato per $C^9H^{17}NO^2$
NaOH %	23.06	23.38

Probabilmente la sostanza studiata è un nuovo acido *trimetilnipecotinico* e precisamente l'acido α'α'*dimetil*γ*metilnipecotinico:*

```
           CH . CH^3
          /   \
      H^2C     CH . COOH
 CH^3\   |      |
      >C       CH^2
 CH^3/   \    /
          NH
```

Dall'ulteriore trattamento dell'alcool amilico, da cui furono estratte le basi che ho descritto, non ho potuto ottenere sostanze degne di nota.

I residui che si possono ricavare sono costituiti da una miscela di alcooli superiori e di eteri dell'acido isovalerico, la quale si ottiene sempre secondo Guerbet (1) quando si fa agire il sodio metallico sopra l'alcool amilico. Da questa miscela ho separato una sostanza solida in lamelle lucenti, che fondono a 283° in un liquido bruno. Questa sostanza riscaldata cautamente in un tubicino d'assaggio sublima in cristalli bianchi.

Avendola ottenuta in piccola quantità non l'ho potuta analizzare.

Riassumendo osservo, che mentre il ciantrimetilpiperideone è difficilmente ridotto dal sodio, quando si trova in soluzione nell'alcool etilico bollente, questa sostanza invece si riduce bene adoperando come solvente l'alcool amilico all'ebullizione, ed in questo caso si ottengono tre sostanze:

a) la α'α'*dimetil*γ*metilpiperidina* p. eb. 148°;

b) la *essametil*ββ*dipiperidina* p. eb. 266°-267° (corr.) a 745^{mm} che deriva dalla trimetilpiperidina per azione condensante del sodio metallico;

c) l'acido *trimetilnipecotinico* che deriva dalla completa idrogenazione del ciantrimetilpiperideone e dalla saponificazione del gruppo nitrilico, che ancora permane attaccato al gruppo piridinico.

Riferisco due tabelle, la prima delle quali mette a confronto le proprietà della nuova trimetilpiperidina studiata cogli

---

(1) C. R., *128* (1899), p. 511 e 1002.

isomeri che si conoscono; nella seconda tabella la essametildipiperidina suaccennata è paragonata con alcune dipiperidine già note:

TABELLA N. I.

TRIMETILPIPERIDINE	2.2.4	2.4.6 (1)	2.3.3 (2)
Densità	0,833 a +15°	0,843 a + 4°	0,859 a +19°
Punto eboll. a 760mm	148°	146°	166°
P. f. cloroplatinato . .	215°-216°	242°-244°	173°
„ „ cloroaurato . .	123°-124°	106°	118°

TABELLA N. II.

Basi	Essametildi-piperidina	αβ dipiperidina (3)	ββ dimetil-γγdipiperidina (4)
Densità	0,869 a +15°	—	—
Punto eboll.	266°-267°	267°-268°	299°-300°
P. f. cloroplatinato .	262°	237°-238°	256°-258°
„ „ cloromercurato	270°	—	210°-211°
„ „ picrato	230°	215°	—

Torino, R. Università. Istituto Chim., Farm. e Toss. Maggio 1908.

(1) DÜRKOPF, B. *21*, p. 2713-2718.
(2) WALLACH et GUILBERT, Ann. *319*, p. 79.
(3) BLAU, Monatsh., *13*, p. 333.
(4) WAGNER et STOEHR, l. c.

I cosidetti " peni " dei Criodrilini.

Ricerche anatomo-istologiche e fisiologiche.

Nota del Dr. LUIGI COGNETTI DE MARTIIS.

(Con una Tavola).

La piccola sottofamiglia dei Criodrilini comprende forme grandemente affini ai nostri comuni lombrichi (*Lumbricidae* s. s.), distribuite nei tre generi *Sparganophilus*, *Alma*, e *Criodrilus* (1).

Tutte quelle che compongono il genere *Alma* — 7 specie —, hanno allo stato adulto, o già prima della comparsa del clitello, i pori maschili posti " an der Medialseite eines Paares " grosser, flacher, länglicher, nicht einziehbarer Penes, die mit " Geschlechtsborsten besetzt sind und an der Ventralseite des 19., " seltener des 18. Segm. stehen. ". È di cotesti " penes " ch'io intendo occuparmi nella presente nota, non già di quegli organi, distinti con lo stesso nome da Hoffmeister (**12** pag. 41), che si osservano in vicinanza dei pori sessuali del *Criodrilus lacuum* Hoffm., e più tardi chiamati più correttamente da Örley (**19**) " spermatophorae ", e da Vejdovsky (**20** pag. 57) " Pseudospermatophore ".

Peni simili a quelli di *Alma* si ritrovano però in *Criodrilus*, e precisamente nel *Cr. Alfari* Cogn.; ma in questa specie non sorreggono i pori maschili, posti invece presso la loro base, come ho ricordato nelle mie descrizioni (**7** pag. 4; **8** pag. 64), nè portano setole copulatrici (2).

---

(1) Per maggiori schiarimenti sulla loro posizione sistematica e la loro distribuzione geografica rimando alle ottime monografie di Michaelsen (**16** pag. 463; **17** pag. 125). La proposta messa innanzi da Duboscq (**10** pag. cv), " d'isoler en une modeste sous-famille des *Alminae* " il gen. *Alma*, non mi pare accettabile, vista la grande affinità di questo genere con gli altri due, sopratutto con *Criodrilus*, come ha dimostrato Michaelsen (**15** pag. 11).

(2) Nelle descrizioni di questa specie al nome peni sostituii quello più appropriato di " appendici laterali ". Pei peni di *Alma* Michaelsen usò pure (**14** pag. 9 e 10; **18** pag. 363) le denominazioni " Geschlechtslappen " e " Copulationslappen ".

A che servano questi peni nessuno è in grado di spiegare completamente. LEVINSEN (**13**), che pel primo (1890) li descrisse e figurò pel suo *Siphonogaster aegyptiacus* (= *Alma nilotica* (Grube), pose in chiaro in essi la presenza di numerose ghiandole, e suppose avessero " l'ufficio di agire come stimoli durante l'accop- " piamento „, e, con dubbio, " l' ufficio di organi respiratori „, avendo appurato in essi la presenza di un fitto intreccio di vasi sanguigni (**13** pag. 319 e 320, e tav. 7). Più tardi (1891) BEDDARD, nella descrizione del suo *Siphonogaster millsoni* (= *Alma m.*), accolse l'idea di LEVINSEN " in believing that they are in all " probability penes „, considerando, in appoggio a questa ipotesi, la posizione delle appendici e la presenza su di esse di setole copulatrici (**1** pag. 51), ma non ammise per i peni di *A. millsoni* la funzione respiratoria, viste le loro esigue dimensioni.

La prima descrizione accurata dell'intima struttura dei " peni „ devesi a MICHAELSEN (**14** pag. 11), che descrisse quelli del suo *Siphonogaster Stuhlmanni* (= *Alma St.*) (e rilevò fra altro una differente struttura alle due faccie) concludendo all'ipotesi d'una funzione erettile per cotesti organi, senza rigettare quella di LEVINSEN ch'essi abbiano pure funzione respiratoria, ma facendo però osservare che " zwingt der Reichtum an Blutgefässen nicht " zu der Annahme, dass diese Funktion wesentlich sei „. Un'altra descrizione, anche più minuziosa, e corredata di figure, riferì BEDDARD (**2** pag. 265-267) in seguito allo studio di altri esemplari di *Alma millsoni* (Bedd.): questo autore mise in chiaro che i vasi deferenti penetrano nei peni e s'aprono alla loro superficie. Quanto all'ufficio dei peni egli " imagine that they must " perform some other function in addition to that of serving as " intromittent organs for the sperm; they are so altogether out " of proportion to the fine canal which perforates them; and " besides, there are no correspondingly large organs to receive " them during copulation „. E aggiunse più avanti " ...; in *Si-* " *phonogaster*, however, the structure of the penis, as well as " its large size, is quite in accord with the view that it may " possibly perform the function of a clitellum „: quest'ultimo organo invero non era noto nelle specie di *Alma* (= *Siphonogaster*) descritte fino allora. Se poi i peni compiano pure una funzione respiratoria BEDDARD non escluse, tuttavia ammise un rapporto

fra il grande sviluppo in essi di ghiandole unicellulari e l'abbondanza di capillari sanguigni (1).

Le stesse considerazioni Beddard riferì ancora nella sua grande monografia degli Oligocheti (1895, **3** pag. 139 e 683). Pochi anni dopo (1901) questo medesimo autore segnalò pel primo la presenza del clitello in una specie (2) del genere *Alma* (**4** pag. 215 e 217), onde cadde l'ipotesi precedentemente formulata che i peni compissero la funzione di quell'organo; avendo inoltre riconosciuto che nei peni di questa specie v'è pure un ricco intreccio di capillari sanguigni, " rich tufts of capillaries pene-" trating within the epidermis „, ne concluse che " there is thus " quite a possibility of the organ serving, as was suggested " by Levinsen, a respiratory function „. Beddard riconobbe infine l'importanza dei tronchi sanguigni che penetrano nei peni (pag. 221).

Pochi nuovi dati aggiunse Duboscq (**10** pag. CI-CIII) descrivendo la sua *Alma Zébanguii*: egli avanzò l'ipotesi provvisoria che i peni avessero l'ufficio di formare l'involucro di spermatofori.

Nel riprendere lo studio dei peni dei Criodrilini mi proposi anzitutto di ripassare con attenzione la loro struttura istologica (3) valendomi di due specie, *Criodrilus Alfari* Cogn. e *Alma Aloysii Sabaudiae* Cogn. (4), delle quali il R. Museo Zoologico di Torino possiede un certo numero di esemplari tipi ben conservati in alcool.

Un punto ancora oscuro era quello riguardante il rapporto tra i vasi sanguigni che scorrono nei peni, e il sistema circo-

---

(1) Infine merita appena di essere ricordata l'ipotesi dubitativa avanzata da Beddard, che i peni possano essere " aberrant and probably para-" sitic Annelids „.

(2) Cui diede più tardi il nome di *Alma budgetti* (**5** pag. 222).

(3) La morfologia esterna dei peni delle varie specie è nota, risultandò essa, oltrechè dalle descrizioni, anche dalle figure che i varî autori ne hanno dato, onde non è il caso di parlarne qui nuovamente.

(4) Di quest'ultima specie ho pubblicato la diagnosi preliminare (**9** pag. 1): la descrizione, corredata di figure, comparirà nel volume destinato ad illustrare il materiale raccolto durante la spedizione di S. A. R. Luigi Amedeo di Savoia, Duca degli Abruzzi, alla catena del Ruwenzori.

latorio centrale (vasi longitudinali e seno intestinale): questo potei sciogliere con sufficente sicurezza valendomi di varie serie di sezioni esaminate al microscopio.

Quanto poi alla funzione degli organi in questione nulla di decisivo mi è dato di stabilire: soltanto posso fare alcune considerazioni dedotte dall'esame anatomo-istologico.

Peni di Alma.

Formazione dei peni. — Un esemplare *immaturo* (1) di *Alma Aloysii Sabaudiae* Cogn. mi servì assai bene per comprendere in qual modo si formino i peni, che, in questa specie, lunga circa 10 a 20 centimetri, possono raggiungere, a completo sviluppo, una lunghezza di 4 centimetri, e una larghezza, nel tratto distale laminare, di mm. 4,5 (Tav. fig. 1 e 2).

All'esame di sezioni longitudinali e trasverse riconobbi facilmente le regioni destinate a differenziarsi in peni.

Sono poste a ciascun lato sul segmento 19° e su circa metà di ognuno dei contigui 18° e 20°, in direzione dei fasci di setole ventrali, che al 18° e 19°, e ancora al 17° mancano della setola interna (*a*); sono limitate all'avanti e all'indietro da un breve solco trasverso (Tav. fig. 3, *r.p.*). In corrispondenza di esse l'epidermide (*ep.*) non mostra ancora alcuna alterazione nell'ordinamento delle cellule, apparendo al tutto simile a quella delle altre parti del corpo, ma si fa ben manifesto un forte accumulo di elementi connettivi, strettamente avvicinati, posto fra l'epidermide e lo strato di muscoli circolari che si mischiano in parte con esso.

Tale accumulo appare in qualchè tratto isolato dallo strato epidermico per opera di spazî di natura schizogenica, attraversati da esili briglie pluricellulari. Lo spessore dell'accumulo connettivale è quasi ovunque pari a 3 o 4 volte quello dell'epidermide; in corrispondenza degli intersegmenti $^{18}/_{19}$ e $^{19}/_{20}$ lo supera di poco. Il vaso deferente (*v. d.*) s'addentra su ciascun lato fino alla massa

(1) Ho adottato la nomenclatura di Duboscq, il quale considera nelle *Alma* gli stadî: *immaturus*, senza peni; *juvenis*, con peni incompletamente sviluppati ma senza clitello; *maturus* con clitello (10 pag. civ).

connettivale ove termina in una piccola cavità chiusa, sottostante all'epidermide, posta in corrispondenza dell' intersegmento $^{18}/_{19}$. La piccola cavità è tappezzata per buon tratto da cellule piccole, basse, con grosso nucleo ovoide, uninucleolato, simili a quelle che rivestono il lume del vaso deferente, e in parte dalle cellule epidermiche di cui alcune trovansi a sporgere nel lume stesso della cavità.

Lo strato di muscoli longitudinali della parete del corpo non concorre in alcun modo alla formazione dei peni; esso conserva invariato il suo spessore in corrispondenza della regione peniale, ove lo percorrono, diretti secondo assi trasversali del corpo, dei sottili zaffi di connettivo, nei quali si scavano i vasi sanguigni destinati ai peni (v. sotto).

A mano a mano che i peni si sviluppano lo stroma connettivo aumenta, mentre buona parte dei suoi elementi si differenzia ben tosto in fibre muscolari, e si delinea in esso un ricco intreccio di vasi capillari, proteso fin contro la base dell'epidermide. Nello stroma connettivo i nuclei in cariocinesi sono frequenti (Tav. fig. 4). In esso si notano ancora degli spazi schizogeni (Tav. fig. 13) attraversati da briglie pluricellulari percorse da capillari sanguigni. Le cellule che compongono queste briglie hanno ancora in gran parte citoplasma omogeneo, finamente granuloso (Tav. fig. 4), e son disposte coll'asse maggiore normale alle faccie dei peni.

I vasi sanguigni che penetrano nei peni sono in numero di *tre* per ciascuno di questi organi, come potei già riconoscere in un esemplare con peni lunghi appena 2 mm. (Tav. fig. 5): dei loro rapporti coi tronchi longitudinali del corpo è fatta parola più avanti a pag. 13 e seguenti.

In peni lunghi 2 mm. sono già nettamente delineati, presso la base dell'epidermide della faccia interna o ventrale, i follicoli delle setole copulatrici, costituiti ognuno da un ammasso tondeggiante di poche cellule oblunghe, relativamente grosse (diam. mass. 20-25 μ), di forma concavo-convessa, le quali abbracciano la cavità follicolare in cui già trovasi un rudimento di setola (l'apice) spesso circa 7 μ. Il nucleo voluminoso di tali cellule è rotondo (diam. 6 μ), assai povero in cromatina, e contiene un grosso nucleolo (diam. 2-3 μ). I follicoli setigeri non comunicano ancora coll'esterno, ma in qualche caso l'epidermide appare lievemente

infossata sopra di essi. Ancora presso la superficie interna dei peni si scorgono nello stroma connettivo, disposti lungo l'asse longitudinale mediano dei peni, gli abbozzi dei tubuli ghiandolari destinati ad aprirsi anch'essi alla faccia ventrale, e descritti e figurati per la prima volta in *Alma millsoni* Bedd. da BEDDARD (**2** pag. 266, 267, e Tav. fig. 19 *n*), che l'interpretò quali nefridi. Appaiono come accumuli tondeggianti di cellule stipate fra loro, disposte radialmente attorno ad una cavità più o meno angusta, a parete non cigliata. Il diametro massimo di tali cellule è di circa 6 μ; il loro nucleo è tondeggiante e occupa quasi per intero il corpo cellulare addossandosi alla parete opposta alla cavità: vi si scorge un piccolo nucleolo (Tav. fig. 6). A tali accumuli tondeggianti cavi che rappresentano il fondo cieco dei tubuli ghiandolari, si collegano degli ammassi di cellule simili alle precedenti, i quali si protendono, ondeggiando, in senso trasversale verso all'epidermide: essi formeranno i tratti efferenti dei tubuli, o canali collettori fra tubuli vicini.

In peni lunghi 2 mm. l'epidermide, a parte i lievi infossamenti destinati a comunicare con i follicoli setigeri, non mostra differenze apprezzabili sulle due facce dorsale e ventrale: le sue cellule alte hanno mole su per giù uguale, nè sono ancora differenziate le lunghe ghiandole unicellulari piriformi che s'osservano alle due facce dei peni più avanzati nello sviluppo.

I vasi deferenti, che lungo la parete del corpo scorrono nascosti nei muscoli longitudinali, fondendosi su ciascun lato al 13° segmento, si continuano nella massa connettiva dei peni, più prossimi alla faccia ventrale che alla dorsale, e all'incirca lungo la linea mediana. Nel suo lume sporgono ciglia vibratili.

STRUTTURA DEI PENI A COMPLETO SVILUPPO. — *Porzione basale.* — Una sezione condotta trasversalmente per la porzione basale di un pene di *Alma Aloysii Sabaudiae* Cogn., quale è riprodotta nella fig. 6, lascia vedere assai bene i rapporti fra i vari strati di tessuti. Lo strato epidermico alla faccia dorsale mostra già frequenti le cellule ghiandolari, lungamente clavate, che s'affondano col loro corpo in un doppio straterello di fibre muscolari, longitudinali e trasverse, posto sotto l'epidermide, e spesso lo attraversano, internandosi fra i potenti fasci musco-

lari longitudinali profondi. Questi lasciano agevolmente riconoscere la loro natura istologica, e appaiono tramezzati e avvolti da esilissime lamine connettive. La loro origine va ricercata in una quasi totale trasformazione dello stroma connettivo, che forma il corpo dei peni giovanissimi, in tessuto muscolare.

La porzione centrale dei peni è, già alla base, occupata da una cavità che corrisponde agli spazi schizogeni già evidentissimi nello stroma connettivo iniziale (Tav. fig. 5 e 13). Tale cavità è percorsa o tramezzata da briglie più o meno tenui, fatte di poche fibre assai allungate, e dirette dalla faccia dorsale alla ventrale: inoltre si mantengono in essa cavità i tre tronchi sanguigni principali penetrati nel pene. Questi, fin dalla base, inviano dei vasi capillari, che si distribuiscono nelle varie maglie connettive, raggiungendo la base dello strato epidermico, e facendosi sempre più sottili (Tav. fig. 7). Il lume della cavità non mostra un rivestimento peritoneale, poichè nei peni, come già Beddard (**2** pag. 266) potè riconoscere, non v'è prolungamento celomico.

Porzione distale laminare. — Una differenza strutturale delle due facce dei peni venne già riconosciuta anzitutto da Michaelsen (**14** pag. 11), come ho ricordato sopra; Beddard (**2** pag. 265-267), ne diede una descrizione più particolareggiata. In base a questa ultima, e a quella meno diffusa di Duboscq (**10** pag. ci), aggiungo qui alcuni nuovi dati.

La parte laminare dei peni mostra, a completo sviluppo, più scarsi gli elementi muscolari che non la parte sottile, subcilindrica, in cui essa si continua per attaccarsi alla parete del corpo: ciò riconobbi agevolmente in *Alma Aloysii Sabaudiae.* Persistono però sempre: *a*) lo straterello doppio subepidermico di fibre longitudinali e trasverse (Tav. fig. 7-10, *f. l.* e *f. t.*), che agisce verosimilmente come un muscolo pellicciaio; *b*) i fasci muscolari longitudinali, a fibre lasse, ridotti però alquanto in volume rispetto a quelli della porzione basale dei peni; *c*) le briglie sottili, qui distintamente muscolari, dirette dall'una all'altra pagina del pene.

Queste ultime appaiono costituite da uno o pochi elementi connettivi, straordinariamente allungati, in ognuno dei quali si differenzia una fibra muscolare liscia, nastriforme, pure allungatissima, tinta in rosa dall'eosina, mentre il citoplasma, finamente

granuloso, in cui s'alloga il nucleo, forma un rivestimento, più o meno visibile, attorno alla fibra stessa (Tav. fig. 10 *f. d. v.*). Ufficio di queste fibre dorso-ventrali è verosimilmente quello di favorire l'emissione all'esterno dei prodotti secretori preparati dai copiosissimi elementi ghiandolari che stanno in rapporto coll'epidermide della pagina inferiore (Tav. fig. 12). I fascî muscolari longitudinali presiedono alla contrazione, limitata, dei peni.

A tutto il sistema muscolare s'interpongono numerosi elementi connettivi di forma sempre allungata, spesso ramificati, con citoplasma finamente granuloso, e nucleo con molti minuti granuli di cromatina sparsi irregolarmente e disposto in una dilatazione della cellula. Questi elementi connettivi formano un esilissimo reticolato di sostegno fra il sistema muscolare e gli ammassi di cellule ghiandolari: di più servono a dar passaggio ai vasi capillari, il cui lume è intracellulare (Tav. fig. 11, *f. c.*, *ca.*).

Vanno ricordati infine sottili fascî muscolari che si dirigono dai follicoli delle setole peniali (corrispondenti alle ventose) (Tav. fig. 2) alla parete dorsale e ventrale del pene: essi fungono come muscoli motori delle setole.

Negli ampî spazî schizogeni dei peni non mi fu dato di scorgere dei linfociti.

Già alla porzione basale subcilindrica dei peni a completo sviluppo si scorgono presso l'epidermide della *faccia dorsale* delle grosse cellule ghiandolari, lungamente clavate, che sporgono più o meno nelle masse muscolari con la parte rigonfia, mentre la parte sottile s'interpone alle cellule epidermiche di rivestimento per sboccare all'esterno (Tav. fig. 6). Tali cellule si fanno anche più copiose nella porzione laminare dei peni, ove sono non di rado riunite in gruppi di 2 o 3, serbando tuttavia ognuna uno sbocco indipendente alla superficie dell'epidermide. Se ne può facilmente seguire lo sviluppo nelle sezioni. Appaiono dapprima alte come le cellule epidermiche di rivestimento (12 μ), ma già caratterizzate dalla forma a clava e dal citoplasma fittamente spugnoso ed assai colorabile dell'emallume acido, privo o quasi di granuli; il nucleo, spesso circa 5 μ, si dispone, e si mantiene anche in seguito, nell'estremità rigonfia: esso mostra la cromatina accumulata specialmente contro la membrana (Tav. fig. 7, *c. gh.*). A mano a mano che s'allun-

gano coteste cellule ghiandolari della faccia dorsale mostrano, dapprima scarso e poi più copioso, il loro prodotto caratteristico di escrezione, destinato ad essere emesso: questo è in forma di *grossi granuli* (circa 1 μ o meno) che l'alcool e il xilolo non sciolgono, e l'emallume acido colora intensamente in bleu cupo (Tav. fig. 9 e 10, *c. gh.*).

La quantità maggiore di granuli s'osserva nelle cellule completamente sviluppate, alte cioè da 80 a 120 μ: e non è raro vederne molti allineati lungo la parte sottile diretta alla superficie dell'epidermide.

Straordinariamente più abbondante è nel complesso il sistema ghiandolare che sta in rapporto coll'epidermide della *faccia ventrale*. Esso è distinto in due tipi diversi per aspetto e per origine. Il tipo che prevale, ed è sparso in tutta la regione ventrale del pene, *alla sola porzione dilatata*, consta di ammassi di cellule lungamente clavate, che raggiungono spesso col loro corpo le cavità schizogene dell'organo, o s'internano fra i fasci muscolari longitudinali profondi rimanendo compresse l'una contro l'altra (Tav. fig. 12).

Tali accumuli di cellule ghiandolari sono avvolti e trattenuti da fibre connettive, e irrorati da capillari sanguigni. Le cellule che li compongono sono simili per forma alle ghiandole unicellulari della faccia dorsale, ma le superano assai in dimensioni, potendo misurare, a completo sviluppo, fino a circa 250 μ in altezza. Inoltre il loro contenuto consta di un citoplasma esattamente spugnoso, percorso da ampi tubuli intracellulari destinati a raccogliere e guidar fuori il prodotto di escrezione, ma *privo di granuli* simili a quelli delle ghiandole unicellulari della faccia dorsale. (Tav. fig. 11, *c. gh.*). Il nucleo, anche qui collocato nella parte dilatata, prossimale, della cellula, è povero in cromatina, addossata alla membrana, e contiene presso il centro un grosso granulo pure colorato dall'emallume acido (? nucleolo). Il nucleo è trattenuto da fine briglie citoplasmatiche. Anche queste cellule serbano ognuna il proprio sbocco indipendente all'esterno: i loro accumuli sono molto maggiori in corrispondenza dei follicoli delle setole peniali che altrove (Tav. fig. 12, *s*). Questo tipo di sistema escretore venne già sommariamente descritto e figurato da Beddard (2 pag. 765, fig. 19 e 22) per la sua *Alma millsoni*.

Il secondo tipo di sistema ghiandolare della faccia ventrale dei peni è formato da ghiandole tubulose *pluricellulari*, disposte soltanto lungo la linea mediana della porzione dilatata, fino a poca distanza dall'apice. Anche queste descrisse e figurò Beddard (2 pag. 266, 267; fig. 19, *n.*) chiamandole " nephridia ". Tali ghiandole tubolose s'originano nel connettivo primario dei peni come cavità chiuse che poi s'anastomizzano fra loro parzialmente, mentre si forma un condotto escretore comune a più tubuli, aperto fra le cellule epidermiche alla superficie esterna (Tav. fig. 14). I tubuli singoli sono a fondo cieco. Esaminandoli in sezione trasversa potei convincermi che il loro lume è *inter*-cellulare anzichè intracellulare com'è ricordato da Beddard (2 pag. 266); le cellule limitanti hanno citoplasma finamente reticolato, privo di granuli, più denso alla superficie contigua al lume, e mancano affatto di ciglia vibratili: il loro nucleo, tondeggiante, è povero di cromatina, e contiene un granulo subcentrale intensamente tinto dall'emallume acido (Tav. fig. 6 e 15). Nel lume dei tubuli si scorge spesso accumulato il prodotto di secrezione sotto forma di granuli giallicci, non tinti nè dall'emallume acido nè dall'eosina, insolubili in alcool e in xilolo.

Là dove i tubuli attraversano lo straterello di fibre muscolari subepidermico (pellicciaio) trovai talora i tubuli stessi in parte abbracciati da elementi muscolari (fig. 14, *m.*) destinati verosimilmente a fungere come costrittori. Verso l'interno i tubuli si protendono fra i fasci muscolari longitudinali profondi, fino a sporgere talora negli ampi spazi schizogeni ove sono trattenuti da esili fibre connettive, e rasentati dai vasi capillari (Tav. fig. 15, *f. c. ca.*). Per la struttura e l'assenza di ciglia nel lume, coteste ghiandole a tubo si distinguono nettamente dai tubuli nefridiani, che d'altronde non penetrano nei peni.

Il vaso deferente, anche nella parte laminare del pene, scorre contiguo alla pagina inferiore: la sua apertura all'esterno non è unica, bensì l'epidermide si introflette in più punti per far comunicare coll'esterno il lume del vaso stesso (Tav. fig. 16, *v. d.*, ♂).

Peni di Criodrilus.

I caratteri istologici qui sopra indicati pei peni completamente sviluppati di *Alma Aloysii Sabaudiae* possono in complesso riferirsi anche ai peni di *Criodrilus Alfari*. In questi ultimi va però tenuto conto che mancano: *a*) il canale deferente; *b*) le setole peniali; *c*) le ghiandole pluricellulari a tubo. Inoltre gli elementi ghiandolari piriformi sboccanti sulla pagina ventrale formano degli aggruppamenti meno distinti, e lo stroma connettivo profondo è ancora alquanto sviluppato, onde più angusti risultano gli spazî schizogeni nell'interno dei peni.

Apparato circolatorio dei peni.

(V. la figura nel testo a pag. 16).

Beddard soltanto (2 pag. 266) ha precisato il numero dei vasi sanguigni principali che penetrano in ogni pene di *Alma*: " one particularly large trunk runs along the whole length; " besides this there are two smaller longitudinal vessels. All " these send off branches which ramify in the walls of the " penis „. Questo per *Alma millsoni*, mentre in *A. budgetti* lo stesso Beddard (4 pag. 221), trovò " a pair of strong longitu- " dinally running blood-vessels „.

In *Alma Aloysii Sabaudiae*, come ho già detto sopra, si addentrano, in ogni pene, appunto tre tronchi sanguigni (Tav. fig. 7). Questi hanno tutti parete muscolare costituita di due strati: *a*) profondo, fatto di cellule con fibrille muscolari trasverse rispetto all'asse del vaso, e nucleo sporgente nel lume del vaso medesimo, avvolto da piccola massa citoplasmatica; *b*) periferico, fatto di fibre muscolari longitudinali.

I due strati muscolari si conservano nelle principali ramificazioni dei tre tronchi; i vasi capillari hanno lume intracellulare.

Dei tre tronchi trovai in un esemplare assai più ampio quello anteriore, più prossimo alla linea mediana ventrale longitudinale del corpo; il secondo tronco mostra calibro minore, ma ha parete più spessa, il che va forse ascritto a uno stato

di sistole; il terzo tronco, o posteriore, ha lume più angusto e parete sottile (Tav. fig. 7).

I tre tronchi decorrono nei peni frammezzo allo stroma connettivo profondo, ove danno luogo alle principali ramificazioni che s'internano e si suddividono fra le masse ghiandolari e muscolari.

Abbondanti vasi capillari si trovano fin contro la base delle cellule epidermiche.

Il tronco anteriore, segnato col numero 1 nelle figure 7 e 10, si accompagna nel suo decorso col vaso deferente che gli sottostà intimamente collegato.

In che rapporto stanno i tre tronchi dei peni di *Alma Aloisii Sabaudiae* con i tronchi longitudinali del corpo?

Nel tentare la soluzione di questo quesito fui indotto a esaminare il complesso dei vasi sanguigni principali della regione che segue ai segmenti gonadiali, ove appunto sono posti i peni.

Non è mia intenzione descrivere qui cotesto complesso di vasi sanguigni: ciò uscirebbe dai limiti di questa nota. Ricordo soltanto i dati che hanno maggior attinenza con la vascolarizzazione dei peni.

Ai segmenti 13°, 14° e 15° rispettivamente v'è un paio di tenui vasi intestino-tegumentali, simili per disposizione a quelli descritti e figurati da Bourne (6 pag. 70, 71, e Tav. 8, fig. 4, e fig. 7, *I. T.*), con radice intestinale almeno doppia; essi si ramificano in ogni direzione nella parete del corpo. Al segmento 16° i vasi intestino-tegumentali hanno radice doppia, ma sono più grossi di quelli dei segmenti anteriori: essi raggiungono le pareti laterali-inferiori del corpo e si riflettono all'indietro a formare due importanti ***tronchi pari parietali.*** Questi hanno parete esile, e sono estesi per i segmenti 17°, 18°, 19°, 20°, 21°, ove ricevono rispettivamente un paio di vasi provenienti dal seno sanguigno intestinale, corrispondenti a quelli intestino-tegumentali del 16°, mentre in ciascuno di questi segmenti, compreso il 16°, inviano due rami: uno diretto dorsalmente, l'altro ventralmente ad affondarsi e ramificarsi nella parete del corpo, e ancora un ramo (o più?) ai nefridi. Ciascuno dei segmenti 13°-22° e oltre contiene un paio di vasi dorso-parietali e ventrali-parietali. V'è pure in ogni segmento

comunicazione tra il seno sanguigno intestinale e i vasi dorsale e ventrale.

I due tronchi pari parietali nel 21° segmento si ripiegano ventralmente scorrendo contro la parete del corpo, fino a fondersi, nel 22°, sotto la catena gangliare ventrale per formare un *vaso sottonerveo.*

Nei peni entrano, cominciando dall'avanti: 1° un paio di vasi ventrali-parietali originati dal vaso ventrale nel 18° segmento; 2° un paio di vasi derivati nel 19° dai tronchi paripa-rietali; 3° un paio di vasi derivati dai ventro-parietali provenienti dal vaso ventrale nel 19° segmento.

Verosimilmente penetrano pure nei peni dei sottili rami derivati per suddivisione dei vasi dorso-parietali del 19° (e del 18° e 20°).

Quanto alla direzione del corso sanguigno nei tre tronchi longitudinali dei peni non posso naturalmente che formulare un'ipotesi.

Il sangue entrerebbe in ogni pene per mezzo dei due vasi ventrali-parietali, verrebbe in seguito raccolto attraverso ai capillari nel vaso che sbocca nel tronco parietale, e da questo condotto nel seno sanguigno intestinale.

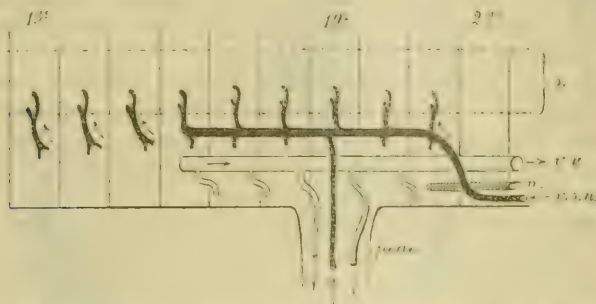
Tale ipotesi s'accorda con la teoria espressa da Bourne (**6**, pag. 77 e 78) pel *Megascolex coeruleus* Templ., e con quella espressa da Harrington (**11** pag. 155, e fig. 10 *Lumbricus* a pag. 153) per *Lumbricus* (1) per la circolazione tegumentale.

Il vaso sottonerveo raccoglierebbe in *Alma Aloysii Sabaudiae* sangue destinato al seno sanguigno intestinale passando per i due tronchi pari parietali, nei quali si versa pure sangue proveniente dal tegumento dei segmenti 16°-21°.

La figura alla pagina seguente rappresenta in schema i rapporti che i tre tronchi sanguigni peniali hanno col vaso ventrale e coi tronchi pari parietali.

I peni di *Alma Al. Sab.* non mostrano dunque nella vascolarizzazione nulla di essenzialmente diverso da ciò che s'osserva nei segmenti viciniori per la parete del corpo. Notisi però

(1) Noto la contraddizione fra quanto è scritto a pag. 155 del lavoro di Harrington riguardo alla direzione del sangue nei vasi ventro-tegumentali e le frecce nere segnate accanto a questi nella fig. 2 della Tavola 6.

che mentre i singoli segmenti contengono un paio di vasi ventro-tegumentali, i peni ne contengono invece due; ma ciò perchè i peni stessi sono modificazioni del tegumento, oltrechè del 19° segmento, anche di quello di una parte posteriore del 18°, e di una parte *anteriore* del 20°: ora è appunto alla parte anteriore di ogni segmento che giungono alla parete del corpo i vasi ventro-tegumentali, cosicchè quelli del 20° mandano un prolungamento dentro ai peni.

Schema dei rapporti circolatori intestino-tegumentali e ventro-tegumentali dei peni e regioni attigue in *Alma Aloysii Sabaudiae* Cogn. (*n* = catena gangliare ventrale; *s* = seno intestinale; *v v* = vaso ventrale; *v. s. n.* = vaso sottonerveo; i numeri corrispondono ai segmenti, le frecce indicano la corrente del sangue. È segnato in nero il sistema intestino-tegumentale).

Riguardo alla funzione respiratoria ritengo che i peni non abbiano importanza molto maggiore dell'epidermide e sottostante connettivo delle altre regioni del corpo: l'assenza dei peni nei giovani individui suggerisce a priori questa opinione.

La funzione peculiare cui sono destinati si connette, credo, alla copulazione, e forse, come suggerì Duboscq (10 pag. CI-CIII), alla formazione dell'involucro degli spermatofori.

Pel *Criodrilus Alfari* Cogn. valgano le stesse considerazioni; tuttavia non mi fu possibile precisare in che rapporti siano coi tronchi principali del corpo e col seno sanguigno intestinale i vasi sanguigni che scorrono nei suoi peni, giacchè cotesti vasi sono già suddivisi al loro ingresso nei peni medesimi, ed è assai difficile seguirne il decorso coll'esame delle sezioni in serie.

OPERE CITATE

(1) Beddard Fr. E., 1891 — *On an Earthworm of the Genus Siphonogaster from West Africa*, in: Proc. Zool. Soc. London 1891.

(2) Id., 1893 — *Two New Genera and some New Species of Earthworms*, in: Quart. Journ. Micr. Sci., n. ser., vol. 34, part 3.

(3) Id., 1895 — *A Monograph of the order of Oligochaeta*. Clarendon, Oxford.

(4) Id., 1901 — *On the clitellum and spermatophores of an Annelid of the Genus Alma*, in: Proc. Zool. Soc. London, 1901, vol. I.

(5) Id., 1903 — *On a new Genus and two new Species of Earthworms of the Family Eudrilidae, with some Notes upon other African Oligochaeta*, in: Proc. Zool. Soc. London, 1903, vol. I.

(6) Bourne A. G., 1891. — *On Megascolex coeruleus, Templeton, from Ceylon; together with a Theory of the Course of the Blood in Earthworms*, in: Quart. Journ. Micr. Sci., n. ser., vol. 32, part 1.

(7) Cognetti de Martiis L., 1904 — *Nuovi Oligocheti di Costa Rica*, in: Boll. Mus. Zool. Torino, vol. 19, n. 478.

(8) Id., 1906 — *Gli Oligocheti della regione neotropicale*, in: Mem. R. Acc. Sci. Torino, ser. 2ª, vol. 56, 1906.

(9) Id., 1906 — *Un nuovo Oligochete Criodrilino*, in: Boll. Mus. Zool. Torino, vol. 21, nº 534.

(10) Duboscq O., 1902 — *Alma Zebanguii n. sp. et les Alminae Oligochetes de la famille des Glossoscolecidae Mich.*, in: Arch. de Zool. exp. et gén., sér. 3, vol. 10, notes et revue, nº 7, XVI.

(11) Harrington N. R., 1899 — *The calciferous glands of the earthworm, with appendix on the circulation*, in Journal of Morphology, vol. 15, supplement.

(12) Hoffmeister W., 1845 — *Die bis jetzt bekannten Arten aus der Familie der Regenwürmer*. Braunschweig.

(13) Levinsen G. M. R., 1890 — *Om to nye Regnormslaegter fra Aegypten*, in: Videnskab. Meddel. Kjöbenharn, 1889.

(14) Michaelsen W., 1892 — *Beschreibung der von Herrn Dr. Fr. Stuhlmann am Victoria Nyanza gesammelten Terricolen*, in: Mitt. Mus. Hamburg, vol. 9.

(15) Id., 1895 — *Zur Kenntnis der Oligochaeten*, in: Abhandlgn. Naturwiss. Ver. Hamburg, vol. 13.

(16) Id., 1900 — *Oligochaeta*, in: Das Tierreich, Lief. 10.

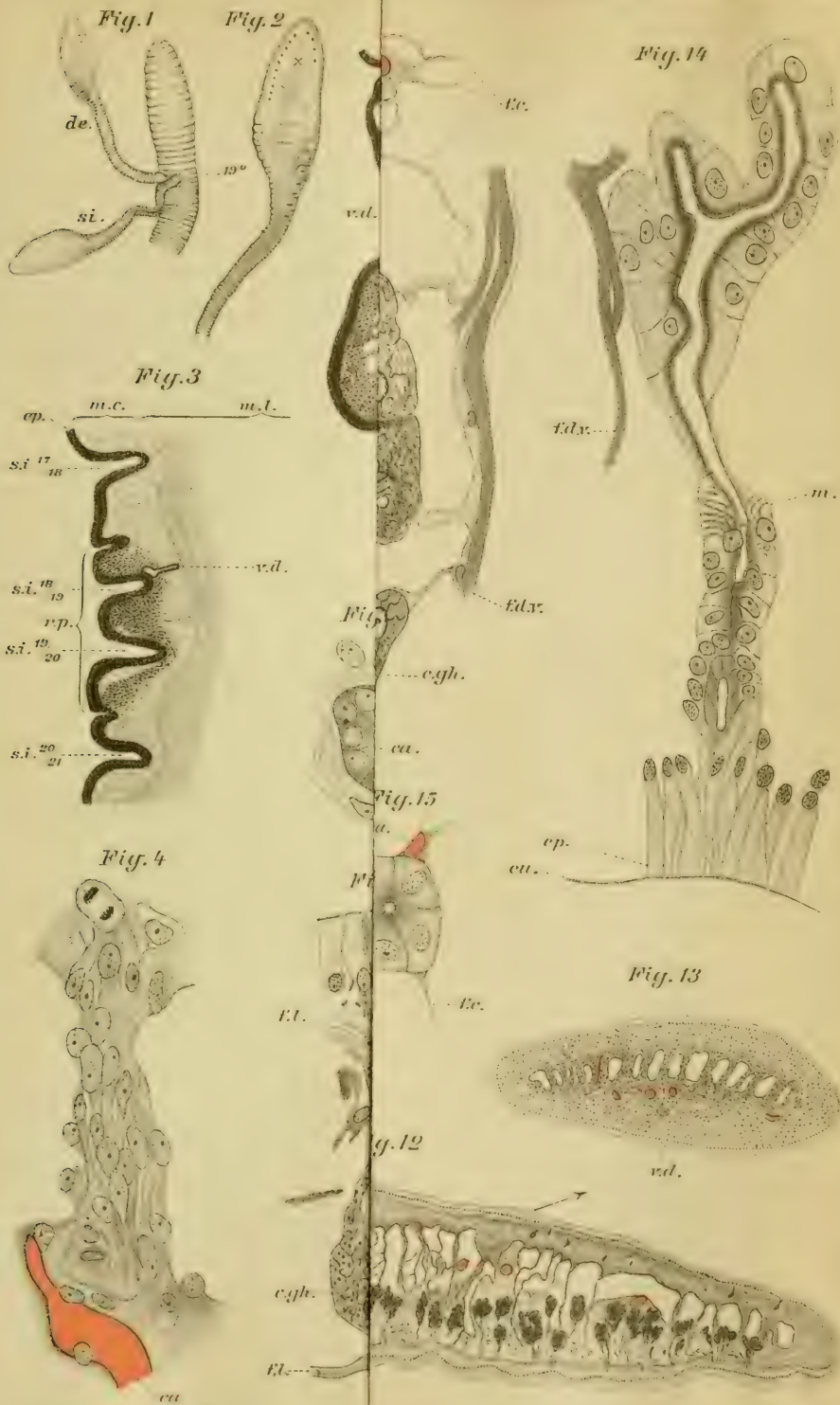
(17) Id., 1903 — *Die geographische Verbreitung der Oligochaeten*. Berlin, Friedländer.

(18) Id., 1905 — *Die Oligochäten Deutsch-Ostafrikas*, in: Z. f. wiss. Zool., vol. 82.

(19) Örley L., 1881 — *A palaearktikus örben élö terrikolák nak revisiója és elterjedése*, in: Értekezések a Természettud. Köréböl XV kötet, pag. 8. Budapest.

(20) Veidovsky Fr., 1884 — *System und Morphologie der Oligochaeten*. Praga-Rivnáč.

L.Cognetti de Martiis dis.

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 5
Fig. 11
Fig. 14
17°
18°
19°
20°
21°
Fig. 3
v.d.
ep
Fig. 6
Fig. 7
v.d.
f.d.v.
c.gh.
Fig. 8
ep.
c.gh.
Fig. 15
Fig. 4
Fig. 10
Fig. 9
c.gh.
Fig. 13
Fig. 16
v.d.
Fig. 12
v.d.
L.Cognetti de Martiis dis.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Alma Aloysii Sabaudiae Cogn.

Fig. 1. Tratto anteriore dell'animale, in grandezza naturale, per mostrare la grandezza dei peni a completo sviluppo.

" 2. Pene sinistro, visto dalla sua faccia interna o ventrale (nella figura precedente esso è visto dalla faccia esterna o dorsale), la crocetta indica la posizione dei pori masch.; × circa 6.

" 3. Sezione longitudinale della parete del corpo di un giovane esemplare, passante per la regione in cui si svilupperà il pene; × 42.

" 4. Briglia connettiva profonda di un pene lungo 2 mm.; × 715.

" 5. Sezione longitudinale della parete del corpo di un giovane esemplare con peni lunghi 2 mm., passante per la base di un pene, onde mostrare i due tronchi sanguigni che si insinuano in questo; × 381.

" 6. Sezione dell'abbozzo d'una ghiandola a tubo circondato da tessuto connettivo-compatto; × 715.

" 7. Sezione della base di un pene (sinistro) completamente sviluppato: i tronchi sanguigni sono numerati procedendo dall'avanti all'indietro, la freccia corrispondendo all'asse longitudinale del corpo dell'animale; × 38.

" 8. Sezione del tegumento della pagina dorsale di un pene completamente sviluppato passante per una ghiandola unicellulare in via di formazione; × 715.

" 9. Id. id. passante per una ghiandola unicellulare più avanzata nello sviluppo; × 715.

" 10. Id. id. passante per una ghiandola unicellulare del tutto sviluppata e funzionante; × 715.

" 11. Sezione dorso-ventrale dell'interno della porzione laminare di un pene, onde mostrare un ammasso delle cellule ghiandolari sboccanti alla pagina ventrale, intercalato a due fascetti muscolari diretti dalla pagina dorsale (in alto) alla ventrale; × 715.

" 12. Sezione trasversa della porzione laminare di un pene a completo sviluppo (sono omesse le ghiandole tubulose della pagina inferiore o ventrale): la freccia e i numeri dei vasi sanguigni come in figura 7; × 48.

" 13. Sezione trasv. della porzione laminare di un pene lungo 2 mm.; × 48.

" 14. Sezione, parallela a quella rappresentata nella fig. 11, passante per una ghiandola tubulosa della pagina inferiore di un pene del tutto sviluppata; × 480.

" 15. Sezione trasversa di una ghiandola tubulosa; × 715.

" 16. Sezione longitudinale mediana della pagina inferiore di un pene a completo sviluppo per mostrare la serie dei pori maschili (♂); × 48.

Le figure 4, 6, 8, 9, 10 e 15 sono state disegnate coll'obbiettivo Koristka $^{1}/_{15}$ imm. omog. e l'oculare compensatore 4.

Abbreviazioni. — *ca.* = capillari sanguigni; *c. gh.* = cellule ghiandolari; *cu.* = cuticola; *ep.* = epidermide, rivestita da esilissima cuticola; *f. c.* = fibre connettive; *f. d. v.* = fibre muscolari dorso-ventrali; *f. l.* = fibre muscolari longitudinali; *f. t.* = fibre muscolari trasverse; *m.* = cellula muscolare; *m. c.* = muscoli circolari; *m. l.* = muscoli longitudinali; *r. p.* = regione peniale; *s.* = orifizio di follicolo setigero; *s. i.* = solco intersegmentale; *v. d.* = vaso deferente.

Materiali per lo studio dell'osso ioide dei Sauri.

Nota del Dott. EDOARDO ZAVATTARI.

(Con una Tavola).

Nell'eseguire una serie di ricerche sui muscoli ioidei e linguali dei Sauri, ricerche che verranno quanto prima pubblicate, la mia attenzione dovette, come era naturale, essere rivolta innanzi tutto all' apparato ioideo, la cui conoscenza, per essere l'osso ioide il centro di tale sistema muscolare, che su di esso prende la sua base d'inserzione, mi era indispensabile per bene interpretare l'esatta posizione ed i reciproci rapporti dei singoli fasci.

Essendomi quindi risultato che i dati sull'argomento sono oltremodo scarsi, come nota anche Gaupp (11), colle parole " Die Literatur über das Zungenbein der Saurier ist klein ", ò reputato non essere privo d'interesse il pubblicare le osservazioni che ò potuto raccogliere, figurando il ioide delle specie più importanti da me esaminate.

E ciò mi parve tanto più necessario, in quanto che i disegni dati da Cope [(5)-(6)], i cui lavori sono i più completi rispetto al numero delle specie rappresentate, non sono affatto esatti; come si può ad esempio verificare, comparando la figura da lui data dell' ioide dell' *Anguis fragilis* [(5), Pl. IV, fig. 21] con quella della stessa specie riportata da Walter [(21), Taf. I, fig. *Anguis fragilis*], rispondente quest' ultima al vero; oppure quella da me disegnata del *Chalcides (Gongylus) ocellatus* (Fig. 18) con quella corrispondente di Cope [(5), Pl. V, fig. 32)], nella quale manca il secondo paio delle corna branchiali. Ne risulta quindi come conseguenza assai importante, che noi non potremo fare alcun affidamento nè delle asserzioni, nè delle figure di Cope, qualora vorremo, servendoci di tali dati, procedere ad uno studio della morfologia del ioide dei Sauri.

Le specie da me esaminate sono elencate secondo la classificazione adottata da Boulenger per il *Catalogue of the Lizards in the British Museum*, 1885, e sono le seguenti:

Fam. ***Agamidae.***

Calotes cristatellus Kuhl.
Agama stellio Lin.
Liolepis belli Gray.
Uromastix achantinurus Bell.

Fam. ***Iguanidae.***

Basiliscus americanus Laur.
Tropidurus torquatus Wied.
Iguana tubercolata Laur.
Ctenosaura achantura Shaw.
Phrynosoma cornutum Harl.

Fam. ***Varanidae.***

Varanus griseus Daud.

Fam. ***Lacertidae.***

Lacerta ocellata Daud.
Algiroides fitzingeri Wiegm.

Fam. ***Scincidae.***

Trachysaurus rugosus Gray.
Egernia cunninghamii Gray.
Macroscincus coctaei D. B.
Mabuia multifasciata Kuhl.
Eumeces schneideri Daud.
Chalcides ocellatus Forsk.
Chalcides tridactylus Laur.

Il sistema ioideo dei Sauri si presenta costituito di una porzione centrale: il corpo del ioide [*corpus ossis hyoidei* (Gaupp), *basihyal* (Cope), *copula* (Walter)], il quale in avanti si continua in un prolungamento: il processo entoglosso [*processus entoglossus seu lingualis* (Gaupp), *glossohyal* (Cope), *entoglosson* (Walter)], e che lateralmente è connesso con tre paia di corna: il corno iale [*cornu hyale* (Gaupp), *hypohyal* e *ceratohyal* (Cope), *hyoidbogen*

(Walter)], il primo corno branchiale [*cornu branchiale primum* (Gaupp), *first ceratobranchial* (Cope), *keratobranchiale* (Walter)], ed il secondo corno branchiale [*cornu branchiale secundum* (Gaupp), *second ceratobranchial* (Cope), *keratobranchiale* (Walter)].

La forma di queste diverse parti varia notevolmente nelle diverse famiglie e si conserva abbastanza costante in ciascuna di esse. In tutte le specie da me esaminate il primo paio di corna branchiali è ossificato, ad eccezione della sua porzione più estrema la quale è cartilaginea. Questo corno è sempre mobile sul corpo; vi è una vera articolazione fra corpo e corno, infatti quest'ultimo termina normalmente in una specie di testa articolare tondeggiante, la quale è contenuta in una corrispondente escavazione del corpo ioideo. Generalmente non vi è una cavità articolare, non vi è una vera capsula, non vi à una grande mobilità, ma abbiamo piuttosto una specie di anfiartrosi; in alcune specie tuttavia incontriamo una vera diartrosi. Così nel *Varanus griseus* Daud. se sezioniamo longitudinalmente la regione d' incontro del corpo col primo corno branchiale, riscontriamo le caratteristiche seguenti: La diafisi si presenta ossificata con un canale midollare centrale, e colle estremità formate da tessuto spugnoso; al suo estremo anteriore o centrale è accollata l'epifisi, ben individualizzata e distinta dalla diafisi, di forma cuboidale, con la superficie articolare sferoidale ricoperta di uno strato di cartilagine. Da parte del corpo del ioide, il quale è cartilagineo, abbiamo una cavità cotiloidea nella quale è contenuta la testa articolare. Fra le due superficie è compresa una cavità abbastanza ampia, all' intorno i due capi articolari sono riuniti da una capsula fibrosa; risulta quindi che in questo caso siamo in presenza di una vera enartrosi, per cui i movimenti del primo corno branchiale sul corpo devono essere assai ampi. Il corno iale in alcune specie è mobile sul corpo, ma in questo caso non si tratta di vera articolazione, non abbiamo nè superficie, nè cavità articolari, ma semplicemente una lieve mobilità delle due parti fra di loro.

Negli Agamidi troviamo due forme assai distinte. In alcuni generi, come *Calotes* (fig. 1), *Agama* [(fig. 2); vedi anche Calori (3), Tav. I], il corpo si presenta molto ridotto, di forma quasi triangolare, e si continua subito nelle corna che da esso si staccano; il processo entoglosso à un' ampia base, le corna bran-

chiali del secondo paio originano vicinissime l'una all'altra in modo da simulare quasi un unico processo; in altri generi, sopratutto nell'*Uromastix* [(fig. 4): vedi pure CALORI (2), tav. II], il corpo è allungato in senso trasversale, il processo entoglosso si presenta di una larghezza uniforme, le seconde corna branchiali originano molto distanti, agli estremi del corpo. Fra questi due tipi, troviamo il ioide del *Liolepis belli* Gray (fig. 3) nel quale si riscontra una disposizione intermedia, il corpo è ancora triangolare, ma le corna branchiali del secondo paio si staccano già più indipendentemente l'una dall'altra, senza essere così lontane come nell'*Uromastix*. In tutta questa famiglia il corpo e tutte le altre parti del ioide, ad eccezione del primo corno branchiale, sono cartilaginee.

Negli Iguanidi la disposizione è assai differente. Nel *Phrynosoma* [(fig. 9); vedi anche CALORI (4), Tav. II] il ioide presenta un corpo tozzo, quadrangolare, con alcuni punti di ossificazione nel suo interno; il corno iale, ripiegato su se stesso, contiene pure un'asticciuola ossea in quasi tutta la sua lunghezza; le prime corna branchiali sono ossificate, piatte, allargate, rugose; quelle del secondo paio si staccano dal corpo assai lontane fra di loro e sono piuttosto brevi. Nelle altre specie il corpo è ancora triangolare, ed assai ridotto, il processo entoglosso è lungo ed esile, le corna branchiali del secondo paio originano vicinissime fra di loro e sono oltremodo allungate, sopratutto nell'*Iguana tubercolata* (fig. 7), e ciò è in rapporto collo sviluppo del bargiglio sottomentoniero proprio a questa specie, nella quale le due corna branchiali seconde accollate insieme decorrono dall'avanti all'indietro del bargiglio lungo il suo margine anteriore libero. Inoltre, in questa stessa specie, tanto il corno iale quanto il primo branchiale sono, verso le loro estremità, ripiegati ad angolo, e non diritti come è figurato da CUVIER [(8), Pl. 245, fig. 4], COPE [(5), Pl. IV, fig. 20] ed HOFFMANN [(13), Taf. LXXII, fig. 6], i quali ultimi riportano la figura di CUVIER. Nel *Basiliscus* (fig. 5), nel *Tropidurus* (fig. 6), e nella *Ctenosaura* (fig. 8), la porzione discendente del corno iale (*ceratohyal* di Cope) si presenta allargata o prolungata internamente in una lamella di forma e grandezza varia nelle differenti specie. Anche in questa famiglia solo le prime corna branchiali sono ossificate, tutte le altre parti sono cartilaginee; però, come ho

detto più in alto, nel *Phrynosoma* vi sono punti ossificati nel corpo e nel corno iale.

Il genere *Varanus* presenta una disposizione tutt'affatto caratteristica (fig. 10). Il corpo è allungato, lineare, il processo entoglosso è notevolmente sviluppato, manca il secondo paio delle corna branchiali, il primo corno branchiale è ossificato e perfettamente articolato sul corpo. Il corno iale è suddiviso in due porzioni distinte e presenta una forma molto curiosa: la porzione ascendente (*hypohyal* di Cope) è dapprima allargata all'esterno, successivamente arcuata e nuovamente allargata, la seconda porzione (*ceratohyal* di Cope) staccata dalla prima, è solo contigua al capo libero di quest'ultima mediante un suo estremo alquanto allargato, poi essa è ricurva in senso inverso alla curva dell'altro tratto, ed infine nella sua porzione terminale si fa dapprima laminare e successivamente appuntita.

Nei generi *Lacerta* (fig. 11) ed *Algiroides* (fig. 12) troviamo una disposizione molto simile a quella che incontreremo nel gruppo successivo; il corpo quivi è ristretto, triangolare, prolungato quasi insensibilmente nel processo entoglosso che è lungo ed assai esile. Le seconde corna branchiali originano alquanto distanti l'una dall'altra, coi loro margini interni e con il margine posteriore del corpo ioideo determinano una linea curva a concavità posteriore. Le prime corna branchiali sono ossificate coll'estremo libero cartilagineo, articolate sul corpo. Il corno iale è pure leggermente mobile sul corpo stesso, esso è costituito da un tratto trasversale alquanto ascendente, e successivamente da una porzione discendente unita al primo ad angolo acuto, e che all'esterno si prolunga in una laminetta cartilaginea a margine circolare, ed alquanto incisa posteriormente. Tutto il sistema, tranne le prime corna branchiali, è cartilagineo, però nel corpo e nel processo entoglosso vi è una piccola parte ossificata.

Nei Scincidi troviamo generalmente una disposizione che ricorda la precedente; il corpo è pure di forma triangolare, le corna branchiali del secondo paio si staccano dal corpo non molto vicine le une alle altre, le prime corna branchiali sono ossificate, meno nel tratto terminale, il corno iale è prolungato all'esterno in una lamina cartilaginea di forma circolare simile a quella che si incontra nei Lacertidi. Anche in queste forme

tutto il sistema ad eccezione delle prime corna branchiali è cartilagineo, però nel *Macroscincus coctaei* D. B. ò trovato nel corpo e nell'asse del processo entoglosso qualche punto ossificato. Nell'*Eumeces schneideri* Daud, invece il ioide à una forma assai differente; il corpo è piuttosto quadrangolare, in parte ossificato, il processo entoglosso si stacca dal corpo tutto ad un tratto, ed è esile, le corna iali sono pure molto sottili e non presentano alcuna espansione lamellare cartilaginea esterna, le corna branchiali del primo paio sono ossificate, mobili sul corpo, le seconde originano assai lontane le une dalle altre.

Cope (5) ha istituita una specie di classificazione rispetto alla forma del ioide, delle varie famiglie di Sauri, basandosi sulla presenza o mancanza di date parti del ioide stesso. Ora disgraziatamente molti generi e famiglie da lui esaminati non entrano affatto nei gruppi nei quali egli li include.

Infatti forma una prima divisione costituendo i due gruppi:

I. *ceratohyal present*, II. *ceratohyal absent*,

prescindendo quindi dal primo gruppo nel quale sono comprese la maggior parte delle forme dei Sauri, include nel secondo gruppo (cito solamente le forme che ò potuto controllare) l'*Anguis fragilis*. Ora, come ò già detto precedentemente, basta osservare la figura del ioide di tale specie data da Walter [(21), Tav. I], figura riportata anche da Gaupp [(11), p. 1010, fig. 35], per facilmente vedere che il ceratoiale è presente ed anche ben sviluppato.

Successivamente forma due altri gruppi:

A. *A second ceratobranchial.*
AA. *No second ceratobranchial.*

e nel secondo gruppo pone i Geconidi. Ora non si capisce bene se voglia alludere a tutti i Geconidi, ad eccezione di *Aristelliger* incluso nel primo gruppo, oppure solo a certe forme come dice più in alto nel testo: “ Ceratobranchials of the second pair are “ also wanting in Varanidae, ... *Phyllodactylus*, *Thecadactylus*, “ and *Gecko* among Geckonidae ... Ficalbi (10) ha descritto e figurato nel *Platidactilus mauritanicus* invece il secondo paio di corna branchiali; ora io non so se questo sia un fatto iso-

lato, o piuttosto se non si tratti di reperti incompleti per i generi riferiti da Cope.

Più oltre ancora dice: " Ceratobranchials of the second pair are also wanting in *Egernia* and *Gongylus* in Scincidae „: basta ora osservare le figure 14 e 18 della tavola da me disegnata, per convincersi appunto del contrario.

Credo inutile portare altri esempi che dimostrino in quale conto si debba tenere una tale classificazione, essendo i dati. sui quali essa è fondata, in parte inesatti.

BIBLIOGRAFIA

(1) Brühl C. B., *Zootomie aller Thierklassen für Lernende.* Wien, 1874.

(2) Calori L., *Sullo scheletro dell'Uromartix spinipes M.*, " Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna „, T. XII, 1861, pag. 159-178, Tav. I-III.

(3) Lo stesso, *Sullo scheletro dell'Agama aculeata M.*, " Idem „, p. 179-187, Tav. I-II.

(4) Lo stesso, *Sullo scheletro del Phrynosoma Harlanii e su quello del Phrynosoma orbicularis,* " Idem „, p. 189-200, Tav. I-III.

(5) Cope E. D., *The osteology of Lacertilia,* " Proceedings of the American Philosophical Society „, vol. XXX, p. 185-221, Plat. II-VI. Philadelphia, 1892.

(6) Lo stesso, *The Crocodilians, Lizards and Snakes of North America,* " Annual Report of the Smithsonian Institution for the year ending June 30. 1898 „, p. 155-1270, Plat. I-XXXVI. Washington, 1900 (Le tavole ed il testo sono la ripetizione del precedente lavoro).

(7) Cuvier G., *Leçons d'Anatomie comparée* recueillies et publiées par M. Dumeril. Troisième édition. Bruxelles, 1836.

(8) Lo stesso, *Recherches sur les Ossements fossiles.* Quatrième éd. Paris, 1836.

(9) Duvernoy S. L., *Mémoire sur quelques particularités des organes de la déglutition de la Classe des Oiseaux et des Reptiles,* " Mémoires du Musée d'histoire naturelle de Strasbourg „, vol. II, p. 24, 5 Tabl., 1835.

(10) Ficalbi E., *Osteologia del Platidattilo mauritanico,* " Atti della Società Toscana di scienze nat., Memorie „, vol. V, p. 287, Tav. XII-XIV, 1880.

(11) Gaupp E., *Das Hyobranchialskelet der Wirbeltiere,* " Ergebnisse der Anatomie und Entwickelungsgeschichte „, Band XIV, p. 808-1048. Wiesbaden, 1904.

(12) Geoffroy Saint-Hilaire, *Observations sur la concordance des parties de l'hyoide dans les quatre Classes des Animaux vertébrés accompagnant à titre de commentaire le tableau synoptique où cette concordance est exprimée figurativement,* " Nouvelles Annales du Museum d'histoire naturelle „, tom. I, p. 321-356, Tabl. I. Paris, 1832.

Fig. 1

Fig. 4

Fig. 5

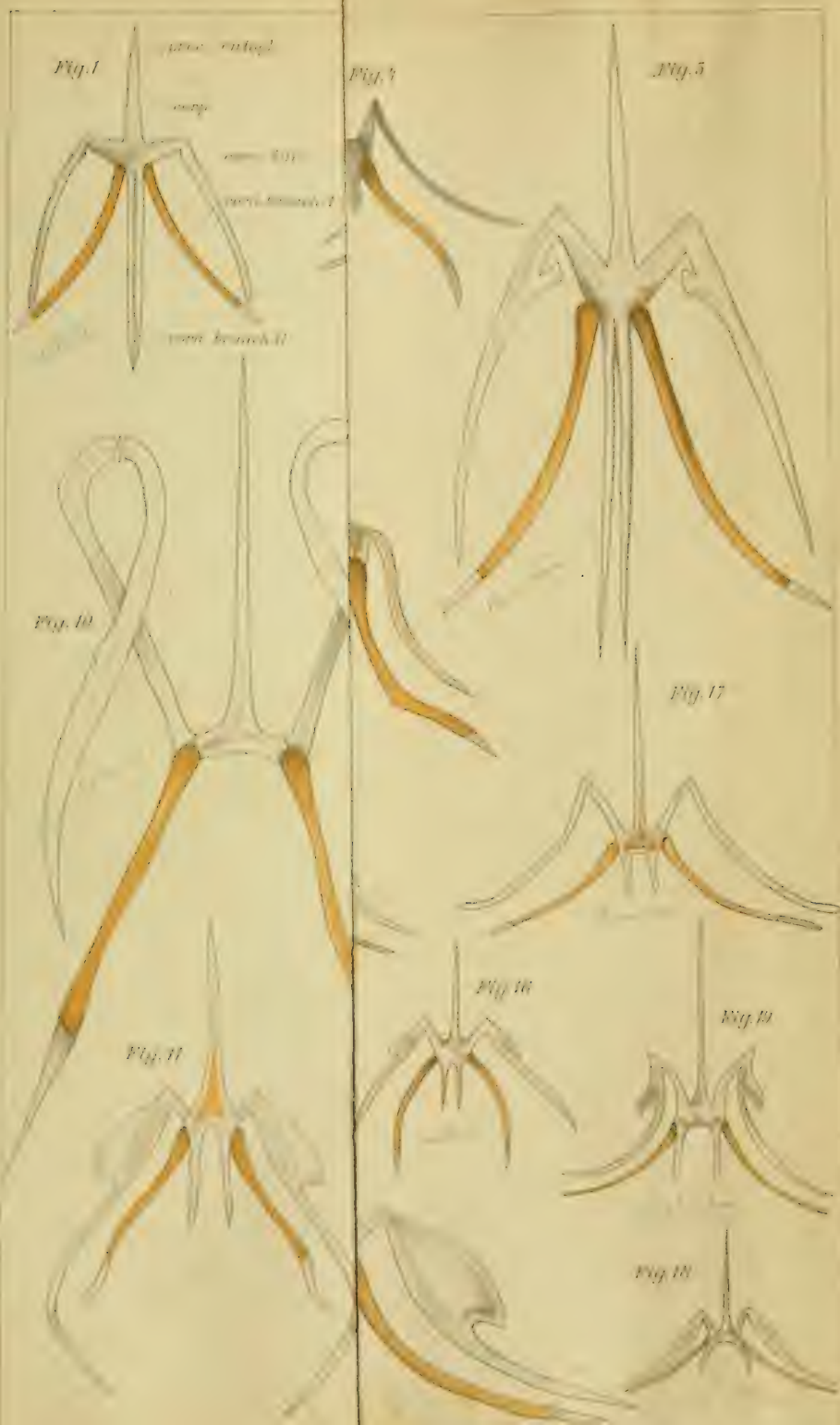
Fig. 10

Fig. 17

Fig. 16

Fig. 19

Fig. 11

Fig. 18

(13) Hoffmann C. R., *Dr. H. G. Bronn's Klassen und Ordnungen des Thier-Reichs*, Sechster Band, III Abtheilung. *Reptilien*. II. *Eidechsen und Wasserechsen*. Leipzig, 1890.

(14) Kallius E., *Beiträge zur Entwickelung der Zunge*. I Theil, *Amphibien und Reptilien*, " Anatomische Hefte ", Band XVI, Heft III-IV, p. 531-760, Taf. XLIV-XLVIII, 1901.

(15) Leydig Fr., *Die in Deutschland lebenden Arten der Saurier*. Tübingen, 1872.

(16) Losana M., *Essai sur l'Os hyoïde de quelques Reptiles*, " Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino ", T. XXXVII, p. 1-23, 1834.

(17) Owen R., *On the Anatomy of Vertebrates*. Vol. 1. *Fishes and Reptiles*. London, 1866.

(18) Parker W. K., *On the Structure and Development of the Skull of the Lacertilia*. P. I. *On the Skull of the common Lizard (Lacerta agilis, L. viridis and Zooteca vivipara)*, " Philosophical Transactions of the Royal Society of London ", vol. 170, p. 595-640, Pl. 37-45, 1879.

(19) Rathke H., *Anatomisch-philosophische Untersuchungen über den Kiemenapparat und das Zungenbein der Wirbelthiere*. Riga, 1832.

(20) Stannius und Siebold, *Lehrbuch der vergleichenden Anatomie*. Theil II. *Wirbelthiere* von H. Stannius, 1846.

(21) Walter F., *Das Visceralskelett und seine Muskulatur bei den einheimischen Amphibien und Reptilien*, " Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft ", Neue Folge, Band 14, p. 1-45, Taf. I-IV. Jena, 1887.

(23) Wiedersheim R., *Grundriss der Vergleichenden Anatomie der Wirbelthiere*. Jena, 1893.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Significato delle lettere: *corp.*, corpo del ioide — *proc. entogl.*, processo entoglosso — *corn. ial.*, corno iale — *corn. branch. I*, primo corno branchiale — *corn. branch. II*, secondo corno branchiale.

Fig. 1. Osso ioide di *Calotes cristatellus* Kuhl.
" 2. " *Agama stellio* Lin.
" 3. " *Liolepis belli* Gray.
" 4. " *Uromastix achantinurus* Bell.
" 5. " *Basiliscus americanus* Laur.
" 6. " *Tropidurus torquatus* Wied.
" 7. " *Iguana tubercolata* Laur.
" 8. " *Ctenosaura achantura* Shaw.
" 9. " *Phrynosoma cornutum* Harl. (molto ingrandito)
" 10. " *Varanus griseus* Daud.
" 11. " *Lacerta ocellata* Daud.
" 12. " *Algiroides fitzingeri* Wiegm. (molto ingrandito).
" 13. " *Trachysaurus rugosus* Gray.
" 14. " *Egernia cunninghamii* Gray.
" 15. " *Macroscincus coctaei* D. B.
" 16. " *Mabuia multifasciata* Kuhl.
" 17. " *Eumeces schneideri* Daud.
" 18. " *Chalcides ocellatus* Forsk.
" 19. " *Chalcides trydactylus* Laur. (molto ingrandito).

I quaternioni di Hamilton e il calcolo vettoriale.

Nota di C. BURALI-FORTI in Torino.

Il IV Congresso dei Matematici (Roma 1908) ha stabilito di nominare una Commissione internazionale che studi la questione dell'*unificazione delle notazioni vettoriali* (*); è dunque di importanza almeno attuale lo studio che mi propongo di fare in questa nota.

La maggior parte delle svariate notazioni ora esistenti, risentono l'influenza del geniale *calcolo dei Quaternioni* di Hamilton; ma siccome esse si presentano sotto aspetti assai diversi, per *forma* e *sostanza*, è facile arguire che dei Quaternioni devono essere state date interpretazioni assai diverse. E che ciò sia avvenuto basta a provarlo questo solo fatto. Hamilton considera gli operatori I, I^{-1} che, come vedremo, sono *indispensabili*; nelle trattazioni successive dei seguaci di Hamilton gli operatori I, I^{-1} sono del tutto scomparsi. È proprio in seguito alla mancata considerazione degli operatori I, I^{-1} che alcuni attribuiscono ai Quaternioni proprietà che non hanno: altri negano ai Quaternioni delle proprietà che essi hanno effettivamente: alcuni fabbricano dei pseudo-Quaternioni che con quelli di Hamilton hanno a comune soltanto il nome: altri infine, ad un certo prodotto completo (forse il prodotto di due Quaternioni retti?) attribuiscono la potenza di dare tutto il calcolo vettoriale, mentre o non è atto a dar nulla, o funziona da modesto operatore tachigrafico per le coordinate cartesiane.

Dato tale caos d'idee, è importante esaminare accuratamente che cosa siano i Quaternioni di Hamilton, poichè solo

(*) Il Prof. R. Marcolongo ed io, in una serie di note *Per l'unificazione delle notazioni vettoriali*, pubblicate nei " Rendiconti di Palermo „ (I, T. XXIII, 1907; II, III, T. XXIV, 1907; IV, T. XXV, 1908; V, T. XXVI, 1908), abbiamo esaminate sotto l'aspetto *storico, logico, scientifico* e *pratico* le varie notazioni oggi usate; le nostre proposte concrete sono contenute nella IV nota. — In questo lavoro mi valgo sistematicamente di tali notazioni.

con tale conoscenza sarà possibile proporre, e sostenere, un sistema razionale di notazioni. Tale è lo scopo di questa breve nota.

Con la parola VETTORE intendo indicare, come HAMILTON nel Libro I, un ente *dotato* di GRANDEZZA, DIREZIONE e VERSO e *individuato* da tali elementi. Segue, anche secondo HAMILTON, che *vettore* e *quaternione retto* sono cose ben distinte.

Visto che il calcolo vettoriale, con le sue operazioni + − × ∧ è così semplice e intuitivo, me ne servo per ottenere (per via diversa da quella tracciata da HAMILTON) i quaternioni (*), salvo a provare che ottengo veramente i quaternioni di HAMILTON e non altri enti.

Infine per eliminare una possibile confusione tra *simbolo di funzione* e *valore di una funzione per un dato valore della variabile,* sostituisco alla frase ordinaria *simbolo di funzione* la parola, usata pure da HAMILTON, OPERATORE. Così, ad esempio, in $y = f(x)$, f è l'*operatore*, y è il valore che si ottiene operando su x con l'operatore f. — Chiamo *campo di applicazione* di f la classe degli x cui si applica l'operatore f. Col variare del campo di f possono variare le proprietà di f; ad es., sen *è invertibile* se il suo campo è da $-\pi/2$ a $\pi/2$, *non è invertibile* se il suo campo è da $-\infty$ a $+\infty$ (**).

1. Definizione di Quaternione. — Diremo che " α è un quaternione " quando: essendo α un *operatore* per i vettori, esiste almeno un numero reale s e un vettore u tali che, comunque si fissi il vettore x *normale ad* u, si ha sempre

$$\alpha x = sx + u \wedge x \quad (***). \tag{1}$$

(*) Per tale via ho ottenuto, ed esposto in questa nota, la *completa* teoria dei quaternioni. La brevità è tutta dovuta, come il lettore può facilmente verificare, all'avere ammesse note le operazioni vettoriali geometriche ora indicate.

(**) Per ciò che riguarda i precisi concetti di funzione, e di campo di applicazione o di variabilità, cfr. G. PEANO, *Formulario mathematico*, Editio V, pp. 73-82.

(***) Scriviamo αx in luogo di $\alpha(x)$ nella quale le parentesi sono del tutto inutili, come nella notazione generica $f(x)$ attuale che da LAGRANGE ABEL... è data sotto la forma semplice fx. Anche attualmente si scrive, ad es., $f(x+y)$, mentre ammessa la notazione $f(x)$ si dovrebbe scrivere $f((x+y))$.

Che la definizione ora data *caratterizzi* una classe di operatori vettoriali, risulta del teorema seguente:

Se α *è un quaternione, allora: esiste un solo numero reale* s *e un solo vettore* u *tali che per qualsiasi vettore* x *normale ad* u *sussiste la* (1).

Dim. — Dalla def. di quaternione, risulta che dato α esiste almeno un numero s e un vettore u soddisfacente alle condizioni indicate e, di più, risulta che α è un operatore il cui *campo di applicazione* è formato dai vettori normali ad u. Supponiamo ora che s' e u' siano elementi analoghi ad s e u atti a individuare α.

Qualunque sia il vettore x normale ad u e ad u' si ha

$$sx + u \wedge x = s'x + u' \wedge x, \quad \text{cioè}, \qquad (s - s')x = (u' - u) \wedge x;$$

moltiplicando scalarmente ($\times$) o vettorialmente ($\wedge$) per x i due membri si ha, osservando che $u \times x = u' \times x = (u' - u) \times x = 0$,

$$(s - s')x^2 = 0, \qquad 0 = \{(u' - u) \wedge x\} \wedge x = x^2(u - u');$$

esistendo $x \neq 0$ normale ad u e u' risulta

$$s = s', \qquad u = u'.$$

Segue da questo teorema che s e u della (1) sono delle *funzioni di* α, cioè, dato α, sono univocamente determinati s e u, che chiameremo rispettivamente " scalare di α ", $S\alpha$, e " vettore di α ", $V\alpha$. In virtù di queste notazioni (di Hamilton) la (1) assume la *forma assoluta* rispetto ad α,

$$(2) \qquad \alpha x = (S\alpha)x + (V\alpha) \wedge x.$$

Non sarà inutile dare al teorema precedente anche le forme seguenti. — *Di un quaternione ne è determinato, e in un sol modo, lo scalare e il vettore.* — Viceversa: *un numero reale e un vettore, comunque dati, sono sempre scalare e vettore di un sol quaternione.* — *Se* α, β *sono quaternioni, allora:*

$$\alpha = \beta \ \textit{solamente quando} \ S\alpha = S\beta \ \textit{e} \ V\alpha = V\beta.$$

Il quaternione α si dirà *nullo* (*zero*, 0) quando, comunque si fissi il vettore x, sempre si ha $\alpha x = 0$. Segue che:

$$\alpha = 0, \ \textit{solamente quando} \ S\alpha = 0 \ \textit{e} \ V\alpha = 0.$$

Conviene ripetere esplicitamente che: *se* α *è un quaternione*, α *è* UN OPERATORE VETTORIALE **il cui campo di applicazione è formato dai vettori normali al** $\mathrm{V}\alpha$.

Se $\mathrm{V}\alpha = 0$ allora il campo di applicazione di α è formato da *tutti* i vettori; la (2) dà $\alpha x = (\mathrm{S}\alpha)x$, qualunque sia x, cioè $\alpha = \mathrm{S}\alpha$. Dunque: *un quaternione il cui vettore è nullo, è un numero, il suo scalare.*

Chiameremo *quaternione retto* ogni quaternione il cui scalare è nullo. Si noti però che: **un quaternione retto non è un vettore**, come risulta subito dalla (1) che per $s = 0$ dà $\alpha x = u \wedge x$ (*).

Se α è un quaternione, il " coniugato di α ", $\mathrm{K}\alpha$, è il quaternione il cui scalare è $\mathrm{S}\alpha$ e il cui vettore è $-\mathrm{V}\alpha$. Si ha cioè:

$$\mathrm{S}(\mathrm{K}\alpha) = \mathrm{S}\alpha \qquad \mathrm{V}(\mathrm{K}\alpha) = -\mathrm{V}\alpha$$

$\alpha = \mathrm{K}\alpha$ solamente quando $\mathrm{V}\alpha = 0$.

Infine essendo α un quaternione poniamo, con HAMILTON, " *tensore di* α " $= \mathrm{T}\alpha = \sqrt{(\mathrm{S}\alpha)^2 + (\mathrm{V}\alpha)^2}$.

Segue che

$$\mathrm{T}\alpha = \mathrm{TK}\alpha$$

$$\mathrm{T}\alpha = 0, \text{ solamente quando } \alpha = 0.$$

È necessario dimostrare che i quaternioni, quali li abbiamo ora definiti, sono precisamente i quaternioni di HAMILTON.

HAMILTON individua un quaternione α mediante due vettori a, b, $a \neq 0$, come: *quell'operatore vettoriale che applicato ad un vettore* x *qualunque, purchè complanare con* a *e* b, *produce il vettore* αx *tale che, essendo* O *un punto qualunque, il trian-*

(*) La notazione $u\wedge x$ ha valore per x qualunque; non però αx che vale solo per x normale ad $u = \mathrm{V}\alpha$. Segue che da $\alpha x = u \wedge x$ si può trarre $\alpha = u\wedge$, PERÒ *con la condizione di limitare all'operatore* $u\wedge$ *il campo di applicazione ai soli vettori normali ad* u. Con le notazioni del *Formulario*, già citato, il quaternione retto il cui vettore è u viene indicato dalla notazione completa

$$[u\wedge\,.\ \mathrm{v} \cap x \ni (u \times x = 0)],$$

cioè è una funzione della coppia formata dall'operatore $u\wedge$ e da un campo di applicazione.

golo di vertici O, O $+ a$, O $+ b$ è DIRETTAMENTE SIMILE *al triangolo di vertici* O, O $+ x$, O $+ \alpha x$. Si intende, per la *sostanza*, ma a meno della forma e della notazione (α viene indicato con $\frac{b}{a}$, ecc.).

Che i vettori a, b individuino in tal modo *un solo* operatore è chiaro, poichè dato x si può formare un solo triangolo direttamente simile a quello formato con a e b. Che l'operatore hamiltoniano individuato da a e b sia uno degli enti da noi definiti e chiamati quaternioni resterà provato quando avremo fatto vedere che esso è il quaternione (def. al principio di questo numero) α tale che

$$S\alpha = \frac{a \times b}{a^2}, \quad V\alpha = \frac{a \wedge b}{a^2}.$$

Infatti. Osservando che $(a \wedge b) \wedge x$, per x normale al $V\alpha$ cioè ad $a \wedge b$, è pure normale ad x, si ha per la (2)

$$(\alpha x)^2 = \left(\frac{a \times b}{a^2}\right)^2 x^2 = \left(\frac{a \wedge b}{a^2}\right)^2 x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 a^2} x^2 = \left(\frac{\text{mod}\, b}{\text{mod}\, a} \text{mod}\, x\right)^2,$$

e quindi,

$$\frac{\text{mod}(\alpha x)}{\text{mod}\, x} = \frac{\text{mod}\, b}{\text{mod}\, a}$$

$$\cos(x, \alpha x) = \frac{x \times \alpha x}{\text{mod}\, x \,.\, \text{mod}\, \alpha x} = \frac{\frac{a \times b}{a^2} x^2}{\frac{\text{mod}\, b}{\text{mod}\, a} x^2} = \frac{a \times b}{\text{mod}\, a \,.\text{mod}\, b} = \cos(a, b),$$

vale a dire, i due triangoli già considerati sono direttamente simili.

Il quaternione α definito mediante a e b deve, applicato ad a, produrre b (punto di partenza di HAMILTON); si ha appunto

$$\alpha a = \frac{a \times b}{a^2} a + \frac{(a \wedge b) \wedge a}{a^2} = \frac{a \times b}{a^2} a + \frac{a^2 b}{a^2} - \frac{a \times b}{a^2} a = b.$$

2. Somma e prodotto di due quaternioni. — Siano α, β due quaternioni qualunque.

La " somma di α con β ", $\alpha + \beta$, è il quaternione γ tale, che: *comunque si fissi il vettore* x *normale al* $V\alpha$ e *al* $V\beta$ *si ha sempre* $\gamma x = \alpha x + \beta x$ (Cfr. *Formulario*, l. c., p. 186).

Il " prodotto di α per β ", $\beta\alpha$ (e non $\alpha\beta$), è il quaternione γ tale che: *comunque si fissi il vettore* x *normale al* $V\alpha$, *essendo inoltre* αx *normale al* $V\beta$, *si ha sempre* $\gamma x = \beta(\alpha x)$.

Per dimostrare che i quaternioni $\alpha + \beta$, $\beta\alpha$, sono univocamente determinati dalle due precedenti definizioni, anzi per provare che precisamente si ha

$$(3) \qquad S(\alpha + \beta) = S\alpha + S\beta, \quad V(\alpha + \beta) = V\alpha + V\beta,$$

$$(4) \qquad \begin{cases} S(\beta\alpha) = S\beta \, . \, S\alpha - (V\beta) \times (V\alpha) \\ V(\beta\alpha) = S\beta \, . \, V\alpha + S\alpha \, . \, V\beta + (V\beta) \wedge (V\alpha), \end{cases}$$

occorre dimostrare il teorema seguente:

(5) *Se* s *è un numero reale,* u *è un vettore,* x *è vettore non nullo normale ad* u (*cioè* $x \neq 0$ *e* $u \times x = 0$) *ed esiste un quaternione* α *tale che*

$$\alpha x = sx + u \wedge x,$$

allora: $S\alpha = s$, $V\alpha = u$.

Dim. (5). — Dall'ipotesi risulta che αx è un vettore determinato; e poichè il campo di applicazione di α è formato dai vettori normali al $V\alpha$, deve essere x normale al $V\alpha$, cioè $x \times V\alpha = 0$. Ora, sottraendo membro a membro le due eguaglianze

$$\alpha x = sx + u \wedge x, \quad \alpha x = (S\alpha)x + (V\alpha) \wedge x$$

si ottiene

$$(s - S\alpha)x = (V\alpha - u) \wedge x;$$

moltiplicando scalarmente ($\times$) e vettorialmente ($\wedge$) per x e tenendo conto delle ipotesi si ha

$$(s - S\alpha)\, x^2 = 0, \quad 0 = \}(V\alpha - u) \wedge x\{ \wedge x = (V\alpha - u)x^2$$

che, per essere $x^2 \neq 0$ dànno $S\alpha = s$, $V\alpha = u$.

Dim. (3). — Se x è vettore non nullo, normale a $V\alpha$ e $V\beta$ si ha dalla (1),

$$\alpha x + \beta x = (S\alpha + S\beta)x + (V\alpha + V\beta) \wedge x,$$

e quindi per la def. di $\alpha + \beta$ e per il teorema (5) si hanno le formule (3).

Dim. (4). — Se x è vettore, non nullo, normale a $V\alpha$ e αx è normale a $V\beta$ e osserviamo che, in tali ipotesi,

$$\}(V\beta) \wedge (V\alpha)\{ \wedge x = (x \times V\beta)\, V\alpha$$

si ha,

$$\begin{aligned} \beta(\alpha x) &= \beta \} S\alpha \, . \, x + (V\alpha) \wedge x \{ = \\ &= S\beta \, . \, S\alpha \, . \, x + S\beta \, . \, (V\alpha) \wedge x + S\beta \, . \, (V\beta) \wedge x + (V\beta) \wedge \}(V\alpha) \wedge x\{ = \\ &= \}S\beta \, . \, S\alpha - (V\beta) \times (V\alpha)\{ x + \} S\beta \, . \, V\alpha + S\alpha \, . \, V\beta + (V\beta) \wedge (V\alpha)\{ \wedge x \end{aligned}$$

che per la def. di $\beta\alpha$ e per il teorema (5) dimostra le formule (4).

Dalle (3) e (4) si ricavano facilmente le proprietà fondamentali della somma e del prodotto.

La somma è *commutativa*; $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Il prodotto non è, in generale, commutativo, salvo il caso che il vettore di uno, almeno, dei due quaternioni sia nullo, cioè uno dei quaternioni sia un numero.

Se m è numero (m quaternione di vettore nullo) si ha

$$m\alpha = \alpha m, \quad S(m\alpha) = mS\alpha, \quad V(m\alpha) = mV\alpha).$$

Segue che, fatte, come in algebra, le convenzioni

$$\alpha = (-1)\alpha, \quad \alpha - \beta = \alpha + (-\beta), \quad \frac{\alpha}{m} = \frac{1}{m}\alpha \quad (\text{per } m \neq 0)$$

si ha l'ordinario algoritmo algebrico per la *somma* e il *prodotto per un numero reale.*

Sussiste la proprietà *distributiva* del prodotto rispetto alla somma, cioè

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma, \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Il tensore del prodotto è il prodotto dei tensori dei due fattori; cioè

$$T(\beta\alpha) = (T\beta)(T\alpha)$$

Dim. — $\{T(\beta\alpha)\}^2 = \{S(\beta\alpha)\}^2 + \{V(\beta\alpha)\}^2 =$
$= (S\alpha)^2.(S\beta)^2 + (S\alpha)^2.(V\beta)^2 + (S\beta)^2.(V\alpha)^2 + (V\alpha)^2.(V\beta)^2 =$
$= (S\alpha)^2(T\beta)^2 + (V\alpha)^2(T\beta)^2 = (T\alpha)^2(T\beta)^2,$

quando si tenga presente che

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0, \qquad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})^2 + (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})^2 = \boldsymbol{u}^2\boldsymbol{v}^2.$$

Il prodotto di due quaternioni è nullo solo quando uno, almeno, dei due fattori è nullo;

$$\beta\alpha = 0, \text{ solo quando, } \alpha = 0 \text{ ovvero } \beta = 0.$$

Dim. — $\beta\alpha = 0$ solo quando $T(\beta\alpha) = 0$, cioè $T\beta = 0$ o $T\alpha = 0$, cioè $\beta = 0$ o $\alpha = 0$.

I quaternioni $\beta\alpha$, $\alpha\beta$ hanno egual scalare e quindi $\beta\alpha - \alpha\beta$ è un quaternione retto.

Per il simbolo K si ha

$$K(\alpha+\beta)=K\alpha+K\beta,\quad K(\beta\alpha)=(K\alpha)(K\beta)$$
$$\alpha(K\alpha)=(K\alpha)\alpha=(T\alpha)^2.$$

Porremo, con HAMILTON, essendo α un quaternione non nullo

$$\text{“ versore di } \alpha \text{ ”} = U\alpha = \frac{\alpha}{T\alpha}.$$

Ogni versore può ridursi alla forma

$$\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$$

ove i è *un quaternione retto unitario*, **non un vettore**, e quindi un quaternione qualunque α è riduttibile alla forma

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

ove r è il $T\alpha$. Ecc.

3. Somma e prodotto di un numero finito di quaternioni. — Se α, β, γ sono quaternioni si ha

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),\quad (\gamma\beta)\alpha=\gamma(\beta\alpha)$$

come risulta dalle (3) e (4), verificando che i quaternioni dei due membri hanno a comune lo scalare e il vettore.

Si può dunque, come in algebra, *porre*

$$\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma,\quad \gamma\beta\alpha=\gamma(\beta\alpha)$$

e analogamente per quattro o più vettori.

La somma risulta *commutativa* e *associativa*; il prodotto risulta *associativo*, *distributivo* rispetto alla somma, ma, in generale, *non commutativo*.

I simboli S, V, K sono distributivi rispetto alla somma, cioè,

$$S(\alpha+\beta+\gamma)=S\alpha+S\beta+S\gamma,\quad V(\alpha+\beta+\gamma)=V\alpha+V\beta+V\gamma$$
$$K(\alpha+\beta+\gamma)=K\alpha+K\beta+K\gamma;$$

ma S e V non sono distributivi rispetto al prodotto. Invece per T e K si ha

$$T(\gamma\beta\alpha)=T\gamma\,.\,T\beta\,.\,T\alpha,\quad K(\gamma\beta\alpha)=K\alpha\,.\,K\beta\,.\,K\gamma.$$

Esaminiamo ora un'apparente anomalia degli operatori vettoriali, quaternioni.

Il quaternione $\alpha + \beta$ è operatore applicabile ai vettori x normali al $V\alpha + V\beta$; ma si ha

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

solo quando x è normale al $V\alpha$ E al $V\beta$; cioè il primo membro ha significato per x variabile in un campo molto più vasto del campo di variazione che ha nel secondo. In altri termini non per tutti i vettori x per i quali ha significato $(\alpha + \beta)x$ si può stabilire l'eguaglianza precedente.

Analogamente $(\beta\alpha)x$ ha significato per infiniti vettori per i quali $\beta(\alpha x)$ è priva di significato.

Ancora. L'eguaglianza

$$(\alpha + \beta + \gamma)x = \alpha x + \beta x + \gamma x$$

sussiste, in generale, solo per $x = 0$, perchè, affinchè abbia significato il secondo membro deve essere x normale ai tre vettori $V\alpha$, $V\beta$, $V\gamma$, cioè in generale deve essere $x = 0$. Lo stesso dicasi per $(\gamma\beta\alpha)x$ che vale $\gamma\{\beta(\alpha x)\}$ solo per $x = 0$, mentre ha significato preciso per ogni vettore x normale al $V(\gamma\beta\alpha)$.

Che questi fatti dipendano dalla reale natura degli operatori vettoriali quaternioni, è evidente; e del resto che tali fatti dovevano verificarsi era facile vederlo a priori, tenendo conto del *campo limitato* di applicazione di ogni quaternione. — Le apparenti anomalie ora considerate cessano quando si opera soltanto con quaternioni i cui vettori sono paralleli ad un vettore fisso, cioè si opera con gli ordinari *numeri complessi* di un piano normale al vettore fisso.

4. Potenze. — Se α è un quaternione e n un intero o nullo o positivo, definiamo, per induzione, come in algebra, α^n ponendo

$$\alpha^0 = 1, \quad \alpha^{n+1} = \alpha\alpha^n$$

e risulta

$$\alpha^n\alpha^m = \alpha^{n+m}$$

a causa della proprietà associativa del prodotto.

Però $(\beta\alpha)^n$ è, in generale, diverso da $\beta^n\alpha^n$, perchè non sussiste la proprietà commutativa.

Se α è quaternione non nullo, poniamo $\alpha^{-1} =$ " quel quaternione β tale che $\beta\alpha = 1$ ".

Stando l'ipotesi precedente si ha

$$\alpha^{-1} = \frac{K\alpha}{(T\alpha)^2}. \tag{6}$$

Dim. — Se $\beta\alpha = 1$ e $\beta'\alpha = 1$ allora $(\beta - \beta')\alpha = 0$ ed essendo $\alpha \neq 0$ deve essere $\beta = \beta'$, cioè: se α^{-1} esiste è unico. Da $(K\alpha)\alpha = (T\alpha)^2$ si ricava la (6).

Se i quaternioni α, β non sono nulli si ha

$$(\beta\alpha)^{-1} = \alpha^{-1}\,\beta^{-1}.$$

Dim. $$(\beta\alpha)^{-1} = \frac{K(\beta\alpha)}{\{T(\beta\alpha)\}^2} = \frac{K\alpha}{(T\alpha)^2}\,\frac{K\beta}{(T\beta)^2} = \alpha^{-1}\,\beta^{-1}.$$

Se n è intero relativo

$$\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$$

ma però $(\beta\alpha)^{-n}$ è diverso da $\alpha^{-n}\beta^{-n}$ eccetto che per $n = 1$ o $n = 0$.

Si può definire, per m, n interi, $\alpha^{m/n}$ come il quaternione β tale che $\beta^n = \alpha^m$.

Per la classe U di enti, contenente lo zero, sia definita l'operazione *moltiplicazione*, con le due proprietà seguenti:

a) è commutativa,

b) da $ab = ac$ e $a \neq 0$, segue $b = c$.

In tali ipotesi, se a, b sono elementi di U, $a \neq 0$, ed esiste un elemento x di U tale che $ax = b$, allora x è unico e si può dire che x si ottiene da b ed a con l'operazione *inversa* della moltiplicazione, con la *divisione*. Mancando però una delle condizioni (a), (b) la divisione non può esser definita. Ciò si verifica per le formazioni geometriche di Grassmann per le quali non è vera (b) e, in generale, neanche (a), e per i quaternioni per i quali è vera la (b) ma non la (a) (*).

(*) Se non è vera la (b) allora $\frac{b}{a}$ ha *infiniti* valori, come si verifica per le formazioni di Grassmann; se, invece, (b) è vera ma non è vera (a) allora $\frac{b}{a}$ ha *due* valori x, y tali che $xa = b$, $ay = b$, come si verifica per i quaternioni.

Essendo, dunque, α, β quaternioni e $\alpha \neq 0$ si potrà pure, con HAMILTON,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \beta\alpha^{-1}$$

per avere

$$\frac{\beta}{\alpha}\alpha = \beta, \quad \text{ma} \quad \alpha\frac{\beta}{\alpha} \neq \beta$$

e quindi è preferibile non far uso della notazione $\frac{\beta}{\alpha}$ bastando ampiamente la notazione $\beta\alpha^{-1}$ con significato non dubbio.

5. Operatori I, I^{-1}. — Se α è un *quaternione retto*, porremo con HAMILTON

$$\text{(7)} \qquad I\alpha = V\alpha \quad (*).$$

Se α, β sono quaternioni retti si ha

$$I\alpha = I\beta \text{ solamente quando } \alpha = \beta,$$

e quindi I è *operatore invertibile*, cioè essendo $\boldsymbol{u}$ un vettore si può porre

$$I^{-1}\boldsymbol{u} = \text{“ quel quaternione retto il cui vettore è } \boldsymbol{u} \text{ ”}$$

e le due eguaglianze

$$\text{(8)} \qquad I\alpha = \boldsymbol{u} \quad \alpha = I^{-1}\boldsymbol{u}$$

esprimono la medesima cosa sotto forma diversa.

Se α, β sono quaternioni retti, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sono vettori e m è numero reale, $\alpha + \beta$ e $m\alpha$ sono quaternioni retti come $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ e $m\boldsymbol{u}$ sono vettori, e si ha

$$I(\alpha+\beta) = I\alpha + I\beta, \quad I^{-1}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = I^{-1}\boldsymbol{u} + I^{-1}\boldsymbol{v}$$
$$I(m\alpha) = mI\alpha, \quad I^{-1}(m\boldsymbol{u}) = mI^{-1}\boldsymbol{u}$$

cioè I e I^{-1} sono operatori (funzioni) *lineari*.

(*) I e V sono operatori quaternionali; però I è applicabile soltanto ai *quaternioni retti* e V a *qualsiasi quaternione*. Avendo I e V diverso campo di applicabilità sarebbe erroneo dedurre dalla (7) che $I = V$.

Sono specialmente interessanti i teoremi seguenti.

Qualunque sia il quaternione α *si ha identicamente*

$$\alpha = S\alpha + I^{-1}(V\alpha) \quad (*). \tag{9}$$

Dim. — Il quaternione $\alpha - S\alpha$ è retto e poichè $V\alpha$ è il suo vettore si ha dalla (7)

$$I(\alpha - S\alpha) = V\alpha,$$

e per le (8)

$$\alpha - S\alpha = I^{-1}(V\alpha), \qquad \alpha = S\alpha + I^{-1}(V\alpha).$$

Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *sono vettori*

$$(I^{-1}\boldsymbol{v})(I^{-1}\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} + I^{-1}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}), \tag{10'}$$

o sotto altra forma

$$\left\{ \begin{aligned} S\{(I^{-1}\boldsymbol{v})(I^{-1}\boldsymbol{u})\} &= -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} \\ V\{(I^{-1}\boldsymbol{v})(I^{-1}\boldsymbol{u})\} &= \quad \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Dim. | Dalle (4) osservando che

$$S(I^{-1}\boldsymbol{u}) = S(I^{-1}\boldsymbol{v}) = 0, \qquad V(I^{-1}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}, \qquad V(I^{-1}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}.$$

Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *sono vettori*, $\boldsymbol{u} \neq 0$, *e si scrive* $\frac{\beta}{\alpha}$ *al posto di* $\beta\alpha^{-1}$, *allora si ha*

$$\frac{I^{-1}\boldsymbol{v}}{I^{-1}\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^2} - I^{-1}\frac{\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^2}. \tag{11}$$

Dim. $$\frac{I^{-1}\boldsymbol{v}}{I^{-1}\boldsymbol{u}} = (I^{-1}\boldsymbol{u})^{-1}(I^{-1}\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\boldsymbol{u}^2}(I^{-1}\boldsymbol{u})(I^{-1}\boldsymbol{v}),$$

che per la (10′) dà la (11).

Notevole è la considerazione dei vettori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ formanti un sistema *ortogonale-destrogiro*, per i quali, valgono le relazioni

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1$$
$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = 0$$
$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}.$$

(*) α è la somma del suo scalare, non col suo vettore, ma col *quaternione retto* il cui vettore è il vettore di α.

Da questi vettori si traggono i quaternioni retti unitari, formanti pure sistema ortogonale-destrogiro

$$i = \mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{i}, \quad j = \mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{j}, \quad k = \mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{k},$$

per i quali valgono le formule

$$(12) \quad \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \\ ij = -ji = k \\ ijk = jki = kij = -1. \end{cases}$$

Dim. $i^2 = (\mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{i})(\mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + 0 = -\boldsymbol{i}^2 = -1$, ecc.
$jk = (\mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{j})(\mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{k}) = -0 + \mathrm{I}^{-1}(\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}) = \mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{i} = i$, ecc.
$ijk = i(jk) = ii = i^2 = -1$, ecc.

Fissato il sistema i, j, k, al quaternione α, qualunque, si può dare, e in un sol modo, la forma

$$(13) \qquad \alpha = s + xi + yj + zk$$

ove

$$\mathrm{S}\alpha = s, \quad \mathrm{V}\alpha = x\mathrm{I}i + y\mathrm{I}j + z\mathrm{I}k = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Combinando la forma (13) con le (12) risulta l'ordinario calcolo quaternionale, a base di coordinate, al quale alcuni autori riducono il calcolo autonomo e geometrico di Hamilton, ottenendo uno strumento che ha solo il modesto ufficio di tachigrafo per le coordinate cartesiane.

6. Confronto dei quaternioni con le omografie vettoriali. — Dalla (13) risulta che i quaternioni formano *un sistema lineare a* QUATTRO *dimensioni*; di qui il nome di quaternione.

Però, e lo si noti bene, **i quaternioni non formano un sistema lineare a quattro dimensioni di omografie vettoriali**; di qui le apparenti anomalie constatate alla fine del n° 3. Dai due fatti ora accennati, e dei quali molti non

tengono il debito conto, derivano, forse, le notevoli divergenze di opinioni rispetto ai quaternioni. Sarà dunque opportuno esaminare i punti sostanziali della questione.

Le omografie vettoriali, nello spazio, formano un sistema lineare a *nove* dimensioni. Tra le omografie sono da considerarsi le *dilatazioni* μ, caratterizzate dalla condizione

$$x \times \mu y = y \times \mu x,$$

(valevole qualunque siano i vettori x, y), che formano pure un sistema lineare ma a *sei* dimensioni (*).

Qualunque sia l'omografia vettoriale σ, sono determinati, e in un sol modo, la dilatazione μ e il vettore u tali che per x vettore qualunque,

$$\sigma x = \mu x + u \wedge x,$$

ovvero tali che

$$\sigma = \mu + u \wedge .$$

Le omografie σ per le quali la dilatazione μ è un numero s (**)

$$\sigma = s + u \wedge \quad \text{cioè} \quad \sigma x = sx + u \wedge x \tag{14}$$

formano un *sistema lineare a* QUATTRO dimensioni.

Però $\sigma = s + u \wedge$ non coincide col quaternione

$$\alpha = s + I^{-1} u$$

perchè, mentre il campo di applicazione di σ è formato da tutti i vettori, quello di α è formato soltanto dai vettori normali ad u.

La differenza tra σ e α apparisce notevole considerando il prodotto delle due omografie

$$\sigma = s + u \wedge, \quad \sigma' = s' + u' \wedge .$$

(*) Data μ esistono infinite quadriche tali che, per esse, il piano diametrale coniugato alla direzione x è normale a μx. Queste quadriche tagliano tutte il piano all'infinito nel luogo reale o immaginario di equazione $x \times \mu x = 0$.

(**) Le quadriche corrispondenti sono *sfere*.

Si ha, con un calcolo semplice, in virtù della (14), e per x vettore qualunque

$$\sigma'\sigma x = (s's - u' \times u)x + \{s'u + su' + u' \wedge u\} \wedge x + (u \times x)u';$$

mentre per i quaternioni

$$\alpha = s + \mathrm{I}^{-1}u, \qquad \alpha' = s' + \mathrm{I}^{-1}u',$$

si ha, come si è già trovato (4), e per x normale al $\mathrm{V}(\alpha'\alpha)$,

$$(\alpha'\alpha)x = (s's - u' \times u)x + (s'u + su' + u' \wedge u) \wedge x.$$

Di più; mentre $\sigma'\sigma x = (\sigma'\sigma)x = \sigma'(\sigma x)$ per x qualunque, $(\alpha'\alpha)x = \alpha'(\alpha x)$ solamente quando i vettori x, αx sono normali, rispettivamente ai vettori $\mathrm{V}\alpha$, $\mathrm{V}\alpha'$. Altre notevoli differenze risultano dalle proprietà generali delle omografie vettoriali; ma bastano questi esempi (*).

7. Osservazioni. — È importante constatare i fatti seguenti.

a) HAMILTON, prima di introdurre gli operatori I, I^{-1}, dà significato preciso alle notazioni

$$(15) \qquad \frac{v}{u}, \quad vu,$$

(*) Nella nota III, *Per l'unificazione...* (l. c.), abbiamo posto, per *i quaternione retto* e per *u vettore*,

$$i\wedge^{-1} = \mathrm{I}i, \qquad u\wedge = \mathrm{I}^{-1}u$$

ammettendo che il campo di applicazione dell'operatore composto $u\wedge$ sia formato dai soli vettori normali ad u; poichè è *soltanto in tale ipotesi* che $\wedge$ può funzionare da operatore (a destra) *invertibile.* Cosa analoga si fa in analisi per le *funzioni circolari*; il simbolo sen è operatore il cui campo di applicazione è formato da tutti i numeri reali: ora per considerare la funzione inversa arc sen o sen^{-1} è necessario ammettere che il campo di applicazione di sen sia formato dai numeri da $-\pi/2$ a $\pi/2$.

Con tali notazioni la (10) diviene

$$(v\wedge)(u\wedge) = -v \times u + (v\wedge u)\wedge$$

nella quale $v\wedge$ si trova in due posti con campo di applicazione diverso, come, in una stessa formula, può avvenire per sen e sen^{-1}. Ogni ambiguità è tolta dai simboli I, I^{-1} di HAMILTON.

nelle quali u, v sono *vettori* (non nulli). E precisamente con le notazioni (15) indica i quaternioni, per i quali si ha, facendo uso delle operazioni vettoriali $\times$, $\wedge$

$$(16) \quad \begin{cases} \mathrm{S}\,\dfrac{v}{u} = \dfrac{v \times u}{u^2}, & \mathrm{V}\,\dfrac{v}{u} = -\dfrac{v \wedge u}{u^2} \\ \mathrm{S}(vu) = -v \times u, & \mathrm{V}(vu) = v \wedge u. \end{cases}$$

Vale a dire le (15) hanno l'identico significato delle notazioni (Cfr. (10) e (11))

$$(17) \qquad \frac{\mathrm{I}^{-1}v}{\mathrm{I}^{-1}u}, \qquad (\mathrm{I}^{-1}v)\,(\mathrm{I}^{-1}u).$$

b) HAMILTON ha trovato necessario introdurre gli operatori I, I^{-1} che applicati, rispettivamente, a un *quaternione retto* o a un *vettore* producono un *vettore* e un *quaternione retto*.

Per quanto ci consta, nessuno dei seguaci di HAMILTON ha ritenuto necessario introdurre esplicitamente gli operatori I, I^{-1}.

c) Negli *Elements of Quaternions* (ediz. del 1899), il titolo della *Section* 4, T. 1, Libro III, p. 331 è il seguente: **On the Symbolical Identification of a Right Quaternion with its own Index**:..... Qui, HAMILTON, visto come le notazioni (15) prima introdotte, vengano a coincidere con le notazioni, più complicate, (16), e fatte analoghe osservazioni per altre formule, **fa la convenzione di sopprimere i simboli I, I^{-1} là dove devono comparire in virtù del loro preciso significato rispetto a quaternione retto e a vettore** *(symbolical identification).*

In virtù di tale convenzione scrive

$$q = \mathrm{a} + \alpha \quad \text{al posto di} \quad q = \mathrm{a} + \mathrm{I}^{-1}\alpha,$$

cioè, in generale, (p. 335)

(18) **Scalar plus Vector equals Quaternion** (*).

(*) Qui è opportuno far notare che il significato del simbolo, da noi usato, $\mathrm{V}\alpha$ *pare* alquanto diverso da quello attribuitogli da HAMILTON. Infatti, ad es., a p. 193 si trova $q = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q$, e qui $\mathrm{V}q$ è quaternione retto e non vettore. La denominazione " vettore di α ", e l'importante distinzione fatta in seguito dall'HAMILTON stesso tra *quaternione retto* e *vettore*, consiglia di dare a $\mathrm{V}\alpha$ il preciso significato del quale abbiamo fatto uso sin qui.

Esposti i fatti, ci siano permesse alcune deduzioni.

È possibile ammettere che HAMILTON sopprimendo i simboli I, I^{-1} abbia voluto **identificare logicamente** *il quaternione retto al suo vettore*? Che ciò abbiano inteso di fare i seguaci di HAMILTON, per i quali la (18) vale incondizionatamente, è evidente, poichè essi non parlando affatto degli operatori I, I^{-1} li hanno ritenuti inutili e non hanno fatto distinzione alcuna tra quaternione retto e vettore.

Ma, le precise definizioni di *vettore* e di *quaternione*; le applicazioni geometriche dei soli vettori prima, poi dei quaternioni, con caratteri così distinti; il titolo della *Section* 4; l'uso continuo della frase *symbolical identification* per *giustificare* la soppressione dei simboli I, I^{-1}, ci sembrano bastanti a provare che nella mente di HAMILTON **quaternione retto** e **vettore** sono sempre stati **enti ben distinti**.

La questione, però, è così importante, perchè si riferisce al preciso concetto di *quaternione*, che crediamo utile esaminare i seguenti esempi:

1° Sia α un *quaternione* e x un *vettore*. Da formule già esposte si ha subito

$$\alpha(I^{-1}x) = I^{-1}\{(S\alpha)x + (V\alpha)\wedge x\} - x \times V\alpha. \tag{19}$$

Questa per $x \times V\alpha = 0$, cioè *per* x *appartenente al campo di variabilità dell'operatore vettoriale* α dà

$$\alpha(I^{-1}x) = I^{-1}(\alpha x) \tag{20}$$

perchè il vettore entro $\}\ \{$ è appunto il vettore αx che si ottiene applicando α ad x. Ma, **e lo si noti bene,** per $x \times V\alpha \neq 0$, alla (19) NON SI PUÒ DARE LA FORMA

$$\alpha(I^{-1}x) = I^{-1}(\alpha x) - x \times V\alpha, \tag{19'}$$

e molto meno la forma (20), perchè la notazione αx *è priva di significato* NON ESSENDO x UNO DEI VETTORI DEL CAMPO DI APPLICABILITÀ DI α.

Ora, in virtù della convenzione (c) al posto di $\alpha(I^{-1}x)$ si scrive αx; e quindi per le (19), (20), (19') è erroneo ritenere, in *modo assoluto*, e per x *vettore*, regolare la notazione αx, cioè ritenerla *indipendente* dall'operatore I^{-1}.

Dai fatti (*a*), (*b*), (*c*), dallo *spirito* dell'opera hamiltoniana, e, in gran parte, anche dalla *lettera*, risulta chiaramente che, per HAMILTON, la notazione αx ha *due distinti significati*; e precisamente:

se αx è *notazione non abbreviata*, allora x *deve* essere *vettore normale al vettore di* α e αx **è un vettore**;

se αx è *notazione abbreviata*, allora x *può* essere *vettore qualunque*, αx ha l'esatto significato di $\alpha(\mathrm{I}^{-1}x)$ e αx **è un quaternione** il cui scalare è $-x \times \mathrm{V}\alpha$ e il cui vettore è $(\mathrm{S}\alpha)x + (\mathrm{V}\alpha) \wedge x$.

2° Se A, B, C sono i vertici di un triangolo sferico situato in una sfera di centro O, sono determinati i *versori* α, β, γ tali che

(21) $\alpha(A-O)=B-O,\ \beta(B-O)=C-O,\ \gamma(C-O)=A-O.$

Da queste si trae, ad es.,

$$\beta\{\alpha(A-O)\}=C-O,$$

ma **non**

$$(\beta\alpha)(A-O)=C-O$$

perchè $A-O$ non è, in generale, normale al vettore di $\beta\alpha$; quindi nessuna conclusione si può trarre dalle (21) operando in tal modo.

Se, invece, tenendo conto della (20), diamo alle (21) la forma

(21′) $\alpha\mathrm{I}^{-1}(A-O)=\mathrm{I}^{-1}(B-O)$, ecc. . . .

si ha subito

$$\gamma\beta\alpha\mathrm{I}^{-1}(A-O)=\mathrm{I}^{-1}(A-O)$$

e quindi

(22) $\gamma\beta\alpha=1$ (*).

La notazione abbreviata permette di ottenere la (22) anche dalle (21); il procedimento è *regolare* finchè esistendo gli ope-

(*) Si noti che a tale conclusione si giunge *soltanto* in virtù del teorema (5) del n° 2. Nelle (21), α, β, γ possono essere *omografie vettoriali* (cfr. n° 6) anche della forma $s+u\wedge$, e si giunge a $\gamma\beta\alpha(A-O)=A-O$, ma non però alla (22) perchè il teorema (5) vale soltanto per i quaternioni.

ratori I, I^{-1} ci limitiamo a sopprimerli, ma è *erroneo* quando le funzioni I, I^{-1} non sono nemmeno state introdotte, perchè, comunque si definiscano i quaternioni (di HAMILTON, si intende), non si potrà mai togliere ad essi i caratteri che hanno, nè attribuirne loro di quelli che non hanno.

3° Se $\alpha = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$ è un *versore* (i è quaternione retto unitario) e u è un quaternione retto, la notazione, completa,

$$\alpha u \alpha^{-1}$$

indica pure un quaternione retto *il cui vettore si ottiene dando al vettore* Iu *la rotazione di* 2φ *radianti intorno al vettore* Ii. Se si pone $\boldsymbol{u} = \mathrm{I}u$, allora il vettore $\boldsymbol{u}$ rotato di 2φ radianti intorno al vettore $\boldsymbol{i} = \mathrm{I}i$ è dato, con notazione completa, da

$$\mathrm{I}\{\alpha(\mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{u})\alpha^{-1}\}, \text{ ovvero } \mathrm{I}\{(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{i})(\mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{u})(\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{I}^{-1}\boldsymbol{i})\}:$$

ma la notazione abbreviata $\alpha\boldsymbol{u}\alpha^{-1}$, per $\boldsymbol{u}$ vettore, è erronea quando non si ammetta almeno l'esistenza dei simboli I, I^{-1}.

Come abbiamo notato in principio di questa nota, il disaccordo scientifico rispetto alla natura dei quaternioni non potrebbe esser nè più completo nè più grave. Crediamo che da quanto abbiamo esposto si possa ricavare quanto basta per ottenere l'accordo scientifico, accordo importantissimo sia per i quaternioni, sia per le future notazioni vettoriali. In ogni discussione che riguardi direttamente o indirettamente i quaternioni, ci si *accerti*, prima di tutto, che i quaternioni dei quali si parla, sono proprio quelli di HAMILTON; accertato questo, si conservi alla parola *vettore* il suo significato geometrico di ente individuato da *grandezza*, *direzione* e *verso*; ciò fatto, non si escludano a priori, anzi si ammettano e si usino le operazioni $+$, $-$, prodotto per un numero, $\times$, $\wedge$ per i vettori, operazioni semplicissime e puramente geometriche; infine, si introducano *esplicitamente* gli operatori I, I^{-1}, non solo, ma tali simboli mai non si sopprimano, anche a rischio di complicare le formule. Dopo ciò, purchè si ragioni e si operi bene, le conclusioni saranno, necessariamente, le medesime per tutti e l'accordo scientifico sarà raggiunto.

Relazione sulla Memoria di G. Z. Giambelli, intitolata: *Risoluzione del problema generale numerativo per gli spazi plurisecanti di una curva algebrica.*

Il problema risolto in questa Memoria è il seguente: trasformare la *condizione* (nel senso di H. Schubert) che s'impone ad uno spazio obbligandolo ad incontrare un dato numero di volte una curva assegnata di ordine n e genere p, in una somma di condizioni *caratteristiche* relative a quello spazio.

Come si vede, è un problema di grande generalità, la cui risoluzione ha un'importanza essenziale per le quistioni numerative riguardanti le curve algebriche degl'iperspazi. Basti dire che, grazie ai risultati di questo lavoro, si saprà d'or innanzi quanti sono gli spazi che secano dati numeri di volte una o più curve assegnate di ordini e generi qualunque; ed ove tali spazi siano in numero infinito, quali sono i diversi caratteri della varietà da essi costituita.

Varie ricerche parziali su quest'argomento si eran fatte prima, particolarmente dai cultori italiani della Geometria numerativa. Ma si era ancora ben lontani dalla soluzione generale.

Analogamente a qualcuno fra i suoi predecessori, il Giambelli giunge allo scopo trattando anzitutto il problema per una curva razionale, e riducendosi poi a questo caso particolare con opportune degenerazioni della curva di genere p. Ma, oltre alle differenze intorno al modo con cui questi concetti geometrici si esplicano, va rilevata in questa Memoria, come in altre dello stesso Autore, la singolare maestria nell'introduzione di convenienti simbolismi algebrici, coi quali soltanto si riesce a metter in formule le relazioni fondamentali che occorrono nella ricerca. È certamente a questa singolare abilità algebrica del Giambelli che si deve il fatto che egli abbia potuto risolvere la questione nella sua massima generalità.

Per il risultato suo, come per il metodo usato, questo lavoro merita senza alcun dubbio di esser accolto fra le nostre Memorie.

G. Morera,
C. Segre, *relatore.*

Relazione intorno alla Memoria del Dott. C. Aimonetti, intitolata: *Determinazione astronomica della Latitudine della Specola Geodetica della R. Università di Torino.*

Costruita la terrazza sovrastante il Gabinetto di Geodesia della R. Università era necessario determinarne la posizione astronomica e geodetica.

La determinazione della posizione astronomica comprende in primo luogo la misura *della latitudine.* Tale incarico fu dato al Dott. Cesare Aimonetti assistente al Gabinetto di Geodesia.

Lo strumento adoperato fu un alt'azimut del costruttore *Repsold* di Amburgo di proprietà del Gabinetto stesso, ed il metodo adoperato fu quello della *misura di distanze zenitali meridiane di stelle.*

La Memoria presentata comprende in una prima parte l'esame dell'istrumento e nell'altra parte la descrizione del metodo adoperato ed i risultati delle osservazioni.

La scrupolosità adoperata dal Dott. Aimonetti nell'esame particolareggiato di tutte le parti dell'istrumento e la diligenza con cui ha fatto le osservazioni danno affidamento che il valore ottenuto della latitudine si possa ritenere, per quanto è possibile, esatto.

I sottoscritti quindi propongono che tale lavoro sia accolto tra le Memorie della nostra Accademia.

A. Naccari,
N. Jadanza, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Lorenzo Camerano.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 21 Giugno 1908.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE ENRICO D'OVIDIO
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Allievo, Pizzi, Ruffini, Brondi e Renier Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci Chironi, De Sanctis, Stampini e Sforza.

Viene approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 31 maggio 1908.

Il Presidente comunica:

1° gli estratti provenienti dal Ministero dell'Istruzione Pubblica, del R. Decreto 14 maggio 1908, col quale sono approvate le elezioni di Guidi, Tocco e Pigorini a Soci nazionali non residenti e di Foerster, Saleilles, Duchesne, Jellinek a Soci stranieri;

2° i ringraziamenti per l'elezione a' Soci corrispondenti di Zuccante, Ardigò, Venturi, Luzio, Monticolo, Orsi, Bellio, Bertacchi, Salvioni, Lasinio, Teza, Vitelli, Schiaparelli, Gorra.

Partecipa inoltre il Presidente che l'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, si è integrata mediante l'istituzione di una Classe di scienze morali divisa in due sezioni, di scienze storico-filologiche e giuridiche, e che si sta per costituire una Società vercellese di storia e di arte, la quale funzionerà appena si avranno 40 adesioni.

L'Istituzione Morelli in Bergamo annunzia l'invio del ritratto del fondatore dell'Istituzione stessa, come omaggio all'Accademia che coi suoi giudizi ha avuto parte nel buon esito dei concorsi.

D'ufficio è presentato il volume di *Nuovi documenti sul processo Confalonieri*, Roma-Milano, 1908, mandato in dono dal nuovo Socio corrispondente Alessandro Luzio.

L'opera di Dionisio Scano, *Storia dell'arte medioevale in Sardegna, sec. XI-XIV*. Cagliari, 1908 è presentata dal Socio Ruffini a nome del Socio Chironi, che si propone di parlarne in seguito all'Accademia con la debita lode. Il Socio Ruffini coglie l'occasione per esprimere il vivo compiacimento che desta l'osservare il fervore intelligente con cui da qualche tempo si occupano di cose sarde, storiche, giuridiche, artistiche, glottologiche, i giovani insegnanti che per ragioni d'ufficio si trovano nell'isola. Questa loro attività illuminata merita encomio ed all'encomio si associa con parole di sentita deferenza il Socio Renier.

Per l'inserzione negli *Atti* il Socio Allievo offre una sua nota intitolata *L'umanismo*, della quale indica sommariamente il contenuto.

A nome del Socio Stampini assente, il Socio Renier legge la relazione sulla memoria del prof. Clemente Merlo, *Degli esiti di lat. -gn- nei dialetti dell'Italia centro-meridionale con una appendice " Sul trattamento degli sdruccioli nel dialetto di Molfetta "*. Approvata la relazione, la Classe, con votazione segreta unanime delibera la pubblicazione nelle *Memorie* accademiche della dissertazione glottologica del prof. Merlo.

LETTURE

L'umanismo.

Nota del Socio GIUSEPPE ALLIEVO.

" Scacciare via dal pensiero e dalla vita umana ogni elemento sovrintelligibile e sovrannaturale, e conseguentemente in luogo dell'esistenza oltremondana ed individua degli spiriti umani porre siccome unica la vita terrena, che si distrugge negli individui e si perpetua nella specie; sbandire dal dominio della scienza siccome irrazionale il concetto di Dio, essere personale, legislatore assoluto della natura e dell'umanità, ed in vece sua fare l'uomo centro universale del sapere e dell'essere, è questo il finale intendimento, questo lo spirito de' nostri filosofi novatori, che in ciò ripongono la sola vera riforma del pensiero italiano. *Nulla al di sopra dell'uomo: tutto in lui o al di sotto di lui*: ecco la formola, con cui può enunciarsi la nuova filosofia, di cui discorriamo, e che dallo stesso oggetto potrebbe assumere il non improprio nome di *Umanismo* „ (1).

Queste considerazioni io pubblicavo quarant'anni or sono, quando l'Idealismo assoluto di Giorgio Hegel volgeva al tramonto, e spuntava sull'orizzonte filosofico il positivismo di Augusto Comte. Fin d'allora io avvertiva, che il razionalismo assoluto e l'empirismo positivistico sono due forme dell'umanismo, essendo entrambi concordi nel proclamare il valore illimitato della ragione umana; giacchè secondo Hegel Dio acquista coscienza di sè nell'uomo, ed il Comte svolse dal suo positivismo l'umanismo più esaltato. Allora io faceva di pubblica ragione i miei studi intorno il sistema hegeliano; ora intraprendo un esame intorno l'umanismo preso nella sua forma propria e spiccata, e ne' suoi pronunciati fondamentali.

---

(1) *L'Hegelianismo, la scienza, la vita*, per GIUSEPPE ALLIEVO, Milano, 1868.

1. — Il concetto dell'uomo.

La dottrina, di cui discorriamo, posa tutta quanta sul concetto dell'uomo, oggetto formale del suo studio. L'uomo è esso solo tutto quanto l'essere, è il punto centrale dell'universo, è il cardine ed il principio motore di tutta la realtà, è la misura di tutte le cose: ecco il concetto dell'uomo, su cui posa l'umanismo, e da questo concetto debbe esordire la nostra critica. Prendiamo ad esame questi due pronunciati: 1° Tutto sta al di sotto dell'uomo; nulla esiste al di sopra di lui; 2° La conoscenza che abbiamo dell'uomo possiede una certezza e verità assoluta e sopra di essa si fonda tutto quanto il vero sapere.

Sottoponiamo alla critica la prima di queste due proposizioni. Nessuno vorrà mettere in forse che la dignità dell'uomo va misurata dalla sua natura, e che la natura sua propria risiede nella personalità. Quindi ne consegue dirittamente che egli sovrasta a tutto il corporeo universo, perchè fra tutti gli esseri della natura materiale egli solo è fornito di ragione e di libero volere, che sono i due attributi costitutivi della persona. Ma possiamo noi del pari asserire, che al di sopra di sè egli non debba riconoscere essere di sorta? Certamente l'uomo in grazia della sua natura personale è dotato di una potenzialità indefinita. Egli scorre col pensiero l'immensità del tempo e dello spazio, risuscita colla memoria i secoli che più non sono, trasforma ed abbellisce coll'arte il mondo circostante, domina le cieche forze della natura convertendole in istrumenti di civiltà e di agiatezza sociale, trionfa colla libertà del volere, delle passioni istintive sino a compiere l'eroismo del sacrificio: ma la sua personalità è finita, epperò quando di ascensione in ascensione si sarà innalzato sino ai più lontani termini dell'universo egli si arresterà davanti all'Essere personale divino, infinitamente superiore a lui; egli potrà rinnegarlo, potrà follemente immaginarsi di essere lui Dio, ma non potrà usurpare il suo posto, rompendo i cancelli della sua natura. In breve, l'uomo è persona, epperò sovrasta a tutto l'universo corporeo; ma è persona finita, epperò non è il sommo dell'essere, non è la realtà universa.

Ma che? Se da un lato l'uomo è grande nelle sue trionfali ascensioni verso l'infinito, dall'altro lato è pur ben compassio-

nevole nelle sue miserie senza numero, ne' suoi traviamenti, nelle sue cadute. I sensi e le passioni, che acciecano l'intelletto, i pregiudizi e gli errori, che tiranneggiano la ragione, gli ignobili istinti, che trionfano contro la santità del dovere; gli scoraggiamenti ed i disinganni in mezzo alle aspre lotte della vita: gli strazii dell'anima, che non crede più a nulla e dispera di tutto; il dolore, che tortura la nostra esistenza fino alla morte: la felicità e la pace, che sempre si sospirano, e non si raggiungono mai; e poi il tempo, che tutto distrugge intorno a noi, e ci strappa via dal cuore quanto abbiamo di più caro quaggiù: ecco l'uomo, che si proclama e si esalta il Re dell'universo. " Qual chimera è dunque l'uomo! Qual novità, qual caso, qual soggetto di contraddizione! Giudice di tutte cose, eppure verme imbecille della terra; depositario del vero, eppure ammasso di incertezza; gloria e rifiuto dell'universo; se egli si vanta, io lo abbasso; se egli si abbassa, io lo vanto, e sempre lo contraddico, finchè comprenda che egli è un mostro incomprensibile " (1).

Dalle cose discorse apparisce qual giudizio debbasi pronunciare intorno la proposizione, che l'uomo è il sommo dell'essere, al di là del quale non vi è che il nulla.

Passiamo alla seconda proposizione: la conoscenza, che l'uomo ha di se stesso, è la sola vera, la sola certa, ed è il fondamento di tutto il sapere. Contro questo pronunciato noi opponiamo, che lo studio dell'uomo è avviluppato in tali e tante difficoltà, è combattuto da tali e tanto contrarii sistemi, che la conoscenza di lui non ha veruna ragione di essere anteposta ad ogni altra e riguardata come il cardine della scienza universale.

Le difficoltà, di cui parliamo, provengono le une dalla estrema complicatezza della natura dell'uomo, le altre dalla varietà pressochè indefinita delle sue manifestazioni, le altre ancora dalla essenza costitutiva dell'essere umano. Quanto alla natura dell'uomo, ben a ragione esso venne dai greci appellato un microcosmo, un piccol mondo, essendochè riepiloga in sè come in una sintesi compendiosa quanto vive e si muove nel grande universo, e partecipa in certo qual modo di tutte le nature senza confondersi con nessuna in particolare, e si stringe in rapporto di intelligenza e di libera volontà con tutti gli esseri finiti e

(1) Biagio Pascal, *Pensieri*, Parte seconda, art. 4, numero 5.

con Dio. Di qui si scorge, quanto ardua difficoltà si incontri nello studio dell'uomo, essendochè ad averne conoscenza perfetta occorrerebbe conoscere in certo qual modo tutto l'universo. Dacchè l'essere umano raccoglie nell'unità della sua specifica natura tanta varietà di elementi, non è meraviglia se esso si manifesta sotto diversissime forme e soggiace a trasmutamenti tanto profondi, che quasi quasi siam tratti a dubitare se individui umani disparatissimi per tempra di mente e di corpo appartengano alla medesima nostra specie, e se il medesimo individuo in mezzo alle metamorfosi singolari delle successive età della vita si mantenga sempre identico nella personalità sua. Quanta disparità tra il genio, che scopre i secreti della natura, e l'imbecille e scemo di mente che appena mostra una languida coscienza di se medesimo; tra l'eroe, che si sacrifica, e l'indolente, che quasi quasi non sente la vita; tra il neonato ignaro di se medesimo e del mondo esteriore, e l'uomo maturo che lavora al conseguimento del suo ideale! Non è quindi agevole studio il rendere ragione di tante differentissime manifestazioni dell'essere umano. Che più? L'essenza medesima, che costituisce l'essere umano, vale a dire l'unione vivente di uno spirito e di un corpo, rimane e rimarrà pur sempre un impenetrabile mistero. " L'uomo è a se stesso l'oggetto più prodigioso della natura, non potendo comprendere ciò, che è il corpo, e ancor meno ciò, che è lo spirito, meno poi di qualunque altra cosa, come possa un corpo essere unito ad uno spirito; e tuttavia gli è questo il proprio suo essere „ (1).

Tali sono le difficoltà, che intralciano lo studio dell'essere umano. Se adunque la natura dell'uomo è talmente complicata con quella di tutte le cose, che a volerlo veramente conoscere bisognerebbe conoscere l'universo intiero, se le sue manifestazioni sono tanto opposte fra di loro da sembrare inconciliabili, se l'uomo considerato nella sua essenza medesima, ossia in ciò, che egli è, rimane un mistero a se stesso, come si potrà soste-

---

(1) Biagio Pascal, *Pensieri*, Parte prima, art. 16. Il Pascal ripete il pensiero di S. Agostino, il quale aveva scritto: " Modus, quo corporibus " adhaerent spiritus et animalia fiunt, et omnino mirus est, nec compre- " hendi ab homine potest; et hoc ipse homo est „ (*De civitate Dei*).

nere in sul serio, che la conoscenza di lui è la prima di ogni altra, la sola vera, certa?

Lo studio dell'uomo fu tentato, fatto e rifatto dai diversi pensatori di ogni secolo e di ogni nazione, e la storia del pensiero registra i risultati delle loro meditazioni. Ma anche qui abbiamo una folla di sistemi che si incalzano, si contraddicono, si combattono l'un l'altro, e ci troviamo di fronte al problema, in quale di tante opposte dottrine si contenga la vera e certa conoscenza dell'uomo. Infatti contemplando l'essere umano alcuni si arrestarono alla sua parte meramente materiale scambiandola per il tutto, altri invece non seppero notare in lui, che lo spirito, riguardando il corpo come un fuor d'opera, anzi come qualche cosa, che ci disumana: di qui l'origine di due opposti sistemi, l'idealismo ed il materialismo. Altri sostennero, che lo studio dell'uomo deve ristringersi tutto quanto ne' soli fenomeni, che avvengono in noi, ossia nei fatti, in cui si manifesta la nostra natura, senza risalire a quell'*io*, a quel soggetto sostanziale, da cui scaturiscono ed a cui appartengono, mentre altri tengono la sentenza contraria: di qui due altri opposti sistemi, il positivismo ed il trascendentalismo. Fra que' medesimi pensatori poi, che ridussero tutta quanta la scienza dell'uomo allo studio esclusivo dei fatti, sonvene alcuni, i quali insegnano che nello sviluppo progressivo della vita, quale si va effettuando in ciascuno di noi, i fenomeni fisiologici e psichici si trasformano gli uni negli altri tanto chè l'istinto animale diventa volontà, la sensazione fisica sentimento morale, la percezione sensitiva ragione umana. È il sistema dell'evoluzionismo. Per ultimo non mancano coloro, i quali impauriti in faccia alle misteriose e perpetue contraddizioni, che avviluppano la vita umana, trascorsero sino a sostenere che la nostra ragione indarno si affatica per giungere ad alcunchè di vero e di certo intorno la natura umana, mentre altri trascorrono all'estremo opposto: di qui lo scetticismo ed il dogmatismo.

2. — L'uomo creatore di Dio.

Amedeo Fichte promise un giorno a' suoi uditori, che nella prossima lezione si sarebbe accinto a creare Dio. Il semplice e puro buon senso non ci consentirebbe di pigliare questa pro-

posizione in sul serio, quasichè un essere finito, e che non si è data l'esistenza da sè, possa dare forma ed esistenza ad un Essere infinito, quale è Dio. Ma alcuni filosofi, sebbene rarissimi di fronte agli innumerevoli, che la pensano diversamente, si reputano indipendenti dal buon senso, o s'immaginano di costrurre l'universo colla virtù del proprio pensiero. Dacchè l'uomo è il sommo dell'essere, non c'è più posto per Dio nel mondo: giacchè tutto ciò, che esiste, soggiace al suo pensiero, anche Dio è una fattura della sua mente. L'uomo e Dio non sono due termini distinti, due esseri diversi, ma fanno un essere unico: la realtà è una sola.

Qui occorre di fare una gravissima avvertenza. Questa confusione dell'uomo con Dio debb'essere considerata sotto due ben diversi riguardi. L'uomo può innalzarsi al di sopra di sè tant'alto da trasumanare, ossia spogliarsi della sua natura ed indiarsi, diventando un essere solo con Dio; oppure abbassar Dio tanto da soverchiarlo e reputarlo una sua fattura. In entrambi i casi abbiamo sempre una realtà unica, con questa diversità però, che nel primo caso Dio solo rimane, l'uomo è scomparso, nel secondo caso la realtà di Dio è scomparsa, e rimane sola quella dell'uomo. Un esempio del primo caso lo abbiamo nel misticismo esagerato, in cui l'anima pia di ascensione in ascensione sale sino ad inabissarsi nel mare infinito dell'essenza divina, e smarrire la coscienza di sè, in quella guisa che un fiume terminato il lungo suo corso va a perdersi nell'immenso oceano, confondendo le sue acque con quelle del mare. Il secondo caso è propriamente quello dell'umanismo, che spoglia Dio della sua reale esistenza, ed è pretto ateismo.

Questa tendenza di alcuni pensatori a sublimare l'uomo al di sopra della sua finita natura sino a confonderlo coll'Infinito si manifestò nella prima metà del secolo scorso segnatamente nella filosofia dominante in Germania. Ogni uomo, secondo il Novalis, deve adoprarsi di sollevarsi al di sopra di se medesimo, di divenire più che uomo assimilandosi l'universo col proprio pensiero. Secondo lui l'uomo è l'arbitro del mondo: l'io umano scorre onnipotente ed immutabile sulla mobile scena dell'universo.

Luigi Feuerbach insegna che il Dio da noi adorato non è che lo specchio, in cui si riflette l'essenza umana. Il suo Dio è la stessa sua anima in quanto è manifestata, ma ei lo ignora,

ed è appunto quest'ignoranza, che costituisce la sua religiosità (1). Secondo Hegel, Dio ha la coscienza di sè nell'uomo, perchè il pensiero umano giunge a comprendere e spiegare tutto l'universo, e diventa consapevole che egli è lo spirito infinito, Dio.

Ora prendiamo in esame le ragioni principali, che l'ateismo umanistico mette in campo contro l'esistenza reale di Dio, considerato siccome l'essere supremo, reggitore dell'universo.

La nostra vita psicologica non sempre scorre calma e tranquilla, quale si converrebbe alla nostra natura, fatta per la conoscenza del vero e per il possesso della felicità; ma più di una volta l'anima nostra trovasi in uno stato di abbattimento, di sconforto, di dolore. In tali tristissimi momenti essa cerca uno scampo, che la ripari, una forza, che la rialzi, e colla sua immaginazione si crea un idolo, e s'inchina ad esso come a suo salvatore ed oggetto delle sue speranze. Quest'idolo è il suo Dio. Così ragiona l'umanista; ma egli ha dimenticato il concetto superlativo, che si è formato dell'uomo, e che è il cardine del suo umanismo. Poichè se l'uomo è il sommo dell'essere, se tutto sta al di sotto di lui, niente vi ha al di sopra di lui, come mai può discendere tanto basso da lasciarsi soverchiare da una forza a lui superiore, che lo abbatte, lo contrista, lo addolora, come fosse l'ultima delle creature? Come spiega un decadimento così profondo? E qui accettiamo il fatto, sebbene per lui inesplicabile. Poniamo pure che l'uomo sia caduto in fondo allo scoraggiamento ed al dolore. È proprio necessario, per rialzarsi dalla sua miseria, che egli si foggi un idolo, adorandolo come un Dio? Non gli basterebbe che ricordasse essere lui il re dell'universo, attingendo da questo ricordo la forza per sostenere la prova, che lo combatte?

Dio, secondo altri umanisti, non è un idolo fittizio foggiato dalla nostra immaginazione perchè ci conforti nelle lotte della vita, ma è un ideale di quanto vi ha di nobile e di grande, creato dalla nostra mente, ma un ideale privo di realtà, non è un essere, ma una concezione del pensiero, è il *divino* (2). Tale è la teoria di Ernesto Renan, esposta nella sua opera *Studi di*

---

(1) *Essenza del cristianesimo*, capo 2°.

(2) Intorno *Il divino nella natura* il Rosmini scrisse pagine profondamente meditate; ma non confuse il divino, e tanto meno la natura, con Dio.

storia religiosa. Ricercare e contemplare quanto vi ha di più sublime, ossia il divino nella scienza, nell'arte, nella moralità della vita, in tutto l'universo, ecco ciò, che forma il pregio e la grandezza dell'esistenza. La religione sta appunto nel culto del divino, e non nell'adorazione di Dio, come un essere superiore all'uomo: essa perciò ha un'origine essenzialmente umana, come è creazione umana il divino, su cui si fonda. Quindi il divino si trova in tutte le più elevate manifestazioni della vita umana: vi ha la religione del dovere, della scienza, dell'arte, dell'eroismo e del sacrificio. Tutti riconoscono che il divino è veramente nobile, grande, sublime, ma si dimanda, qual'è la sua origine? Voi avete preso il vocabolo *Dio*, che è un nome sostantivo, e lo avete convertito in un aggettivo, il *divino*. Ma l'aggettivo non si regge da sè, bensì ha il suo fondamento in un sostantivo. Se esiste il divino, esiste Dio, come tipo vivente di tutte le perfezioni delle creature. Io posso concepire qualche cosa ancora più grande e più sublime del divino, ed è l'essere esistente, in cui ha la sua sede ogni attributo di sublimità e grandezza, e quest'essere non è l'uomo, ma Dio. Nessun altro individuo umano può dire: in me abita il divino: tutti gli individui umani singolarmente presi presentano pregi e difetti, e l'uomo in genere non esiste, è un'astrazione. Tralascio poi di notare l'abuso dei vocaboli, come quando l'autore parla di religione senza Dio, di religione della scienza, dell'arte: la scienza è scienza, e non religione, l'arte è arte, e non religione.

Se l'uomo è il sommo dell'essere, anche il *Divino* è umano, è un ideale, che non può trascendere la mente, che lo ha creato. l'uomo è lui Dio, la religione non ha un fondamento oggettivo nella realtà di Dio, ma è un fenomeno affatto soggettivo, che sorge, si svolge e termina nel sentimento della coscienza umana. Ma se Dio è una concezione astratta della mente umana, se la religione è un fenomeno assolutamente soggettivo, per una più forte ragione la natura va riguardata anch'essa siccome una fattura umana, un fenomeno soggettivo, una concezione o rappresentazione mentale. Così Dio e la natura non sussisterebbero in sè, ma avrebbero una esistenza meramente fenomenica nell'uomo, ed il soggettivismo universale sarebbe l'ultima parola della scienza. Ora questa dottrina trovasi di fronte ad una verità psicologica irrepugnabile, che la smentisce. In fatti la co-

scienza indubbiamente ci testimonia, che di tutte le modificazioni interne il nostro io è sempre il soggetto, ma non di tutte è la causa efficiente e l'originario principio; che se talvolta è attivo e modifica se stesso per virtù sua propria, tal altra è passivo e riceve modificazioni, che gli provengono da un principio esteriore da lui distinto. Io concepisco un disegno, formolo un proposito, esulto di entusiasmo davanti ad un vagheggiato ideale; questi fenomeni sono miei, io ne sono il soggetto e la causa ad un tempo. Veggo un placido tramonto di sole e me ne compiaccio, fiuto una rosa e ne provo una gradevole impressione: queste modificazioni piacevoli avvengono in me, ma non le devo a me, bensì ad una causa esteriore da me distinta. Insomma tutti i fenomeni interni sono soggettivi rispetto all'io, in cui avvengono, ma sono oggettivi rispetto alla causa esteriore, da cui possono originare. Questa verità psicologica si estende a tutta la nostra vita fenomenica interiore; essa riguarda non solo i nostri rapporti colla natura, ma altresì i nostri rapporti con Dio: come i fenomeni della nostra vita psicofisica sarebbero impossibili senza la realtà oggettiva, così i fenomeni della nostra vita religiosa sarebbero inesplicabili, se tutti fossero meramente soggettivi.

Un'altra verità psicologica dettata dalla coscienza viene a smentire il pronunziato fondamentale dell'umanismo. Raccogliendoci nell'interiorità di noi medesimi, siam fatti consapevoli, che i fenomeni, onde s'intesse la vita del nostro io, non solo si specificano in soggettivi ed oggettivi rispetto alla causa, da cui rampollano, ma si differenziano altresì riguardo alle potenze, da cui procedono. Ora secondo questa dottrina, tutto quanto il soggetto umano è essenzialmente ed esclusivamente facoltà razionale, pensiero puro e niente più: tutto ciò, che non è un portato della ragione, od ha natura diversa, va rigettato: il sovranaturale ed il sovrintelligibile sono un mito; la credenza nella libertà del volere, nella santità del dovere, nella moralità della vita, nell'esistenza futura, in un Dio personalmente infinito, superiore alla natura ed all'umanità, tutte queste sono vane illusioni. Così l'umanismo, che tanto esalta l'uomo fino a collocarlo al posto di Dio, finisce col deprimerlo, col mutilarlo togliendogli quelle credenze morali e religiose, su cui posano i titoli più cospicui della nobiltà ed eccellenza del genere umano,

e suscitando una straziante contraddizione nell'intimo del suo essere. L'ateismo è la prima e l'ultima sua parola.

L'uomo tende a Dio per impeto spontaneo di natura e gravita verso di lui come corpo verso il suo centro di attrazione. Un tal Sintenis racconta di se stesso, che dopo la morte della sua compagna erasi ritirato in campagna vivendo in un assoluto isolamento col suo unico figlio di tenerissima età. Imbevuto delle opinioni di Rousseau e temendo che suo figlio si formasse storte idee sulla Divinità, si adoprò in tutte guise perchè nessuna nozione religiosa giungesse fino a lui, ed egli solo lo veniva ammaestrando. Intanto l'istinto religioso si faceva sentire al cuore di lui, che a dieci anni non aveva mai sentito pronunciare il nome di Dio. Egli cercava questo Dio ignoto, che con tanta cura gli si teneva nascosto, e credette di averlo trovato nel sole, la cui presenza anima tutto il mondo, offrendogli i suoi omaggi in un remoto angolo del giardino. Il padre sorprese il giovane idolatra in un momento, in cui inginocchiato, colle mani sollevate verso il cielo, adorava l'astro, che spuntava sull'orizzonte.

L'ateismo umanistico è una deplorabile illusione. L'uomo si proclama Dio e non lo è. Egli ha negato Dio per collocarsi in luogo di lui e Dio lo ha abbandonato. Egli è solo: cacciato Dio dal santuario della coscienza e dal mondo della natura, vede tutto l'universo precipitare nel disordine e nell'abisso, facendo il vuoto intorno a sè. Per la sua personale natura egli aspira al possesso dell'Essere infinito, ma la sua aspirazione si risolve in uno sforzo disperato, perchè, come individuo è finito in tutte le sue potenze, e nella sua solitudine assoluta più non trova fuori di sè chi lo sorregga per l'alta via. Egli inorridisce davanti alla coscienza del proprio stato come davanti al nulla. Gian Paolo Richter ritrasse in tutto il suo tetro orrore questo tristissimo fenomeno della vita psicologica.

" Una sera d'estate io era coricato sulla cima d'un colle: mi addormentai e mi sono immaginato che mi svegliavo nel cuor della notte in un cimitero. L'orologio suonava le undici ore. Tutte le tombe erano semiaperte, e le porte di ferro della Chiesa, scosse da una mano invisibile, si aprivano e si chiudevano senza rumore. Io vedeva sulle mura fuggir delle ombre non proiettate da verun corpo, altre ombre livide si sollevavano

nell'aria; i fanciulli soli riposavano ancora nei loro avelli. Tutta la Chiesa tremava, e l'aria era scossa da suoni strazianti, che invano cercavano di accordarsi. Io mi sentii spinto dallo stesso terrore e cercai un riposo nel tempio. Mi avanzava fra la folla delle ombre, che si stringevano intorno l'altare spogliato. Nell'alto della volta della chiesa eravi il quadrante dell'eternità: non vi si scorgevano nè cifre, nè aghi; ma una mano nera ne faceva il giro lentamente, ed i morti si sforzavano di leggervi il tempo. Allora discese dall'alto sull'altare una figura raggiante, nobile, elevata, che portava l'impronta di un eterno dolore. Al vederla i morti gridavano: O Cristo, non vi ha egli nessun Dio? Egli rispose: Nessuno! Tutte le ombre presero a tremare con violenza, ed il Cristo continuò così: " Io ho percorsi i mondi, mi elevai al di sopra dei soli, e là parve non esservi nessun Dio. Discesi sino agli ultimi limiti dell'universo; guardai nell'abisso, e gridai: Padre, ove sei tu? Ma non intesi che la pioggia, che cadeva a goccie a goccie nell'abisso e l'eterna tempesta, non governata da nessun ordine, essa sola mi ha risposto. Rialzando poi i miei sguardi verso la volta de' cieli, altro non vidi che l'orbita di un occhio, vuoto, nero, senza fondo. L'eternità riposava sul caos e lo rodeva, divorando lentamente se stessa: raddoppiate i vostri timori amari e strazianti, quante grida acute disperdevano le ombre, perchè tutto era finito!

" Le ombre desolate svanivano verso il vapore biancastro condensato dal freddo; la chiesa fu ben tosto deserta; ma tutto ad un tratto, orribil spettacolo! i fanciulli morti, che alla loro volta si erano svegliati nel cimitero, accorsero e si prostrarono davanti la maestosa figura, che era sull'altare, e dissero: Gesù, non abbiamo noi nessun padre? Ed egli rispose con un torrente di lacrime: voi ed io non abbiamo padre; siamo tutti orfani. A tali parole, il tempio ed i fanciulli si inabissarono, e tutto l'edificio del mondo crollò davanti a me nella sua immensità „.

3. — L'umanismo ed il sopranaturale.

Nel campo della scienza s'incontrano opinioni, che furono discusse, ridiscusse, abbandonate, sicchè non avvi più ragione di ritornarci sopra, tranne che fossero concepite sotto un aspetto

affatto nuovo e proposte sotto forma veramente originale. Ma che? Si ritorna da capo e si ripete la sentenza di prima, ignorando o trascurando i tanti lavori, le tante discussioni, i tanti studi, che si sono fatti intorno l'argomento e le conclusioni pronunciate dalla critica. E così la ragione si trastulla girando e rigirando sempre entro il medesimo circolo. Tale è l'opinione, che la fede religiosa è in contraddizione colla scienza, che il mistero ripugna alla ragione, che il sopranaturale urta contro le leggi della natura, epperò la fede religiosa, il sovrintelligibile, il sovranaturale vanno rigettati in nome della ragione e della scienza. I sostenitori di tale dottrina avvisano, che la fede religiosa va abbandonata alla gente incolta, la quale vive estranea al mondo dei pensatori, ma non avvertono, che di credenti se ne incontrano chi sa quanti anche fra pensatori potenti, fra profondi filosofi, fra genii illustri in ogni ordine dell'umano sapere, i quali non rigettarono la fede religiosa siccome ripugnante alle loro libere induzioni scientifiche.

Fra le varie ragioni, che hanno potuto indurre alcuni filosofi ad avversare la fede religiosa, va certamente annoverata anche questa, il falso concetto e la conoscenza confusa che mostrano di averne. Essi non si sono fatta un'idea esatta dei vocaboli, che adoperano, e confondano la fede illuminata e ragionevole colla cieca credulità, il sovrintelligibile ed il mistero coll'assurdo. Prima adunque di entrare in argomento occorre dichiarare il significato de' vocaboli relativi, quali sono *fede*, *sovranaturale*, *sovrintelligibile*, *miracolo*, *mistero*, *assurdo*.

Fede è la ragionevole credenza ad un'autorità esteriore, e quindi si specifica in umana e divina, secondochè l'autorità è quella di un uomo o di Dio, in storica ed in dottrinale, secondochè ha per oggetto un fatto, od un pronunciato, il quale non è nè logicamente, nè sperimentalmente dimostrabile. Sopranaturale è ogni fenomeno, ogni avvenimento, ogni fatto, che supera le forze ordinarie della natura; sovrintelligibile è ogni verità, che supera l'apprensiva dell'intelligenza umana. Il miracolo è un fatto sopranaturale, il mistero è una verità sovrintelligibile. Ma si avverta bene: noi non troviamo la causa produttiva del miracolo nelle forze della natura, ma come fatto esso cade sotto i nostri sensi, quale sarebbe la risurrezione di un morto: similmente il mistero è una verità incomprensibile

rispetto alla sua intima essenza, ma è comprensibile ed intelligibile riguardo ai termini, di cui è composta. Infine l'assurdo è ciò che contraddice alle leggi della natura, come un corpo inorganico, che eserciti le funzioni della vita vegetativa, una pianta, che mostri sensitività animale e movimento spontaneo; oppure alle leggi del pensiero, come un effetto senza causa, un circolo senza centro, un triangolo con tre angoli retti. Il sopranaturale ed il sovrintelligibile hanno la loro immediata origine in Dio, di guisa che siccome Dio è al di sopra della natura fisica e dell'intelligenza umana, perchè la sua potenza è infinita e la sua mente è immensa, così chiunque ammetta l'esistenza di Dio, è dalla logica forzato ad ammettere il sopranaturale ed il sovraintelligibile. Quindi si capisce che l'umanismo, essendo un pretto ateismo, nega e l'uno e l'altro; ma fra breve ritorneremo su questo punto.

Chiarito così il significato dei vocaboli e dissipato ogni equivoco, la questione è già in gran parte risolta. Anzi ogni cosa, tutto ciò che suona un assurdo, va rigettato dalla ragione, perchè contenendo una contraddizione, si risolve nel nulla ed il nulla è impensabile. Un effetto senza causa non è un effetto. Ora entriamo in materia. Ragione e fede sono due termini indisgiungibili: la ragione crede a verità prime, che sono logicamente e sperimentalmente indimostrabili, ed alla sua volta la fede debb'essere ragionevole. La ragione crede alla veracità delle sue facoltà conoscitive senza poterlo dimostrare, e crede all'esistenza dell'oggetto conoscibile, che le sta davanti, ma non lo crea, bensì lo ammette come dato. Qui sorge l'avversario del sopranaturale e dice: La nostra intelligenza non può ammettere come oggetto conoscibile, se non ciò, che è dato dalle sue facoltà conoscitive, i sensi e la ragion pura, e che sia assolutamente da lei comprensibile ed intelligibile: ma il sopranaturale non è dato dall'intelligenza ed è assolutamente incomprensibile e sovrintelligibile; dunque va rigettato. Esaminiamo questo suo ragionamento.

Siamo nel campo dell'intendere e del conoscere, epperò sta bene che ogni oggetto conoscibile debb'essere presentato da una intelligenza, ma quest'intelligenza può essere o la mia propria individuale, che percepisce qualche cosa co' sensi esterni od interni e qualche idea colla ragione, oppure un'altra intelligenza

esteriore, autorevole, meritevole di fede, la quale può essere o umana, o divina. A ragion d'esempio un alunno di scuola elementare legge nel suo libro o sente dire dal maestro, che il sole sta fermo e la terra gira intorno al sole. Ecco una verità, che egli non trae dalla sua intelligenza nè per via dei sensi esterni, nè colla pura intuizione; eppure la ammette credendo alla parola autorevole del suo maestro, egli crede non già ciecamente, ma perchè ha delle ragioni, perchè cioè sa che il suo maestro non s'inganna, nè vuol ingannarlo, possiede cioè dottrina e probità. Per lo stesso motivo l'uomo crede ad una verità rivelata dall'intelligenza divina, quando abbia delle ragioni che quella verità fu realmente rivelata.

Veniamo all'altro punto, che cioè l'intelligenza non può ammettere se non ciò, che chiaramente si comprende, e deve rigettare ciò, che è assolutamente incomprensibile. Io ritorno all'esempio addotto. L'alunno intende il significato dei vocaboli, che entrano nella proposizione, *la terra si muove intorno al sole che sta immobile*, ma non ne capisce il perchè. Lo stesso è a dirsi di una verità divinamente rivelata: s'intende il significato dei vocaboli, che la esprimono, ma non si comprende l'intimo perchè. Il mistero non è tanto chiaro da esser compreso quanto e quale è, ma non è nemmeno tanto tenebroso ed oscuro, che non lo si apprenda per nessun verso: il nostro intelletto vi ha la sua parte. Il pretendere che nulla vi debba essere di ignoto per la ragione umana e che abbiasi da rigettare tutto che non sia chiaramente compreso, conduce come ad inevitabile conseguenza allo scetticismo universale. Qualche cosa di ignoto s'incontra da per tutto, in fondo ad ogni problema, ad ogni teorema anche il più solidamente dimostrato. La scienza matematica, che pure è tanto esatta e certa, ha dei teoremi fondati sopra una dimostrazione indiretta, in cui si ammette una verità non già perchè se ne comprenda la ragione intrinseca, bensì per non cadere negli assurdi, che deriverebbero dalla proposizione contraria. Non è l'ignoto, che va rigettato, bensì l'assurdo; l'ignoto sovrasta alla ragione, l'assurdo la uccide. L'ignoto è lontano, lontano dalla nostra intelligenza, ma è pur qualche cosa, che s'intravede. Io mi trovo sopra un porto di mare; spingo lo sguardo sino all'estremo limite dell'orizzonte e veggo un punto nero sull'immenso oceano: non so che oggetto sia,

ignoro la sua forma, il suo volume, il moto, i suoi caratteri; debbo forse negare la sua esistenza? La conoscenza esordisce da una vaga ed indistinta visione di qualche cosa di ignoto, che si presenta al nostro pensiero e che non si sa ancora ben dire in che consista, ma pure si crede alla sua esistenza. Quindi la credenza precede sempre la conoscenza e ne è il postulato necessario (1). Credere non è ancora conoscere, ma ne è una premessa indeclinabile. L'ignoto può essere elaborato dalla virtù riflessiva del pensiero, trasformarsi in sapere, ed allora al credere sottentra il conoscere; ma può anche restare inaccessibile ad ogni lavorìo della riflessione e rimanere veramente ignoto; ed allora la mente rimane in uno stato perpetuo di credenza. Così lo Spencer crede all'esistenza dell'Ignoto, siccome principio supremo dell'universo, ma lo proclama eternamente ed assolutamente inconoscibile. I fenomenisti in generale ammettono il noumeno e credono alla sua esistenza, ma lo dichiarano inconoscibile, professando l'agnosticismo. E qui non va dimenticata l'esistenza di un singolarissimo ordine di fenomeni, davanti ai quali la ragione rimane muta e si confessa impotente a spiegarli, mal sapendo conciliarli colle leggi già conosciute della natura umana. Tali sono i fenomeni meravigliosi e straordinarii dell'ipnotismo, del sonnambolismo, del magnetismo, la sospensione della facoltà motrice, l'insensibilità delle parti esterne del corpo, la chiaroveggenza, l'allucinazione, la trasmissione del pensiero o penetrazione mentale, la visione medica, la telepatia, la previsione ed altrettali.

Dalle cose discorse discende questa conclusione. La ragione in fondo ad ogni problema trova alcunchè di ignoto, sicchè se si arbitrasse di negare tutto ciò, di cui non può dare una chiara e soddisfacente spiegazione, sarebbe costretta a negare i fatti più comuni ed incontrastabili, rovesciando nel nullismo universale.

Quindi si scorge quanto si allontanino dalla ragione quei pensatori, i quali negano le credenze morali e religiose dell'umanità per ciò solo che non giungono a dissipare le oscurità e le dubbiezze, in cui giacciono avvolte, riducendole ad altret-

(1) Anche la vita operativa e sociale posa in parte sulla credenza, in parte sulla prudenza riflessiva.

tanti miti e concezioni fantastiche. Senza credenza non si vive. Non si ha diritto di distruggere, quando non si ha la forza di riedificare. Essi hanno adoperata la critica per distruggere le credenze morali e religiose dell'umanità. Ebbene un'altra critica sorgerà a distruggere la nuova teoria da loro proclamata. Di tal modo dove si andrà a finire?

4. — L'umanismo e le apostasie del pensiero.

La storia del pensiero ha i suoi apostati, come la storia dell'ascetismo ha i suoi luciferi. Le apostasie come le conversioni sono uno di que' fenomeni della vita psicologica, che per la loro gravità ed importanza somma meritano di essere profondamente disaminati, sebbene s'incontri difficoltà e fatica a rintracciarne le secrete origini, e le ragioni spiegative, che si nascondono nei misteri dello spirito umano.

Io m'immagino un giovane filosofo nel fior dell'età, potente pensatore e sincero credente ad un tempo. Egli ha consacrato il suo vigoroso ingegno alla scienza speculativa, il suo animo al culto del Buono, del Santo, del Divino, e la sua vita mentale si va svolgendo in armonico accordo colla vita morale e religiosa. Egli intuisce con occhio sereno e sincero i problemi filosofici e ne tenta lo scioglimento con tutto quell'ardore, che gli inspira l'amore della verità; ma la sua ragione non s'innoltra solitaria ed assoluta nell'arduo campo delle indagini, bensì ha per compagna la fede, essendochè il sovrintelligibile ed il soprannaturale non distrugge l' intelligibile e la natura, ma sono due ordini distinti, che hanno i loro punti di contatto, e se la dogmatica ha i suoi misteri impenetrabili, che la oscurano, anche la scienza ha i suoi; se la fede ha il suo *non plus ultra*, anche la ragione ha i suoi limiti.

Ma che? Giunge un momento, un fatale, un misterioso momento, in cui il pensatore varca i limiti della ragione, vuole tutto conoscere, tutto spiegare colla virtù del proprio pensiero, rigetta il sovrintelligibile ed il soprannaturale, perchè trascendono l'apprensiva della sua ragione. Da quel momento egli ha spezzata l'armonia tra la fede e la scienza, ha sacrificato l'una all'altra: il credente è scomparso, rimane il pensatore solitario, l'apostata dei proprii principii. Ma a tale apostasia lo spirito

non precipita lì per lì in un attimo e quasi per incanto. Da prima la ragione esordisce spargendo il dubbio sulla fede col disconoscere i confini che la circoscrivono: a mano a mano che va affermando la sua assoluta autonomia nel campo della speculazione la credenza si illanguidisce, ma non è spenta ancora. Al dubbio succede l'esame; la ragione chiama al proprio tribunale, si fa giudice supremo delle credenze morali e religiose e pronuncia una sentenza di condanna contro il sovrintelligibile ed il soprannaturale. Così la critica ha disfatto il dogma: la ragione ha usurpato tutto il dominio dello spirito: il nostro pensatore ha inalberata la bandiera del razionalismo, tenta di creare una dottrina nuova ed originale, e se il suo ingegno non vale a tanto, si fa discepolo di qualche grande maestro egli, che aveva proclamata l'indipendenza assoluta della propria ragione e rinnegati i proprii principii, sceglie fra gli infiniti sistemi, che gli porge sott'occhio la storia della filosofia miscredente, sistemi diversi e contrarii di indole e di tendenze, ma concordi nel negare la personalità di Dio e proclamare l'uomo la misura dell'universo.

Qui sorge un momento di esitazione pel nostro filosofo: raccolto dentro di sè, egli vede che colla critica aveva distrutti i dogmi da lui professati e sulle loro ruine posato il suo sistema, ed ora la storia della filosofia gli apprende che tutti i sistemi, anche il suo, cadono l'un dopo l'altro distrutti sotto i colpi della critica. In questo solenne momento di esitanza il suo spirito sta sospeso tra l'apostasia e la conversione (1), tra la persistenza nell'ateismo ed il ritorno alla fede. Egli comincia a dubitare dei pronunciati del suo razionalismo, come aveva cominciato a dubitare del sovrintelligibile e del soprannaturale. Ma che? Piuttosto naufragare nello scetticismo universale, che ritornare al sovrintelligibile; piuttosto l'assurdo, che il soprannaturale; piuttosto il nulla, che un Dio personale; piuttosto la disperazione, che le speranze della vita futura (2).

---

(1) Questo duplice fenomeno psicologico noi Italiani lo vedemmo avverato in Ausonio Franchi. Sacerdote di profonda pietà e di fervida fede, si fece apostolo del più esaltato razionalismo, poi ridiventò il Cristoforo Bonavino di prima.

(2) L'apostasia, di cui discorriamo, può anche trarre la sua origine non dalla critica della ragione, ma dai traviamenti del cuore. La mente accie-

L'apostata dei proprii principii, che io ho immaginato e descritto, non è una creazione fittizia della mia mente. La storia del pensiero filosofico non pochi ce ne ricorda, e fra questi va segnalato un illustre rappresentante della scuola psicologica francese iniziata da Vittorio Cousin nella prima metà del secolo scorso, Teodoro Jouffroy. Egli pubblicava uno scritto che levò molto rumore, col titolo: *Comment les dogmes finissent*. Quello scritto segnava l'abbandono della sua fede religiosa e l'esordio del suo razionalismo; ma la sua apostasia non fu compiuta a cuor leggiero, come un fenomeno comunissimo ed inavvertito della vita psicologica. Egli stesso ritrasse la lotta fierissima che agitò il suo spirito, quandò cessò di essere credente per diventar filosofo senza fede. Quelle sue pagine postume destano nel lettore un senso di profonda commozione, ed io qui le riproduco siccome una preziosa ed interessante lezione di psicologia intima.

" Nato da pii parenti ed in un paese, dove la fede cattolica era ancor piena di vita nell'aprirsi di questo secolo, io era stato per tempo avvezzato a considerar l'avvenire dell'uomo e la cura della sua anima come il grande affare della mia vita, e tutto il processo della mia educazione aveva contribuito a formare in me queste serie disposizioni. Per lungo tempo le credenze del Cristianesimo avevano pienamente risposto a tutti i bisogni ed a tutte le inquietudini gettate nell'anima in tali disposizioni. Alle questioni, che erano per me le sole, che meritassero di occupar l'uomo, la religione dei padri miei dava risposte ed a queste risposte io vi credeva, e mercè queste credenze la vita presente mi era chiara, e per là io vedeva svolgersi senza nube l'avvenire che deve tenerle dietro. Tranquillo sul cammino che io doveva battere in questo mondo, tranquillo sulla meta, dove mi doveva condurre nell'altro mondo abbracciando la vita nelle sue due fasi, e la morte che le unisce, comprendendo me stesso, conoscendo i disegni di Dio sopra di me, ed amandolo per la bontà dei suoi disegni, io era fortu-

cata dal corrotto costume non vede più nulla nel santuario dello spirito. La purezza della fede non si concilia col fango delle passioni, e la fede si abbandona per non sentire il suo persistente grido di protesta contro l'immoralità della nostra vita.

nato di quella felicità, che dà una fede viva e certa in una dottrina, che risolve tutte le grandi questioni, che possono interessar l'uomo.

" Ma nel tempo, in cui ero nato, era impossibile che questa felicità dovesse durare, ed il giorno era venuto, in cui dal seno di questo placido edificio della religione, che mi aveva accolto nella mia nascita, ed all'ombra del quale era trascorsa la mia gioventù, io avevo sentito il vento del dubbio, che da tutte parti ne percuoteva le mura e le scuoteva fin dalle fondamenta. Messa una volta in forse agli occhi della mia ragione la divinità del Cristianesimo, essa aveva sentito tremare nelle loro fondamenta tutte le sue convinzioni..... Su questo declivio appunto la mia intelligenza aveva sdrucciolato, ed a poco a poco si allontanò dalla fede. Allora io seppi, che nel fondo di me medesimo nulla più vi era di quel di prima; che quanto io aveva creduto su me stesso, su Dio e sul mio destino in questa vita e nell'altra non lo credeva più. Dacchè io rigettavo l'autorità, che me lo aveva fatto credere, io non poteva più ammetterlo, io lo rigettavo. Terribile fu questo momento, parvemi sentire spegnersi la mia vita primiera, così ridente e piena, e dietro di me aprirsene un'altra oscura e deserta, dove d'ora in avanti andavo a vivermene solo, solo col mio fatale pensiero, che allora mi cacciava in bando, e che io ero tentato di maledire. I giorni che tennero dietro a questa scoperta, furono i più tristi della mia vita. Dire da quali movimenti essi furono agitati, sarebbe certo troppo lungo... ma la mia anima non poteva avvezzarsi ad uno stato sì poco conforme all'umana debolezza; per mezzo di violenti ritorni essa cercava di riguadagnare le rive perdute. Ma i convincimenti della ragione rovesciati non possono risorgere che per mezzo di essa... Non potendo reggere all'incertezza sull'enigma dell'umano destino, non avendo più il lume della fede per risolverlo, più non mi restava che il lume della ragione per provvedervi. Io risolsi adunque di consacrare tutto il tempo necessario e la mia vita, se bisognasse, a questa ricerca; è per questo cammino che mi trovai condotto alla filosofia, la quale mi pareva non essere altro che questa stessa ricerca.

" La mia intelligenza eccitata da' suoi bisogni ed aggrandita dagli insegnamenti del Cristianesimo, aveva apprestato alla

filosofia il grande oggetto, i vasti quadri, la sublime portata di una religione; aveva ragguagliato lo scopo dell'una con quello dell'altra, e non aveva scorto tra esse altra differenza che quella dei procedimenti e del metodo, la religione immaginando e prescrivendo, la filosofia trovando e dimostrando. Tali erano state le mie speranze, allorchè io entrai nella Scuola Normale, e che vi trovò essa mai? Tutta questa lotta, che aveva ridestato l'eco addormentata della Facoltà, e che agitava le teste de' miei compagni, aveva per oggetto, per unico oggetto... la questione dell'*origine delle idee*. Questo era il tutto, e nell'impotenza, in cui ero allora, di cogliere i secreti rapporti, che legano i problemi in apparenza più astratti e più rancidi della filosofia colle questioni più vive e più pratiche, ciò era un niente a' miei occhi... Io non poteva riavermi dal mio stordimento, che si occupassero dell'origine delle idee con un ardore sì grande, che si disse là esserci tutta la filosofia, e che si lasciasse da parte l'uomo, Dio, il mondo, ed i rapporti che li uniscono, e l'enigma del passato ed i misteri dell'avvenire, e tanti giganteschi problemi, su cui non si dissimulava di essere scettici... Tutta la filosofia era un bugigattolo, dove si mancava d'aria, e dove l'anima mia di fresco esigliata dal Cristianesimo, soffocava, e intanto l'autorità dei maestri ed il fervor dei discepoli mi imponeva, ed io non ardivo mostrare la mia sorpresa ed il mio traviamento.

“ Così trascorsero per me i due primi anni del mio professorato, e ponendo mente ai lavori che li riempirono, si crederà facilmente che non lasciassero luogo all'esame di quelle generali questioni, di cui mi dolsi da prima di non trovare la soluzione nell'insegnamento di Cousin... Io era chiamato alla mia volta a professare una scienza, di cui ignoravo perfino l'oggetto... Debbo pure aggiungere, per dire il vero, che il differire ad un'altra volta tali questioni erami divenuto meno penoso... Tuttavia la preoccupazione non era ancora spenta nel mio cuore: essa vi sussisteva tutta quanta, e di quando in quando, allorchè avevo alcune ore libere per pensare, la notte ad una finestra, il giorno sotto il rezzo delle Tuileries, interni slanci, subita tenerezza mi richiamavano alle mie credenze passate e spente,

all'oscurità, al vuoto della mia anima, ed al disegno sempre differito di colmarlo „ (1).

Questa sincera confessione di Teodoro Jouffroy ci inspira un senso di pietà profonda e di rispetto ad un tempo. Il credente ed il pensatore sostennero una lotta mortale, ma la sostennero consciamente, senza infingimento, con serietà, con decoro. È il dramma di un'anima, che sente tutta la sublimità della fede abbandonata, tutta la gravità del problema della vita, tutta l'impotenza della ragione a risolverlo. È una solenne protesta contro la leggerezza di quei razionalisti di parata, che condannano la fede religiosa senza conoscerla, prostituiscono la propria coscienza, rinnegano i loro principii per libertinaggio di pensiero, per tornaconto personale, per fare mostra di sè, per corteggiare la moda con la così detta libertà della ragione.

5. — L'umanismo e la vita.

Ogni dottrina speculativa si attua e si risolve nella vita pratica, imprimendole un determinato indirizzo corrispondente all'indole de' suoi principii. Anche l'umanismo, come sistema filosofico, produce le sue conseguenze nell'ordine della vita pratica e morale, e segnatamente nell'arte educativa. Gli è ben vero, che alcuni prevedendo quanto siano disastrose tali conseguenze alla moralità del costume, cercano di evitarle avvertendo che si tratta di un sistema, il quale riguarda la pura speculazione ed il culto del pensiero, affatto estraneo al vivere ed all'operare. Ma l'avvertenza non approda, perchè il soggetto umano non può scindersi in due persone separate ed estranee, quasichè come pensatore si possa professare una teoria, e come individuo vivere in modo affatto contrario ai principii professati. L'io umano è un solo in ciascuno di noi: quell'io, che pensa, è quel medesimo, che vive ed opera esteriormente.

Che ne è adunque della moralità della vita secondo i pronunciati dell'umanismo? Non esiste un dio personale superiore all'uomo, reggitore e legislatore dell'universo: non esiste una

(1) *Mutilation d'un écrit de Th. Jouffroy:* articolo pubbl. da P. Leroux, nella “ Revue indépendante „, 1° novembre, 1842.

vita oltremondana, ragion suprema della vita presente: non esiste la libertà del volere: ecco i tre pronunciati fondamentali, che costituiscono la parte negativa dell'umanismo. Ora questi pronunciati distruggono dalle fondamenta tutta quanta la moralità della vita.

Infatti, come vi sono leggi logiche, che dirigono il processo del pensiero nella via della verità e del sapere, così esiste una legge morale, che governa il libero volere nelle sue ascensioni verso il Buono ed il Santo. Ciò posto, la legge morale è fornita di due essenziali caratteri: essa è un comando, che prescrive il dovere ad una libera volontà, ed una norma, che fa radical differenza tra l'onesto ed il disonesto, tra il giusto e l'ingiusto. Ora, quanto al comando, la legge debb'essere autorevole, ossia fornita di forza obbligatoria, come la volontà debb'essere libera, ossia arbitra del proprio operare. Ma chi mai può autorevolmente comandare alla mia volontà individuale? Nessun'altra volontà umana di nessun mio simile, perchè la mia volontà è pari alla sua, come pure non ho autorità di comandare a me stesso, perchè avrei ragione di distruggere il mio comando. Dunque l'imperativo morale dimora in un essere sovrumano, e ad un tempo realmente personale, perchè il soggetto umano essendo fornito di una personalità finita, solamente da una personalità infinita può ricevere un'autorevole comando. Similmente se la volontà non fosse libera ed arbitra degli atti suoi, ma determinata ad operare da leggi ineluttabili, come le leggi fisiche e fisiologiche, l'atto non sarebbe più suo, nè imputabile ad essa, non potrebbe più appellarsi onesto o disonesto, giusto od ingiusto, perchè per ineluttabile necessità non potrebb'essere altro da quello che è. Ciò posto, è un pronunciato fondamentale dell'umanismo, che non esiste un essere personale divino superiore all'uomo e legislatore di lui, e che la libertà del volere è un'illusione; dunque questa dottrina distrugge la legge del dovere e con essa la moralità della vita. La legge morale derivando la sua virtù imperativa dall'ordinatore divino, è per ciò stesso la norma dichiarativa del giusto e dell'onesto, che si fondano appunto nell'ordine universale delle cose. Ora se l'uomo è il sommo dell'essere, e quindi la misura delle cose, il giusto e l'onesto non avranno più un fondamento oggettivo nella natura intima ed immutabile delle cose, ma diventeranno

un'espressione delle opinioni degli uomini, come l'ordine universale, su cui essi si fondano, sarà niente più che una concezione soggettiva della mente umana.

Queste conseguenze, che logicamente scaturiscono dall'umanismo nelle sue attinenze colla vita morale, rivelano da sè quali altre ne derivino rispetto alla vita religiosa, giuridica, civile e sociale ed a tutte le manifestazioni della vita operativa. Io non le chiamerò qui ad ordinata rassegna; ma piuttosto reputo conveniente toccare un punto, che riguarda lo sviluppo ed il processo di tutta la vita e fisica e mentale, voglio dire l'arte educativa. Il pedagogista dell'umanismo cancellando dalla storia con imperdonabile incoscienza venti secoli di civiltà e coltura cristiana, bandisce dalla scuola quelle religiose credenze, nelle quali furono educati e cresciuti tanti illustri pensatori, artisti, poeti, a cui l'umanità deve le più pure ed immortali sue glorie. Egli ha compiuta la sua opera di distruzione; ma che cosa ha sostituito di serio, di grande, di durevole a quella fede divina, che gli animi e gli intelletti giovanili hanno attinto dalla famiglia e sorregge le anime semplici colla speranza di una seconda vita? Il Comte vi sostituì una ridicola parodia del Cristianesimo colle sue preghiere, i suoi sacramenti, la sua triade, le sue feste, i suoi sacerdoti, il suo sommo pontefice, che poi era lui stesso. Adorare l'umanità, inchinandosi all'idolo delle proprie mani, ecco l'educazion religiosa dell'umanismo.

Intimamente connessa colla religiosa è l'educazione morale. Conformare la nostra libera volontà alla legge del dovere, ecco la formola espressiva della moralità. Il dovere è della moralità l'elemento obbiettivo, perchè viene da un principio superiore all'uomo, non potendo questi essere ad un tempo soggetto obbligato ed obbligante; la volontà liberamente operante ne è l'elemento soggettivo. Ora l'umanismo rigetta il libero volere e nulla ammette di superiore all'uomo; epperò che cosa ne sia dell'educazione morale, ognuno lo vede. — No (dice l'umanista), il dovere non ci viene dal cielo, ma ha la sua propria sede dentro di noi. La ragione ce lo rivela; la scienza ci apprende l'alta idealità della vita: educare val quanto ascendere verso quest'ideale contemplando le immense e sublimi regioni del mondo umano. — La descrizione è magnifica, il quadro è seducente, ma la realtà è ben altra cosa. Il giovane umanista si dimanda: sono io arbitro

delle mie sorti, libero dominatore del mio operare? No, come Prometeo legato alla rupe, io non posso rompere quella catena di forze ineluttabili, che stringe come in un cerchio di ferro quanto avviene in me e fuori di me. Io interrogo la mia ragione e dimando: Quest'universo, con cui sono intimamente legate le sorti della mia esistenza, dond'ebbe origine, da chi e come fu ordinato così com'è, a quale scopo finale è rivolto? Tutto questo lo ignoro. Come si spiega l'unione personale ed operosa delle due discrepanti sostanze, anima e corpo, che mi compongono, e quindi la lotta tra le abbiette passioni e le ascensioni dello spirito? Non lo so. Se l'uomo aduna in sè quanto vi ha di grande e di sublime nell'immensità dell'essere, perchè mai la mia vita è deturpata da ignobili colpe, soprafatta dalla tristezza e dal dolore, pervertita dall'ignoranza e dall'errore? Anche questo non mi è dato di saperlo. Se, dato l'ultimo respiro, io ricadrò nel nulla, da cui sono uscito, perchè mai affaticarmi tanto per raggiungere un ideale di perfezione, che si risolverà poi in un'amara delusione? Mistero e contraddizione! Così, rinnegato Dio, la libera volontà, la vita futura, l'educazione morale dell'umanismo si disperde nel caos.

Rimane l'educazione intellettuale, e qui mi basti osservare, che la libertà assoluta della ragione propugnata dall'umanismo non consente che il fanciullo presti fede all'autorità del maestro, rendendo così impossibile l'insegnamento.

Relazione intorno alla Memoria presentata dal prof. CLEMENTE MERLO, intitolata: *Degli esiti di lat. -gn- nei dialetti dell'Italia Centro-meridionale* con un'Appendice *Sul trattamento degli sdruccioli nel dialetto di Molfetta.*

Nella *Memoria*, che noi fummo chiamati ad esaminare, il dott. Clemente Merlo, professore nella R. Università di Pisa, si propone di dimostrare che gli esiti italiani centro-meridionali (abruzzesi, pugliesi, napoletani e calabresi) di latino *-gn-* sono due soli, cioè *-jn-* e *-u̯n-*, e che questi non si possono altrimenti spiegare che mediante un'antichissima epentesi di *i* e di *u*, p. es.:

agĝnu { **áĝ^{i}nu *áġinu *á(j)eno aino ajno*
agĝnu { **áĝ^{u}nu *ávunu *á(v)ono auno au̯no*

Segue un'Appendice, nella quale il Merlo, dopo aver compendiato le condizioni del vocalismo del dialetto di Molfetta, si ferma a studiarne alcune peculiarità relative alle voci sdrucciole.

Questo nuovo studio del Merlo è condotto con quella severità di metodo, con quella ricchezza di materiale, con quel fine senso linguistico e con quell'acutezza di osservazioni per cui il giovane glottologo s'è conquistato un posto distinto fra i cultori della dialettologia italiana; e perciò noi, pur non consentendo in ogni sua affermazione e deduzione, proponiamo che sia accolto fra le *Memorie* della nostra Accademia.

RODOLFO RENIER,
ETTORE STAMPINI, *relatore.*

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

INDICE

DEL VOLUME XLIII

Torino — Vincenzo Bona, Tipografo di S. M. e Reali Principi

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XLIII. DISP. 1ª, **1907-1908**.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1908

DISTRIBUZIONE DELLE SEDUTE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1907-908

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1907 - 17 Novembre	1907 - 24 Novembre
» - 1 Dicembre	» - 8 Dicembre
» - 15 »	» - 22 »
» - 29 »	1908 - 5 Gennaio
1908 - 12 Gennaio	» - 19 »
» - 26 »	» - 2 Febbraio
» - 9 Febbraio	» - 16 »
» - 23 »	» - 1 Marzo
» - 8 Marzo	» - 15 »
» - 22 »	» - 29 »
» - 5 Aprile	» - 12 Aprile
» - 26 »	» - 3 Maggio
» - 10 Maggio	» - 17 »
» - 24 »	» - 31 »
» - 14 Giugno	» - 21 Giugno

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIII, Disp. 2ª, **1907-1908**.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1908

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIII, Disp. 3ª, **1907-1908**.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1908

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona Torino.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLIII, Disp. 4ª, 1907-1908.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1908

SOMMARIO

Classi Unite.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona Torino